

O`rta qiymatlar va ular orasidagi bog`lanishlar haqida

M.Ummatova., G.Axmedova.Baratov F. Qo`qonDPI

Matematikaning har qanday masalasini yechish zamirida shu masalaning mohiyatini tushunish va tayanch tushunchalar orqali yechishning turli variantlari qidiriladi. Elementar matematikada o`rta qiymatlar va ularga oid masalalar o`ziga xosligi bilan e`tiborni jalb qiladi. Elementar matematikada o`rta arifmetik , o`rta geometrik , o`rta garmo`nik kabi 3 xil o`rta qiymatlar mavjud. Bir nechta sonning o`rta qiymati bu- ularning eng kattasidan katta bo`lmagan va eng kichigidan kichik bo`lmagan son. Agar faqat ikkita a va b sonni oladigan bo`lsak , masalan: 4 va 9, ularning o`rta arifmetik qiymati :  $\frac{a+b}{2}$  ga , ya`ni $\frac{4+9}{2} = 6.5$ ga teng .

O`rta geometrik qiymati esa :  $\sqrt{a \cdot b}$  ga , ya`ni $\sqrt{4 \cdot 9} = 6$ ga teng.

O`rta garmo`nik qiymati esa : $\frac{2ab}{a+b}$ ga , ya`ni  $\frac{2 \cdot 4 \cdot 9}{4+9} = \frac{72}{13} = 5\frac{7}{13}$  ga teng bo`ladi.

Bulardan ko`rinib turibdiki, eng kichigi o`rta garmo`nik , eng kattasi o`rta arifmetik bo`lyapdi. O`rta geometrik qiymat esa ikki o`rta qiymatlar orasida bo`lib, ular bilan proporsional munosabatda.

Haqiqatdan ham,

$$\frac{2ab}{a+b} : \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a \cdot b} : \frac{a+b}{2} \text{ tenglik o`rinli bo`ladi.}$$

Masalan yuqoridagi misollar uchun: $5\frac{7}{13} : 6 = 6 : 6\frac{1}{2}$; (A)

(A) tenglikning o`rinli ekanligini proporsiya chetki hadlari ko`paytmasi uning o`rta hadlari ko`paytmasiga teng ekanligidan foydalanib tekshiramiz.

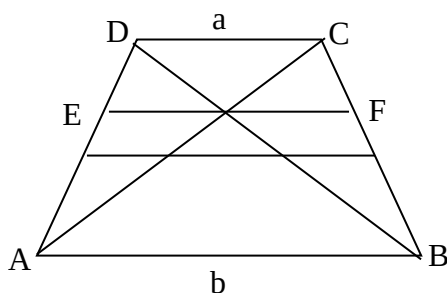
$$\frac{2ab}{a+b} * \frac{a+b}{2} = ab \text{ yoki } 5\frac{7}{13} \cdot 6\frac{1}{2} = 6 \cdot 6 = 36$$

O`rta arifmetik va o`rta geometrik qiymatlar haqida o`quvchilar maktab matematikasidan ayrim ma`lumotlarga ega bo`ladilar, lekin o`rta garmo`nik qiymat haqida ular kamroq tushunchaga ega bo`ladilar. Shuning uchun o`rta garmo`nik qiymat haqida biroz to`liqroq ma`lumot berib o`tamiz.

Agar c ga teskari son a va b ga teskari sonlar o`rta arifmetigiga teng bo`lsa u xolda c soni a va b, c sonlarining o`rta geometrigiga teng.

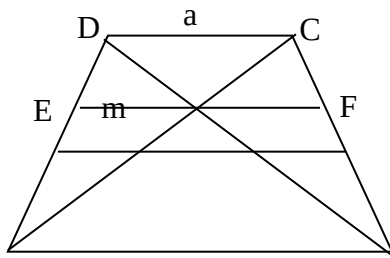
Bu tenglamada shunday algebraik $C = \frac{2ab}{a+b}$ ni topamiz.

Agar a va b sonlari kesma ko`rinishida tasvirlab, asoslari a va b ga teng trapetsiya qursak, trapetsiya dioganallari AC va DB larning kesishish nuqtasi O dan AB ga parallel EF kesma a va b kesmalarning o`rta garmo`nik qiymatiga teng ekanligini o`xshash uchburchaklardan foydalanib isbotlaymiz:



1-chizma

Isbot:



2-chizma

Bu tasdiqni isbotlash uchun uchburchak o'xshashligidan foydalanamiz.

$$EF = \frac{2ab}{a+b} \text{ ni isbotlash kerak.}$$

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$AC = d_1$$

$$DB = d_2$$

$$DO = C$$

$$OC = E$$

Chizmadan ko'rinib turibdiki, mos burchaklari o'zaro tengligidan

ABD uchburchak EOD uchburchakka o'xshash, ABC uchburchak esa OFC uchburchakka o'xshash, AOB uchburchak esa DOC uchburchakka o'xshash.

