

BIR NOMA'LUMLI BIRINCHI DARAJALI PARAMETRGA BOG'LIQ TENGLAMALARNI YECHISH HAQIDA

Ummatova M., Madrahimova M. Boratov F.

Qo`qon DPI

Bir noma'lum birinchi darajali parametrga bog'liq tenglamaning umumiy ko'rinishi quyidagicha:

$$ax=b$$

1. Tenglamada a va b parametrlarning olishi mumkun qiymatlariga mos uning yechimlari haqida quyidagi hollarni sanab ko'rsatish mumkin.
 - a. Agar $a \neq 0$ bo'lsa (1) tenglama faqat bitta yechimga ega (b paramertning qiymatlariga bog'liq emas).
 - b. Agar $a=0$, $b \neq 0$ bo'lsa (1) tenglama yechimga ega emas.
 - c. Agar $a=0$, $b=0$ bo'lsa (1) tenglama cheksiz ko'p yechimga ega, ya'ni x noma'lumning har qanday qiymati (1) tenglamani qanoatlantiradi.

Demak, bir noma'lumli birinchi darajali tenglamalarni yechishda dastlab uni (1) ko'rinishga keltirish kerak. So'ngra masalaning qo'yilishiga bog'liq holda a), b), c) hollarga muvofiq yechim aniqlanadi.

Misollar 1a ning qanday qiymatida $\frac{3x-a}{5} = \frac{ax-4}{3}$ tenglama yechimga ega emas?

$$\begin{aligned}\text{Yechish: } \frac{3x-a}{5} - \frac{ax-4}{3} &= 0 \\ 9x-3a-5ax+20 &= 0 \\ (9-5a)x &= 20-3a\end{aligned}$$

Oxirgi tenglama yechimga, ega bo'lmasligi uchun $9-5a=0$ bo'lib, $20-3a \neq 0$ bo'lishi kerak $9-5a=0$ dan $a=\frac{9}{5}$ qiymatda berilgan tenglama yechimga ega

emas. Javob $a \neq \frac{9}{5}$

2. Quyidagi tenglama k ning qanday qiymatlarida cheksiz ko'p yechimga ega bo'lmaydi?

$$\frac{2kx+3}{3} = \frac{k-2+x}{2}$$

Yechish, berilgan tenglama ustida oddiy shakl almashtirishdan so'ng $(4k-3)x=6k-12$ tenglamani hosil qilamiz.

$k=\frac{3}{4}$ qiymatda tenglama

$$0 \cdot x = 0$$

ko'rinishda keladi va bu tenglama cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi. k boshqa hamma haqiqiy qiymatlarida tenglama yagona yechimga ega.

Javob: $k \neq \frac{3}{4}$

3. Quyidagi tenglama a ning qanday qiymatlarida yagona yechismga ega

$$\frac{ax-2}{2} + \frac{x}{2} = \frac{ax}{6} + \frac{a}{2}$$

Yechish: $2ax-4-3x=ax+3a$

$$ax-3x=3a+4$$

$$x(a-3)=3a+4$$

Javob: $a \neq 3$

4. Quyidagi tenglama a ning qanday qiymatlarida yechimga ega bo'ladi?

$$\frac{ax-1}{2} - \frac{a}{3} = 1 - \frac{x}{a}$$

Yechish: $3a^2x-3a-2a^2=6a-6x$

$$3x(a^2+2)=2a^2+9a$$

$a^2 \neq -2$ demak a ning har qanday qiymatlarida tenglama yechimga ega bo'ladi.

Javob: $a \in \mathbb{R}$.

