

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI**

**MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON MILLIY
UNIVERSITETI**

**Qo'lyozma huquqida
UDK 514.76**

BOZAROV DILMUROD O'RALOVICH

**DIFFERENSIALLANUVCHI AKSLANTIRISHLAR DARAJASI VA
UNING TADBIQLARI**

5A130101- Matematika (yo'nalishlar bo'yicha)

**Magistr
akademik darajasini olish uchun yozilgan
dissertatsiya**

**Ilmiy rahbar:
f-m.f.n. Boyto'rayev A.M.**

Toshkent 2014

Mundarija

Kirish.....	3
I bob. Yevklid fazosida akslantirishlar.....	6
1–§ Uzluksiz akslantirishlar	6
2–§ Topologik akslantirishlar.....	11
3–§ Uzluksiz va topologik akslantirishlarga doir misollar.....	13
II bob. Ko'pxilliklarda differensiallanuvchi akslantirishlar.....	16
1–§ Differensiallanuvchi ko'pxilliklarning aniqlanishi.....	16
2–§ Chegarali topologik ko'pxilliklar va misollar.....	26
3–§ Differensiallanuvchi akslantirishlar	29
III bob. Differensiallanuvchi akslantirishlar darajasi.....	32
1. § Akslantirishlar darajasi tusunchasi va misollar.....	32
2. § Ko'pxilliklarni sferaga akslantiruvchi akslantirishlarning gomotopik klassifikatsiyasi	39
III bob bo'yicha xulosa.....	43
Xulosa.....	44
Adabiyotlar ro'yxati.....	45

KIRISH

Dissertatsiya mavzusining asoslanishi va uning dolzarbligi.

Mamlakatimizda sog'lom va barkamol avlodni tarbiyalash, yoshlarning o'z ijodiy va intellektual salohiyatini ro'yobga chiqarish, mamlakatimiz yoshlarini XXI asr talablariga to'liq javob beradigan har tomonlama rivojlangan shaxslar etib voyaga yetkazish uchun zarur shart-sharoitlar va imkoniyatlarni yaratish bo'yicha Kadrlar tayyorlash milliy dasturi, "Ta'lim to'g'risida"gi Qonunida belgilanga keng ko'lamli aniq yo'naltirilgan chora-tadbirlarni amalga oshirish maqsadida ushbu dissertatsiya mavzusi tanlandi.

Differensiallanuvchi akslantirishlar darajasining tadbirlari matematikaning barcha sohalarida o'rganilgan bo'lib, ko'plab natijalar olingan. Bu natijalarning aksariyati ko'pxilliklarning orientirlangan holi uchun qaralgan.

Ushbu magistrlik dissertatsiyasida orientirlanmagan ko'pxillikni sferaga akslantiruvchi differensiallanuvchi akslantirishlar darajasi o'rganildi.

Tadqiqotning maqsadi: Ixtiyoriy n-o'lchamli ko'pxillikni n-o'lchamli sferaga akslantirishdagi akslantirishlarni aniqlash, gomotopiya qurish va akslantirish darajasini hisoblashni o'rganish ko'zda tutilgan.

Tadqiqot vazifalari:

- Ko'pxilliklarda differensiallanuvchi, uzluksiz akslantirishlarni aniqlash va bu akslantirishlar orasida gomotopiya qurishni o'rganish;
- O'lchamlari bir-biriga teng bo'lgan ko'pxilliklar orasidagi akslantirishlar darajasini hisoblashni o'rganish.

Tadqiqot ob'ekti: Ushbu magistrlik dissertatsiyasining ob'ekti o'lchamlari bir-biriga teng bo'lgan ko'pxilliklar orasidagi differensiallanuvchi akslantirishlarning darajalarining tadbiri hisoblanadi.

Tadqiqot predmeti: Ixtiyoriy n-o'lchamli ko'pxillikni n-o'lchamli sferaga akslantirishdagi akslantirishlarning darajalarini aniqlash.

Tadqiqotda qo'llanilgan uslublarning qisqacha tavsifi:

Magistrlik dissertatsiyasida qo'llanilgan asosiy uslublar bular differensial geometriya va matematik analiz uslublaridir.

Tadqiqotning ilmiy farazi:

Dissertatsiyaning asosiy farazi ixtiyoriy n -o'lchamli silliq ko'pxillikni n -o'lchamli sferaga akslantiruvchi ikkita silliq akslantirishlar orasida gomotopiya qurish.

Tadqiqot natijalarining ilmiy jihatdan yangilik darajasi:

- magistrlik dissertatsiyasida yangi natija olingan va u quyidagidan iborat: orientirlanmagan ko'pxilliklarni sferaga akslantiruvchi akslantirishlar gomotop bo'lishi uchun ularning darajalarining ayirmasi ikkiga karrali bo'lishi zarur va etarli.

Tadqiqotning ilmiy va amaliy ahamiyati va tadbiqu:

Magistrlik dissertatsiyasida o'rganilgan ma'lumotlar nazariy harakterga ega bo'lib, ular differensial geometriya, algebra va matematik analiz fanlariga tadbiq qilinishi mumkin.

Ish tuzilishi va tarkibi:

Ushbu dissertatsiya kirish, uchta bob, 6 ta paragraf, umumiy xulosalar va adabiyotlar ro'yhatidan iborat.

Bajarilgan ishning asosiy natijalari:

Tadqiqot ishida ma'lum sinfga tegishli ko'pxilliklarni sferaga akslantiruvchi differensiallanuvchi akslantirishlar o'zaro gomotop bo'lishi uchun zarur va etarli shart olingan.

Xulosa va takliflarning qisqacha umumlashtirilgan ifodasi:

Olingan natijalar ko'pxillikni sferaga akslantiruvchi akslantirishlarning gomotopik klassifikatsiyasini aniqlaydi va tadqiqotlarni davom ettirib, olingan natijalarga va avval isbotlangan faktlarga tayanib kelgusida yangi natijalar olinishi ham ko'zda tutiladi.

Differensiallanuvchi akslantirishlar darajasi matematikaning fundamental tushunchalaridan biri bo'lib, geometriya va topologiyadagi qism ko'pxilliklarni o'rganishda muhim rol o'ynaydi.

Differensiallanuvchi akslantirishlar darajasining tadbiqlari matematikaning barcha sohalarida o'rganilgan bo'lib, ko'plab natijalar olingan. Bu natijalarning aksariyati orientirlangan ko'pxilliklar uchun olingan.

Ushbu magistrlik dissertatsiyasi differensiallanuvchi akslantirishlar darajasi va uning tadbiqlarini o'rganishga bag'ishlangan. Magistrlik dissertatsiyasida maqsadi orientirlanmagan ko'pxillikni sferaga akslantiruvchi differensiallanuvchi akslantirishlar darajasini o'rganish va bu holda akslantirishlar orasida gomotopiya qurishdan iborat.

Differensiallanuvchi akslantirishlar darajasi bo'yicha juda ko'plab tadqiqotlar amalga oshirilgan. Jumladan A.B.Dubrovin[3], Mishenko A.S., Fomenko A.T[4], M.Xirsh[5] va boshqalar muallifligidagi bir qator adabiyotlarda va ilmiy maqolalarda olingan natijalarni aytish mumkin.

Mazkur magistrlik dissertatsiyasi uchta bob, birinchi va ikkinchi boblar uchta paragrafdan, uchinchi bob esa ikkita paragrafdan, uchinchi bob bo'yicha xulosa, umumiy xulosa va adabiyotlar ro'yhatidan iborat.

Birinchi bobda Yevklid fazosida akslantirishlar, xossalari va ularga doir misollar o'rganilgan.

Ikkinchi bob ko'xilliklarda differensiallanuvchi akslantirishlarga bag'ishlangan bo'lib, ko'xillikda differensiallanuvchi akslantirishlarning aniqlanishi, chegarali topologik ko'pxilliklar va ularning xossalari o'rganilgan.

Uchinchi bob asosiy qism bo'lib, unda ko'pxilliklarni sferaga akslantiruvchi differensiallanuvchi akslantirishlar klassifikatsiya qilingan va ma'lum sinfga tegishli ko'pxilliklarni sferaga akslantiruvchi differensiallanuvchi akslantirishlar o'zaro gomotop bo'lishi uchun zarur va etarli shart olingan.

I bob

Yevklid fazosida akslantirishlar

1-§ Uzluksiz akslantirishlar

Bizga ixtiyoriy X, Y –to'plamlar berilgan bo'lib, X to'plamning har bir elementiga Y to'plamning bitta elementi mos qo'yilgan bo'lsa, X to'plamni Y to'plamga akslantiruvchi moslik yoki akslantirish berilgan deyiladi va $f : X \rightarrow Y$ ko'rinishda yoziladi.

Agar $f : X \rightarrow Y$ akslantirish berilgan bo'lsa, $x \in X$ uchun $y = f(x)$ element x nuqtaning aksi (yoki obrazi), $y \in Y$ uchun $f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$ to'plam y nuqtaning asli (yoki proobrazi) deyiladi. Berilgan $A \subset X$ qism to'plam uchun uning obrazi $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$, $B \subset Y$ qism to'plam uchun uning proobrazi $f^{-1}(B) = \{x : x \in A, f(x) \in B\}$ ko'rinishda aniqlanadi. Agar $f(X) = Y$ bo'lsa, f akslantirishni “ustiga” akslantirish, $f(X) \neq Y$ bo'lganda esa “ichiga” akslantirish deb ataymiz.

Berilgan “ustiga” akslantirish f uchun $x_1, x_2 \in X$ va $x_1 \neq x_2$ munosabatlardan $f(x_1) \neq f(x_2)$ munosabat kelib chiqsa, f o'zaro bir qiymatli akslantirish deyiladi.

Ta'rif 1.1 Bizga X, Y topologik fazolar, $f : X \rightarrow Y$ akslantirish va $x \in X$ nuqta berilgan bo'lsin. Agar $y = f(x)$ nuqtaning ixtiyoriy V atrofi uchun x nuqtaning U atrofi mavjud bo'lib, $U \subset f^{-1}(V)$ munosabat bajarilsa f akslantirish x nuqtada uzluksiz deyiladi[7].

Agar f akslantirish biror A to'plamga tegishli hamma nuqtalarda uzluksiz bo'lsa, u A to'plamda uzluksiz deyiladi. Agar f akslantirish X fazoning hamma nuqtalarida uzluksiz bo'lsa, u uzluksiz akslantirish deyiladi.

Teorema 1.1 Berilgan f akslantirish uzluksiz bo'lishi uchun ixtiyoriy $G \subset Y$ ochiq to'plamning to'liq proobrazi $f^{-1}(G)$ ochiq bo'lishi zarur va yetarlidir[7].

Isbot. Zarurligi. Faraz qilaylik f uzluksiz akslantirish, $G \subset Y$ ochiq to'plam bo'lsin. $f^{-1}(G)$ ochiq ekanligini ko'rsatishimiz kerak. Agar $x \in f^{-1}(G)$ bo'lsa, $f(x) \in G$ bo'ladi. f akslantirish x nuqtada uzluksiz bo'lganligi uchun x ning shunday U atrofi mavjudki, $U \subset f^{-1}(G)$ bo'ladi. Bundan esa $x \in U \subset f^{-1}(G)$ kelib chiqadi. Demak, $f^{-1}(G)$ ochiq to'plamdir.

Yetarlilik. Endi ixtiyoriy $G \subset Y$ ochiq to'plam uchun $f^{-1}(G)$ ochiq to'plam bo'lsin. Berilgan $x \in X$ nuqta uchun uning obrazi $y = f(x)$ nuqtaning ixtiyoriy V atrofini qarasak, u ochiq bo'lganligi uchun $U = f^{-1}(V)$ ochiq to'plam bo'ladi. Undan tashqari $x \in f^{-1}(V)$ va $U \subset f^{-1}(V)$. Demak f akslantirish x nuqtada uzluksizdir. Bu yerda x ixtiyoriy nuqta bo'lganligi uchun f uzluksiz akslantirish bo'ladi. Teorema isbotlandi.

Umuman olganda, uzluksiz akslantirishda ochiq to'plamning obrazi ochiq bo'lishi shart emas. Misol uchun, $X = R^2(x, y)$ va $Y = R^2(u, v)$ fazolar uchun f akslantirish $f(x, y) = (\sin x, \cos x)$ qoida bilan aniqlansa, $\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ doiraning obrazi R^2 da ochiq to'plam emas. Agar f akslantirish $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ qoida bilan berilsa, $\{(x, y) = (x \leq 0, y = 0)\}$ yopiq to'plam obrazi yopiq emas.

