УДК 517.938

Ш.Ш. Суванов

О ГОМОКЛИНИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ НА СФЕРЕ

Изучение векторных полей на сфере проводится посредством систем координат. Первый, традиционный путь – пользоваться сферическими координатами [1]. Преимущество этого пути состоит в том, что они задаются единым образом на всей сфере. Его недостатком является то, что сферические координаты имеют особое многообразие коразмерности 1. Второй путь – использование локальных координат, например, проекции полусфер на координатные гиперплоскости, которые не имеют особенностей, однако являются не совсем удобными при изучении поведения траекторий на бесконечности и других глобальных свойств векторных полей [2]. В качестве системы координат можно использовать также и стереографическую проекцию [1], однако соответствующие формулы являются довольно громоздкими. В настоящей работе предлагаются новые координаты на сфере, занимающие в некотором смысле промежуточное положение между двумя описанными средствами. Идея таких координат была предложена А.Азамовым, а сами координаты названы им гомоклиническими.

Рассмотрим отображение $(n-1)$-го куба

$$K=\left\{\varphi\in\mathbb{R}^{n-1}\,\middle|\,|\varphi_i|\le\frac{\pi}{2},\ i=1,2,\dots,n-1\right\}$$

на сферу

$$S=\left\{x\in\mathbb{R}^{n}\,\middle|\ |x|=1\right\}$$

той же размерности, задаваемое следующим образом

$$x_1=\frac{2\operatorname{tg}\varphi_1}{\Sigma+1},\ x_2=\frac{2\operatorname{tg}\varphi_2}{\Sigma+1},\ \dots,\ x_{n-1}=\frac{2\operatorname{tg}\varphi_{n-1}}{\Sigma+1},\ x_n=\frac{\Sigma-1}{\Sigma+1}, \tag{1}$$

где $\Sigma=\operatorname{tg}^2\varphi_1+\operatorname{tg}^2\varphi_2+\dots+\operatorname{tg}^2\varphi_{n-1}$. Внутренность куба K обозначим $\overset{\circ}{K}$, а сферу с удаленным полюсом $(0,0,\dots,1)$ – $\overset{\bullet}{S}$.

Предложение 1. Отображение (1) a) является взаимно однозначным соответствием между открытим кубом $\overset{\circ}{K}$ и проколотой сферой $\overset{\bullet}{S}$; b) регулярной на $\overset{\circ}{K}$; c) допускает непрерывное продолжение на весь куб K; d) границу $K \setminus \overset{\circ}{K}$ отображает на полюс $(0,0,...,1)$.

Далее, на $(n-1)$-мерной сфере рассмотрим векторное поле

$$\dot{x}_1 = P_1,\ \dot{x}_2 = P_2,\ \dots,\ \dot{x}_n = P_n, \tag{2}$$

где $P_1,\ P_2,\ \dots,\ P_n$ – многочлены от $x_1, x_2, ..., x_n$. В гомоклинических координатах оно принимает вид:

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{P_1^* + P_n^* \operatorname{tg}\varphi_1}{2\left(1+\operatorname{tg}^2\varphi_1\right)}(\Sigma+1),\ \dot{\varphi}_2 = \frac{P_2^* + P_n^* \operatorname{tg}\varphi_2}{2\left(1+\operatorname{tg}^2\varphi_2\right)}(\Sigma+1),\ \dots,\ \dot{\varphi}_{n-1} = \frac{P_{n-1}^* + P_n^* \operatorname{tg}\varphi_{n-1}}{2\left(1+\operatorname{tg}^2\varphi_{n-1}\right)}(\Sigma+1), \tag{3}$$