5. Quyidagi parametrli tenglamani yeching.

$$a^2(x-2)-x=a-3$$

Yechish: oddiy shak almashtirishdan so'ng berilgan tenglamaga teng kuchli bo'lgan quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$(a-1)(a+1)x=(2a+3)(a-1)$$

Agar $a=1$ bo'lsa, tenglama $0 \cdot x=0$ ko'rinishga keladi, ya'ni ixtiyoriy haqiqiy son tenglamaning yechimi bo'la oladi. Agar $a=-1$ bo'lsa, tenglama $0 \cdot x=2$ ko'rinishda bo'lib, u yechimga ega bo'lmaydi. Agar $a \neq \pm 1$ bo'lsa, tenglama yagona yechimga ega bo'ladi, yechim esa $x = \frac{2a+3}{a+1}$ ko'rinishda bo'ladi.

Mashqlar.

1. Tenglamani yeching: $ax+6=5x+a$?

2. a ning qanday qiymatlarida quyidagi tenglama yechimga ega emas: $a(2x+1)=2x-1$?

3. k ning qanday qiymati quyidagi tenglama uchun har qanday haqiqiy son yechim bo'ladi $4(a+x)=ax+1$?

4. k ning qanday qiymatida quyidagi tenglama yechimga ega emas $kx-6=3x+2x$?

5. m ning qanday qiymatlarida quyidagi tenglama yagona yechimga ega

$$\frac{mx-3}{2} + 1 = \frac{2m+x}{3} ?$$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. С.И.Новоселов, Специальный курс по элементарной алгебры. 1965 г.
2. С.Страшевич, Е.Бровкин, «Польские математические олимпиады» 1978 г.
3. Т.То'laganov, А.Норматов. Matematikadan praktikum. Toshkent, O'qituvchi, 1989 y.
4. Е.Е.Вересова, Н.С.Денисова, Т.Н.Полякова. Практикум по решению математических задач. Москва. 1979 г.
5. Axborotnoma. Toshkent. 2000-2003 y.
6. Г.А.Ястребинецкий, Уравнения и неравенства, содержащие параметры. Москва, 1972 г.

Birinchi darajali ikki noma'lumli tenglamalar sistemalari.

Ummatova M., Maxmudova O. Boratov F.

Qo`qon DPI

Birinchi darajali ikki noma'lumli tenglamalar sistemasining umumiy ko'rinishi quyidagicha:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases} \quad (1)$$

(1) sistemadagi har bir tenglama geometrik ma'no jihatdan dekart koordinatalar sistemasida to'g'ri chiziqni ifodalaydi. Sistemaning yechimi esa bu to'g'ri chiziqlarning umumiy nuqtalarini ifodalaydi. Berilgan to'g'ri chiziqning koordinatalar sistemasida qanday joylashishi a , b , c (yoki a_1 , b_1 , c_1) parametrlarning qiymatiga bog'liq. Shuning uchun, (1) sistemadagi ikki to'g'ri chiziqlarning o'zaro vaziyati quyidagi 3 xilda bo'lishi mumkin.

1) to'g'ri chiziqlar faqat bitta nuqtada kesishadi, demak sistema yagona yechimga ega bo'ladi;

2) to'g'ri chiziqlar ustma-ust tushadi, demak sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi;

3) to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel bo'ladi, ya'ni kesishmaydi, demak sistema yechimga ega emas.

Yuqorida ta'kidlanganidek, to'g'ri chiziqlarning holati parametrlarning qiymatlariga bog'liq bo'lgani uchun (1) sistemaning yechimi va parametrlarning qiymatlari orasida quyidagicha bog'lanish mavjud:

a) $\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$ - bunda (1) sistemadagi to'g'ri chiziqlar faqat bitta nuqtada

kesishadi. Demak, sistema bitta yechimga ega bo'ladi (sistemadagi c va c_1 parametrlarning qiymatlariga bog'liq emas).

b) $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$ - bunda (1) sistemadagi to'g'ri chiziqlar ustma-ust tushadi,

ya'ni sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi;

c) $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \neq \frac{c}{c_1}$ - bunda (1) sistemadagi to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel

bo'ladi, ya'ni sistema yechimga ega emas.

