

861-masala.

Odatda uch xonali sonlarni $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ ko'rinishida yoziladi. Shu son raqamlaridan, lekin ularning teskari tartibida yozilgan son esa $\overline{cba} = 100c + 10b + a$ bo'ladi. Ularni ayirsak: $\overline{abc} - \overline{cba} = (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99a - 99c = 99(a - c)$. Yakuniy hosil bo'lgan ko'paytmaning ko'paytuvchi-laridan biri 99, demak bu ko'paytma ham 9 ga, ham 11 ga karralidir.

862-masala.

Masala shartiga ko'ra $x = \overline{ab} = 10a + b$. Agar bu son raqamlarining orasiga yana uni yozsak, $\overline{aabb} = 1000a + 100a + 10b + b = 1100a + 11b = 11(100a + b)$ soni hosil bo'ladi. Bu esa berilgan $\overline{ab} = 10a + b$ sonidan 66 marta kattadir. Ya'ni, $\overline{aabb} = 66\overline{ab} \Leftrightarrow 11(100a + b) = 66 \times (10a + b) \Rightarrow 100a + b = 60a + 6b \Rightarrow 5b = 40a \Rightarrow b = 8a$. Lekin, a va b raqamlar bo'lganligi uchun, bu tenglikni qanoatlantiruvchi raqam-lar juftligi yagona, ya'ni $a = 1, b = 8$. Haqiqatdan, $1188 = 66 \cdot 18$ dir.

863-masala.

333^{555} va 555^{333} sonlari $111a$ ko'rinishidagi sonlardir. 111 soni esa 37 ga qoldiqsiz bo'linadi, demak yuqoridagi har ikkala son ham, o'z-o'zidan esa yig'indi ham 37 ga bo'linadi.

864-masala.

$11^{11} + 12^{12} + 13^{13}$ sonining oxirgi raqamini topamiz, chunki sonning oxirgi raqami nechaga teng bo'lsa, uni 10 ga bo'lgandagi qoldiq ham shunga teng bo'ladi. Son darajasining oxirgi raqamini topish uchun esa, shu son oxirgi raqaminng o'sha darajasi qaysi raqam bilan tugashi-ni aniqlash kifoya. 11^{11} sonining oxirgi raqami 1 , chunki 1 ning istal-gan darajasi 1 ga tengdir. 12^{12} sonining oxirgi raqami esa quyidagi-cha topiladi: $12^1 = 12 \rightarrow 12^2 = \dots 4 \rightarrow 12^3 = \dots 8 \rightarrow 12^4 = \dots 6 \rightarrow 12^5 = \dots 2$. Ko'rinish tiribdiki, 12 sonining darajasi har 4 -darajada 6 bilan tugaydi. Demak, 12^{12} soni ham 6 raqami bilan tugaydi. 13^{13} sonining oxirgi raqamining 3 raqami bilan tugashini ham yuqoridagi usul yordamida aniqlaymiz. Ularni qo'shsak, hosil bo'lgan yig'indi 0 raqami bilan tugashini, ya'ni 10 ga qoldiqsiz bo'linishini aniqlaymiz.

865-masala.

864-masalaning yechilishiga qarang.

866-masala.

Tub yoyilmasida 5 qatnashgan sonlarga ko'paytirilganda 0 "hosil qiladigan" sonlar hisoblanadi (ko'paytmaning oxirgi raqami nazarda tutilyapti). Sonning tub yoyilmasida 5 soni necha marta qatnashgan bo'lsa, bu son oxiridagi 0 lar soni ham shuncha bo'ladi. 1 dan 100 gacha bo'lgan barcha 5 ga bo'linadigan sonlarni ajratib, ko'paytma shaklida yozib olamiz: $5 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 20 \cdot 25 \cdot 30 \cdot 35 \cdot 40 \cdot 45 \cdot 50 \cdot 55 \cdot 60 \cdot 65 \cdot 70 \cdot 75 \cdot 80 \cdot 85 \cdot 90 \cdot 95 \cdot 100$. Yuqoridagi ko'paytmada qatnashgan sonlardan faqat $25, 50, 75, 100$ sonlarigina 2 ta 0 , ya'ni 00 hosil qiladi. Qolgan ko'paytuvchilar esa faqatgina bittadan 0 hosil qiladi. Demak, ko'paytmamizdagi barcha 0 larning umumiy soni 24 ta bo'ladi.

867-masala.

$10^{15} + 10^{17} - 74$ sonining 9 ga bo'linishini aniqlash uchun har bir qo'shiluvchini 9 ga bo'lgandagi qoldiqni aniqlashimiz kerak. $10^{15} = (9+1)^{15} = 9a + 1$ hamda $10^{17} = (9+1)^{17} = 9b + 1$ ekanligidan foydalanib, $10^{15} + 10^{17} - 74 = 9a + 1 + 9b + 1 - 74 = 9a + 9b - 72 = 9(a + b - 8)$ ni hosil qilamiz. Demak, berilgan ifoda 9 ga qoldiqsiz bo'linar ekan.

868-masala.

$n^3 + 11n = n^3 - n + 12n = n(n^2 - 1) + 12n = (n-1)n(n+1) + 12n$. $(n-1)n(n+1)$ ko'paytma ketma-ket kelgan uchta sonning ko'paytmasi bo'lganligi uchun ushbu yig'indining har bir qo'shiluvchisi 6 ga qoldiqsiz bo'linadi, chunki uchta ketma-ket son orasida kamida bitta juft (2 ga karrali) va bitta 3 ga karralison bor (o'zingiz buni isbotlashga harakat qilib ko'ring), bundan esa yig'indining o'zi ham 6 ga qoldiqsiz bo'linishi kelib chiqadi.

869-871-masalalar.

868-masalaning yechilishiga qarang.

872-masala.

Shartga ko'ra, $\overline{abcde} = 9 \cdot \overline{edcba}$. $a = 9$ hamda $e = 1$ ekanligini aniqlash qiyin emas. Demak, $\overline{9bcd1} = 9 \cdot \overline{1dcb9}$. Endi esa $d = 0$ yoki $d = 1$ ekanligini topib olamiz, chunki $d = 2$ bo'lsa, $9 \cdot 2 = 18$ bo'lib, $\overline{abcde}$ olti xonali son bo'lishi kerak bo'ladi, bu esa mumkin emas. Ikkala holni ham tekshirib ko'ramiz.

$d = 0$. $\overline{9bc01} = 9 \cdot \overline{10cb9}$ bo'lgan-ligi uchun faqat $b = 8$ gina ushbu holni qanoatlantiradi, chunki $9 \cdot b + 8 = \dots 0$. Bu yerda $8 \cdot 9 \cdot 9 = 81$ ko'paytmadan "dilda" qoldiriladigan raqamdir. Endi esa $c = 9$ ni topish mumkin. Biz $\overline{edcba}$ sonni qidirayapmiz, bu son esa 10989 dir.

Yakuniy yechim sifatida esa 10989 sonini olamiz.

873-masala.

$\overline{abc} - \overline{cba} \neq k^2$ kanligini isbotlashimiz kerak ($a > c$ deb olamiz). 861-masalada $\overline{abc} - \overline{cba} = 99(a - c)$ ekanligini topgan edik. Ushbu ifoda biror sonning kvadratiga teng bo'lishi uchun $a - c = 11m^2$ bo'lishi kerak, lekin a va c raqamlar bo'lganligi sababli, $m = 0$ dan boshqa hol mavjud emas. Lekin, $m = 0$ da $\overline{abc} = \overline{cba}$, bu hol esa nazarda tutilmagan.

874-masala.

$35x + 65y$ ifodani quyidagicha shakl almashtiramiz:

$35x + 65y = (18x + 48y) + (17x + 17y) = 6(3x + 8y) + 17(x + y)$. Yig'indining har bir qo'shiluvchisi 17 ga qoldiqsiz bo'linganligi uchun yig'indi ham 17 ga bo'linadi.

875-masala.

Toq sonlar umumiy holda $a = 2k - 1$ yoki $a = 2k + 1$ ko'rinishda yozilishini bilamiz. Ikkita ixtiyoriy $a = 2k + 1$ va $a = 2m + 1$ toq sonlarni olamiz. Ular kvadratlarning yig'indisi esa quyidagi ifodaga tengdir:

$a^2 + b^2 = (2k + 1)^2 + (2m + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4m^2 + 4m + 1 = 4k^2 + 4m^2 + 4k + 4m + 2 = 2(2m^2 + 2k^2 + 2m + 2k + 1)$. Lekin, toq sonni 2 ga ko'paytirib, biror sonning kvadratiga teng bo'lgan sonni hosil qilib bo'lmaydi (o'zingiz buni isbotlashga harakat qilib ko'ring).

876-masala.

875-masalaning yechilishiga qarang.

877-masala.

$169 = 13^2$ bo'lganligi uchun $n^2 + 5n + 16 = 13^2 k$ bo'lishi kerak. De-mak, $n^2 + 5n + 16$ ifoda biror m^2 songa teng bo'lishi kerak. Lekin, bu ifoda n ning hech qanday butun qiymatida biror sonning kvadratiga teng bo'lmaydi (o'zingiz buni isbotlashga harakat qilib ko'ring).

878-masala.

$a^2 + b^2$ yig'indi uchun quyidagi ikki hol bo'lishi mumkin: a) $a = 3k \pm 1, b = 3m$; b) $a = 3k, b = 3m$. Lekin, $a = 3k \pm 1, b = 3m$ holda $a^2 + b^2 = 9k^2 + 9m^2 \pm 6k + 1$ bo'lib, bu ifodani 3 ga bo'lganda 1 qol-diq qoladi. Faqatgina ikkinchi hol masala shartini bajaradi, ya'ni $a^2 + b^2 = 9(k^2 + m^2)$ bo'lib, bu ko'paytma 3 ga bo'linadi. Ko'rinib tu-ribdiki, faqat $a = 3k, b = 3m$ hol to'g'ri kelayapti.