Teorema 1.2. Bizga X, Y, Z –topologik fazolar va ikkita uzluksiz $f : X \rightarrow Y$ va $g : Y \rightarrow Z$ akslantirishlar berilgan bo'lsin. U holda ularning kompozitsiyasi, ya'ni $f \circ g : X \rightarrow Z$ akslantirish ham uzluksizdir[5].

Isbot. Bu teoremani isbotlash uchun yuqoridagi 1-teoremadan foydalanamiz. Faraz qilaylik $G \subset Z$ ochiq to'plam bo'lsin. Biz $h^{-1}(G)$

to'planning ochiq ekanligini ko'rsatishimiz kerak, bu yerda $h = f \circ g$. Proobraz uchun uning aniqlanishiga ko'ra $h^{-1}(G) = f^{-1}(g^{-1}(G))$ tenglik o'rinlidir. Teorema shartiga ko'ra $g: Y \rightarrow Z$ akslantirish uzluksiz bo'lganligi uchun 1-teoremaga ko'ra $g^{-1}(G)$ to'plam ochiq to'plamdir. Bundan tashqari $f: X \rightarrow Y$ akslantirish ham uzluksiz bo'lganligi uchun shu teoremaga ko'ra $h^{-1}(G) = f^{-1}(g^{-1}(G))$ to'plam ham ochiq to'plamdir. Demak $f \circ g: X \rightarrow Z$ akslantirish ham uzluksizdir. Teorema isbotlandi.

Teorema 1.3 Bizga X, Y –topologik fazolar va $f: X \rightarrow Y$ uzluksiz akslantirish berilgan bo'lsin. Agar $A \subset X$ –kompakt to'plam bo'lsa, u holda $f(A)$ to'plam ham kompakt to'plam bo'ladi[7]

Isbot. Ochiq to'plamlardan iborat $\{U_\alpha\}$ oila $f(A)$ to'planning ochiq qobig'i bo'lsin. Teorema shartiga ko'ra f uzluksiz akslantirish bo'lganligi uchun $V_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$ to'plam barcha α lar uchun ochiq to'plam bo'ladi. $\bigcup_\alpha U_\alpha \supset f(A)$ munosabatdan $\bigcup_\alpha V_\alpha \supset A$ munosabat kelib chiqadi. Demak, $\{V_\alpha\}$ oila A uchun ochiq qobiqli bo'ladi. A kompakt to'plam bo'lganligi uchun bu qobiqlidan chekli qoplama ajratish mumkin. Ajratilgan chekli qoplama elementlari $V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}, \dots, V_{\alpha_m}$ to'plamlar bo'lsin. Shunda ularning obrazlari $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \dots, U_{\alpha_m}$ to'plamlar $f(A)$ to'plam uchun $\{U_\alpha\}$ oiladan ajratilgan chekli qobiqlini tashkil etadi. Teorema isbotlandi.

Teorema 1.4 Bizga X, Y –topologik fazolar va $f: X \rightarrow Y$ uzluksiz akslantirish berilgan bo'lsin. Agar $A \subset X$ –bog'lanishli to'plam bo'lsa, u holda $f(A)$ to'plam ham bog'lanishli to'plam bo'ladi[7]

Isbot. Agar $f(A)$ bog'lanishsiz to'plam bo'lsa, bo'sh bo'lmagan ochiq G_1 va G_2 to'plamlar mavjud bo'lib, $f(A) = (f(A) \cap G_1) \cup (f(A) \cap G_2)$, $(f(A) \cap G_1) \cap (f(A) \cap G_2) = \emptyset$ va $f(A) \cap G_1 \neq \emptyset$, $f(A) \cap G_2 \neq \emptyset$

munosabatlar bajariladi. Akslantirish f uzluksiz bo'lganligi uchun $A_1 = f^{-1}(G_1)$ va $A_2 = f^{-1}(G_2)$ to'plamlar X ning ochiq qism to'plamlari bo'ladi.

Bundan tashqari $f(A) \cap G_1 \neq \emptyset$, va $f(A) \cap G_2 \neq \emptyset$ munosabatlardan $A_1 \cap A \neq \emptyset$ va $A_2 \cap A \neq \emptyset$ kelib chiqadi. Bundan tashqari $A = (A_1 \cap A) \cup (A_2 \cap A)$ munosabat ham o'rinlidir. Demak A bog'lanishsiz. Bu ziddiyat teoremani isbotlaydi.

Teorema 1.5 Yopiq kesma $I = [a, b]$ bog'lanishli to'plamdir[5]

Isbot. Faraz qilaylik $[a, b]$ bog'lanishsiz bo'lsin. U holda ochiq va bo'sh bo'lmagan U_1 va U_2 to'plamlar mavjud bo'lib, $I = (I \cap U_1) \cup (I \cap U_2)$, $I \cap U_1 \neq \emptyset$, $I \cap U_2 \neq \emptyset$ va $(I \cap U_1) \cap (I \cap U_2) = \emptyset$ munosabatlar o'rinli bo'ladi.

Endi I ni topologik fazoga aylantiramiz. Buning uchun I ning qism to'plami A uchun R^1 da ochiq G to'plam mavjud bo'lib, $A = I \cap G$ bo'lsa, A ni ochiq to'plam deb e'lon qilamiz. Hosil bo'lgan I ning ochiq qism to'plamlari oilasi I da topologiyani hosil qiladi va topologik fazoga aylanadi. Bu topologiyada I va $\emptyset$ ham ochiq to'plamdir. Agar I bog'lanishsiz bo'lsa I da ochiq va bo'sh bo'lmagan U_1 , U_2 to'plamlar mavjud bo'lib $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ va $I = U_1 \cup U_2$ munosabatlar bajariladi. Endi

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in U_1 \\ 1, & x \in U_2 \end{cases}$$

qoida bilan berilgan akslantirishni qaraylik. Agar $G \subset R^1$ – ochiq to'plam bo'lsa

$$f^{-1}(G) = \begin{cases} I, & 0, 1 \in G \\ \emptyset, & 0 \notin G, 1 \notin G \\ U_1, & 0 \in G, 1 \notin G \\ U_2, & 0 \notin G, 1 \in G \end{cases}$$

tenglik o'rinlidir. $\emptyset, U_1, U_2, I$ to'plamlar ochiq bo'lganligi uchun 1-teoremaga ko'ra f uzluksiz funksiyadir. Koshi teoremasiga ko'ra funksiya 0 va 1 oralig'idagi barcha qiymatlarni qabul qilishi kerak. Bu ziddiyat teoremani isbotlaydi.

Bizga X – topologik fazo va $f:[0,1] \rightarrow X$ – uzluksiz akslantirish bo'lsin. Bu yerda $I=[0,1]$ kesmadagi topologiya yuqoridagi 4-teorema isbotidagi keltirilgan yevklid topologiya yordamida aniqlanadi. Agar $x=f(0)$, $y=f(1)$ bo'lsa, biz x va y nuqtalar f yo'l yordamida tutashtirilgan deb ataymiz.

Ta'rif 1.2 Agar $A \subset X$ – qism to'plamning har qanday ikki nuqtasini shu to'plamda yotuvchi yo'l yordamida tutashtirish mumkin bo'lsa, A to'plam chiziqli bog'lanishli to'plam deyiladi[5].

Teorema 1.6 Faraz qilaylik X –topologik fazoda chiziqli bog'lanishli $\{A_\alpha\}$ to'plamlar oilasi berilgan bo'lsin. Agar ular umumiy nuqtaga ega ,ya'ni $\bigcap_{\alpha} A_\alpha \neq \emptyset$ bo'lsa, ularning yig'indisi $\bigcup_{\alpha} A_\alpha$ to'plam ham chiziqli bog'lanishli bo'ladi.

Isbot. Berilgan to'plamlar yig'indisi bo'lgan $A=\bigcup_{\alpha} A_\alpha$ to'plamga tegishli x, y nuqtalarni yo'l bilan tutashtirish mumkinligini ko'rsatamiz. Buning uchun $a \in \bigcap_{\alpha} A_\alpha$ nuqtani olamiz, va $x \in A_{\alpha_1}$, $y \in A_{\alpha_2}$ bo'lsin deb faraz qilayliq. Shunda $a \in A_{\alpha_1}$, $a \in A_{\alpha_2}$ munosabatlar o'rinli bo'lgani uchun x va y larni a bilan mos ravishda f_1 va f_2 yo'llar yordamida tutashtiramiz. Shunda

$$g(t) = \begin{cases} f_1(2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ f_2(2t-1) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

formula bilan aniqlangan g yo'l uchun $g(0)=x$ va $g(1)=y$ tengliklar o'rinli bo'ladi.

2-§ Topologik akslantirishlar (gomeomorfizmlar)

Uzluksiz akslantirishlar ichida bizning kursimiz uchun muhim akslantirishlardan biri topologik akslantirishdir. Topologik akslantirish gomeomorfizm deb ham ataladi. Bu paragrafda topologik akslantirish tushunchasini kiritib, misollar keltiramiz va uning biz uchun zarur asosiy xossalari keltiramiz.

Bizga X, Y – topologik fazolar va $f: X \rightarrow Y$ – akslantirish berilgan bo'lsin.

Ta'rif 1.3 Agar f akslantirishga teskari f^{-1} akslantirish mavjud va f, f^{-1} akslantirishlar uzluksiz bo'lsa, u holda f topologik akslantirish yoki gomeomorfizm deb ataladi[7].

Topologik akslantirishga eng sodda misol qilib $f(x)=x$ qoida bilan aniqlangan ayniy $f: X \rightarrow X$ akslantirishni olishimiz mumkin.

Topologik akslantirish ta'rifidan bevosita kelib chiqadiki, agar f topologik akslantirish bo'lsa, unga teskari akslantirish f^{-1} ham topologik akslantirish bo'ladi. Endi f uchun teskari akslantirish mavjud bo'lishi uchun zarur va yetarli shartlarga e'tibor beraylik. Teskari akslantirish Y ning har bir nuqtasiga X ning bitta nuqtasini mos qo'yadi. Demak, ixtiyoriy $y \in Y$ uchun birorta $x \in X$ mavjud bo'lib, $f(x)=y$ tenglik o'rinli bo'lishi kerak. Buning uchun esa $f(X)=Y$ bo'lishi, ya'ni f ustlama akslantirish bo'lishi kerak. Bundan tashqari f^{-1} teskari akslantirish $y \in Y$ nuqtaga bitta $x \in X$ nuqtani mos qo'yganligidan $x_1 \neq x_2$ bo'lganda $f(x_1) \neq f(x_2)$ bo'lishi, ya'ni o'zaro bir qiymatli akslantirish bo'lishi zarurdir.

Shunday qilib, f ga teskari akslantirish f^{-1} mavjud bo'lishi uchun f ning ustlama va o'zaro bir qiymatli akslantirish bo'lishi zarur va etarli. Agar X va Y topologik fazolar uchun $f: X \rightarrow Y$ topologik akslantirish mavjud bo'lsa, X va Y topologik fazolar o'zaro gomeomorf yoki topologik ekvivalent

fazolar deb ataladi. Topologik fazolarning topologik akslantirishda saqlanib qoladigan (ya'ni biridan ikkinchisiga o'tadigan) xossalari topologik xossalar deb ataladi. Topologiya fanida topologik fazolarning, geometrik figuralarning topologik xossalari o'rganiladi.

Endi topologik akslantirishning ba'zi bir muhim xossalarini keltiraylik. Topologik akslantirishning ta'rifidan bevosita har qanday topologik akslantirish uchun unga teskari akslantirish ham topologik akslantirish ekanligi kelib chiqadi.

Teorema 1.7 Bizga $f: X \rightarrow Y$ va $g: Y \rightarrow Z$ gomeomorfizmlar berilgan bo'lsa, ular yordamida qurilgan $f \circ g: X \rightarrow Z$ akslantirish ham gomeomorfizmdir[7].

Isbot. Berilgan f va g akslantirishlarning uzluksizligidan 2-teorema ko'ra $f \circ g$ akslantirish ham uzluksizdir. Ular topologik akslantirishlar bo'lganligi uchun ularga teskari akslantirishlar ham uzluksizdir. Shuning uchun $(f \circ g)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ akslantirish uzluksizdir. Teorema isbotlandi.

Teorema 1.8 Faraz qilaylik $f: X \rightarrow Y$ – uzluksiz akslantirish, X – kompakt fazo, Y – Xausdorf fazosi bo'lsin. Agar f akslantirishga teskari f^{-1} akslantirish mavjud bo'lsa, f – gomeomorfizm bo'ladi[7].

