

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

МИРЗО УЛУҒБЕК НОМИДАГИ
ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

МЕХАНИКА-МАТЕМАТИКА ФАКУЛТЕТИ

«АЛГЕБРА ВА ФУНКЦИОНАЛ АНАЛИЗ» КАФЕДРАСИ

«БЕРИЛГАН ФИЛИФОРМ НИЛРАДИКАЛЛИ ЕЧИЛУВЧАН
ЛЕЙБНИЦ АЛГЕБРАЛАРИНИНГ ИНФИНИТЕЗИМАЛ
ДЕФОРМАЦИЯСИ»

мавзусидаги

БИТИРУВ МАЛАКАВИЙ ИШИ

Бажарди: «Математика» таълим
йўналиши битирувчи 4-курс
талабаси Қ.К. Абдурасулов _____

Илмий раҳбар:
академик. Ш.А. Аюпов _____

Битирув малакавий иши кафедрадан дастлабки ҳимоядан ўтди.

_____ сонли баённомаси « _____ » _____ 2014 йил

ТОШКЕНТ – 2014

Мундарижа

Кириш	3
I-БОБ Асосий тушунчалар ва ёрдамчи фактлар.....	6
1.1-§ Асосий тушунчалар.....	6
1.2- § Ёрдамчи фактлар.....	8
II-БОБ Берилган филиформ нилрадикалли ечилувчан Лейбниц алгебралариниг инфинитезимал деформацияси.....	13
2.1-§ $R_1(\alpha)$ алгебранинг дифференциаллашлари.....	13
2.2-§ $R_1(\alpha)$ алгебранинг инфинитезимал деформацияси.....	18
2.3-§ $Z^2(L,M)$, $B^2(L,M)$, $HL^2(L,M)$ фазоларнинг ўлчамлари.....	32
Хулоса	38
Фойдаланилган адабиётлар.....	39

Кириш

Хозирги кунда Ли алгебраларнинг умумлашмаси ҳисобланган Лейбниц алгебралари синфи жадал суратда ўрганилмоқда. Лейбниц алгебралари ўтган асрнинг 90-йилларида француз математиги Ж.Л. Лоде томонидан ушбу

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y]$$

Лейбниц айнияти билан характерланадиган алгебра сифатида фанга киритилган [6].

Таъкидлаш жоизки, Лейбниц айниятини каноатлантирувчи алгебра биринчи бўлиб 1965 йилда А. Блохнинг ишида D-алгебралар номи билан киритилган эди. Лекин, D-алгебраларни ўрганишга унчалик эътибор берилмаган бўлиб, фақатгина Ж.Л. Лоде ва Т.Пирашвилининг ишларидан кейингина Лейбниц алгебралари жадал суратда ўрганила бошланди ва ҳозирги кунга келиб бу алгебраларга бағишланган бир қатор мақолалар чоп қилинди.

Ж.Л. Лоде ва унинг илмий ҳамкорлари томонидан асосан Лейбниц алгебралари когомологик нуқтаи назардан ўрганилган бўлса, Ш.А. Аюпов, Б.А. Омиров, И.С.Рахимов, И.М. Рихсибоев, А.Х.Худойбердиев ва бошқа олимларнинг ишларида бу объектнинг структуравий назарияси ўрганилган [9, 10, 11].

Лейбниц алгебралари синфи Ли алгебраларининг умумлашмаси бўлганлиги учун, табиий равишда нильпотент ва ечимли Ли алгебралар назариясида ўринли бўладиган бир қанча натижалар ва усуллар Лейбниц алгебраларигача кенгайтирилади.

Чекли ўлчовли Ли алгебралари классик назариясидан маълумки, чекли ўлчовли Ли алгебраларини ўрганиш нильпотент Ли алгебраларини ўрганиш масаласига келтирилган. Максимал нильиндексга эга бўлган Ли алгебралари синфи эса нильпотент Ли алгебралар синфининг муҳим қисми ҳисобланади.

Маълумки, Ли алгебралари учун максимал нильиндекс, алгебра ўлчови билан устма-уст тушади, ҳамда бундай алгебралар филиформ алгебралари деб номланади. Лейбниц алгебраларининг Ли алгебраларидан фарқли

жихатларидан бири шундаки, унинг максимал нильиндекси алгебра ўлчовидан биттага катта бўлади ва бундай Лейбниц алгебраларини нул-филиформ Лейбниц алгебралари дейилади.