Izoh. $a = 3k \pm 1$ yozuvi a sonini 3 ga bo'lganda 1 yoki 2 qoldiq qolishini bildiradi (Nima uchun?).

879-masala.

Ko'rsatma. $n = 7k; 7k + 1; 7k + 2; 7k + 3; 7k + 4; 7k + 5; 7k + 6$ hollarni ko'ring.

880-masala.

$p > 3$ va p - tub son bo'lganligi uchun, bu sonning 24 bilan EKUB 1 ga teng. Shuning uchun $p^2 - 1$ ifodaning o'rniga $p(p^2 - 1) = (p - 1)p(p + 1)$ ifodani olishimiz ham mumkin. Bu ko'paytma ket-ma-ket kelgan uchta sonning ko'paytmasidan iborat. Lekin, p tub son, shu bilan birga toq hamdir, shuning uchun $p - 1$ va $p + 1$ sonlardan bi-ri 2, biri esa 4 ga aniq karralidir. Demak, ularning ko'paytmasi 8 ga karralidir. Ketma-ket kelgan uchta sonning ko'paytmasi 3 ga bo'lina-di. O'zaro tub bo'lgan a va b sonlarning har biriga bo'lingan son ularning ko'paytmasiga ham bo'linishidan foydalansak, $(p - 1)p(p + 1)$ ko'paytmaning 24 ga qoldiqsiz bo'linishini isbotlay-miz. p va 24 sonlarining EKUB 1 bo'lganligi uchun, 24 ga karraliligi jihatidan bu ikki $((p - 1)p(p + 1))$ va $(p - 1)(p + 1)$ sonlar bir xil xos-saga egadir, ya'ni ularning har ikkalovi 24 ga bo'linadi.

881-masala.

$n = 2$ bo'lganda $n^2 + 8 = 12$ hamda $n = 3$ bo'lganda $n^2 + 8 = 17$. Qol-gan hollarni ko'ramiz. Istalgan $n > 3$ tub sonni $n = 6a \pm 1$ ko'rinishida yozish mumkin. Shundan foydalansak, $n^2 + 8 = (6a \pm 1)^2 + 8 = 36a^2 \pm$

$\pm 12k + 9 = 3(12k^2 \pm 4k + 3)$ dir. Bu son esa 3 ga bo'lingani uchun tub son emas. Demak, faqat $n=3$ hol masala shartini qanoatlantiradi.

882-masala.

880-masalaning yechilishiga qarang.

883-masala.

$n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$ Bu son esa istalgan $n > 1$ da murakkab sonidir.

884-masala.

$x + y = xy \Leftrightarrow xy - x - y = 0 \Leftrightarrow xy - x - y + 1 = 1 \Rightarrow (x-1)(y-1) = 1$. x va y sonlarning butun ekanligidan

foydalansak, $\begin{cases} x-1=1 \\ y-1=1 \end{cases}$ va $\begin{cases} x-1=-1 \\ y-1=-1 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yechish kifoyaligini aniqlaymiz. Bu ikki

sistemani yechib esa, $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ va $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ yechimlarni topamiz.

885-masala.

Ko'rsatma. 1-,2-,3-misollarda $\frac{b}{\sqrt{a} + \sqrt{a+b}} = \sqrt{a+b} - \sqrt{a}$, 4-misolda esa $\frac{b}{a(a+b)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b}$ tengliklardan foydalaning.

5-misolni esa quyidagi yo'l bilan ishlaymiz: $n(n+1)(n+2) \times$

$\times (n+3) + 1 = (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1 = (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$

886-masala.

885-masala 5-misolining yechilishiga qarang.

887-masala.

1-misol.

$$\frac{a^3(c-b) + b^3(a-c) + c^3(b-a)}{a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a)} = \frac{a^3c - a^3b + ab^3 - b^3c + c^3(b-a)}{a^2c - a^2b + ab^2 - b^2c + c^2(b-a)} = \frac{c(a^3-b^3) - ab(a^2-b^2) - c^3(a-b)}{c(a^2-b^2) - ab(a-b) - c^2(a-b)} = \frac{(a-b)(a^2c + abc + b^2c - a^2b - ab^2 - c^3)}{(a-b)(ac + bc - ab - c^2)} =$$

$$= \frac{a^2(c-b) + ab(c-b) - c(c^2-b^2)}{a(c-b) - c(c-b)} = \frac{(c-b)(a^2 + ab - c^2 - bc)}{(c-b)(a-c)} = \frac{(a-c)(a+c) + b(a-c)}{a-c} = \frac{(a-c)(a+b+c)}{a-c} = a + b + c.$$

2-misol.

$$a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2) = ab^2 - ac^2 + bc^2 - a^2b + c(a^2 - b^2) = -ab(a-b) - c^2(a-b) + c(a+b)(a-b) =$$

$$= (a-b)(-ab - c^2 + ac + bc) = (a-b)(-b(a-c) + c(a-c)) = (a-b)(a-c)(c-b) = (a-b)(b-c)(c-a).$$

3-misol.

$$(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = (a+b+c-a)((a+b+c)^2 + a(a+b+c) + a^2) - (b^3 + c^3) = (b+c)(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac +$$

$$+ 2bc + a^2 + ab + ac + a^2) - (b+c)(b^2 - bc + c^2) = (b+c)(3a^2 + b^2 + c^2 + 3ab + 3ac + 2bc - b^2 + bc - c^2) = 3(b+c)(a^2 + ab +$$

$$+ ac + bc) = 3(b+c)(a(a+b) + c(a+b)) = 3(a+b)(b+c)(a+c).$$

4-misol.

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 - 3abc = (a+b+c)((a+b)^2 - (a+b)c + c^2) - 3ab \times (a+b+c) = (a+b+c)(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab) = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ac - bc - ab).$$

5-misol.

$$(a+b+c)^3 - (a+b-c)^3 - (b+c-a)^3 - (c+a-b)^3 = (a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 +$$

$$+ 6abc) - (a^3 + b^3 - c^3 + 3a^2b + 3ab^2 - 3b^2c + 3bc^2 - 3a^2c + 3ac^2 - 6abc) - (b^3 + c^3 - a^3 + 3b^2c + 3bc^2 - 3ab^2 + 3ab^2 + 3b^2c +$$

$$+ 3bc^2 + 3a^2c - 3ac^2 - 6abc) - (a^3 - b^3 + c^3 - 3a^2b + 3ab^2 + 3b^2c - 3bc^2 + 3a^2c + 3ac^2 - 6abc) = 24abc$$

6-misol.

$$(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3 = (b-c+c-a)((b-c)^2 - (b-c)(c-a) + (c-a)^2) - (b-a)^3 = (b-a) \times (b^2 - 2bc + c^2 -$$

$$- bc + ab + c^2 - ac + c^2 - 2ac + a^2 - b^2 + 2ab - a^2) = (b-a)(3c^2 - 3bc + 3ab - 3ac) = 3(b-a) \times (c(c-b) - a(c -$$

$$- b)) = 3(b-a)(c-b)(c-a) = 3(a-b)(a-c)(c-b).$$

888-masala.

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$ tenglikning chap tomonini umumiy maxrajga keltiramiz va har ikkala tomon-dan

maxrajlarini yo`qotamiz.

$$(ab+bc+ac)(a+b+c) = abc \Leftrightarrow ab(a+b+c) + bc(a+b+c) + ac(a+b+c) = abc \Rightarrow b(a+c)(a+b+c) = ac(b-a-b-c) \Rightarrow b(a+c)(a+b+c) = -ac(a+c) = (a+c)(ab+b^2+bc+ac) = (a+c)(a+b)(b+c) = 0 \Rightarrow a+c=0; a+b=0; b+c=0.$$

Demak, $(a;b;c)$ sonlar uchligi $(a;-a;c)$ yoki $(a;b;-a)$ shartni qanoatlantiruvchi sonlar uchligidir. Bu yerdan

esa $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{1}{a^3+b^3+c^3}$ ekanligini osongina ko`rish mumkin.

889-masala.

887-masala 1-misolining yechilishiga qarang.

890-masala.

$$\frac{a^2-bc}{a(1-bc)} = \frac{b^2-ac}{b(1-ac)} \text{ tenglikka } \frac{m}{n} = \frac{k}{l} \Leftrightarrow ml = nk \text{ xossani tadbiq etamiz:}$$

$$(a^2-bc)b(1-ac) = (b^2-ac)a(1-bc) \Rightarrow a^2b - a^3bc - b^2c + ab^2c^2 = ab^2 - a^2c - ab^3c + ab^2c^2 \Rightarrow ab(a-b) + c(a+b)(a-b) - abc(a+b)(a-b) - abc^2(a-b) = 0 \Rightarrow (a-b)(ab+ac+bc-a^2bc-ab^2c-abc^2) = 0$$

$$a \neq b \text{ shartdan foydalanamiz: } ab+bc+ac = a^2bc+ab^2c+abc^2 \Rightarrow ab+bc+ac = abc(a+b+c).$$

Tenglikning har ikkala tomonidan abc ni qavsdan tashqariga chiqarib yuborsak, quyidagilar hosil bo`ladi:

$$abc\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - a - b - c\right) = 0. \text{ So`nggi tenglikdan esa } abc = 0 \text{ yoki } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c \text{ ni hosil qilishimiz}$$

mumkin.

891-masala.

$x+y=a, xy=b$ berilgan bo`lsa:

$$1\text{-misol. } x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = a^3 - 3ab.$$

2-misol.