Isbot. Teoremani isbotlash uchun teskari f^{-1} akslantirishning uzluksizligini ko'rsatish kerak. Buning uchun ixtiyoriy ochiq $G \subset X$ – to'plamning f^{-1} akslantirishga nisbatan proobrazi Y da ochiq ekanligini ko'rsatishimiz kerak. Agar G – ochiq bo'lsa, $X \setminus G$ yopiq to'plamdir. Biz bilamizki $X \setminus G$ to'plamning f^{-1} akslantirishga nisbatan proobrazi $f(X \setminus G)$ to'plamdan iborat. Kompakt topologik fazoda $X \setminus G$ to'plam yopiq to'plam bo'lganligi uchun u kompakt bo'ladi, bundan uning uzluksiz akslantirishdagi obrazi $f(X \setminus G)$ ham kompakt to'plam bo'ladi. Teorema shartiga ko'ra topologik Y fazo Xausdorf fazosi bo'lganligi uchun bu to'plam yopiq

to'plamdir. Yengil tekshirib ko'rish mumkin bo'lgan $f(G) = Y \setminus f(X \setminus G)$ tenglikdan $f(G)$ to'plamning ochiqligi kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

3-§ Uzlusiz va topologik akslantirishlarga doir misollar

1) $X = (a, b)$, $Y = (c, d)$ bo'lib, X , Y fazolarda topologiya R^1 dagi topologiya yordamida aniqlanadi. Shunda $f: X \rightarrow Y$ akslantirishni

$$f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c \text{ formula yordamida aniqlasak, } f \text{ gomeomorfizm}$$

bo'ladi, chunki f chiziqli funksiya, uzlusiz va unga teskari funksiya ham uzlusizdir.

2) $X = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $Y = [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ bo'lsin. Bizga ma'lumki,

$f(x) = \sin x$ uzlusiz va unga teskari funksiya $x = \arcsin y$ $[-1, 1]$ da aniqlangan va uzlusizdir. Shuning uchun $X \rightarrow Y$ gomeomorfizmdir.

3) $X = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $Y = R^1$ bo'lsa, $f(x) = \operatorname{tg} x$ gomeomorfizm bo'ladi.

4) Ixtiyoriy (a, b) interval R^1 ga gomeomorfdir. Bu erda gomeomorfizm

$$f(x) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi(x-a)}{b-a} - \frac{\pi}{2} \right) \text{ formula yordamida aniqlanadi.}$$

5) Tekislikda $D^2 = \{(x, y): x^2 + y^2 < R^2\}$ ochiq doira tekislikka gomeomorfdir.

$$\text{Bu yerda } f(x, y) = \left\{ \frac{x}{R - \sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{R - \sqrt{x^2 + y^2}} \right\}$$

formula bilan $f: D^2 \rightarrow R^2$ akslantirishni aniqlasak, f gomeomorfizm bo'ladi. Buni tekshiraylik. Bu akslantirishning uzlusizligi

$$u(x, y) = \frac{x}{R - \sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v(x, y) = \frac{y}{R - \sqrt{x^2 + y^2}}$$

funksiyalarning uzluksizligidan kelib chiqadi. Endi unga teskari akslantirish mavjud va uzluksizligini ko'rsataylik. Teskari $f^{-1}: R^2 \rightarrow D^2$ akslantirishni

$$f^{-1}(x, y) = \left\{ \frac{Rx}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{Ry}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} \right\}$$

formula bilan aniqlaymiz. Bu akslantirishning uzluksizligi

$$\mu(x, y) = \frac{Rx}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \phi(x, y) = \frac{Ry}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

funksiyalarning uzluksizligidan kelib chiqadi. Endi $f^{-1}(x, y)$ akslantirish haqiqatan ham f akslantirishga teskari akslantirish ekanligini ko'rsataylik. Buning uchun $f(\mu(x, y), \phi(x, y)) = (x, y)$ tenglikni isbotlaymiz:

$$\begin{aligned} f(\mu(x, y), \phi(x, y)) &= \left\{ \frac{\mu(x, y)}{R - \sqrt{\mu^2(x, y) + \phi^2(x, y)}}, \frac{\phi(x, y)}{R - \sqrt{\mu^2(x, y) + \phi^2(x, y)}} \right\} = \\ &= \left\{ \frac{\frac{Rx}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}}{R - \frac{R\sqrt{x^2 + y^2}}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}}, \frac{\frac{Ry}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}}{R - \frac{R\sqrt{x^2 + y^2}}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}} \right\} = (x, y) \end{aligned}$$

Demak, f akslantirishdir gomeomorfizmdir.

6) Evklid fazosida, ya'ni R^n da ixtiyoriy D^n ochiq shar R^n ga gomeomorfdir. Buni ko'rsatish uchun R^n fazoda koordinata boshini D^n sharning markaziga joylashtirib, dekart koordinatalar sistemasini kiritib $f: D^n \rightarrow R^n$ akslantirishni

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left\{ \frac{x_1}{R - |x|}, \frac{x_2}{R - |x|}, \dots, \frac{x_n}{R - |x|} \right\}$$

formula bilan aniqlaymiz. Bu erda $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$, $R - D^n$ sharning radiusidir.

Teskari akslantirish

$$f^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left\{ \frac{Rx_1}{1+|x|}, \frac{Rx_2}{1+|x|}, \dots, \frac{Rx_n}{1+|x|} \right\}$$

formula yordamida aniqlanadi. Ikkala f va f^{-1} akslantirishlar ham uzluksiz bo'lganligi uchun f gomeomorfizmdir.

1-§ Differensiallanuvchi ko'pxillikning aniqlanishi

Quyidagi akslantirishni qaraylik: $f: G \rightarrow R^m$, $G \subset R^n$ – ochiq to'plam. Tabiiyki bu akslantirish m va n o'zgaruvchili funksiyalar berilishiga teng kuchlidir:

Ta’rif 2.1 Agar $f_1, f_2, \dots, f_m$ uzluksiz va r – tartibgacha uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo’lsa ($r \geq 1$). f akslantirish C^r akslantirish yoki silliq akslantirish deyiladi[4].

Quyidagi matritsa f akslantirishning Yakobi matritsasi deb ataladi:

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$G, G' \subset R^n$ ixtiyoriy ochiq to'plamlar bo'lsin.

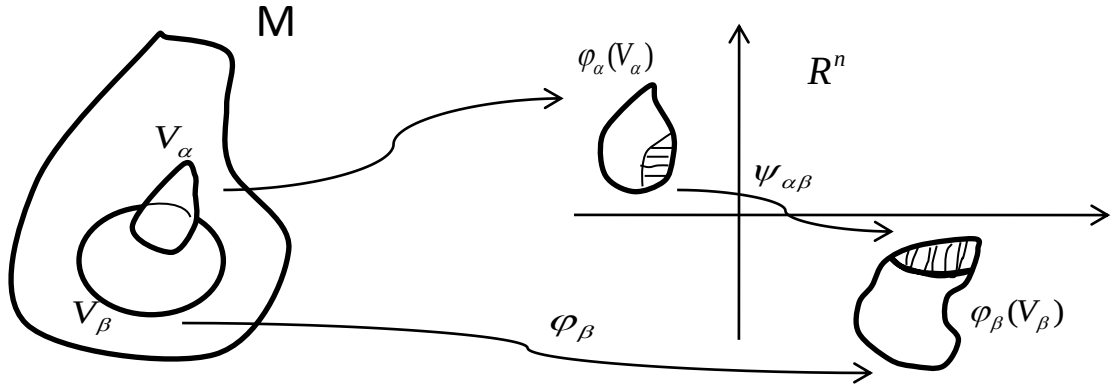
Ta'rif 2.2 Agar $\varphi: G \rightarrow G'$ - gomeomorfizm bo'lib, φ va φ^{-1} akslantirishlar silliq bo'lsa, φ diffeomorfizm deyiladi[4].

Agar φ diffeomorfizm bo'lsa, $\det J(\varphi) \neq 0$. Ikkinchi tomondan, agar $\varphi: G \rightarrow G^m$ ($G \subset R^n, n-m$) silliq akslantirish bo'lib, $\text{rang} J(\varphi) = n$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $x \in G$ uchun uning shunday U_x atrofi mavjudki $\varphi: U_x \rightarrow \varphi(U_x)$ diffeomorfizmdir.

M n -o'lchamli topologik ko'pxillik bo'lsin. Topologik ko'pxillik ta'rifiga ko'ra ixtiyoriy $x \in M$ nuqta shunday U atrofga egaki, bu atrof R^n ning biror ochiq qism to'plamiga gomeomorfdir, ya'ni $\varphi: U \rightarrow G \subset R^n$ gomeomorfizm mavjuddir.

(U, φ) juftlikni lokal karta deb ataymiz. Agar $p \in U$ bo'lsa, $\varphi(p) \in R^n$ va demak $\varphi(p) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. $p_1, p_2, \dots, p_n$ sonlar p nuqtaning (U, φ) lokal kartadagi koordinatalari deyiladi. Tabiiyki p nuqta lokal kartaga ham tegishli bo'lishi mumkin. $U = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ lokal kartadan iborat M ning qoplamasi bo'lsin. Bunday oila M dagi atlas deyiladi. Agar $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ va (U_β, φ_β) atlasga tegishli lokal kartalar bo'lib, $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ bo'lsa, akslantirish $\psi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \rightarrow \varphi_\beta(U_{\alpha\beta})$ aniqlangan va gomeomorfizmdir. Agar $\psi_{\alpha\beta}$ akslantirish C^r akslantirish bo'lsa (bu yerda $r=0$ bo'lsa $\psi_{\alpha\beta}$ gomeomorfizmdir) $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ va (U_β, φ_β) lokal kartalar o'zaro C^r - moslashgan

kartalar deb ataladi. Shuni e'tiborga olish kerakki $\psi_{\alpha\beta}$ akslantirish R^n ning ochiq qism to'plamida aniqlangan.



7-chizma

Agar $p \in U_{\alpha\beta}$ bo'lib, $x_1, x_2, \dots, x_n$ va $y_1, y_2, \dots, y_n$ lar p nuqtaning mos ravishda $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ va (U_β, φ_β) lokal kartlardagi koordinatalari bo'lsa, bu kartalar o'zaro C^r -moslashgan $y_1, y_2, \dots, y_n$ larning $x_1, x_2, \dots, x_n$ larga nisbatan C^r -funksiyalar ekanligini taminlaydi.

U atlasning hamma lokal kartalari o'zaro C^r -moslashgan bo'lsa, u C^r -atlas deyiladi. Tabiiyki, topologik ko'pxillikda C^0 -atlas mavjud. $r \geq 1$ uchun C^r -atlasni silliq atlas deb ataymiz.

Agar ikkita atlasning lokal kartalaridan iborat atlas silliq atlas bo'lsa, ularni o'zaro silliq ekvivalent atlaslar deb ataymiz. Topologik ko'pxillikda o'zaro ekvivalent silliq atlaslar yig'indisi maksimal silliq atlasni hosil qiladi. Bu atlasni silliq yoki differensial struktura deb ataymiz.

Ta'rif 2.3 M topologik ko'pxillik unda aniqlangan silliq struktura bilan birgalikda sillik ko'pxillik (C^r -ko'pxillik) deb ataladi[4].

Topologik ko'pxillikda berilgan ixtiyoriy C^r -atlas maksimal C^r -atlasni aniqlaydi. Shuning uchun silliq strukturani aniqlash uchun birorta C^r -atlasni ko'rsatish yetarlidir.

Misollar:

- 1) Quyidagi funktsiyani qaraylik:

$$f(x) = \begin{cases} \exp(1/x^2 - 1), & \text{agar } |x| < 1 \\ 0, & \text{agar } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Tekshirib kurish mumkinki bu funktsiya uzluksiz va barcha uzluksiz hosilalarga ega.

- 2) $G \subset R^2$ ochiq to'plam bo'lib, har bir $p \in G$ uchun vektor $\overrightarrow{r(p)}$ aniqlangan bo'lsin. R^3 da $\overrightarrow{r(p)}$ vektorning boshini koordinatalar boshiga joylashtirsak, p nuqtani $\overrightarrow{r(p)}$ vektorning oxiriga akslantiruvchi $f: G \rightarrow R^3$ akslantirish hosil bo'ladi. Agar $\overrightarrow{r(p)} = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $p = (u, v)$ bo'lib, $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ funktsiyalar differentsiallanuvchi funktsiyalar bo'lsa, f silliq akslantirish bo'ladi. Differensial geometriya kursidan ma'lumki, agar $\vec{r}_u$ va $\vec{r}_v$ vektorlar o'zaro kollinear bo'lmasa, f' akslantirish regulyar sirtini aniqlaydi.