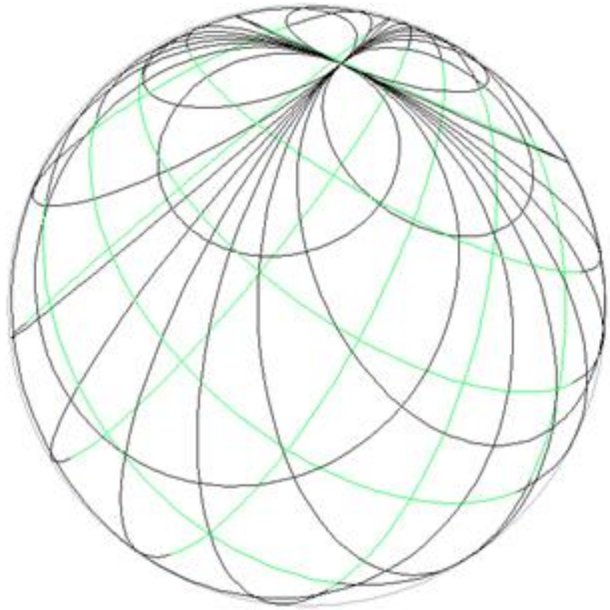
где $P_i^* = P_i^*(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1})$ – функции, которые получаются из функций P_i после подстановки (1).

Фазовый портрет системы (3) топологически совпадает с фазовым портретом системы

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{P_1^* + P_n^* \operatorname{tg}\varphi_1}{2\left(1+\operatorname{tg}^2\varphi_1\right)},\ \dot{\varphi}_2 = \frac{P_2^* + P_n^* \operatorname{tg}\varphi_2}{2\left(1+\operatorname{tg}^2\varphi_2\right)},\ \dots,\ \dot{\varphi}_{n-1} = \frac{P_{n-1}^* + P_n^* \operatorname{tg}\varphi_{n-1}}{2\left(1+\operatorname{tg}^2\varphi_{n-1}\right)}. \tag{4}$$

Предложение 2. Если у системы (2) нет особых точек, то у системы (4) тоже нет особых точек и обратно.

Как известно, если размерность сферы четная, то любое векторное поле на ней имеет по крайней мере одну особую точку [1]. Если полюс $(0,0,...,1)$ сферы расположить в этой точке, то гомоклинические координаты будут играть роль глобальной системы координат для изучения таких векторных полей. Это же справедливо, если размерность сферы нечетная, но заданное векторное поле имеет особую точку. На рисунке приведена координатная сетка гомоклинической системы на S^2.



Литература

1. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия : Методы и приложения. – 2-е изд., перераб. – М.: Наука, Гл.ред.физ-мат.лит., 1986. – 760с.
2. Lawrence Perko. Differential Equations and Dynamical Systems. Third Edition. Springer. 2001. – p.555.

Институт математики при НУУз,

Ш.Ш. Суванов

О ГОМОКЛИНИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ НА СФЕРЕ

В статье вводится специальное отображение $(n-1)$-мерного куба на сферу тоже размерности, сужение которого на внутренность куба диффеоморфно отображает на сферу с удаленным “северным полюсом”. Это свойство позволяет ввести на сфере гомоклинические координаты, удобные для интегрирования векторных полей.

Ключевые слова: n- мерная сфера, координатная система, векторное поле, особая точка, сферические координаты.

Sh.Sh. Suvanov

SFERANI USTIDA GOMOKLINIK KOORDINATALAR HAQIDA

Maqolada $(n-1)$-o’lchovli kubni ana shu o’lchovli sferani ustiga o’tkazuvchi maxsus akslantirish qaralgan bo’lib, uning kubning ichidagi torayishi ajratilgan “shimoliy qutbli” sferaga diffeomorf akslantiradi. Bu xossa sferani ustida vector maydonlarni integrallash uchun qulay bo’lgan gomoklinik koordinatalarni kiritish imkonini beradi.

Kalit so’zlar: n-o’lchovli sfera, koordinat sistema, vektor maydon, maxsus nuqta, sferik koordinatalar

Sh.Sh. Suvanov

ON HOMOCLINIC COORDINATES ON THE SPHERE

In the paper it is introduced the map of $(n-1)$ dimensional cube onto the sphere of the same dimensionality such that the restriction of the map to the interior of the cube onto the sphere without “north pole” is a diffeomorphic mapping. This property introduces useful homoclinic coordinates on the sphere to integrate vector field.

Key words: n-dimensional sphere, the coordinate system, vector field, singular point, spherical coordinates.