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = ((x+y)^2 - 2xy)^2 - 2(xy)^2 = (a^2 - 2b)^2 - 2b^2 = a^4 - 4a^2b + 2b^2.$$

3-misol.

$$x^5 + y^5 = (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^2(x+y) = (a^2 - 2b)(a^3 - 3ab) - ab^2 = a^5 - 5a^3b + 5ab^2.$$

4-misol.

$$x^6 + y^6 = (x^3 + y^3)^2 - 2x^3y^3 = (a^3 - 3ab)^2 - 2b^3 = a^6 - 6a^4b + 9a^2b^2 - 2b^3.$$

892-masala.

1-misol.

$$\begin{aligned} \frac{4}{1+x^4} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} &= \frac{4}{1+x^4} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)} = \\ &= \frac{4}{1+x^4} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{2}{1-x^2} = \frac{4}{1+x^4} + \frac{2-2x^2+2+2x^2}{(1-x^2)(1+x^2)} = \frac{4}{1+x^4} + \\ &+ \frac{4}{1-x^4} = \frac{4-4x^4+4+4x^4}{(1+x^4)(1-x^4)} = \frac{8}{1-x^8}. \end{aligned}$$

2-misol.

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 - bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2 - ac}{(b+c)(a+b)} + \frac{c^2 - ab}{(a+c)(b+c)} = \\ & \frac{(a^2 - bc)(b+c) + (b^2 - ac)(a+c)}{(a+b)(a+c)(b+c)} + \frac{c^2 - ab}{(a+c)(b+c)} = \\ & = \frac{a^2b + a^2c - b^2c - bc^2 + ab^2 + b^2c - a^2c - ac^2}{(a+b)(a+c)(b+c)} + \frac{c^2 - ab}{(a+c)(b+c)} = \\ & = \frac{ab(a+b) - c^2(a+b)}{(a+b)(a+c)(b+c)} + \frac{c^2 - ab}{(a+c)(b+c)} = \frac{ab - c^2}{(a+c)(b+c)} + \\ & + \frac{c^2 - ab}{(a+c)(b+c)} = 0. \end{aligned}$$

3-misol.

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1} + \\ & + \sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1} = \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} = |\sqrt{x-1}+1| + \\ & + |\sqrt{x-1}-1| = \sqrt{x-1}+1+1-\sqrt{x-1} = 2. \end{aligned}$$

So`nggi tengligimizda masalaning shartida berilgan  $1 \leq x \leq 2$  munosabat hamda son absolyut qiymatining ta`rifidan foydalanildi.

4-misol.

$$\frac{\sqrt{m+x} + \sqrt{m-x}}{\sqrt{m+x} - \sqrt{m-x}} \text{ kasrning qiymatini topish uchun avvalo, } \sqrt{m+x} \text{ hamda } \sqrt{m-x} \text{ ifodalarning qiymatini}$$

hisoblasak ma`qulroq bo`ladi. $x = \frac{2mn}{n^2+1}$ ifodani har ikkala ildizning qiymatini aniqlash uchun ularning har

ikkaloviga x ning o`rniga qo`yamiz va shakl almashtirishlarni bajaramiz.

$$\begin{aligned} \sqrt{m+x} &= \sqrt{m + \frac{2mn}{n^2+1}} = \sqrt{m(1 + \frac{2n}{n^2+1})} = \sqrt{m \frac{(n+1)^2}{n^2+1}} = (n+1) \sqrt{\frac{m}{n^2+1}} \\ \sqrt{m-x} &= \sqrt{m - \frac{2mn}{n^2+1}} = \sqrt{m(1 - \frac{2n}{n^2+1})} = \sqrt{m \frac{(n-1)^2}{n^2+1}} = |n-1| \sqrt{\frac{m}{n^2+1}} = \\ &= (1-n) \sqrt{\frac{m}{n^2+1}} \end{aligned} \quad \text{ifodalarni kasrdagi mos joylariga olib}$$

$$\text{borib qo`ysak, } \frac{(n+1)\sqrt{\frac{m}{n^2+1}} + (1-n)\sqrt{\frac{m}{n^2+1}}}{(n+1)\sqrt{\frac{m}{n^2+1}} - (1-n)\sqrt{\frac{m}{n^2+1}}} = \frac{n+1+1-n}{n+1-1+n} = \frac{2}{2n} = \frac{1}{n} \text{ ni topamiz.}$$

893-masala.

1-misol.

$$x^2 - 2|x-1| = 2 \text{ tenglamani yechish uchun son absolyut qiymatining xossasi } |a| = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, a \leq 0 \end{cases} \text{ dan}$$

foydalanamiz. Demak, $|x-1| = \begin{cases} x-1, x \geq 1 \\ 1-x, x \leq 1 \end{cases}$ ekanligidan:

$x \geq 1 \Rightarrow x^2 - 2(x-1) = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 2 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0; x = 2$. Lekin, $x \geq 1$ shartni faqatgina $x = 2$ yechim qanoatlantiradi.

$x \leq 1 \Rightarrow x^2 - 2(1-x) = 2 \Rightarrow x^2 - 2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 - \sqrt{5}; x_2 = -1 + \sqrt{5}$. Lekin, $x \leq 1$ shartni faqat $x = -1 - \sqrt{5}$ yechim qanoatlantiradi. Demak, tenglamaning ildizlari $x = 2$ va $x = -1 - \sqrt{5}$ sonlaridir.

2-misol. $(x+1)|x-2|=2$ tenglamani yechish uchun ham xuddi yuqori-dagidek ish olib boriladi. Ya'ni:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, x \geq 2 \\ 2-x, x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+1)(x-2)=2, x \geq 2 \\ (x+1)(2-x)=2, x \leq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 4 = 0, x \geq 2 \\ x^2 - x = 0, x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}, x_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{2} (x \geq 2);$$

$$x_3 = 0, x_4 = 1 (x \leq 2).$$

Demak, tenglamaning ildizlari $x_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}, x_2 = 0, x_3 = 1$ lardir.

3-misol. $||x-1|-3|=2$ tenglamani yechish uchun yuqoridagilardan farqli yo'l tutamiz, ya'ni:

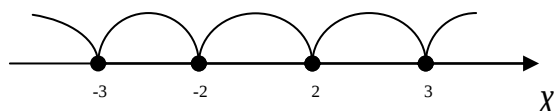
$$||x-1|-3|=2 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-1|-3=2 \\ |x-1|-3=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x-1|=5 \\ |x-1|=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-1=5 \\ x-1=-5 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1=1 \\ x-1=-1 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=6 \\ x=-4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ x=0 \end{cases} \end{cases} \text{ Demak, tenglama yechimlari}$$

$x_1 = 6, x_2 = -4, x_3 = 2, x_4 = 0$ sonlaridir.

4-misol. $|x^2-9|+|x^2-4|=5$ tenglamani yechish uchun modul belgisi ostidagi ifodalarning qabul qiladigan

ishoralarini aniqlashimiz kerak bo'ladi, ya'ni: $\begin{cases} x^2-9=0 \\ x^2-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm 3 \\ x=\pm 2 \end{cases}$ Ushbu sonlarni son o'qiga qo'yamiz va

oraliqlardagi ishoralarini tekshiramiz:



Endi esa tenglamani hosil bo'lgan oraliqlarning har birida son absolyut qiymatining ta'rifidan foydalanib alohida-alohida yechib chiqamiz.

1. $x \leq -3$ oraliqda: $x^2-9+x^2-4=5 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$.

Lekin, faqat $x=-3$ yechim berilgan oraliqda bor. Demak, $x=-3$.

2. $-3 \leq x \leq -2$ oraliqda: $-(x^2-9)+x^2-4=5 \Rightarrow 0=0$. Ushbu ko'rinishdagi tenglamaning yechimi butun haqiqiy sonlar to'plamidan iboratdir, lekin biz ushbu tenglamaga $-3 \leq x \leq -2$ oraliqda ega bo'ldik. Shuning uchun ham $-3 \leq x \leq -2$ oraliqdagi barcha haqiqiy sonlar bu tenglamaning yechimi bo'ladi.

3. $-2 \leq x \leq 2$ oraliqda: $-(x^2-9)-(x^2-4)=5 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x_1=\pm 2$. Ushbu sonlarning har biri berilgan oraliqda mavjudligi uchun ularning ikkalovi ham yechim bo'ladi, lekin $x=-2$ yechim allaqachon qabul qilinganligi uchun uni alohida belgilash shart emas. Demak, $x=2$.

4. $2 \leq x \leq 3$ oraliqda: $-(x^2-9)+(x^2-4)=5 \Rightarrow 0=0$. Xuddi ikkinchi holdagidek, bu yerda ham yechim qilib $2 \leq x \leq 3$ oraliq olinadi.

5. $x \geq 3$ oraliqda: $x^2-9+x^2-4=5 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x_1=-3, x_2=3$. Lekin, oraliqqa qo'yilgan shartni faqat $x=3$ yechimgina qanoatlantiradi.

Demak, tenglamaning umumiy yechimi qilib, $[-3;-2] \cup [2;3]$ oraliqni olamiz.

5-misol. $x^2+3x+\frac{6}{2-3x-x^2}=1$ tenglamani yechishda boshqa o'zgaruvchi kiritish usulidan foydalanamiz,

ya'ni $2-3x-x^2=t \neq 0$ o'zgartirishni kiritamiz, bu yerdan $x^2+3x=2-t$ ekanligini aniqlab olamiz va tenglamadagi mos o'rinlariga olib borib qo'yamiz:

$$2-t+\frac{6}{t}=1 \Rightarrow t-\frac{6}{t}-1=0 \Rightarrow t^2-t-6=0 \Rightarrow t_1=-2, t_2=3. \text{ Endi esa, tenglamaning asosiy o'zgaruvchisi,}$$

ya'ni x ni topamiz. $2-3x-x^2=-2$ va $2-3x-x^2=3$ tenglamalarni yechib,

$$x_1 = -4, x_2 = 1, x_3 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}, x_4 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \text{ yechimlarni hosil qilamiz.}$$

6-misol. $x^2 + 6x + 5 = t \neq 0$ belgilashni kiriting.