- 3) $M = R^1$ da bitta lokal kartadan iborat atlasni kiritamiz: $U = \{(V, \varphi)\}, V = R^1$ φ – gorizantal asimtotaga ega bo'lmagan monoton o'suvchi uzluksiz funktsiya. $\varphi(x) = x$ va $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 2x, & x \geq 0 \end{cases}$ bo'lsa.

$$\varphi \cdot f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ \frac{x}{2}, & x \geq 0 \end{cases} \text{ differentsiallanuvchi emas. Demak } (U, \varphi) \text{ va}$$

(U, f) atlaslar R^1 da har xil strukturalarni aniqlaydi.

- 4) $M = R^n$, $U = \{(V_0, \varphi_0)\}, V_0 = R^n$ va $\varphi_0(x) = x$ bo'lsin. Bu atlas R^n da kanonik struktura deb ataluvchi C^∞ - strukturani aniqlaydi. Bu struktura tuzilishini o'rganamiz. Agar $(V_\alpha, \varphi_\alpha)$ lokal karta kanonik strukturaga tegishli karta bo'lsa, $\psi_{0\alpha} = \varphi_\alpha \cdot \varphi_0^{-1} = \varphi_\alpha$, $\psi_{\alpha 0} = \varphi_0 \cdot \varphi_\alpha^{-1} = \varphi_\alpha^{-1}$

9^a – chizma: yarim sfera proeksiya yordamida doiraga gomeomorf akslantiriladi; 9^b – chizma: “Geometrik atlas” kartasi.

- 6) Sferada quyidagi “Geometrik atlas” yordamoda ham silliq struktura kiritish mumkin. Buning uchun sferada ikkita diametral qarama-qarshi joylashgan N va S nuqtalarni va birorta $\overline{NMS}$ meridianni qaraymiz. (9^b -chizma); M meridianda ekvator E ning kesishish nuqtasi. $U_1 = S^2 \setminus \overline{NMS}$, $p \in U$, P_1 meridian $\overline{NPS}$ ning ekvator bilan kesishish nuqtasi bo’lsin. u bilan OM va OP_1 nuqtalar orasidagi burchakni, v bilan OP_1 va OP nuqtalar orasidagi burchakni belgilaymiz. Bu yerda $0 < u < 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$ Ko’rinib turibdiki $\varphi_1: p \rightarrow (u, v)$ akslantirish U_1 ni to’g’ri to’rtburchak $[0, 2\pi[x], -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ga akslantiradi. Agar R^3 da Oxyz dekart

$$\text{koordinatalar sistemasini } 9^b\text{-chizmadagidek kiritsak } \begin{cases} x = \cos u \cos v \\ y = \sin u \cos v \\ z = \sin v \end{cases}$$

bog’lanishlarni olamiz. Sferada atlas hosil qilish uchun yana bitta lokal kartani kiritamiz: $U_2 = S^2 \setminus \overline{K_1K_2}$, K_1, K_2 lar Oy o’qining ekvator bilan kesishish nuqtalari, $\overline{K_1K_2} - M$ nuqta yotmaydigan meridian. φ_2 gomeomorfizmni hosil qilish uchun $\overline{NMS}$ meridian o’rniga $\overline{K_1K_2}$ meridianni olib, ekvator E o’rniga N, M, S nuqtalar yotuvchi katta aylanani olib yuqoridagi mulohazalarni takrorlaymiz. $Ox'y'z'$ koordinatalar sistemasini quyidagicha kiritsak

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = z \\ z' = y \end{cases} (*)$$

va u', v' larni (u_2, φ_2) lokal karta uchun yuqoridagidek aniqlasak

$$\begin{cases} x' = \cos u' \cos v' \\ y' = \sin u' \cos v' \\ z' = \sin v' \end{cases}$$

bog'lanishlarni hosil qilamiz. (*) dan ko'rinib turibdiki u va v lar u' , v' lar orqali differensiallanuvchi funksiyalar yordamida ifodalanadi. Shunday qilib, (U_1, φ_1) va (U_2, φ_2) lokal kartalar sferada C^∞ - atlasni hosil qiladi.

$G - R^n$ dagi ochiq to'plam bo'lsin. $f : G \rightarrow R^k$ akslantirish f funksiyaning k - ta haqiqiy funksiyali komponentasini beradi.

Ta'rif 2.4 Agar f barcha komponentasi bo'yicha G da barcha tartibli xususiy hosilalarga ega bo'lsa, f akslantirish differensiallanuvchi deyiladi[6].

M Xausdorf fazosi, sanoqli bazaga ega, n -o'lchovli topologik ko'pxillik deyiladi, agar $U \subset R^n$ ga lokal gomeomorf bo'lsa, bu yerda M fazoning har bir nuqtasi atrofi bilan R^n ga gomeomorf, bu haqida yuqorida to'xtalib o'tdik.

M n -o'lchovli topologik ko'pxillik bo'lsin.

Ta'rif 2.5 Bu M ko'pxillik karta yoki koordinatalar sistemasi M da gomeomorfizm deyiladi, agar R^k ning ochiq qism to'plamiga tegishli M ning bir qancha qism to'plamlari topilsa; U kartalar to'plami M da differensiallanuvchi atlas deyiladi, agar quyidagi shartlar bajarilsa[6].

- a) M ning har bir nuqtasi qandaydir $x \in U$ kartaning aniqlanish sohasiga tegishli bo'lsa;
- b) Ixtiyoriy ikkita $x, y \in U$ karta uchun $y \circ x^{-1}$ akslantirish differensiallanuvchi bo'lsa.

$U - M$ da differensiallanuvchi atlas bo'lsin. M dagi x karta U bilan moslashgan deyiladi, agar $U \cup \{x\}$ ham M da differensiallanuvchi atlas tashkil qilsa. Agar U bilan moslashgan $U \cup M$ kartalar to'plami bo'lsa, u holda M ham M da differensiallanuvchi atlas bo'ladi.

Ta'rif 2.6 U bilan moslashtirilgan har bir karta U ga tegishli bo'lsa, U differensial struktura deyiladi[6].

Har bir differensiallanuvchi atlas differensial strukturani, ya'ni berilgan atlas bilan moslashtirilgan barcha kartalar to'plamini bir qiymatli aniqlaydi.

Shunday qilib differensiallanuvchi ko'pxillik deb, differensial strukturasini bilan berilgan topologik fazoga aytiladi.

Misollar:

- 1) M n -o'lchovli differensiallanuvchi ko'pxillik bo'lib, G uning ochiq qism to'plami. G da indutsirlangan topologiya berilgan bo'lsin. Aniqlanish sohasi G ga tegishli bo'lgan barcha kartalardan iborat atlas G da differensial struktura aniqlaydi.
- 2) Agar $M = R^n$ bo'lsa, u holda (R^n, id_{R^n}) dan iborat atlas R^n da differensial struktura aniqlaydi. Bu yerda $id_{R^n} - R^n$ $id_{R^n} - R^n$ dagi ayniy akslantirish.
- 3) R^{n+1} da S_ρ^n n -o'lchovli, $\rho > 0$ radiusli sferani qaraylik.

$$S_\rho^n = \{p : p \in R^{n+1}, \|p\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} p_i^2} = \rho\}$$

unda R^{n+1} dan topologiya indutsirlaymiz.

Endi ikkita karta aniqlaymiz (U, x) va (V, y)

$U = S_\rho^n$, $\{p_N\}$, $p_N = (0, 0, \dots, +\rho)$ shimoliy qutb,

$V = S_\rho^n$, $\{p_S\}$, $p_S = (0, 0, \dots, -\rho)$ janubiy qutb. $x: U \rightarrow R^n$ va $y: V \rightarrow R^n$

stereografik proeksiyalar bo'lsin, u holda (1), $i = 1, \dots, n$ x, y

akslantirishlar gomeomorfizmlardir va (2) almashtirishlar

differensiallanuvchi, chunki $x(U \cup V) = y(U \cup V) = R^n$, $\{0\}$. Bu yerda

$$x^i(p) = \frac{\rho p_i}{\rho - p_{n+1}} \quad y^i(p) = \rho p_i / \rho + p_{n+1}, i = 1, \dots, n \quad (1)$$

$$x \circ y^{-1} = y \circ x^{-1} : r \rightarrow \rho^2 r / \|r\|^2, (r \in R^n) \quad (2)$$

- 4) $n \geq 10$ o'lchovlar uchun differensial struktura kiritib bo'lmaydigan topologik ko'pxilliklar mavjud. Bunday turdagi misolni 1960-yil Kerver qurgan.

Va aksincha topologik ko'pxillik M ning o'lchovi to'rt dan katta bo'lmasa unda differensial struktura kiritish mumkin.

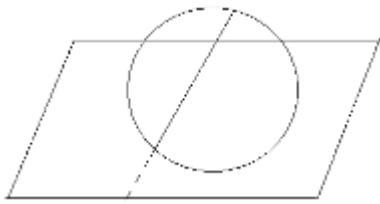
X – topologik fazo, $x \in X$ bo'lsa, x tegishli bo'lgan X fazoning ixtiyoriy qism to'plami x ning atrofi deyiladi. Agar X fazoning ixtiyoriy qism to'plamini birorta B oilaga tegishli to'plamlarning yig'ndisi sifatida yozish mumkin bo'lsa, B oila X topologik fazo uchun baza deyiladi. Tabiiyki B oilaga tegishli to'plamlar ham X ning ochiq qism to'plamlaridan iboratdir. B oila elementlari sanoqli sonda bo'lsa, ya'ni ularni nomerlab chiqish mumkin bo'lsa, u X uchun sanoqli baza deyiladi. Agar X topologik fazoning o'zaro farqli ikki nuqtasi kesishmaydigan atroflarga ega bo'lsa, bu fazoda Xausdorf aksiomasi bajarilgan deyiladi. Biz quyida hamma paragraflarda topologik fazo deganda sanoqli bazaga ega bo'lgan va Xausdorf aksiomasi bajariladigan topologik fazoni nazarda tutamiz.

X, Y –lar topologik fazolar bo'lib, $f: X \rightarrow Y$ akslantirish berilgan bo'lsin. Agar f va f^{-1} uzluksiz akslantirishlar bo'lsa, f topologik akslantirish yoki gomeomorfizm deb ataladi. Agar ikkita topologik fazolar o'rtasida gomeomorfizm mavjud bo'lsa, ular o'zaro gomeomorf fazolar yoki topologik ekvivalent fazolar deyiladi.

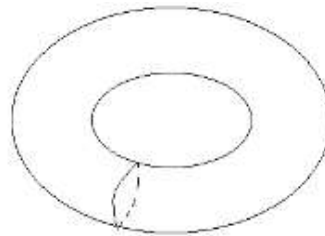
Ta'rif 2.7 X –topologik fazoning ixtiyoriy nuqtasi R^n ning biror ochiq qism to'plamiga gomeomorf bo'lgan atrofga ega bo'lsa, X n o'lchamli topologik ko'pxillik deyiladi. n soni ko'pxillikning o'lchami deyiladi va $\dim X$ bilan belgilanadi[4].

Misollar:

- 1) $X = R^n$ bo'lsin. Bu holda ixtiyoriy nuqta uchun zarur atrof sifatida R^n ning o'zini olish mumkin. Xuddi shunday R^n ning ixtiyoriy ochiq qism to'plami ham n o'lchamli topologik ko'pxillikdir.
- 2) $X = S^n \subset R^{n+1}$ n o'lchamli sfera n o'lchamli ko'pxillikdir. Chunki u R^{n+1} ning qism to'plami sifatida sanoqli bazaga ega va unga Xousdorf aksiomasi bajarilgan. $x \in S^n$ bo'lsa, x' bilan unga diametral qarama-qarshi joylashgan nuqtani belgilaymiz. x' ning atrofi $U(x) = S^n \setminus \{x'\}$ nuqtada o'tkazilgan urinma tekislikka gomeomorfdir. Bu gomeomorffizmni stereoografik proeksiya yordamida o'rnatish mumkin.
- 3) $X = T^2$ ikki o'lchamli torni $T^2 = S^1 \times S^1$ ko'rinishda yozish mumkin. Agar $a \in T^2$ bo'lsa, $a = (a_1, a_2)$ bo'lib, a_1 va a_2 lar aylanalarga (bir o'lchamli ko'pxilliklarga) tegishli va mos ravishda ochiq kesmalarga gomeomorf $U(a_1)$ va $U(a_2)$ atroflarga ega. $U(a) = U(a_1) \times U(a_2)$ to'g'ri ko'paytma a nuqta uchun zarur bo'lgan atrofdir. (2-chizma).