Шу боисдан, нильиндекси алгебранинг ўлчовига тенг бўлган Лейбниц алгебраларини, яъни филиформ Лейбниц алгебраларини ўрганиш муҳим жихат ҳисобланади. Филиформ Лейбниц алгебралари нильпотент алгебраларининг нисбатан содда қисми бўлишига қарамасдан, улар етарлича мураккаб хусусиятларга эга. Шунинг учун, уларни градуировка шартлари билан ўрганиш қулайроқдир ва бу борада табиий равишдаги градуировка, максимал узунликдаги градуировка, берилган филтрлашга мос келувчи градуировкалар каби турли хил градуировкалардан фойдаланилади.

Ечимли Лейбниц алгебраларини ўрганишда Лейбниц алгебрасининг нилрадикали ва нилрадикалнинг дифференциаллашлари муҳим роль ўйнайди. Ечимли Лейбниц алгебрасининг ва нилрадикал ўлчовларининг фарқи нилрадикалнинг нил-нильпотент бўлмаган дифференциаллашларнинг максимал сонидан ошиб кетмайди [3]. Сўнгги йилларда нилрадикали берилган ечимли Лейбниц алгебраларининг тадбиғига доир бир қанча ишлар чоп этилди [3, 4, 5].

Деформациялар назарияси берилган алгебралар кўпхиллигида муҳим аҳамиятга эга ва у алгебранинг геометрик нуқтаи назардан ўрганиш имконини беради [1]. Ассоциатив ва Ли алгебралари учун деформациялар назарияси М Герстенхабер [2] ва А.Ниженхуис, Р.В.Ричардсонларнинг [3] ишларида келтирилган. Бир ўзгарувчили деформациялар назарияси Ли алгебраларининг когомологияси ва инфинитезимал деформациялар орасидаги боғланишни топиш имконини беради. Бундан ташқари инфинитезимал деформацияларни топиш Ли алгебралар кўпхиллигидаги қаттиқ алгебраларни топишда қўлланилгани учун уларни ҳисоблаш алгебраик геометриянинг асосий масалалари ҳисобланади. А.Х.Худойбердиев, Б.А.Омировнинг ишларида нулфилиформ Лейбниц

алгебраларининг инфинитезимал деформациялари тўлиқ таснифланиб, олинган тасниф ёрдамида баъзи қаттиқ алгебралар топилган [5].

Ушбу битирув малакавий иши ечимли Лейбниц алгебраларининг инфинитезимал деформацияларини ҳисоблашга бағишланган. Битирув малакавий ишида нилрадикали филиформ Лейбниц алгебрасидан иборат бўлган ечимли Лейбниц алгебраларининг инфинитезимал деформациялари топилган. Такидлаш жоизки, филиформ Лейбниц алгебралари учта синфдан иборат бўлиб, ҳар бир синф бир нечта ечимли Лейбниц алгебраларини беради. Иккинчи синф филиформ Лейбниц алгебраси орқали 7 та ечимли Лейбниц алгебраларини синфи ҳосил қилинган бўлиб, ушбу битирув малакавий ишида шу ечимли алгебралардан бири ўрганилган ва инфинитезимал деформациялари тўлиқ таснифланган. Бундан ташқари, танланган алгебранинг дифференциаллашлар фазоси ҳам тўлиқ таснифланиб, олинган таснифлар ёрдамида 2 – группа коцикллари $ZL^2(L, L)$ қочегараларининг $BL^2(L, L)$ ўлчамлари топилган. Маълумки, $ZL^2(L, L)$ ва $BL^2(L, L)$ ни топиш 2 – группа когомология $HL^2(L, L)$ ни топиш имконини беради, ҳамда $HL^2(L, L)$ нинг нолга тенг бўлиши алгебранинг қаттиқ бўлиши етарлилик шарти ҳисобланади. Битирув малакавий ишида ўрганилган алгебранинг иккинчи группа когомология нолдан фарқлилиги кўрсатилган ва ҳулоса сифатида унинг қаттиқ эмаслиги эга бўламиз.

И-БОБ. АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАР ВА ЁРДАМЧИ ФАКТЛАР

1.1-§ Асосий тушунчалар

Ушбу параграфда битирув малакавий ишида фойдаланиладиган асосий тушунча ва таърифлар келтирилади.

1.1.1-таъриф. Агар ихтиёрий $x, y, z \in G$ элементлар учун қуйидаги айниятлар бажарилса:

$$[x, x] = 0 \text{ – антикоммутативлик айнияти,}$$

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0 \text{ – Якоби айнияти,}$$

бу ерда $[-, -]$ – G да аниқланган кўпайтириш амали.

У ҳолда, F майдони устидаги G алгебраси Ли алгебраси дейилади.

1.1.2-таъриф. Агар ихтиёрий $x, y, z \in L$ элементлар учун Лейбниц айнияти бажарилса:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y]$$

бу ерда $[-, -]$ – L да аниқланган кўпайтириш амали.