7-misol. $x^2 + \frac{1}{x^2} - 5x - \frac{5}{x} + 8 = 0$ tenglamani yechish uchun ularni quyidagicha guruhlaymiz:

$$(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 5(x + \frac{1}{x}) + 8 = 0.$$

Endi esa, $x + \frac{1}{x} = t$ belgilashni kiritamiz va bu yerdan $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ ekanligini aniqlab olamiz. Demak, $t^2 - 2 + 5t + 8 = 0 \Rightarrow t^2 - 5t + 6 = 0$. Ushbu tenglamani yechib, $t_1 = 2, t_2 = 3$ ga ega bo'lamiz. Yana 5-misoldagidek, x ni topish uchun $x + \frac{1}{x} = 2$ va $x + \frac{1}{x} = 3$ tenglamalarni yechamiz. Ularni yechib,

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, x_3 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ ildizlarga ega bo'lamiz.}$$

8-misol. $x(x^2 - 1)(x + 2) = 0 \Rightarrow x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$. Tenglikning har ikkala tomonini x^2 ga bo'lib, $x^2 + \frac{2}{x} - 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglamani yechishini esa 7-misolda keltirib o'tdik.

894-masala.

1-misol. $\begin{cases} x^2 + xy = 10 \\ y^2 + xy = 15 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini quyidagicha ikki xil usul bilan yechishimiz mumkin.

1-usul. $\begin{cases} x(x + y) = 10 \\ y(x + y) = 15 \end{cases}$ Ushbu tenglamalar sistemasidan $\frac{x}{y} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}y$ ni hosil qilamiz va tenglamalarning

istalgan biriga olib borib qo'yamiz: $(\frac{2}{3}y)^2 + \frac{2}{3}y \cdot y = 10 \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 3$. Bu yerdan esa $x = \pm 2$ ni

aniqlashimiz mumkin. Demak, yechim: $(-2; -3)$ va $(2; 3)$.

2-usul. Har ikkala tenglamani qo'shib, $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 = 25 \Rightarrow x + y = \pm 5$. Buni tenglamalarga olib borib qo'yib, $x = \pm 2, y = \pm 3$ ni hosil qilamiz.

2-misol. $\begin{cases} (x-1)(y-1) = 6 \\ (x+2)(y+2) = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy - x - y + 1 = 6 \\ xy + 2x + 2y + 4 = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = x + y + 5 \\ xy = -2(x + y) + 26 \end{cases}$ tenglamalarning o'ng

tomonlarini tenglashtirib, $x + y = 7$, uni tenglamalardan biriga olib borib qo'ysak, $xy = 12$ ga ega bo'lamiz.

Viyet teoremasiga ko'ra, $x = 3, y = 4$ yoki $x = 4, y = 3$ ni hosil qilamiz. Demak, yechim $(3; 4)$ va $(4; 3)$ ekan.

3-misol. $\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2 + y^2 + xy = 19 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yechish uchun, birinchi tenglamadan $x + y = 11 - xy$ ni

hosil qilamiz. Har ikkala tomonini kvadratga oshirib, $x^2 + y^2 = x^2y^2 - 2xy + 121$ ni hosil qilamiz. Bu va $x^2 + y^2 = 19 - xy$ tenglikning o'ng tomonlarini tenglashtirsak,

$$x^2y^2 - 24xy + 121 = 19 - xy \Rightarrow (xy)^2 - 23xy + 102 = 0 \Rightarrow (xy)_1 = 6,$$

$$(xy)_2 = 17 \Rightarrow (x + y)_1 = 5, (x + y)_2 = -6.$$

$\begin{cases} xy = 6 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ ni hosil qilamiz. $\begin{cases} xy = 17 \\ x + y = -6 \end{cases}$ ushbu tenglamalar sistemasi esa haqiqiy ildizlarga ega

emas.

4-misol. $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18 \\ x^2 - y^2 + x - y = 6 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yechish uchun har ikkala tenglamani qo'shib

yuboramiz: $2x^2 + 2x = 24 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -4$. Ularni ayirib yuborsak,

$2y^2 + 2y = 12 \Rightarrow y^2 + y - 6 = 0 \Rightarrow y_1 = 2, y_2 = -3$. Tenglamalar sistemasining yechimi qilib esa (3;2), (3;-3), (-4;2), (-4;-3) sonlar juftligi yechim qilib olinadi.

5-misol. $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{4} \end{cases}$ Birinchi tenglamaning har ikkala tomonini kvadratga oshirsak, $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy} = \frac{9}{4}$ ga

ega bo'lamiz, $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{4}$ ni o'z o'rniga olib borib qo'ysak, $xy = 2$ ga ega bo'lamiz. Birinchi tenglamaga olib

borib qo'ysak, $x + y = 3$ ni hosil qilamiz. Viyet teoremasini qo'llab, (1;2), (2;1) yechimlarni hosil qilamiz.

6-misol. $\begin{cases} x^4 + y^4 = 17(x + y)^2 \\ xy = 2(x + y) \end{cases}$ Ushbu tenglamalar sistemasining ikkinchi tenglamasidan $x + y = \frac{xy}{2}$ ni hosil

qilamiz va birinchi tenglamaga olib borib qo'yamiz:

$x^4 + y^4 = 17\left(\frac{xy}{2}\right)^2 \Rightarrow 4x^4 - 17x^2y^2 + 4y^4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4y^2, x^2 = \frac{1}{4}y^2$ ni hosil qildik.

$x = 2y \rightarrow 2y^2 = 6y \Rightarrow y_1 = 0, y_1 = 3 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 6$

$x = -2y \rightarrow -2y^2 = -2y \Rightarrow y_1 = 0, y_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2$

$x = \frac{1}{2}y \rightarrow \frac{1}{2}y^2 = 3y \Rightarrow y_1 = 0, y_2 = 6 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$

$x = -\frac{1}{2}y \rightarrow -\frac{1}{2}y^2 = y \Rightarrow y_1 = 0, y_2 = -2 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1$.

Demak, tenglamalar sistemasining yechimi (0;0), (6;3), (-2;1), (3;6), (1;-2) sonlar juftliklaridir.

7-misol. $\begin{cases} 2y^2 - 4xy + 3x^2 = 17 \\ y^2 - x^2 = 16 \end{cases}$ tenglamalar sistemasining tenglamalarini ayirib, $y^2 - 4xy + 4x^2 = 1$

tenglamani hosil qiling, so'ngra $y - 2x = -1, y - 2x = 1 \Leftrightarrow y = 2x - 1, y = 2x + 1$ tengliklarni hosil qilib yeching.

8-misol. $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21 \\ y^2 - 2xy + 15 = 0 \end{cases}$ sistemaning ikkinchi tenglamaidan y ni x orqali ifodalab oling.

895-masala.

1-misol. $\begin{cases} xy(x + y) = 6 \\ x^3 + y^3 = 9 \end{cases}$ sistemani yechishda $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$ tenglikdan foydalaning.

2-misol. $\begin{cases} (x - y)(x^2 - y^2) = 7 \\ (x + y)(x^2 + y^2) = 175 \end{cases}$ sistema quyidagicha ishlanishi mumkin:

$\begin{cases} (x - y)^2(x + y) = 7 \\ (x^2 + y^2)(x + y) = 175 \end{cases} \Rightarrow \frac{(x - y)^2}{x^2 + y^2} = \frac{1}{25} \Rightarrow 12x^2 - 25xy + 12y^2 = 0 \Rightarrow$

Ushbu hosil bo'lgan x ning qiymatlarini

$\Rightarrow x = \frac{3}{4}y, x = \frac{4}{3}y$

tenglamalardan biriga qo'yib, uning yechimlarini topish mumkin.

3-misol.
$$\begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x \\ 1 + y^2 = 5(1 + x^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x^2 - 16) = y(y^2 - 4) \\ y^2 = 5x^2 + 4 \end{cases} \Rightarrow x(x^2 - 16) = 5x^2y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x^2 - 16 = 5xy \Rightarrow y = \frac{x^2 - 16}{5x}$$
 Hosil bo`lgan ifodani

tenglamalarning istalgan biriga qo`yib, tenglama ildizlarini topishimiz mumkin.

4-misol.

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 = 5 \\ x^4y^2 + x^2y^4 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)(x^2 + y^2) = 5 \\ (x^2 + y^2)x^2y^2 = 20 \end{cases} \Rightarrow \frac{x+y}{x^2y^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + y = \frac{x^2y^2}{4}$$

$x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 = (x+y)^3 - 2xy(x+y)$ ga qo`yib sistemani yechiladi.

5-misol.
$$\begin{cases} 2(x+y) = 5xy \\ 8(x^3 + y^3) = 65 \end{cases}$$
 Bu tenglamalar sistemasini yechish uchun $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$

tenglikdan foydalanib, $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = (\frac{5}{2}xy)^3 - 3xy \cdot \frac{5}{2}xy = \frac{125}{8}x^3y^3 - \frac{15}{2}x^2y^2$ yoki,

$$\frac{125}{8}x^3y^3 - \frac{15}{2}x^2y^2 - \frac{65}{8} = 0$$
 tenglamani topamiz va bu uni yechib, $xy = 1$ ni topamiz. Ya`ni, berilgan

tenglamalar sistemasini yechish uchun
$$\begin{cases} x + y = \frac{5}{2} \\ xy = 1 \end{cases}$$
 tenglamalar sistemani yechsak kifoya. Bu yerdan osongina

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ va } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 2 \end{cases} \text{ yechimlarni topishimiz mumkin. Demak, berilgan sistemaning yechimi } (2; \frac{1}{2}) \text{ va } (\frac{1}{2}; 2)$$

ekan.