1-chizma



2-chizma

Topologik ko'pxillik ta'rifiga ko'ra unga tegishli ixtiyoriy x nuqta uchun uning atrofi U va bu atrof R^n dagi biror ochiq G to'plamga akslantiruvchi gomeomorfizm φ dan iborat (U, φ) juftlik mavjud. R^n da $y = \varphi(x)$ nuqtani o'z ichiga oluvchi va G ga qism to'plam bo'lgan $V(y)$ ochiq shar mavjud. (Chunki ochiq sharlar R^n da bazani hosil qiladi). $\varphi^{-1}: G \rightarrow U$ gomeomorfizm bo'lganligi uchun $\varphi^{-1}|_{V(y)}: V(y) \rightarrow \varphi^{-1}(V(y))$ akslantirish ham gomeomorfizmdir. Shuning uchun $V(x) = \varphi^{-1}(V(y))$ to'plam x ning ochiq

shari $V(y)$ ga gomeomorf atrofdir. Demak ko'pxillik ta'rifida U atrofning R^n dagi biror ochiq sharga gomeomorfligini talab qilish mumkin. O'z navbatida R^n dagi ochiq shar R^n ga gomeomorfdir. Bundan kelib chiqadiki, topologik ko'pxillik ta'rifida U atrofning R^n ga gomeomorfligini talab qilish mumkin.

Agar topologik ko'pxillikning biror nuqtasi bir vaqtda R^n va R^m ga gomeomorf atroflarga ega bo'lib qolsa, ko'pxillik o'lchami korrekt aniqlangan bo'lardi. Quyidagi L. Brauer teoremasiga ko'ra bunday hol bo'lishi mumkin emas.

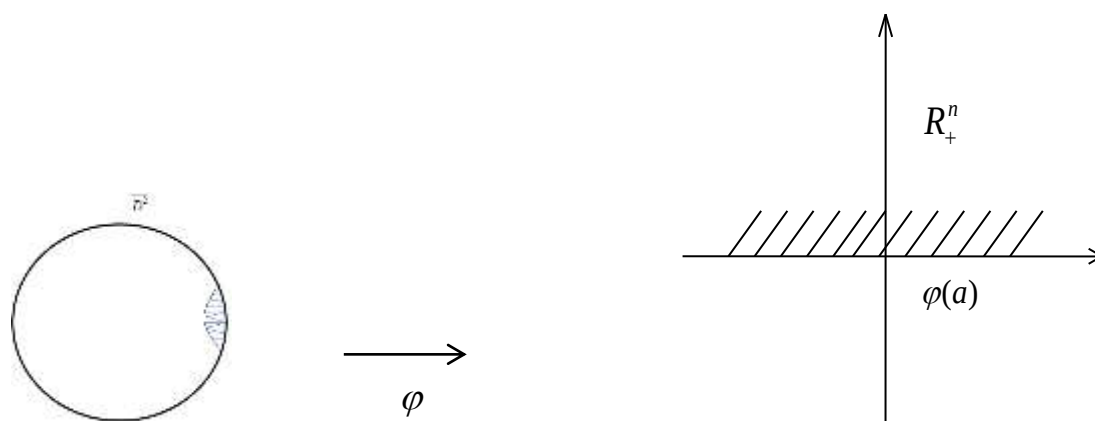
2-§ Chegarali topologik ko'pxilliklar

Ta'rif 2.8 X topologik fazoning ixtiyoriy nuqtasi R^n ga yoki $R_+^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n, x_n \geq 0\}$ ga gomeomorf bo'lgan atrofga ega bo'lsa, X n -o'lchamli topologik ko'pxillik deyiladi[4].

Chegarali ko'pxillikning R^n ga gomeomorf atrofga ega bo'lgan nuqtalari ichki nuqtalar, R_+^n ga gomeomorf atrofga ega bo'lgan nuqtalari chegaraviy nuqtalar deyiladi. Chegarali ko'pxillikning ichki nuqtalari to'plami int X bilan, chegaraviy nuqtalari to'plami ∂X bilan belgilanadi. Agar $\partial X = \emptyset$ bo'lsa, X topologik ko'pxillikdir.

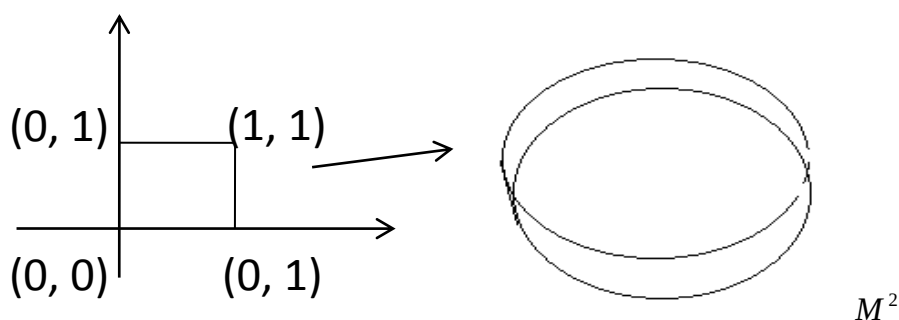
Misollar:

- 1) R_+^n chegarali ko'pxillik bo'lib, $\partial R_+^n = R^{n-1} \cdot \partial R^1$ nuqta, ∂R_+^2 to'g'ri chiziqdir.
- 2) Yopiq shar $\overline{D^n} \subset R^n$ n -o'lchamli chegarali ko'pxillik bo'lib uning chegarasi $n-1$ o'lchamli sferadir. Agar $n=1$ bo'lsa, $\overline{D^n}$ yopiq kesma, chegarasi esa ikki nuqtadan iborat; $\overline{D^2}$ yopiq doiraning chegarasi aylanadan iboratdir.
- 3) "Teshik sfera" ham ikki o'lchamli chegarali ko'pxillikka misol bo'ladi. "Teshik sfera" ni hosil qilish uchun sferadan ochiq sharga gomeomorf to'plamni "qirqib" olish kerak.



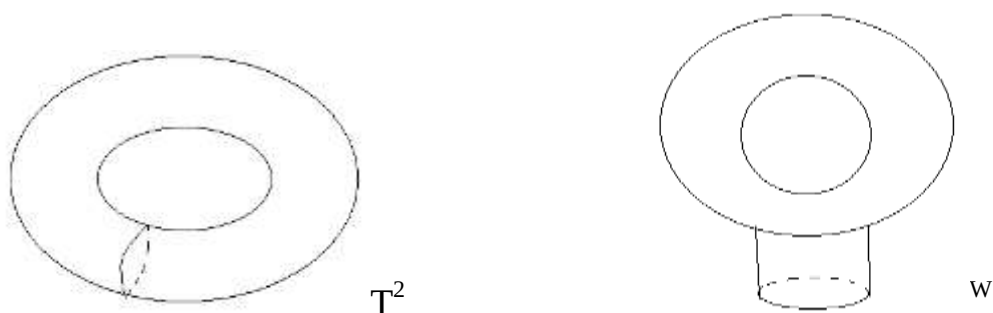
3-rasm

- 4) Tekislikda $\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ kvadrat nuqtalari orasida ekvivalentlik munosabati kiritaylik: $(0, y)$ va $(1, 1-y)$ ko'rinishdagi nuqtalarni ekvivalent deb ataymiz. Bu kiritilgan ekvivalentlik munosabati bo'yicha factor fazo $M^2 = \Pi / \sim$ Myobius yaprog'i deb ataladi. Myobius yaprog'i ikki o'lchamli chegarali topologik ko'pxillik bo'lib, uning chegarasi aylanaga gomeomorfdir.



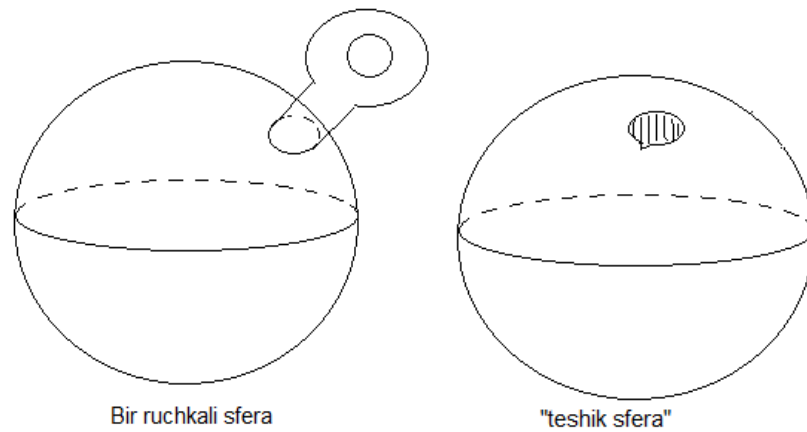
4-rasm

- 5) Torning ochiq doiraga gomeomorf qismini “qirqib” olsak, uning qolgan qismi ikki o'chamli chegarali ko'pxillik bo'lib, chegarasi aylanaga gomeomorfdir. Bu ko'pxillik “ruchka” deb ataladi. (5-chizma)



5-rasm

- 6) “Teshik sfera” bilan “ruchka” ni chegaralari bo’yicha “yelimlasak” bir ruchkali sfera hosil qilamiz. Bir ruchkali sfera ikki o’lchamli ko’pxillik bo’lib, uning chegaraviy nuqtalari to’plami bo’sh to’plamdir. (6-chizma).



6-rasm

(X, τ) topologik fazo, $A \subset X$ – qism to’plam bo’lsin.

Ta’rif 2.9 Ikkita ochiq U va V qism to’plamlar mavjud bo’lib,

- a) $A = (A \cap U) \cup (A \cap V)$
- b) $(A \cap U) \cap (A \cap V) = \emptyset$
- c) $A \cap U \neq \emptyset, A \cap V \neq \emptyset$

shart bajarilsa, A to’plam bog’lanishsiz to’plam deyiladi. Agar bu shartlarni qanoatlantiruvchi U va V ochiq to’plamlar mavjud bo’lmasa, A to’plam bog’lanishli to’plam deyiladi[7].

Agar X bog’lanishsiz fazo bo’lsa yuqoridagi shartlarni qanoatlantiruvchi U va V to’plamlar bir-birining to’ldiruvchisidir: $U = X \setminus V$ va $V = X \setminus U$. Demak U va V to’plamlar ochiq to’plamlarning to’ldiruvchilari sifatida yopiq to’plamlardir. Bundan kelib chiqadiki, U va V to’plamlar bir vaqtda ochiq va yopiq to’plamlardir. Shu faktdan foydalanib bog’lanishli fazo ta’rifini quyidagicha berish mumkin: agar X topologik fazo bir vaqtda ochiq va yopiq bo’ladigan to’plamlar faqat butun fazo X va bo’sh to’plamlardan iborat bo’lsa,

X bog'lanishli fazo deyiladi. Bu faktda quyida keltiriladigan teorema isbotida foydalanamiz.

3-§ Differensiallanuvchi akslantirishlar

Bizga 2 ta M_1 va M_2 silliq ko'pxillik va $f: M_1 \rightarrow M_2$ uzluksiz akslantirish berilgan bo'lsin. Ixtiyoriy $P_0 \in M_1$ nuqtaning atrofida f akslantirishni h vektor-funksiya ko'rinishida tasvirlashimiz mumkin, $y^k = h^k(x^1, \dots, x^n)$, bu yerda $(x^1, \dots, x^n) - P_0 \in M_1$ nuqta atrofidagi lokal koordinatalar sistemasi, $(y^1, \dots, y^n) - Q_0 \in f(P_0) \in M_2$ nuqta atrofidagi lokal koordinatalar sistemasi.

Ta'rif 2.10 Silliq ko'pxillikdagi $f: M_1 \rightarrow M_2$ akslantirish C^r –silliq akslantirish deyiladi, agar ixtiyoriy $P_0 \in M_1$ nuqta atrofidagi har qanday $(x^1, \dots, x^n)$ lokal koordinatalar sistemasi va $Q_0 \in f(P_0) \in M_2$ nuqta atrofidagi $(y^1, \dots, y^n)$ lokal koordinatalar sistemasi uchun f funksiyani $\vec{y} = (y^k) = (h^k(x^1, \dots, x^n)) = h(\vec{x})$ vektor-funksiya ko'rinishida tasvirlab bo'lsa, bu yerda $h(\vec{x})$ funksiya C^r –silliq funksiyalar sinfining vektor-funksiyasi deyiladi[8].

$f: M_1 \rightarrow M_2$ –ko'pxillikdagi gomeomorfizm bo'lsin. Agar f C^r –silliq akslantirish bo'lsa, unda f^{-1} teskari akslantirish har doim ham silliq akslantirish bo'lavermaydi.

Ta'rif 2.11 Agar $f^{-1}: M_2 \rightarrow M_1$ –teskari akslantirish ham C^r –silliq akslantirish bo'lsa, unda f gomeomorfizm C^r –silliq gomeomorfizm yoki C^r –diffeomorfizm deyiladi[8].