Bundan:

$$1) \frac{a}{m} = \frac{d_2}{c} \text{ (ABD va EOD uchburchaklardan)}$$

$$2) \frac{a}{b} = \frac{d_2 - c}{2} \text{ (AOB va DOC uchburchaklardan) ga ega bo'lamiz.}$$

2) tenglamadan

$$3) \frac{a+b}{b} = \frac{d_2}{c} = \frac{a}{m} \text{ kelib chiqadi.}$$

$$3 \text{ tenglamadan esa } m = \frac{ab}{a+b};$$

$$4) \frac{a}{n} = \frac{d_1}{e} \text{ (ABC va OFC uchburchaklarning o'xshashligidan)}$$

$$5) \frac{a}{b} = \frac{d_1 - e}{e} \text{ (AOB va DOC uchburchaklarning o'xshashligidan)}$$

5) tenglamadan

$$6) \frac{a+b}{b} = \frac{d_1}{e} = \frac{a}{n} \text{ kelib chiqadi.}$$

$$6) \text{ dan esa } n = \frac{ab}{a+b} \text{ kelib chiqadi.}$$

$$\text{Natijada } EF = m + n = \frac{ab}{a+b} + \frac{ab}{a+b} = \frac{2ab}{a+b}$$

Trapetsiyaning yon tomonlari ortalaridan G va H larni tutashtirib, a va b larning o'rta arifmetigini topamiz. Bu uchta o'rta qiymatlarni bitta chizmada belgilaymiz. Buning uchun ixtiyoriy yarim to'g'ri chiziqda (1-chizma) k nuqtadan

$KL = EF = \frac{2ab}{a+b}$ kesmani, keyin $LM = GH = \frac{a+b}{2}$ kesmani va radiusi KL va LM kesmalarning uzunliklari yarmiga teng bo'lgan yarim aylana o'tkazamiz.

L nuqtadan KM ga perpendikulyar o'tkazamiz. LP va KL va LM kesmalarning o'rta geometrigiga teng, ya'ni $LP^2 = KL \cdot LM$ o'rta garmo'nik qiymatdan turli maqsadlarda foydalanish mumkin.

O'rta garmo'nik qiymatga doir amaliy masala keltiramiz.

Motosiklchi Qo'qondan Farg'onagacha bo'lgan masofani o'rtacha $V_1 = 90 \text{ km/soat}$ tezlik bilan, qaytishda esa o'rtacha $V_2 = 60 \text{ km/soat}$ tezlik bilan bosib o'tdi.

Motosiklchining Qo'qon- Farg'ona-Qo'qon yo'nalshi bo'yicha o'rtacha tezligini hisoblaymiz.

Bir qarashda o'rta tezlik berilgan tezliklarning o'rta arifmetigiga teng, lekin bunday emas. Qo'qon- Farg'ona orasidagi masofa $a \text{ km}$ bo'lsin. U holda bu yo'nalish uchun motosiklchi $t_1 = \frac{a}{v_1}$ vaqt sarflaydi.

Farg'onadan Qo'qonga qaytish uchun $t_2 = \frac{a}{v_2}$ vaqt sarflaydi. Har ikkala

tomon uchun umumiy vaqt $t = (t_1 + t_2) = \frac{a}{v_1} + \frac{a}{v_2}$

$$\text{Umumiy tezlik } V = \frac{2a}{t} = \frac{2a}{\frac{a}{v_1} + \frac{a}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$$

$$\text{Bundan } \frac{1}{v_1} = \frac{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}{2} \quad V = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$$

Bu tenglamadan ko'rinadiki, o'rta tezlik berilgan tezliklarning o'rta arifmetigi qiymatiga emas, o'rta garmo'nik qiymatiga teng ekan.

$V_1 = 90 \text{ km/soat}$ $V_2 = 60 \text{ km/soat}$ ni hisobga olib

$V = 75 \text{ km/soat}$ emas, balki $V = 72 \text{ km/soat}$ ni hosil qilamiz.