6-misol.
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 19(x-y) \\ x^3 + y^3 = 7(x+y) \end{cases}$$
 Birinchi tenglamadan $(x-y)(x^2 + xy + y^2) = 19(x-y)$ yoki
$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = 19 \end{cases}$$

ni, ikkinchi tenglamadan esa
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}$$
 ni aniqlaymiz. Bu tenglamalar ayni bir sistemaning bir vaqtda

bajarilishi kerak bo`lgan shartlaridir, shuning uchun quyidagi to`rtta tenglamalar sistemalarini yechamiz:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = 19 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x^2 + xy + y^2 = 19 \end{cases}$$

Bu sistemalarni yechib, barcha yechimlarni aniqlashingiz mumkin.

7-misol.

$$\begin{cases} (x+y)(x^2 - y^2) = 9 \\ (x-y)(x^2 + y^2) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2(x-y) = 9 \\ (x-y)(x^2 + y^2) = 5 \end{cases}$$

Ushbu tenglamalar sistemasida $x = y$ ko`rinishdagi yechimlar bo`lmaganligi uchun, birinchi sistemani ikkinchi sistemaga bo`lishimiz mumkin:

$$\frac{(x+y)^2(x-y)}{(x-y)(x^2 + y^2)} = \frac{9}{5} \Rightarrow \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 + y^2} = \frac{9}{5} \Rightarrow 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0.$$

Bu tenglamani x ga nisbatan yechib,

$$x = \frac{y}{2} \text{ va } x = 2y \text{ ni hosil qilamiz.}$$

$$x = \frac{y}{2} \text{ holda: } \frac{3}{2}y \cdot (\frac{y^2}{4} - y^2) = 9 \Rightarrow -\frac{9}{8}y^3 = 9 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow x = -1.$$

$x = 2y$ holda: $3y \cdot 3y^2 = 9 \Rightarrow 9y^3 = 9 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 2$. Demak, sistema ikkita $(-1; -2)$ va $(2; 1)$ yechimlarga ega.

8-misol.
$$\begin{cases} xy + 24 = \frac{x^3}{y} \\ xy - 6 = \frac{y^3}{x} \end{cases}$$
 Bu ikki tenglamani ko'paytirib, $x^2y^2 + 18xy - 144 = x^2y^2$ yoki $xy = 8$ ni hosil qilamiz.

Demak,
$$\begin{cases} \frac{x^3}{y} = 32 \\ xy = 8 \end{cases}$$
 ga ega bo'lamiz va bu yerdan $x^4 = 256 \Rightarrow x = \pm 4$ ni topamiz. Demak, $y = \pm 2$ ekan.

896-masala.

1) $ax^2 + bx + c = 0$ tenglama teng ildizlarga ega bo'lishi uchun $b^2 - 4ac = 0$ bo'lishi kerak, shuning uchun: $r^2 - 4(2r - 3) = 0 \Rightarrow r^2 - 8r + 12 = 0 \Rightarrow r_1 = 2, r_2 = 6$.

2) modullari teng va ishoralari qarama-qarshi ildizlarga teng bo'lishi uchun Viyet teoremasiga ko'ra $-r = 0$ va $r^2 - 4(2r - 3) > 0$. $r = 0$ qitmat ikkinchi shartni ham qanoatlantiradi.

897-masala.

$x^2 - rx - r = 0$ bo'lganligi uchun, Viyet teoremasiga asosan

$$x_1^3 + x_2^3 + (x_1x_2)^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) + (x_1x_2)^3 = r^3 - 3(-r)r + (-r)^3 = r^3 + 3r^2 - r^3 = 3r^2 > 0$$

Bu tengsizlik r ning istalgan $r \neq 0$ qiymatlari uchun o'rinlidir.

898-masala.

Berilgan $a^2x^2 + (b^2 + a^2 - c^2)x + b^2 = 0$ tenglamaning diskriminantini topsak,

$D = (b^2 + a^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 = (b^2 + a^2 - c^2 - 2ab)(b^2 + a^2 - c^2 + 2ab) = ((a - b)^2 - c^2)((a + b)^2 - c^2)$ ga ega bo'lamiz. Shartda berilganiga ko'ra, $(a + b)^2 > c^2$ va $(a - b)^2 < c^2$. Bularni boshqacha $(a + b)^2 - c^2 > 0$ va $(a - b)^2 - c^2 < 0$ ko'rinishida ham yozishimiz mumkin. Demak, berilgan tenglamaning diskriminanti manfiy va musbat sonlarning ko'paytmasidan iborat, shuning uchun $D < 0$ va tenglama yechimlarga ega emas.

899-masala.

Berilgan tenglama $x^2 + (r \pm \frac{1}{r})px + (r \pm \frac{1}{r})^2q = 0$ ko'rinishida bo'lishi kerak.

$x^2 + px + q = 0$ tenglama haqiqiy ildizlarga ega ekanligi $p^2 - 4q > 0$ uchundir. Ikkinchi(asosiy) tenglamaning

$$D = ((r \pm \frac{1}{r})p)^2 - 4q(r \pm \frac{1}{r})^2 = p^2(r \pm \frac{1}{r})^2 - 4q(r \pm \frac{1}{r})^2 = (p^2 - 4q) \times$$

diskriminantini topsak,

$$\times (r \pm \frac{1}{r})^2 > 0$$

Demak, ikkinchi tenglama ham istalgan $r \neq 0$ larda yechimlarga ega.

900-masala.

901-masala.

Avvalo, $x^4 - (a + b)x^2 + ab = 0$ tenglamani ishlaymiz. Bunda $x^2 = t \geq 0$ deb olib, $t^2 - (a + b)t + ab = 0$ tenglamaga ega bo'lamiz va Viyet teoremasidan foydalanib, $t_1 = a, t_2 = b$ larni hosil qilamiz. Masala shartiga ko'ra, tenglama to'rtta ildizga ega, lekin bu ildizlar $x_{1,2} = \pm\sqrt{a}$ va $x_{3,4} = \pm\sqrt{b}$ korinishidagi sonlardir. Demak, $a \geq 0$ va $b \geq 0$ bolishi shart.

902-masala.

Tenglamaning diskriminantini topib, ildizlar mavjudligi uchun musbat sonlik sharti asosida tekshiramiz:

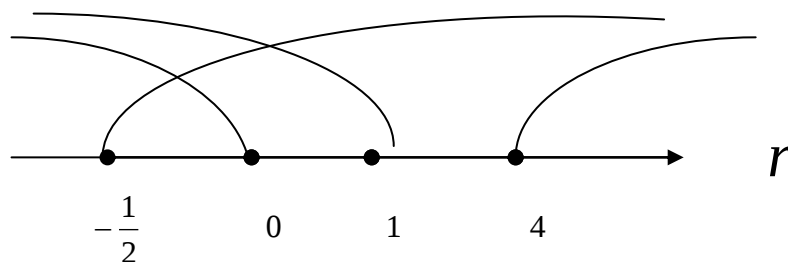
$$\frac{D}{4} = (r-1)^2 - (2r+1) = r^2 - 4r > 0 \text{ va bundan } r \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty) \text{ ga ega bo'lamiz. } x^2 + px + q = 0$$

$$\text{tenglamaning har ikkala ildizi manfiy bo'lishi uchun } \begin{cases} D = p^2 - 4q > 0 \\ p > 0 \\ q > 0 \end{cases} \text{ bo'lishi kerak. Berilgan tenglamamiz}$$

uchun shu tengsizlikni tuzib olib, uni ishlaymiz:

$$\begin{cases} r^2 - 4r > 0 \\ -2(r-1) > 0 \\ 2r+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty) \\ r < 1 \\ r > -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Bu oraliqlarni o'qda tasvirlab, umumiy yechim olamiz:



Ushbu chizmadan ko'rinib turibdiki, $r \in (-\frac{1}{2}; 0)$ da berilgan tenglama manfiy ildizlarga ega bo'ladi.

903-masala.

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ tengsizlik } x \in R \text{ da bajarilishi uchun, } \begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 4ac < 0 \end{cases} \text{ sistema sharti bajarilishi kerak. Bu}$$

$$\text{sistemani masala shartiga tadbiq qilib, } \begin{cases} r^2 - 1 > 0 \\ (r-1)^2 - (r^2 - 1) < 0 \end{cases} \text{ tengsizliklar sistemasini hosil qilamiz va uni}$$

$$\text{yechib: } \begin{cases} (r-1)(r+1) > 0 \\ (r-1)(-2) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (r-1)(r+1) > 0 \\ r-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r-1 > 0 \\ r+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow r > 1 \text{ ni hosil qilamiz.}$$

904-masala.

Ushbu tengsizlikni ikki xil yo'l bilan isbotlashimiz mumkin. Quyida har ikkala isbotni keltirib o'tamiz.