Agar yuqoridagi a), b), c), holatlardagi nisbatlaridan birortasini aniqlash imkoni bo'lmasa, ya'ni a_1 , yoki b_1 , yoki c_1 lardan aqalli bittasi 0 ga teng bo'lgan holda ham sistemaning yechimi haqida xulosa chiqarish mumkin. Masalan $a_1=0$, lekin $b_1 \neq 0$ bo'lsa, (1) sistemadagi abtsissa o'qiga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqni ifodalaydi. Bu holda, agar $a=0$ bajarilsa, $by=c$ va $b_1y=c_1$ to'g'ri chiziqlar yoki ustma-ust tushadi yoki ular o'zaro parallel bo'ladi, ya'ni sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi. $b_1=0$ bo'lib, $a_1 \neq 0$ bo'lgan holda ham huddi yuqoridagidan taxlil qilish mumkin.

Agar $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$ bo'lib, $c_1=0$ bo'lsa (1) sistemaning yechimga ega bo'lish yoki bo'lmasligi c ning qiymatiga bog'liq bo'ladi, agar $c=0$ bo'lsa, to'g'ri chiziqlar ustma-ust tushadi, ya'ni sistema cheksiz ko'p yechimga ega emas, ya'ni to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel bo'ladi.

Misol.

a ning qanday qiymatlarida quyidagi sistema yechimga ega bo'lmaydi?

$$\begin{cases} a^2x + 3y = 4 \\ 3x + y = 3 \end{cases}$$

Yechish: $\frac{a^2}{3} = \frac{3}{1} \neq \frac{4}{3}$. Demak, $a^2=9$ bo'lsa, ya'ni $a=\pm 3$ qiymatlarda $\frac{a^2}{3} = \frac{3}{1} = \frac{4}{3}$

munosabat, ya'ni $a=\pm 3$ bo'lgan holda to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel bo'ladi.

Javob: $a=\pm 3$.

Mashqlar.

1. a ning qanday qiymatlarida sistema yechimga ega bo'ladi? $\begin{cases} ax + 2y = 3 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$
2. a ning qanday qiymatlarida sistema yechimga ega emas? $\begin{cases} ax + 3y = 4 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$
3. a ning qanday qiymatlarida sistema yechimga ega emas? $\begin{cases} ax + 2y + 4 = 0 \\ 2x + ay - 8 = 0 \end{cases}$
4. a ning qanday qiymatlarida sistema yagona yechimga ega bo'ladi? $\begin{cases} x + y = a \\ x - y = 9 \end{cases}$
5. a ning qanday qiymatlarida sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi? $\begin{cases} 3x + 6y = a \\ 9x + 18y = a + 1 \end{cases}$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. С.И.Новоселов, Специальный курс по элементарной алгебры. 1965 г.
2. С.Страшевич, Е.Бровкин, «Польские математические олимпиады» 1978 г.
3. Т.То'laganov, А.Норматов. Matematikadan praktikum. Toshkent, O'qituvchi, 1989 y.
4. Е.Е.Вересова, Н.С.Денисова, Т.Н.Полякова. Практикум по решению математических задач. Москва. 1979 г.
5. Axborotnoma. Toshkent. 2000-2003 y.
6. Г.А.Ястребинецкий, Уравнения и неравенства, содержащие параметры. Москва, 1972 г.

BIR NOMA'LUMLI MODULLI TENGLAMALAR HAQIDA.

Ummatova M., Axmedova G. Boratov F.
Qo`qon DPI

Sonning moduli (yo'ki absolyut qiymati) umumiy o'rta ta'lim maktab dasturiga kiritilishiga qaramasdan, u bilan bog'liq bo'lgan misollarni yechishda ba'zi o'quvchilar xatolikka yo'l qo'yishadi. Chunki, modulli ifodada moduldan qutilish jarayonida modul ostidagi ifodaning ishorasiga bog'liqligi, shuningdek, modulli tenglamani yechishni aniqlashda moduldan qutilish uchun qo'yilgan shartlarni e'tiborga olish zarurligini ko'pchilik o'quvchilar chalkashtirib qo'yishadi. Agar modulli tenglama parametrga bog'liq bo'lsa, uni yechishda bir necha xususiy xollarni alohida taxlil qilish ham o'quvchilar uchun murakkab masalalar qatoriga kiradi. Quyidagi biz modulli tenglamalar va parametrga bog'liq bo'lgan modulli tenglamalarning ba'zilarini yechish to'g'risida to'xtalib o'tmoqchimiz.