У ҳолда, F майдони устидаги L алгебраси Лейбниц алгебраси дейилади

Ихтиёрий Ли алгебраси Лейбниц алгебраси бўлади.

A алгебраси Z_2 -градуирланган алгебра ёки супералгебра дейилади, агар $A = A_0 \oplus A_1$ бўлса, бу ерда $A_i \cdot A_j \subseteq A_{i+j \pmod{2}}$, $i, j \in Z_2$.

1.1.3-таъриф. Агар қуйидаги шартлар бажарилса:

$$[x, y] = -(-1)^{\alpha\beta} [y, x] \text{ ихтиёрий } x \in G_\alpha, y \in G_\beta \text{ лар учун,}$$

$$(-1)^{\alpha\gamma} [x, [y, z]] + (-1)^{\alpha\beta} [y, [z, x]] + (-1)^{\beta\gamma} [z, [x, y]] = 0$$

ихтиёрий $x \in G_\alpha, y \in G_\beta, z \in G_\gamma$ лар учун (Якоби суперайнияти).

Берилган $[-, -]$ кўпайтмали Z_2 – градуирланган алгебра $G = G_0 \oplus G_1$ Ли супералгебраси дейилади.

1.1.4-таъриф. Агар қуйидаги шартлар бажарилса:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - (-1)^{\alpha\beta} [[x, z], y]$$

ихтиёрий $x \in L, y \in L_\alpha, z \in L_\beta$, лар учун (Лейбниц суперайнияти).

У ҳолда Берилган $[-,-]$ кўпайтмали Z_2 – градуирланган алгебра $L=L_0\oplus L_1$ Лейбниц супералгебраси дейилади.

1.1.5-таъриф. Агар ихтиёрий $x,y\in L$ учун қуйидаги тенглик бажарилса:

$$d(xy)=d(x)y+xd(y).$$

У ҳолда ушбу $d:L\rightarrow L$ сизикли акслантириш берилган L алгебрада дифференциал дейилади.

Ихтиёрий L Лейбниц алгебраси учун қуйидаги кетма-кетликларни аниқлаймиз:

$$L^{[1]}=L, L^{[k+1]}=[L^{[k]}, L^{[k]}], k \geq 1$$

$$L^1=L, L^{k+1}=[L^k, L^1], k \geq 1.$$

1.1.6-таъриф. L Лейбниц алгебраси ечимли дейилади, агар шундай $m\in\mathbb{N}$ мавжуд бўлсаки, натижада $L^{[m]}=0$ бўлса. Ана шундай m ларнинг энг кичигига L ечимли алгебранинг индекси дейилади.

1.1.7-таъриф. L Лейбниц алгебраси нильпотентли дейилади, агар шундай $s\in\mathbb{N}$ мавжуд бўлсаки, натижада $L^s=0$ бўлса. Ана шундай хусусиятга эга бўлган минимал s сони нильпотентлик индекси ёки L алгебрасининг нильиндеки дейилади.

1.1.8-таъриф. L Лейбниц алгебрасининг максимал нилпотент идеалига унинг нилрадикали дейилади.

1.1.9-таъриф. Агар $\dim L^i = n+1-i$ бўлса, бу ерда $n = \dim L$ ва $1 \leq i \leq n$.

У ҳолда, n -ўлчовли L Лейбниц алгебраси нуль-филиформ дейилади,

1.1.1-Теорема. Ихтиёрий n -ўлчовли нуль-филиформ Лейбниц алгебраси L да шундай $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ базис мавжудки, L алгебрасидаги кўпайтма қуйидаги кўринишга келади:

$$[e_i, e_1] = e_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1,$$

бу ерда иштирок этмаган кўпайтмалар нолга тенг бўлади.

1.1.10-таъриф. Агар $\dim L^i = n-i$, $2 \leq i \leq n$ бўлса, у ҳолда, L Лейбниц алгебраси филиформ дейилади,

L – чекли ўлчовли нильпотентли Лейбниц алгебраси бўлсин. $\text{gr}(L)_i := L^i/L^{i+1}$, $1 \leq i \leq s-1$ деб оламиз, бу ерда $s-L$ алгебрасининг нильиндекси, ва $\text{gr}L = \text{gr}(L)_1 \oplus \text{gr}(L)_2 \oplus \dots \oplus \text{gr}(L)_{s-1}$ деб белгилаб оламиз. У холда $[\text{gr}(L)_i, \text{gr}(L)_j] \subseteq \text{gr}(L)_{i+j}$, бўлади ва биз градуирланган $\text{gr}L$ алгебрасига эга бўламиз.