1-usul. Kasrning maxraji musbat bo'lganligi uchun, qo'sh tengsizlikka umumiy maxraj berib yuborganimizda tengsizlik ishoralari o'zgarmaydi. Ya'ni, $x^2 + x + 1 \leq 3(x^2 - x + 1) \leq 9(x^2 + x + 1)$ ga ega bo'lamiz. Qo'sh tengsizlikni qismlari bo'yicha alohida tekshiramiz:

$$x^2 + x + 1 \leq 3x^2 - 3x + 3 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow 2(x-1)^2 \geq 0.$$

Bu tengsizlik istalgan x da o'rindir. Ikkinchi tengsizlikni ham tekshirib,

$$3x^2 - 3x + 3 \leq 9x^2 + 9x + 9 \Rightarrow 6x^2 + 12x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow 6(x+1)^2 \geq 0. \text{ Bu tengsizlik ham istalgan } x \text{ larda o'rindir.}$$

2-usul. Bu usulda Koshi teoremasiga asoslanuvchi $\left| x + \frac{1}{x} \right| \geq 2$ tengsizlikdan foydalanamiz. Qo'sh tengsizlikdagi

$$\text{kasrning surat va maxrajini } x \neq 0 \text{ gab o'lib yuborib, } \frac{x + \frac{1}{x} - 1}{x + \frac{1}{x} + 1} \text{ ga ega bo'lamiz. So'nggi kasrda shakl}$$

$$\text{almashtirish bajarib, } 1 - \frac{2}{x + \frac{1}{x} + 1} \text{ ni topamiz. Yuqoridagi tengsizligimizni boshqacha } \begin{cases} x + \frac{1}{x} \geq 2, x > 0 \text{ da} \\ x + \frac{1}{x} \leq -2, x < 0 \text{ da} \end{cases}$$

ko`rinishda ham yozish mumkin. Xuddi shu munosabatlar va tengsizliklar ustida olib boriladigan amallar yordamida masala shartini isbotlashimiz mumkin.

905-masala.

Ikkinchi tenglamadan $a = -x^2 - x$ ni aniqlab olib, birinchi tenglamaga olib borib qo`yamiz:

$x^2 + (-x^2 - x)x + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$. Demak, berilgan tenglamalarning umumiy yechimi $x = 1$ ekan. Bu holga esa $a = -2$ bo`lganda erishiladi.

906-masala.

$x^2 + ax + bc = 0$ tenglamaning ildizlaridan birining c ga tengligidan Viyet teoremasiga ko`ra uning ikkinchi ildizi  $b$  ga tengligi kelib chiqadi.  $x^2 + bx + ac = 0$  tenglamada ham ildizlardan biri  $c$  ga teng. Demak, uning ikkinchi ildizi  $a$  ga teng. Bu ikki tenglamaga Viyet teoremasini to`liq tadbqiq etamiz va

$\begin{cases} c + x_2 = -a \\ c \cdot x_2 = bc \end{cases}$ va $\begin{cases} c + x_2' = -b \\ c \cdot x_2' = ac \end{cases}$ tenglamalar sistemalaridan x_2 va x_2' larni topib olib, ular ildizlari bo`ladigan

tenglamani tuzamiz:

$x_2 = -a - c = b, x_2' = -b - c = a \Rightarrow p = -(x_2 + x_2') = -(a + b), q = x_2 \cdot x_2' =$ Lekin, yuqorida aniqlangan
 $= a \cdot b \Rightarrow x^2 + (a + b)x + ab = 0$

tengliklardan $c = -a - b$ ni topish mumkin. Bu esa, a va b sonlari $x^2 + cx + ab = 0$ tenglamaning ildizlari bo`lishini bildiradi.

907-masala.

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ tenglamaning ildizlari musbat bo`lishi uchun, } \begin{cases} D = b^2 - 4ac > 0 \\ \frac{b}{a} < 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$$

bu sistemani qulayroq yozish uchun quyidagicha almashtirib olish ham mumkin:

$$\begin{cases} D = b^2 - 4ac > 0 \\ a \cdot b < 0 \\ a \cdot c > 0 \end{cases}$$

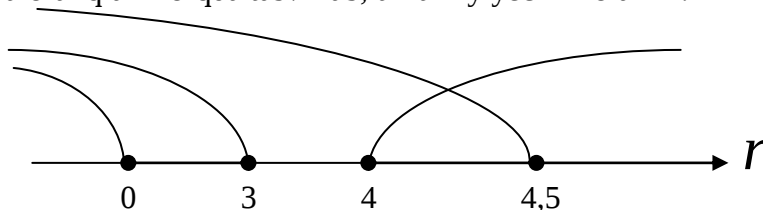
sistemaga parametrlar o`rniga mos qiymatlar qo`yib, ishlanadi.

Berilgan masala shartiga ko`ra, $a = r - 4, b = -2(r - 3), c = r$.

Demak,

$$\begin{cases} (r - 3)^2 - r(r - 4) > 0 \\ -2(r - 3)(r - 4) < 0 \\ r(r - 4) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2r > -9 \\ (r - 3)(r - 4) > 0 \\ r(r - 4) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r < 4,5 \\ r \in (-\infty; 3) \cup (4; \infty) \\ r \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty) \end{cases}$$

Ushbu oraliqlarni o`qda tasvirlab, umumiy yechim olamiz:



$$r \in (-\infty; 0) \cup (4; 4,5).$$

908-masala.

902-masalada bu tasdiqdan foydalangan edik, endi esa uni isbotlaymiz.

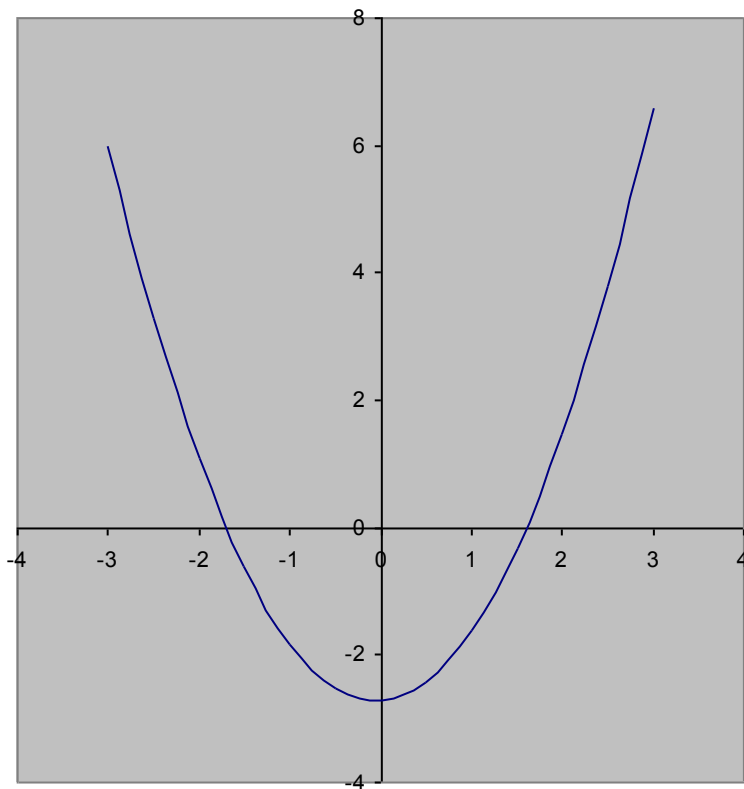
$x^2 + px + q = 0$ tenglama manfiy ildizlarga ega bo`lishi uchun avvalo, uning ildizlari mavjud bo`lishi kerak. Buning uchun esa, u yo ikkita turli, yo ikkita o`zaro teng ildizlarga ega bo`lsa ham bo`laveradi. Demak,

$p^2 - 4q \geq 0$. Har ikkala ildizlar manfiy, shuning uchun $x_1 + x_2 < 0$ va $x_1 \cdot x_2 > 0$, bundan Viyet teoremasiga ko`ra: $p = -(x_1 + x_2) > 0$ hamda $q = x_1 \cdot x_2 > 0$.

909-masala.

910-masala.

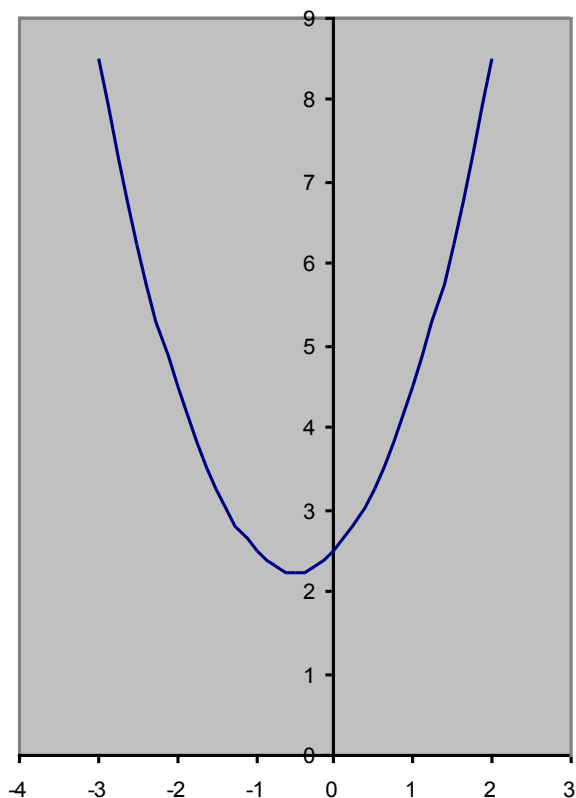
Ushbu tenglamaning ildizlari uchun $x_1 < -1$ va $x_2 > 1$ tengsizliklar o`rinli. Demak, funksiya grafigi quyidagicha ko`rinishda bo`ladi:



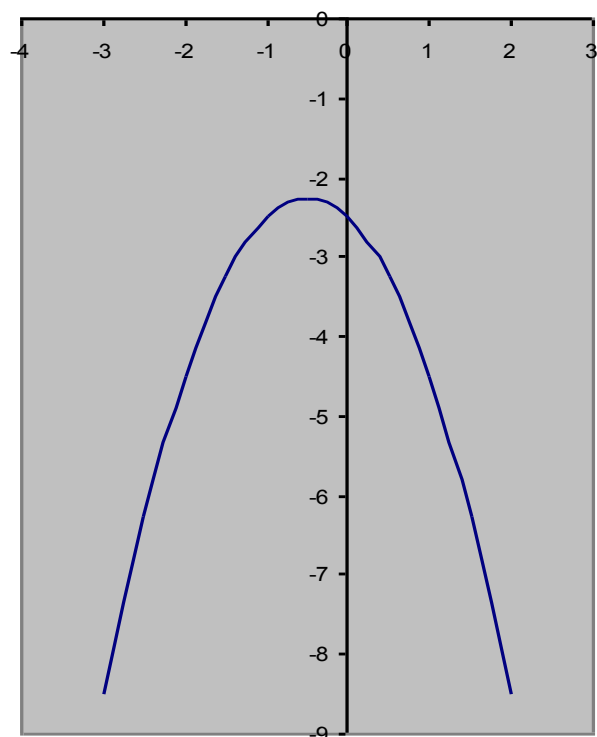
Bu yerdan ko`rinib turibdiki,  $x = 1$  va  $x = -1$  da funksiyaning qiymatlari manfiy, ya`ni 0 dan kichik. Agar berilgan $y = x^2 + px + q$ funksiyaning shu nuqtalardagi qiymatlarini topsak, ular mos ravishda $y(-1) = 1 - p + q$ va $y(1) = 1 + p + q$ larga teng bo`ladi. ular esa manfiy, demak $p + q + 1 < 0$ va $q - p + 1 < 0$ ekan.