Aytaylik, berilgan tenglama bir noma'lumli birinchi daraja bo'lib, unda modul ifodalar nolga aylantiruvchi nomalimning qiymatlari aniqlanadi. Faraz qilqylik modullarni nolga aylantiruvchi 3 ta, a_1, a_2, a_3 qiymatlar mavjud bo'lsin va ular $a_1 < a_2 < a_3$ shartlarni qanoatlantirsin. U holda, bu nuqtalar sonlar o'qini 4 qisimga ajratadi: $(-\infty, a_1]; (a_1, a_2]; (a_2, a_3]; (a_3, \infty)$. Shu bilan birga, har bir oraliqning ichki qiymatlarida modullar ostidagi ifodalar bir hil ishorali bo'ladi. shuning uchun, berilgan masalani har bir oraliqdagi yechimlari moduldan qutilish orqali yechiladi va tenglamaning yechimi oraliqdagi yechimlar birlashmasi sifatida aniqlanadi.

$$\text{Masalan: } |2x+1| + \left| \frac{1}{3}x+3 \right| - |x-2| + 7 = 0$$

Yechish:

Modul ostidagi ifodalarni nolga aylantiruvchi noma'lumning qiymatlarini topamiz: $x_1 = -\frac{1}{2}$; $x_2 = -9$; $x_3 = 2$

sonlar o'qi bu nuqtalar bilan 4 bo'lakka bo'linadi.

$$(-\infty, -9], (-9, -\frac{1}{2}], (-\frac{1}{2}, 2], (2, \infty)$$

I xol. $x \in (-\infty, -9]$ shartda berilgan modulli tenglamani quyidgi shaklda yozish mumkin.

$$-(2x+1) - \left(\frac{1}{3}x+3 \right) + (x-2) + 7 = 0$$

chunki, bu holda

$$2x+1 < 0, \quad \frac{1}{3}x+3 < 0, \quad x-2 < 0$$

tengsizliklar bajariladi. Oxirgi hosil qilingan tenglamani yechamiz.

$$(-2 - \frac{1}{3} + 1)x - 1 - 3 - 2 + 7 = 0$$

$$-\frac{4}{3}x = -1; \quad x = \frac{3}{4}$$

$x = -9$ bo'lsa

$$17 - 11 + 7 - 13 \neq 0$$

ya'ni $x = -9$ qiymat yechim emas.

Noma'lumning $x = \frac{3}{4}$ qiymati $x \in (-\infty, -9]$ shartga ziddir. Shuning uchun bu yechim qanoatlantirmaydi.

II hol. $x \in (-9, -\frac{1}{2}]$ shartda berilgan tenglama quyidagiza yozish mumkin.

$$-(2x+1) - (\frac{1}{3}x+3) + (x-2) + 7 = 0$$

$$(1 - \frac{1}{3})x - 1 + 3 + x - 1 + 7 = 0$$

$$-\frac{2}{3}x = -7, \quad x = \frac{21}{2}$$

Bu topilgan qiymat ham berilgan tenglama uchun yechim bo'la olmaydi, chunki $\frac{21}{2} \notin (-9, -\frac{1}{2})$

$x = -\frac{1}{2}$ tenglik bajarilgan holda, bu qiymatni tenglamaga qo'yib

$$-\frac{1}{6} + 3 - (-\frac{1}{2} - 2) = \frac{17 - 15 + 42}{6} = \frac{44}{6} = \frac{22}{3} \neq 0 \text{ ekanini hosil qilamiz.}$$

Demak, oraliqning chegaraviy nuqtalari ham tenglamaning yechimi bo'la olmaydi.