Agar $f: M_1 \rightarrow M_2$ – diffeomorfizm bo'lsa, unda M_1 va M_2 ko'pxilliklar diffeomorf ko'pxilliklar deyiladi.

Teorema 2.1 Agar $f: M_1 \rightarrow M_2$ –silliq ko'pxillikning C^r –silliq gomeomorfizmi bo'lsin. U holda $\dim M_1 = \dim M_2$ bo'ladi[8].

Isbot. $P_0 \in M_1$ $P_0 \in M_1$ – ixtiyoriy nuqta, $Q_0 = f(P_0)$ va $g = f^{-1}$ – teskari funksiya bo'lsin. $(x^1, \dots, x^n) - P_0$ nuqtaning U_0 atrofidagi lokal koordinatalari va $(y^1, \dots, y^m) - Q_0$ nuqtaning V_0 atrofidagi lokal koordinatalari bo'lsin. Unda f va g akslantirishlar 2 ta vektor-funksiya ko'rinishida tasvirlanadi, $\vec{x} = h(\vec{y})$ va $\vec{y} = h^{-1}(\vec{x})$, bu yerdan $h(h^{-1}(\vec{x})) \equiv \vec{x}$, $h(h^{-1}(\vec{y})) \equiv \vec{y}$. h va h^{-1} akslantirishlarni tekshiramiz. h akslantirish n ta bog'liqmas $x^1, \dots, x^n$ o'zgaruvchili m ta $y^m = h^m(x^1, \dots, x^n)$ funksiyalardan tashkil topgan. h^m funksiyaning barcha xususiy hosilalaridan matritsa tuzamiz:

$$dh = \begin{pmatrix} \frac{\partial h^1}{\partial x^1} \dots \frac{\partial h^1}{\partial x^n} \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial h^m}{\partial x^1} \dots \frac{\partial h^m}{\partial x^n} \end{pmatrix}.$$

dh matritsa tartibi $m \times n$ bo'lgan to'g'ri burchakli matritsa deyiladi, yani m ta satr va n ta ustunga ega. dh matritsa h akslantirishning Yakobi matritsasi deyiladi.

Ta'rif 2.12 $f : M_1 \rightarrow M_2$ – silliq ko'pxillikning silliq akslantirishi bo'lsin. $P_0 \in M_1$ nuqtadagi f silliq akslantirishning df_{P_0} differensial $T_{Q_0}(M_2)$ urunma fazodagi $T_{P_0}(M_1)$ urunma fazoning chiziqli akslantirishi deyiladi, bu yerda $Q_0 = f(P_0)$, f akslantirish Yakobi matritsasining lokal koordinatalar sistemasida aniqlangan[4].

Yuqorida ko'rib o'tdikki, $y^1 = f^1(x^1, \dots, x^n), \dots, y^m = f^m(x^1, \dots, x^n)$ funksiyalar sistemasi uchun Yakobi matritsasi aniqlangan, bu funksiyalarning xususiy hosilalaridan tuzilgan matritsa quyidagicha bo'ladi:

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} \dots \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} \dots \frac{\partial f^m}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

U holda agar $(x^1, \dots, x^n) - P_0$ nuqta atrofidagi M_1 ko'pxillikning lokal koordinatalar sistemasi, $(y^1, \dots, y^n) - Q_0$ nuqta atrofidagi M_2 ko'pxillikning lokal koordinatalar sistemasi bo'lsa, unda f akslantarish $y^k = f^k(x^1, \dots, x^n)$ funksiyaning koordinatalar to'plami ko'rinishida ifodalanadi, $T_{P_0}(M_1)$ va $T_{P_0}(M_2)$ urunma fazolar arifmetik fazo ko'rinishida ifodalanadi, n va m lar mos ravishda ustun va satrlar. $\vec{\xi} \in T_{P_0}(M_1)$ - urunma vektor koordinatalari $(\xi^1, \dots, \xi^n)$, $\eta \in T_{Q_0}(M_2)$ vektorning koordinatalari $(\eta^1, \dots, \eta^m)$ bo'lsin. Agar

$$\vec{\eta} = df_{P_0}(\vec{\xi}) \text{ bo'lsa, u holda } \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \dots \\ \eta^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(P_0) \dots \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(P_0) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}(P_0) \dots \frac{\partial f^m}{\partial x^n}(P_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \dots \\ \xi^n \end{pmatrix}.$$

III-bob

Differensiallanuvchi akslantirishlar darajasi

1-§ Akslantirishlar darajasi tusunchasi va misollar

Biz bu paragrafda akslantirish darajasi tushunchasini kiritamiz va uning ba'zi xossalarini o'rganib, misollar keltiramiz.

$f : N \rightarrow M$ silliq akslantirish bo'lib, N va M lar kompakt, bog'lanishli, orientirlangan, yopiq ko'pxilliklar bo'lib, ularning o'lchamlari teng bo'lsin: $\dim N = \dim M$. Agar f akslantirishning Q nuqtadagi Yakobi matritsasining determinanti $\det J\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) > 0$ bo'lsa, $Q \in f^{-1}(p)$ uchun $\varepsilon(Q) = +1$ olamiz,

$\det J\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) < 0$ bo'lsa, $\varepsilon(Q) = -1$ olamiz.

Ta'rif 3.1 f akslantirishning $p \in M$ regulyar nuqtadagi darajasi deb $\deg_p f = \sum_{Q \in f^{-1}(p)} \varepsilon(Q)$ songa aytiladi[3].

Teorema 3.1 Akslantirish darajasi nuqtaning tanlanishiga bog'liq emas va u gomotopiyada o'zgarmaydi[3].

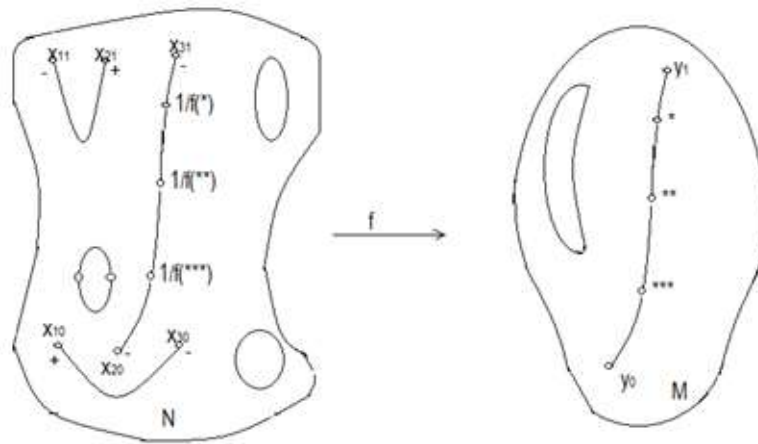
Isbot. Dastlab daraja nuqtaning tanlanishiga bog'liq emasligini ko'rsatamiz. Tanlangan y_0 nuqtaga yaqin bo'lgan regulyar nuqtalarda bu ravshan—proobrazlar soni qancha bo'lsa, ishoralar soni ham shuncha bo'ladi.

Aytaylik y_0 va y_1 lar f akslantirishning regulyar qiymatlari bo'lsin. Bu nuqtalarni M ko'pxillikdagi o'z-o'zini kesmaydigan silliq yo'l bilan tutashtiramiz. Bu yo'l bir o'lchamli γ ko'pxillik bo'ladi. t -regulyarlik haqidagi lemmaga ko'ra γ yo'lni shunday tanlash mumkinki, f akslantirish butun γ da t -regulyar va chetki y_0 va y_1 nuqtalarda nisbatan regulyar bo'ladi. $f^{-1}(\gamma)$ to'liq proobrazini qaraymiz. Bu to'plam t -regulyarlikka ko'ra N da chegarali bir o'lchamli ko'pxillik bo'lib, $f^{-1}(y_0)$ va $f^{-1}(y_1)$ qisimlardan iborat bo'ladi (7-rasm). 7-rasm $n = 2$ uchun; x_{i_0} va x_{i_1} nuqtalarning proobrazlari quyidagicha: $x_{i_0} = f^{-1}(y_0), i = \overline{1, m}$ va $x_{i_1} = f^{-1}(y_1), i = \overline{1, m}$. 7-rasmda

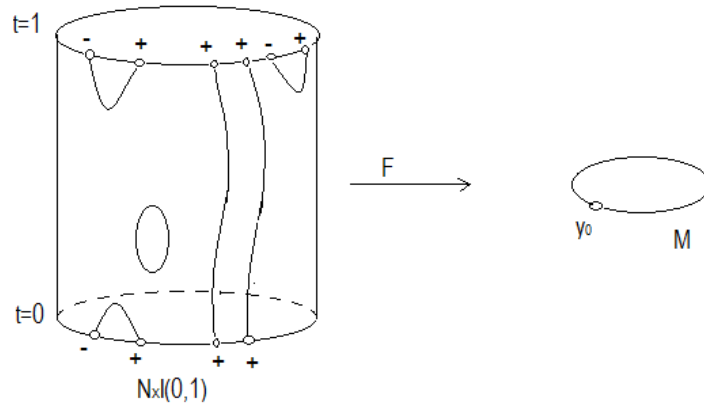
har bir nuqtaning atrofida uning ishorasi ko'rsatilgan. γ dagi har xil nuqtalarning proobrazlari har xil bo'lishi mumkin. γ to'plamda 2 ta chetki nuqta bo'lib, ular to'plamning chegarasiga qarama-qarshi ishora bilan kiradi.

Endi xuddi shunga o'xshash f akslantirishning gomotopiyasiga nisbatan akslantirish darajasining invariant ekanligini isbotlaymiz. Aytaylik silliq gomotopiya $F: N \times I = M$, bu yerda $f = F(x, 0)$ berilgan bo'lsin. Butun gomotopiya jarayonida F akslantirishni y_0 nuqtada regulyar deb hisoblashimiz mumkin. To'liq $F^{-1}(y_0)$ proobrazni qaraymiz. $n=1$ holda 8-rasm.

Bu yerda ham xuddi 7-rasmdagidek $F^{-1}(y_0)$ to'liq proobraz $N \times I$ ko'pxillikda maxsus bo'lmagan bir o'lchamli ko'pxillik bo'lib, chegarasi ikkita qismdan iborat bo'ladi, ular mos ravishda $t=0$ ($f^{-1}(t_0)$) va $t=1$ ga mos keladi. Teoremda ko'rsatilgan butun son $t=0$ va $t=1$ uchun bir xil bo'ladi. Teorema isbotlandi.



7-rasm



8-rasm

N, M silliq ko'pxilliklar va $f: N \rightarrow M$ silliq akslantirish berilgan bo'lsin.

Ta'rif 3.2 f akslantirishning silliq gomotopiyasi deb, $F: N \times I \rightarrow M$ ($I = [0, 1]$) silindirni akslantiruvchi $(x, 0) = f(x)$, $\forall x \in N$ uchun o'rinli bo'ladigan silliq F akslantirishga aytiladi. Ayta olamizki, $f_t: N \rightarrow M$, $f_t(x) = F(x, t)$ akslantirishlar boshlang'ich $f = f_0$ akslantirishga gomotop, silindirni akslantiruvchi barcha F lar gomotopiya deb ataladi[3].

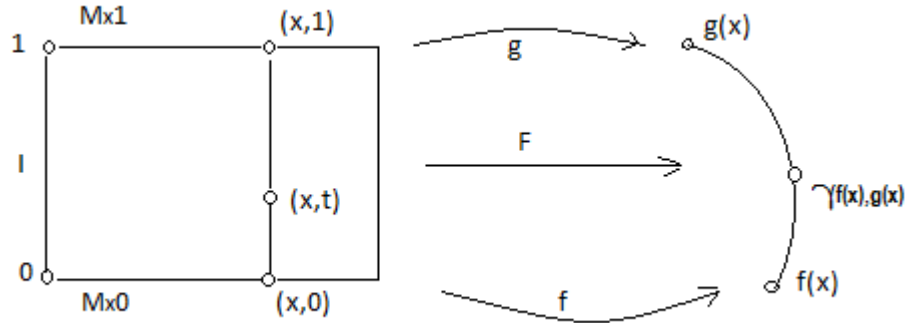
Berilga f akslantirishga gomotop bo'lgan barcha akslantirishlar juft-juft gomotopik akslantirishlar sinfini hosil qiladi. O'z-o'zidan tushunarliki, ixtiyoriy silliq l darajali silliq gomotopiya sinfini aniqlash mumkin. Xususan, $l = 0$ bo'lganda uzluksiz va uzluksiz gomotop akslantirishlar sinfini hosil qilamiz. Uzluksiz akslantirishlarni silliq akslantirish bilan approksimasiyalash haqidagi teoremdan gomotopiyaning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

- 1) Ixtiyoriy uzluksiz akslantirishni unga yaqin va gomotop, silliq sinfi ixtiyoriy silliq akslantirishga approksimatsiya qilish mumkin;
- 2) Ikkita silliq akslantirish silliq gomotopiya bo'ladi, agar ular uzluksiz gomotopiya bo'lsa.