911-masala.

Tenglama ildizlarga ega emas ekan, shu tenglama yordamida berilgan funksiya grafigi Ox o`qini kesib o`tmaydi. $y = ax^2 + bx + c$ funksiya grafigini quyidagi ikki holda ko`ramiz: 1) $a > 0$; 2) $a < 0$.



1) $a > 0$ holi.
 Bu yerda ko`rinib
 turibdiki, x ning
 istalgan
 qiymatlariga
 $ax^2 + bx + c$
 ifodaning musbat
 qiymatlari to`g`ri
 kelyapti. Demak,
 funksiyaning
 $x = 0$ nuqtadagi
 qiymati, ya`ni c
 ham musbat. Bu
 yerdan esa $a > 0$
 da $c > 0$ ekanligi
 kelib chiqadi.



1) $a < 0$ holi.
 Bu yerda
 ko`rinib
 turibdiki, x
 ning istalgan
 qiymatlariga
 $ax^2 + bx + c$
 ifodaning
 manfiy
 qiymatlari
 to`g`ri
 kelyapti.
 Demak,
 funksiyaning
 $x = 0$
 nuqtadagi
 qiymati, ya`ni
 c ham
 manfiy. Bu
 yerdan esa
 $a < 0$ da
 $c < 0$ ekanligi
 kelib chiqadi.

912-masala.

Masala shartida berilganiga ko`ra, $s_m = x_1^m + x_2^n, s_{m-1} = x_1^{m-1} +$

$+x_2^{n-1}, s_{m-2} = x_1^{m-2} + x_2^{n-2}$. Ularni $as_m + bs_{m-1} + cs_{m-2}$ ifodaga mos o`rinlariga qo`ysak,

$$a(x_1^m + x_2^m) + b(x_1^{m-1} + x_2^{m-1}) + c(x_1^{m-2} + x_2^{m-2}) = (ax_1^2 + bx_1 + c)x_1^{m-2} +$$

$$+ (ax_2^2 + bx_2 + c)x_2^{m-2} = 0$$

kelib chiqadi.

913-masala.

Ifodani quyidagicha shakl almashtiramiz:

$$3\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) - 8\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 10 = 3\left(\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}\right) - 8\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 10 =$$

$$= 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - 8\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 4 = \left(3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) - 2\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\right)$$

Lekin, a va b ning 0 dan farqli istalgan qiymatlarida $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ ifoda moduli jihatidan 2 dan katta qiymatlarni qabul qiladi. Eng so`nggi hosil qilingan ifodaning bu qiymatlarida musbat bo`lishini tekshirish qiyin emas.

914-masala.

915-masala.

Ma`lumki, $y = ax^2 + bx + c$ kvadrat funksiya uchining koordinatalari $x_0 = -\frac{b}{2a}, y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ formulalar

yordamida topiladi. Demak, birinchi funksiya uchining koordinatalari: $x_0 = a+1, y_0 = -a(a+2)$ hamda

ikkinchisiniki: $x_0 = \frac{1}{2a}, y_0 = \frac{4a^2 - 1}{4a}$. Berilgan masala shartiga ko`ra quyidagi ikki hol bo`lishi mumkin:

$$1) -a(a+2) < \frac{3}{4} < \frac{4a^2 - 1}{4a} \text{ va } 2) \frac{4a^2 - 1}{4a} < \frac{3}{4} < -a(a+2).$$

Shu ikki qo`sh tengsizlikni yechib, berilgan masalaning javobini topishingiz mumkin.

916-masala.

Avvalo, har ikki funksiya uchlarining ordinatalarini topib olamiz:

$$y_0 = -\frac{(8a)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-a)}{4 \cdot 4} = -4a^2 - a \text{ va } y_0 = -\frac{8^2 - 4 \cdot 4a \cdot (a-2)}{4 \cdot 4a} = a - 2 - \frac{4}{a}.$$

Berilgan masala shartiga ko`ra, quyidagi to`rt holdan biri bo`lishi mumkin:

$$1) -4a^2 - a > a - 2 - \frac{4}{a} > -5; 2) a - 2 - \frac{4}{a} > -4a^2 - a > -5;$$

$$3) -4a^2 - a < a - 2 - \frac{4}{a} < -5; 4) a - 2 - \frac{4}{a} < -4a^2 - a < -5.$$

Ushbu qo`sh tengsizliklarni yechib, masala shartini to`la qanoatlantiruvchi yechimlar to`plamini aniqlanadi.

Izoh. $a > b > c$ tengsizlikni yechish uchun $\begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases}$, $a < b < c$ tengsizlikni yechish uchun esa $\begin{cases} a < b \\ b < c \end{cases}$ sistemani

yechish kifoya.

917-masala.

$$\text{1-misol. } x^3 - 6x^2 - x + 30 = x^3 - 6x^2 + 9x - 10x + 30 = x(x^2 - 6x + 9) - 10(x - 3) = x(x-3)^2 - 10(x-3) = (x-3)(x^2 - 3x - 10) = (x+2)(x-3)(x-5).$$

2-misol.

$$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x^4 - x^3 - 6x^2) - (x^2 - x - 6) = x^2(x^2 - x - 6) - (x^2 - x - 6) = (x+2)(x+1)(x-1)(x-3)$$

3-misol.

$$(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12 = (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1 + 1) - 12 = (x^2 + x + 1)^2 + (x^2 + x + 1) - 12 = (x^2 + x + 1 - 3)(x^2 + x + 1 + 4) = (x^2 + x - 2)(x^2 + x + 5) = (x-1)(x+2)(x^2 + x + 5)$$

4-misol.

$$(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2 = (x^2 + 4x + 8 + x)(x^2 + 4x + 8 + 2x) = (x^2 + 5x + 8)(x^2 + 6x + 8) = (x + 2)(x + 4)(x^2 + 5x + 8)$$

918-masala.

$$x^5 + x + 1 = x^5 - x^2 + x^2 + x + 1 = x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1) = x^2(x - 1) \times (x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) = (x^3 - x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$$

919-masala.

1-misol.

$$\frac{x^6 + x^4 - x^2 - 1}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{x^4(x^2 + 1) - (x^2 + 1)}{x^2(x + 1) + (x + 1)} = \frac{(x^2 + 1)(x^4 - 1)}{(x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)^2}{(x + 1)(x^2 + 1)} = (x - 1)(x^2 + 1)$$

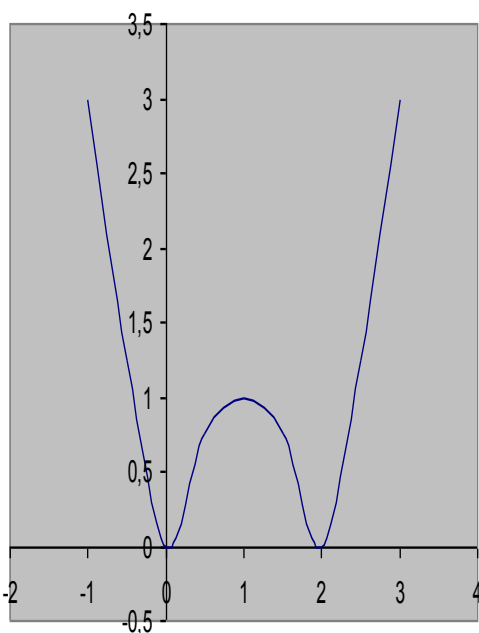
2-misol.

$$\frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^3 - 3x - 2} = \frac{x^2(x + 1) - 4(x + 1)}{x^3 + 1 - 3x - 3} = \frac{(x + 1)(x^2 - 4)}{(x + 1)(x^2 - x + 1) - 3(x + 1)} = \frac{(x + 2)(x + 1)(x - 2)}{(x + 1)(x^2 - x - 2)} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{x + 2}{x + 1}$$

Ko`rsatma. 3-,4-,5-,6-misollarda ham yuqoridagi ikkita misolda qilingani kabi shakl almashtirishlar amalga oshiriladi.

920-masala.

1-misol.