III hol. $x \in (-\frac{1}{2}, 2)$ shartda tenglamaning ko'rinishi quyidagicha

$$(2x+1) + (\frac{1}{3}x+3) + (x-2) + 7 = 0$$

$$(2 + \frac{1}{3} + 1)x + 1 + 3 - 2 + 7 = 0$$

$$\frac{10}{3}x = -9, \quad x = -\frac{27}{10} = -2,7$$

Bu qiymatni ham tenglamaning yechimi sifatida olish mumkin emas, chunki $x \in (-\frac{1}{2}, 2]$ bo'lib $-2,7 \notin (-\frac{1}{2}, 2]$. Chegaraviy bo'lgan $x = 2$ qiymatni tenglamadagi noma'lumning o'rniga qo'yib

$$5 + \frac{11}{3} + 7 = \frac{47}{3} \neq 0 \text{ ekanini, ya'ni } x = -2 \text{ qiymat ham yechim bo'la}$$

olmasligini ko'ramiz.

IV hol $x \in (2, \infty)$

$$2x + 1 + \frac{1}{3}x + 3 - x - 2 + 7 = 0$$

$$(2 + \frac{1}{3} - 1)x + 1 + 3 + 2 + 7 = 0$$

$$\frac{4}{3}x = -13, \quad x = -\frac{39}{4}$$

$$\text{Lekin } -\frac{39}{4} \notin (2, \infty)$$

Demak, berilgan tenglama yechimga ega emas.

Modulli tenglama parametrغا bog'liq bo'lsa, tenglamadagi modul ostida berilgan ifodalarni nola aylantiruvchi noma'lumning qiymatlari parametrغا bog'liq bo'lishi mumkin.

Masalan,

$$|3x - 4| - |2x + 3a| + |ax - 1| = a + 3 \quad \text{tenglamada}$$

$$x_1 = \frac{4}{3} \quad x_2 = -\frac{3}{2}a \quad x_3 = \frac{1}{a} \quad (a \neq 0)$$

Modul ostidagi ifodalarni 0 ga aylantiruvchi noma'lumning qiymatlari a parametrغا bog'liq bo'lib, bu nuqtalar bilan aniqlanadigan oraliqlar a ning musbat yoki manfiy qiymatlar qabul qilishiga bog'liq boladi. Agar

$$\frac{4}{3} > a > 0 \quad \text{bo'lsa oraliqlar}$$

$$\left(-\infty, -\frac{3}{2}a\right], \left(-\frac{3}{2}a, \frac{4}{3}\right], \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{a}\right), \left(\frac{1}{a}, \infty\right) \quad \text{ko'rinishda bo'ladi}$$

$$\text{Agar } a = \frac{3}{4} \quad \text{bo'lsa, oraliqlar}$$

$$\left(-\infty, -\frac{3}{2}a\right], \left(-\frac{3}{2}a, \frac{4}{3}\right], \left(\frac{4}{3}, \infty\right) \quad \text{ko'rinishda}$$

$$\text{Agar } a > \frac{3}{4} \quad \text{bo'lsa, oraliqlar}$$

$$\left(-\infty, -\frac{3}{2}a\right], \left(-\frac{3}{2}a, \frac{4}{3}\right], \left(\frac{1}{a}, \frac{4}{3}\right], \left(\frac{4}{3}, \infty\right)$$

ko'rinishda bo'ladi. $a < 0$ bo'lgan holda ham xuddi yuqoridagidek mulohaza yuritish orqali oraliqlarni aniqlash va har bir oraliqlarga mos tenglama yechimini moduldan qutilish usuli bilan yechish mumkin. Demak, parametrغا bog'liq modulli tenglamalarni yechishda parametr olish mumkin bo'lgan xususiy hollar alohida ko'rilishi kerak.