Teorema 3.2 N, M - silliq kompakt ko'pxilliklar va $f, g: M \rightarrow N$ uzluksiz akslantirishlar bo'lsin. U holda N ko'pxillikdagi ixtiyoriy Riman metrikasi uchun $\exists \varepsilon > 0$ topiladiki, $\rho(f, g) < \varepsilon$ (ρ -akslantirishlar orasidagi masofa) shartdan f va g akslantirishlar gomotop ekanligi kelib chiqadi[3].

Isbot. Faraz qilamiz M da Riman metrikasi berilgan bo'lsin, uni ρ_0 orqali belgilaymiz. N ko'pxillikning kompaktligidan $\exists \varepsilon > 0$ topiladiki, agar $p, q \in N$ va $\rho_0(p, q) < \varepsilon$ bo'lsa, u holda p va q larni birlashtiruvchi yagona eng qisqa geodezik chiziqli mavjud. Endi $f, g: M \rightarrow N$ – uzluksiz akslantirishlar va $\rho(f, g) < \varepsilon$ bo'lsin. $F(x, 0) = f(x)$ va $F(x, 1) = g(x)$ lar bilan $F: M \times I \rightarrow N$ gomotopiyani qaraymiz. Buning uchun $\forall (x, t) \in M \times I$ nuqta uchun $F(x, t)$ qiymat berilgan bo'lishi kerak. $f(x), g(x) \in N$ nuqtalarni qaraymiz. Agar $\rho_0(f(x), g(x)) < \varepsilon$ bo'lsa, u holda ularni yagona $\gamma_{f(x), g(x)}(\tau)$ eng qisqa geodezik chiziqli bilan birlashtirish mumkin. Agar x nuqtadan boshqa bizga yagona t qiymat berilgan bo'lsa, u holda $\gamma_{f(x), g(x)}$ geodezik chiziqlining $f(x)$ dan $g(x)$ gacha bo'lgan qiymatini $t: (1 - t)$ munosabatta bo'lishi mumkin va hosil bo'lgan nuqtaga $(x, t) \in M \times I$ nuqtani mos qo'yamiz. (9-rasm).

Qo'yilgan $F(x, t)$ akslantirishning uzluksizligi yechimlarning boshlang'ich shartlarga uzluksiz bog'liqligi haqidagi teoremdan kelib chiqadi.



9-rasm

Teorema 3.3 $f - M$ silliq ko'pxillikni N silliq ko'pxillikka uzluksiz akslantiruvchi ixtiyoriy akslantirish bo'lsin. U holda f akslantirish $g: M \rightarrow N$ silliq akslantirishga gomotop bo'ladi[3].

Isbot. Ixtiyoriy uzluksiz $f: M \rightarrow N$ akslantirish shu qadar yaqin silliq approksiyalangan bo'lishi kerak. Teoremaning isboti yo'qoridagi teoremdan kelib chiqadi.

Teorema 3.4 Agar $f, g: M \rightarrow N$ silliq akslantirish uzluksiz gomotop bo'lsa, u holda ular silliq gomotop bo'ladi.

Tasdiq. Silliq ko'pxillik M ni yetarlicha katta o'lchamli silliq ko'pxillikka akslantiruvchi ixtiyoriy uzluksiz akslantirish silliq joylashtirishga gomotop bo'ladi. Agar berilgan akslantirish silliq akslantirish bo'lsa, u holda gomotopiyani ham silliq qilish mumkin.

Ta'rif 3.3 Ikkita silliq akslantirishlar $f, g: M \rightarrow N$ izotop deyiladi, agar f va g akslantirishlar orasida silliq $F: M \times I \rightarrow N$ gomotopiya mavjud bo'lib, $f_t(x) = F(x, t)$ formula bo'yicha aniqlangan $f_t: M \rightarrow N$ akslantirish har bir $t \in [0, 1]$ uchun silliq joylashtirish bo'lsa.

Teorema 3.5 Ixtiyoriy ikkita silliq f va g joylashtirishlar $f, g: M \rightarrow R$ yetarlicha katta o'lchamli q ($q \geq 2n + 2$) ga izotop bo'ladi[3].

Isbot. Agar q yetarlicha kata bo'lsa, u holda f va g joylashtirishlarni uzluksiz $F: M \times I \rightarrow R^n$ gomotopiya bilan bog'lash mumkin (masalan, ikkala f va g joylashtirishlar nuqtaga akslantiruvchi akslantirishga gomotopodir). Shundan keyin $f: M \times I \rightarrow N$ silliq gomotopiyani joylashtirishga silliq deformatsiyalash mumkin (deformatsiya $M \times 0$ va $M \times 1$ silindrlarning asoslarida qo'zg'almasdir). Bu esa bizga izlanayotgan f va g orasidagi izotopiyani beradi.

f akslantirishning gomotopik sinfi $[f]$ orqali belgilanadi. $N \rightarrow M$ akslantirishning barcha gomotopik sinfi to'plami $[N, M]$ orqali belgilanadi.

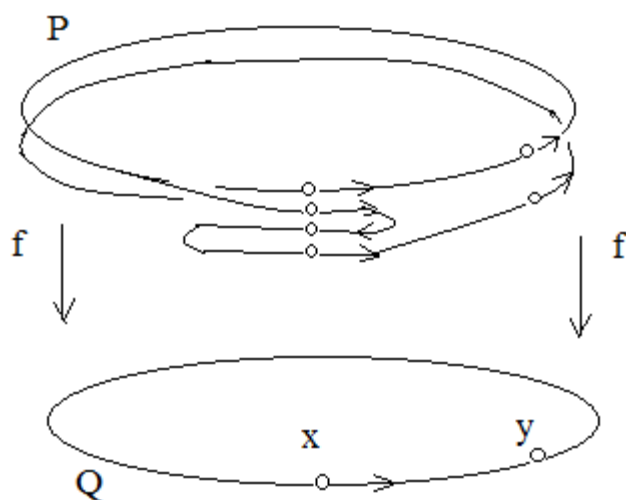
Gomotopiyalar va gomotopik sinflar uchun muhim bo'lgan qo'shimcha shartlarni sanab o'tamiz:

- a) N va M ko'pxilliklarda bittadan $x_0 \in N$ va $y_0 \in M$ nuqtalar belgilangan bo'lsin. Talab qilinadiki, barcha $f: N \rightarrow M$ akslantirishlar belgilangan x_0 nuqta y_0 nuqtaga o'tsin (xuddi shuningdek barcha gomotopiyalar ham). Akslantirishlar va gomotopiyalarning bunday sinfi nuqtada *bog'lanishli* deyiladi.

- b) N va M ko'pxilliklar $\Gamma = \partial N$ va $\Delta = \partial M$ chegaralarga ega. Talab qilinadiki barcha $f: N \rightarrow M$ akslantirishlarda va ularning gomotopiyalarida Γ chegara Δ chegaraga o'tsin. Akslantirishlarning bunday sinfi “*nisbiy*” (chegaraga nisbatan) akslantirishlar deyiladi.
- c) N va M ko'pxilliklar kompakt bo'lmasligi (ochiq) mumkin. Talab qilinadiki ixtiyoriy to'la proobrazi $f: M \rightarrow N$ akslantirishda kompakt bo'lsin. Bu hol $F: N \times I \rightarrow M$ akslantiruvchi gomotopiya jarayonida ham talab qilinadi. Akslantirishlar va gomotopiyalarning bunday sinfi *xos akslantirish* deyiladi
- d) N va M ko'pxilliklarda $A \subset N$ va $B \subset M$ bo'lsin. Talab qilinadiki barcha f akslantirishda va F gomotopiyalarda A to'plam B to'plamga akslansin.

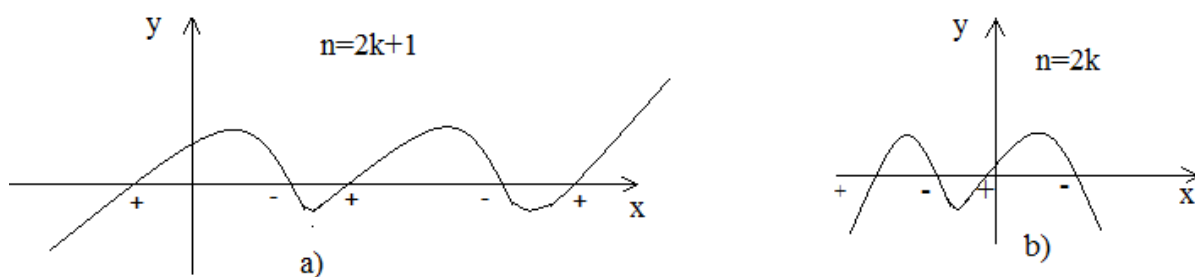
Misollar:

1. f – Q aylanani P aylanaga o'tkazuvchi uzluksiz akslantirish. Q aylanadagi y nuqtaga P aylanadagi 2 ta nuqta yunalishni saqlagan (musbat) holatda akslanadi. Shuning uchun aytish mumkinki, bu y nuqtadagi akslantirish darajasi 2 ga teng: $\deg f = 2$. $x \in Q$ nuqtaga P aylanadagi 4 ta nuqta akslanadi va bunda 3 ta nuqta yunalishni saqlagan (musbat) holatda va 1 ta nuqta yunalishni saqlamagan (manfiy) holatda akslanadi. Shuning uchun bu holatda ham akslantirish darajasi 2 ga teng: $\deg f = 3 - 1 = 2$ (10-rasm). Umuman olganda, p orqali qandaydir $z \in Q$ nuqtaga o'tuvchi musbat akslantirishni, n orqali manfiy akslantirishni belgilaymiz. Unda f akslantirishning darajasi $p - n$ songa teng bo'ladi.



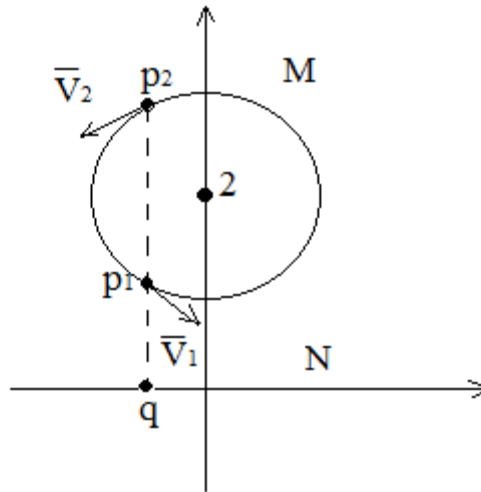
10-rasm

2. $f: R \rightarrow R$ akslantirish berilgan bo'lsin. Bu yerda $f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ ixtiyoriy n -darajali ko'phad, a_i $i = \overline{1, n}$ - haqiqiy sonlar. Agar n -toq bo'lsa, unda $\deg f = 1$ bo'ladi, n -juft bo'lsa, $\deg f = 0$ bo'ladi (11-rasm a) va b))



11-rasm

3. $f: M \rightarrow N$ akslantirish berilgan bo'lsin. Bu yerda $M = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + (y-2)^2 = 1\}$ $N = \{(x, y) \in R^2 : y = 0\}$. $M = S^1$ $q - f$ akslantirishning regulyar qiymati. $\vec{V}_1 \in T_{p_1} S^1$ - vektor $T_{p_1} S^1$ ning orietatsiyasini, $\vec{V}_2 \in T_{p_2} S^1$ - vektor $T_{p_2} S^1$ ning orietatsiyasini aniqlasa, unda $\deg_{p_1} f = +1$ va $\deg_{p_2} f = -1$ bo'ladi va $\deg f = 0$ (12-rasm).



12-rasm

2-§ Ko'pxilliklarni sferaga akslantiruvchi akslantirishlarning gomotopik klassifikatsiyasi

Bu bobda ko'pxilliklarni sferaga akslantiruvchi differensiallanuvchi akslantirishlarning gomotopik klassifikatsiyasi o'rganiladi.

Birinchi paragrafda yopiq orientirlangan ko'pxillikni sferaga akslantiruvchi ikkita silliq akslantirish orasida gomotopiya qurilishi o'rganilgan.

Ikkinchi paragrafda yopiq orientirlanmagan ko'pxillikni sferaga akslantiruvchi ikkita silliq akslantirishlar orasidagi gomotopiya qurilgan.