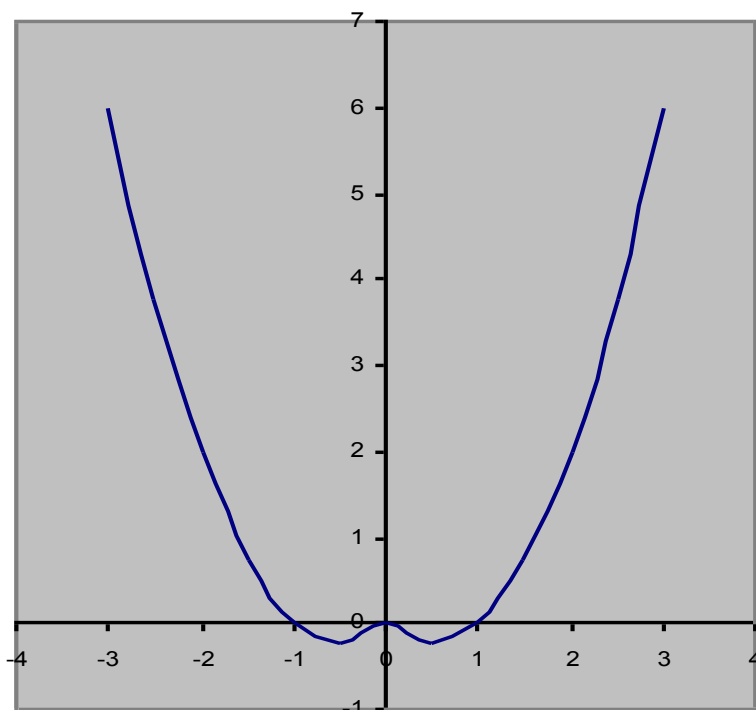
Bu turdagi, ya`ni

$$y = |f(x)| \text{ shaklidagi}$$

funksiyalarning grafiklarini chizish uchun ikki xil usul qo`llash mumkin. Birinchisi, to`g`ridan-to`g`ri nuqtalarni aniqlab, funksiya grafigini chizish; ikkinchisi esa  $y = f(x)$  funksiya grafigini yasab,  $Ox$  o`qidan pastda joylashgan qismini Ox o`qidan yuqoriga simmetrik joylashtirish.

2-,3-,4-misollar xuddi 1-misol ishlanish usuli bilan ishlanadi.

5-misol.



Bu funksiya grafigini yasash uchun ham ikki xil usulni qo'llash mumkin. Birinchisi, to'g'ridan-to'g'ri nuqtalarni aniqlab, funksiya grafigini chizish; ikkinchisi esa $x \geq 0$ bo'lganda funksiya grafigini chizib, $x \leq 0$ oraliqqa uning grafigini simmetrik joylashtirish.

6-misolni 5-misolishlangan yo'lyordamida mustaqil ishleng.

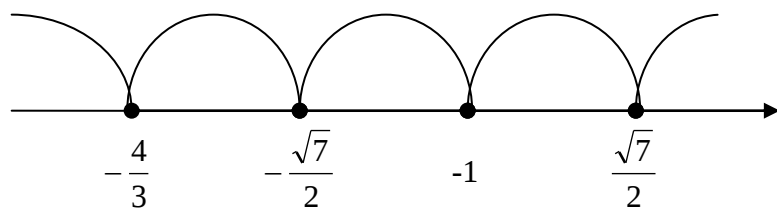
7-,8-misollarni ishlashda yuqoridagi ikki funksiyaning yasash usullarini birgalikda qo'llaysiz.

921-masala.

1-misol. Tengsizlikni $\frac{5-4x}{3x^2-x-4} - 4 < 0$ ko'rinishda yozib olib, ularga umumiy maxraj berib soddalashtiramiz:

$$\frac{5-4x-12x^2+4x+16}{3x^2-x-4} = \frac{-12x^2+21}{3x^2-x-4} \text{ va } -\frac{12(x^2-\frac{7}{4})}{3(x^2-\frac{1}{3}x-\frac{4}{3})} < 0 \text{ tengsizlikni ishlaymiz. Bunda}$$

$x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}, x_3 = -1, x_4 = -\frac{4}{3}$ nuqtalarni son o'qida tasvirlaymiz va ishoralarni tekshiramiz:



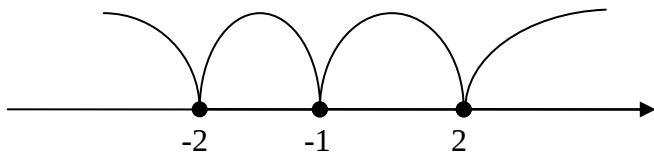
Demak, berilgan tengsizlikning yechimi $x \in (-\frac{4}{3}; -\frac{\sqrt{7}}{2}) \cup (-1; \frac{\sqrt{7}}{2})$ oraliqdan iborat ekan.

2-misol. 1-misolning yechilishiga qarang.

3-misol.

Kasrning surat va maxrajini ko'paytuvchilarga ajratib,

$$\frac{(x-2)(x+2)(x^2+3)}{(x+1)(x^2-x+1)} > 0 \text{ ni topamiz va kasrning ishorasini tekshiramiz:}$$



Demak, tengsizlikning yechimi $x \in (-2; -1) \cup (2; +\infty)$ ekan.

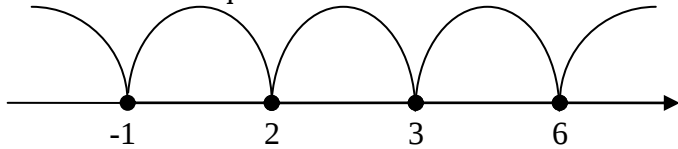
4-misol. 3-misolga qarang.

5-misol. $|x^2 - 5x| \geq 6$ tengsizlikning har ikkala tomonini kvadratga oshirib, ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$$(x^2 - 5x)^2 \geq 36 \Rightarrow (x^2 - 5x)^2 - 36 \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 5x - 6)(x^2 - 5x + 6) \geq 0 \Leftrightarrow \text{Hosil bo'lgan ko'paytmaning}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x-3)(x-6) \geq 0$$

ishoralarini oraliqlarda tekshiramiz:



Demak, tengsizlik yechimi $x \in (-\infty; -1) \cup (2; 3) \cup (6; +\infty)$ ekan.

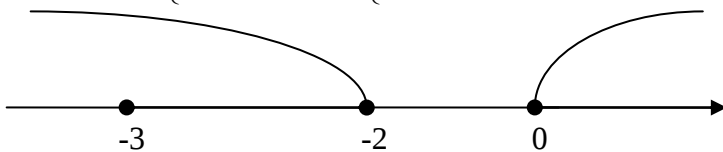
6-misol. Har ikkala tomonni kvadratga ko'tarib, hosil bo'lgan tengsizlikni yeching.

7-misol. Berilgan tengsizlikni quyidagicha shakl almashtiraiz: $|(x+1)(x+3)| - |x+3| = |x+3|(|x+1| - 1) > 0$.

$$|x+3| \geq 0 \text{ bo'lganligi uchun } \begin{cases} |x+1| - 1 > 0 \\ x+3 \neq 0 \end{cases} \text{ sistemani yechish kifoya. Uni yechamiz:}$$

$$\begin{cases} |x+1| > 1 \\ x \neq -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1 > 1 \\ x+1 < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -2 \end{cases} \text{ Bu oraliqlarni bir o'qda tasvirlab,}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x < -2 \\ x \neq -3 \end{cases}$$



Demak, tengsizlik yechimi $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; -2) \cup (0; +\infty)$.

8-misol. 5-misolda qo'llanilgan usulni qo'llang.

922-masala.

1-misol. $a^2 + b^2 - 2a - 2b + 2 = (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) = (a-1)^2 + (b-1)^2 \geq 0$ 2-misol. $a^2 + b^2 \geq 2ab$ tengsizlikdan foydalanamiz:

$$2a^2 + 5b^2 \geq 2\sqrt{2a} \cdot \sqrt{5b} = 2\sqrt{10ab} > 2ab.$$

3-misol. 1-misolga qarang.

4-misol.

$$a^2 + ab + b^2 = a^2 + ab + \frac{1}{4}b^2 + \frac{3}{4}b^2 = (a + \frac{1}{2}b)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0.$$

5-misol.

$$a^4 + b^4 - a^3b - ab^3 = a^3(a-b) - b^3(a-b) = (a-b)^2(a^2 + ab + b^2) \geq 0.$$

6-misol.

$$(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) - (a^3 + b^3)^2 = a^6 + a^4b^2 + a^2b^4 + b^6 - a^6 - 2a^3b^3 - b^6 = a^2b^2(a^2 - 2ab + b^2) = a^2b^2(a-b)^2 \geq 0$$

923-masala.

1-misol.

$$a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} = (a+b) + (\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \geq 2\sqrt{ab} + \frac{2}{\sqrt{ab}}$$

2-misol.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + 1 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + 1 \right) \geq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$$

3-misol.

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{a}{b^2} - \frac{b}{a^2} &= \left(\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} \right) + \left(\frac{1}{b} - \frac{a}{b^2} \right) = \frac{a-b}{a^2} + \frac{b-a}{b^2} = \frac{(a-b)(b^2-a^2)}{a^2b^2} = \\ &= -\frac{(a-b)^2(a+b)}{a^2b^2} \leq 0 \end{aligned} \quad \text{4-misol.}$$

$$\frac{a+b}{1+a+b} = \frac{a}{1+a+b} + \frac{b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$$

924-masala.

1-misol.

Tengsizlikning har ikkala tomonini 2 ga ko'paytiramiz va $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2ac + 2bc$ nni isbotlaymiz:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc = (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2ac + c^2) +$$

$$+ (b^2 - 2bc + c^2) = (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \geq 0$$

2-misol.

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot |a| \cdot |b| + 2 \cdot |a| \cdot |c| + 2 \cdot |b| \cdot |c|} =$$

$$= \sqrt{(|a| + |b| + |c|)^2} = ||a| + |b| + |c|| = |a| + |b| + |c|$$

3-misol. 1-misolga qarang.

4-misol.

$$(ab + ac + bc)^2 = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2 =$$

$$= \frac{a^2b^2 + b^2c^2}{2} + \frac{a^2c^2 + b^2c^2}{2} + \frac{a^2b^2 + a^2c^2}{2} + 2a^2bc + 2ab^2c +$$

$$+ 2abc^2 \geq 3a^2bc + 3ab^2c + 3abc^2 = 3abc(a + b + c)$$