Agar $a=0$ bo'lsa, tenglama $|3x - 4| - |2x| + 1 = 3$ ko'rinishga keladi va oraliqlar $(-\infty, 0], (0, \frac{4}{3}], (\frac{4}{3}, \infty)$ bo'ladi.

$$\text{Misollar 1. } |ax - 1| - a = 3.$$

Yechish: tenglamada $a \geq -3$ tengsizlik bajarilishi kerak, aks holda, tenglama ziddiyatni ifodalaydi. Demak, $a < -3$ shartda tenglama yechimga ega emas. Xuddi shuningdek, $a=0$ da tenglama yechimga ega emas.

Modul ichidagi ifodani 0 ga aylantiruvchi qiymat $1/a$ ga teng (bu yerda $a \neq 0$). Bu nuqta bilan sonlar o'qi ikki qismga bo'linadi.

$$(-\infty, \frac{1}{a}], (\frac{1}{a}, \infty).$$

I hol $x \in (-\infty, \frac{1}{a}]$. Bu holda tenglama $-(ax-1)-a=3$ ko'rinishga keladi,

yoki

$$-ax = 2 + a$$

$$x_1 = -\frac{2+a}{a}$$

Bu qiymat $(-\infty, \frac{1}{a})$ oraliqda bo'lish shartini aniqlaymiz.

$$\frac{1}{a} + \frac{2+a}{a} = \frac{3+a}{a}$$

$$\frac{3+a}{a} \geq 0 \text{ bo'lishi uchun } a \geq 0 \text{ tengsizlik bajarilishi kerak. } a < -3 \text{ tengsizlik}$$

bajarilsa ham $\frac{3+a}{a} \geq 0$ o'rinli, lekin bu holda yuqorida ko'rganimizdek,

tenglamaning yechimi yo'q. $a = -3$ bo'lsa, $x = -\frac{1}{3}$ kelib chiqadi, demak $a \in (0, \infty)$

shartda tenglamani yechimi

$$x_1 = -\frac{2+a}{a}, \quad a = -3 \text{ bo'lsa } x_2 = -\frac{1}{3}.$$

II hol $x \in (\frac{1}{a}, \infty)$. Bu holda tenglamani quyidagicha yozish mumkin.

$$ax - 1 - a = 3$$

$$ax = 4 + a$$

$$x_2 = \frac{4+a}{a}$$

Bu topilgan qiymat $(\frac{1}{a}, \infty)$ oraliqda bo'lish shartini topamiz.

$$\frac{4+a}{a} - \frac{1}{a} > 0 \quad \frac{3+a}{a} > 0.$$

Javob: $a \in (-\infty, -3) \cup (-3, 0)$ da $\emptyset$ $a = -3$ da $x = -\frac{1}{3}$ $a \in (0, \infty)$ da

$$x_1 = -\frac{2+a}{a}; \quad x_2 = \frac{4+a}{a}.$$

Mashqlar.

$$1. \quad 2|x+a| - |x-2a| = 3a.$$

$$2. \quad a - \frac{2a^2}{|x+a|} = 0.$$

$$3. \quad |x^2 - a^2| = (x+3a)^2.$$

$$4. \quad |x+3a| - |x-a| = 2a.$$

$$5. \quad x = 2|x-a| - 2|x-2a|.$$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. С.И.Новоселов, Специальный курс по элементарной алгебры. 1965 г.
2. С.Страшевич, Е.Бровкин, «Польские математические олимпиады» 1978 г.
3. Т.То'laganov, А.Норматов. Matematikadan praktikum. Toshkent, O'qituvchi, 1989 y.
4. Е.Е.Вересова, Н.С.Денисова, Т.Н.Полякова. Практикум по решению математических задач. Москва. 1979 г.
5. Axborotnoma. Toshkent. 2000-2003 y.
6. Г.А.Ястребинецкий, Уравнения и неравенства, содержащие параметры. Москва, 1972 г.