Teorema 3.6 Ikkita silliq $f, g: N \rightarrow S^n$ akslantirishlar yopiq n -o'lchamli orientirlangan ko'pxillikni n -o'lchamli sferaga o'tkazsin. Bu akslantirishlar gomotop bo'lishi uchun ularning darajalar ustma-ust tushishi zarur va yetarli[3].

Isbot. Birinchi sodda holini qaraymiz. $y_0 \in S^n$ regulyar qiymat bo'lib, uning proobrazlarining f va g akslantirishdagi darajalari bir-biriga teng bo'lsin: $\deg f = \deg g$ va proobrazdagi nuqtalar soni ham bir-biriga teng

bo'lsin. Bu holda f va g lar orasidagi gomotopiyani quyidagi qadamlarda quramiz:

1-qadam. f akslantirishni shunday deformatsiyalaymizki, $f^{-1}(y_0)$ va $g^{-1}(y_0)$ proobrazlar aniq ustma-ust tushsin.

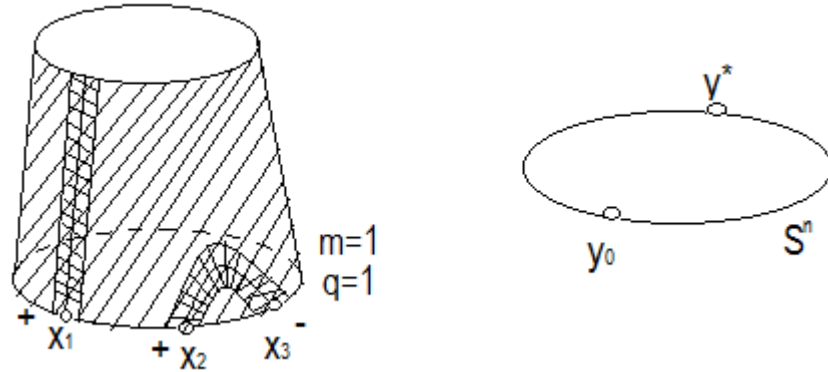
2-qadam. Shartga ko'ra Yakobianlar ishoralarining hammasi ustma-ust tushganligi uchun f akslantirishni shunday akslantirishga deformatsiyalaymizki, u akslantirishning differensial g akslantirishning differensial bilan $f^{-1}(y_0)=g^{-1}(y_0)$ to'liq proobrazning har bir nuqtasida ustma-ust tushsin.

3-qadam. $\varepsilon > 0$ sonini tanlaymiz va ikkala f va g akslantirishlarni y_0 nuqtaning barcha proobrazlarining atroflarida shunday deformatsiyalaymizki, ularning ε -atrofdagi lokal koordinatalar sistemasiga nisbatan f va g akslantirishlar chiziqli bo'lib qolsin. Bunda ε -atroflarning obrazlari S^n sferaga diffeomorf joylashadi, ularning chegaralari esa y_0 nuqtaga qarama-qarshi nuqtaga o'tsin. ε -atroflarning to'ldiruvchilarining barchasini shu nuqtaga o'tadi deb hisoblashimiz mumkin. Shunday qilib, y_0 nuqtaning S^n sferadagi to'ldiruvchisini R^n - Yevklid fazosi bo'ladi.

Bu deformatsiyalardan keyin f va g akslantirishlar ustma-ust tushadi.

Endi $y_0 \in S^n$ nuqtada regulyar bo'lgan umumiy f akslantirishni qaraymiz. Bu akslantirishga yo'qoridagi 3 ta qadamni qo'llash mumkin (proobrazlar soni $\deg f = m$ darajadan kata). Natijada biz bu akslantirishni kanonik ko'rinishga keltiramiz: y_0 nuqta $m + 2q$ ta proobrazga ega bo'ladi: $x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_{m+2q}$. Bu proobrazlarning ε -atroflari S^n sferada chiziqli o'raladi, bu atroflarning to'ldiruvchisi esa y_0 nuqtaga qarama-qarshi nuqtaga akslanadi; f akslantirishning $x_1, x_2, \dots, x_m$ nuqtalardagi Yakobianlarining ishoralari bir xil, $x_{m+i}, \dots, x_{m+q+i}$ ($i = \overline{1, q}$) nuqtalarda esa Yakobianlarning ishoralari qarama-qarshi. $N^n \times I$ dagi γ yo'lining atrofida shunday akslantirish quramizki, uning chegarasi y^* ga o'tsin (13-rasm). Ravshanki, $(x_{m+i}, \dots, x_{m+q+i})$ nuqtalardagi Yakobianlarning ishoralariga ko'ra bunday

akslantirishni qurish mumkin. Qolgan proobrazlarning ε -atroflarida gomotopiyani ayniy deb hisoblaymiz. $N^n \times I$ ko'pxillikning qolgan hamma qismini nuqtaga yo'naltiramiz. Proobrazlar juftligini yo'qotuvchi F akslantirish qurildi. Ya'ni f va g akslantirishlar ustma-ust tushdi. Teorema isbotlandi.



13-rasm

Akslantirish darajasi ko'pxillik orientirlanmagan holda ham aniqlangan bo'lib, yakobianlarning ishoralari bu yerda invariant ma'noga ega bo'lmaydi. Shuning uchun akslantirish darajasi mod 2 bo'yicha aniqlanadi.

Teorema 3.7 Ikkita silliq $f, g: N \rightarrow S^n$ akslantirishlar yopiq n -o'lchamli orientirlanmagan ko'pxillikni n -o'lchamli sferaga o'tkazsin. Bu akslantirishlar gomotop bo'lishi uchun ularning darajalar mod 2 bo'yicha ustma-ust tushishi zarur va yetarli.

Isbot. Zarurligi. Aytaylik f va g akslantirishlar gomotop bo'lsin. Unda biz ularning akslantirish darajalari tengligini ko'rsataylik, ya'ni $\deg f = \deg g$.

Faraz qilaylik $f^{-1}(y)$ m ta proobrazga ega bo'lsin: $x_1, x_2, \dots, x_m$. Ko'pxillik orientirlanmaganligi uchun Yakobi matritsasining determinanti nol, ya'ni $\det J(\frac{\partial f}{\partial x_i}) = 0$ bo'ladigan nuqtalar soni k_1 ta bo'lsin. Xuddi shunday $g^{-1}(y)$ n ta proobrazga ega bo'lsin: $x_1, x_2, \dots, x_n$. Bunda ham Yakobi matritsasining determinanti nol, ya'ni $\det J(\frac{\partial f}{\partial x_i}) = 0$ bo'ladigan nuqtalar soni k_2 ta bo'lsin. Shu bilan birga f va g akslantirishlar gomotop bo'lganligi uchun $m - k_1$ va

$n - k_2$ nuqtalar soni bir vaqtda yoki juft yoki toq bo'lsin. Unda $m - k_1 \equiv n - k_2 \pmod{2}$ bo'ladi, ya'ni bu ikki akslantirishlarning proobrazlardagi nuqtalar sonini ikkiga bo'lgandagi qoldig'i bir vaqtda yoki nol yoki birga teng bo'ladi. Bundan kelib chiqadiki, f va g akslantirishlarning darajalari ustma-ust tushadi.

Yetarliligi. Faraz qilaylik f va g akslantirishlarning darajalari teng bo'lsin. Unda f akslantirishni $f^{-1}(y_0)$ va $g^{-1}(y_0)$ proobrazlar aniq ustma-ust tushadigan qilib deformatsiyalaymiz.

Boshqa tomondan f akslantirishni shunday akslantirishga deformatsiyalaymizki, u akslantirishning differensial g akslantirishning differensial bilan $f^{-1}(y_0) = g^{-1}(y_0)$ to'liq proobrazning har bir nuqtasida ustma-ust tushsin.

Endi y_0 nuqtaning $\varepsilon > 0$ atrofini qaraylik. Bu atrofda ikkala f va g akslantirishlarning y_0 nuqtadagi barcha proobrazlarining atroflarida shunday deformatsiyalaymizki, ularning ε -atrofdagi lokal koordinatalar sistemasiga nisbatan f va g akslantirishlar chiziqli bo'lib qolsin. Bunda ε -atroflarning obrazlari S^n sferaga diffeomorf joylashadi, Ularning chegaralari esa y_0 nuqtaga qarama-qarshi nuqtaga o'tsin. ε -atroflarning to'ldiruvchilarining barchasini shu nuqtaga o'tadi deb hisoblashimiz mumkin. Shunday qilib, y_0 nuqtaning S^n sferadagi to'ldiruvchisini R^n -Yevklid fazosi bo'ladi. Bu deformatsiyalardan keyin f va g akslantirishlar ustma-ust tushadi. Teorema isbotlandi.

III BOB BO'YICHA XULOSA

Bu bobda differensiallanuvchi akslantirishlar darajasi, orientirlangan ko'pxillikni sferaga akslantiruvchi akslantirishlarning gomotopik klassifikatsiyasi o'rganilgan. Orientirlanmagan ko'pxilliklarni sferaga akslantiruvchi differensiallanuvchi akslantirishlar o'zaro gomotop bo'lishi uchun zarur va yetarli shart olingan.

Olingan natijalar ko'pxillikni sferaga akslantiruvchi akslantirishlarning gomotopik klassifikatsiyasini aniqlaydi.

XULOSA

Ushbu magistrlik dissertasiyasining ob'ekti o'lchamlari bir-biriga teng bo'lgan ko'pxilliklar orasidagi differensiallanuvchi akslantirishlarning darajalarining tadbiqui hisoblanadi.

Mazkur magistrlik dissertatsiyasi uchta bob, birinchi va ikkinchi boblar uchta paragrafdan, uchinchi bob esa ikkita paragrafdan, uchinchi bob bo'yicha xulosa, umumiy xulosa va adabiyotlar ro'yhatidan iborat.

Birinchi bobda Yevklid fazosida akslantirishlar, xossalari va ularga doir misollar o'rganilgan.

Ikkinchi bob ko'xilliklarda differensiallanuvchi akslantirishlarga bag'ishlangan bo'lib, ko'xillikda differensiallanuvchi akslantirishlarning aniqlanishi, chegarali topologik ko'philliklar va ularning xossalari o'rganilgan.

Uchinchi bob asosiy qism bo'lib, unda ko'pxilliklarni sferaga akslantiruvchi differensiallanuvchi akslantirishlar klassifikatsiya qilingan va ma'lum sinfga tegishli ko'pxilliklarni sferaga akslantiruvchi differensiallanuvchi akslantirishlar o'zaro gomotop bo'lishi uchun zarur va etarli shart olingan.

Ushbu tadqiqot ishi bo'yicha olingan natijalar tezis ko'rinishida 2013 yil 20-24 mayda Nizomiy nomidagi TDPU da bo'lib o'tgan "Problems of modern topology and applications" nomli xalqaro konferensiya materiallarida "Гомотопическая классификация отображений многообразия в сферу" nomi bilan va 2013 yil iyun oyida O'zMU da bo'lib o'tgan "Matematika, mexanika va informatika fanlarining rivojida iste'dodli yoshlarning o'rni" mavzusidagi ilmiy-amaliy seminar tezislar to'plamida "О степень отображений многообразия в сферу" mavzuda chop ettirildi.

Magistrlik dissertatsiyasida o'rganilgan ma'lumotlar nazariy harakterga ega bo'lib, ular differensial geometriya, algebra va matematik analiz fanlariga tadbiqui qilinishi mumkin.

Adabiyotlar

1. O'zbekiston Respublikasi "Ta'lim to'g'risida"gi qonuni. 29 avgust 1997 yil.
2. I.Karimov Yuksak ma'naviyat - yengilmas kuch. T. "ma'naviyat", 2008.
3. Dubrovin B.A., Novikov S.P., Fomenko A.T. «Современная геометрия», М. «Наука»,1986 у.
4. Mishenko A.S., Fomenko A.T. «Курс дифференциальной геометрии и топологии». Izd. MGU, 1980 у.
5. M.Xirsh «Дифференциальная топология» Izd. «MIR» Moskva 1979.
6. Нарманов А.У. "Ко'pxilliklar va ularning Eyler bo'yicha xarakteristikasi" Toshkent, 1990 у.
7. А.Я.Нарманов «Дифференциал геометрия» Тошкент, 2003.
8. SH.Kobayasi, K.Nomidzu "Основы дифференциальной геометрии", Moskva, "Наука", 1981 у.
9. Boyto'rayev A.M., Bozarov D.O'. "Problems of modern topology and applications" nomli xalqaro konferensiyasidagi tezis va maqolalar to'plami. Toshkent 2013 у.
10. Bozarov D.O'. "Matematika, mexanika va informatika fanlarining rivojida iste'dodli yoshlarning o'rni" mavzusidagi ilmiy-amaliy seminar tezislar to'plami. Toshkent 2013 у.
11. www.ziyounet.uz
12. www.techlibrary.ru