1.1.11-таъриф. Юқоридаги каби аниқланган градуировкаларни табиий градуировкалашиш деб аталади. Агар L Лейбниц алгебраси $\text{gr}L$ алгебрасига изоморф бўлса, L табиий усул билан градуирланган Лейбниц алгебраси дейилади.

1.2-§ Ёрдамчи фактлар

Ушбу теоремада табиий усулда градуирланган филиформ Лейбниц алгебрасининг таснифи келтирилган.

1.2.1-Теорема [9]. Ихтиёрий n -ўлчовли комплекс табиий градуаллашган Лейбниц алгебраси куйидаги жуфти билан изоморф бўлмаган алгебраларга изоморф бўлади

$$F_n^1: [e_1, e_1] = e_3, [e_i, e_1] = e_{i+1} \text{ где } 2 \leq i \leq n-1,$$

$$F_n^2: [e_1, e_1] = e_3, [e_i, e_1] = e_{i+1} \text{ где } 3 \leq i \leq n-1,$$

$$F_n^3: [e_i, e_1] = -[e_1, e_i] = e_{i+1}, [e_i, e_{n+1-i}] = [e_{n+1-i}, e_i] = \alpha(-1)^{i+1} e_n \text{ где } 2 \leq i \leq n-1,$$

бу ерда иштирок этмаган кўпайтмалар нолга тенг бўлади, $\alpha \in \{0, 1\}$, агар n жуфт бўлса ва $\alpha = 0$, агар n тоқ бўлса.

L – чекли сондаги нол бўлмаган фазоли Z -градуировкаланган Лейбниц алгебраси бўлсин, яъни ихтиёрий $i, j \in Z$ лар учун $L = \bigoplus_{i \in Z} V_i$

ўринли бўлсин, бу ерда $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$.

L нильпотент Лейбниц алгебраси Лейбница боғланган градуировкага имкон яратади деймиз, агар $L = V_{k_1} \oplus V_{k_2} \oplus \dots \oplus V_{k_t}$, бу ерда $V_i \neq 0$ ихтиёрий i учун ($k_1 \leq i \leq k_t$). $l(\oplus L) = k_t - k_1 + 1$ сони градуировка узунлиги дейилади. Кейинчалик $l(L) = \max\{\text{len}(\oplus L) = k_t - k_1 + 1 \mid L = V_{k_1} \oplus V_{k_2} \oplus \dots \oplus V_{k_t} \text{ боғланган холда градуирланган}\}$ ни L Лейбниц алгебрасининг узунлиги деб атаймиз. L Лейбниц алгебраси максимал узунликдаги алгебра дейилади, агар $l(L) = \dim L$ бўлса.

1.2.1-Мисол. Нуль-филиформли L Лейбниц алгебраси максимал узунликдаги алгебра бўлади. Ҳақиқатдан хам, 1.1.1-теорема да $1 \leq i \leq n$ учун $V_i := \{e_i\}$ деб қабул қилсак, биз $L = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$ га эга бўламиз, бу ерда $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$.

1.2.2-Теорема [10]. Ихтиёрий n -ўлчовли комплекс ёйилмайдиган филиформ Ли бўлмаган максимал узунликдаги L алгебрасида шундай базис $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ мавжудки, L даги кўпайтма учун қуйидаги ўринли бўлади:

$$[x_i, x_1] = x_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n-1$$

(иштирок этмаган кўпайтмалар нолга тенг бўлади).

Узунлиги $n-1$ бўлган комплекс n -ўлчовли филиформли Лейбниц алгебраси L берилган бўлсин. 1.2.1-Теорема дан келиб чиқадики, L алгебрасида шундай базис мавжуд бўлиб, унда унинг кўпайтмаси қуйидаги учта кўринишдан бирига эга бўлади F_1, F_2, F_3 .

1.2.1-Тасдиқ [11]. L – узунлиги F_1 синфига тегишли бўлган, узунлиги $n-1$ бўлган филиформли Лейбниц алгебраси бўлсин. У ҳолда $n-1$ узунликдаги градуировка табиий градуировка билан устма-уст тушади.

1.2.2-Тасдиқ [11]. Узунлиги $n-1$ бўлган F_2 синфига тегишли бўлган ихтиёрий n -ўлчовли филиформли Лейбниц алгебраси қуйидаги алгебраларнинг биттасига изоморф бўлади:

$$F_n^2 : \begin{cases} [y_1, y_1] = y_3, \\ [y_i, y_1] = y_{i+1}, \end{cases} \quad 3 \leq i \leq n-1,$$

$$M_1(k) : \begin{cases} [y_i, y_1] = y_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2, \\ [y_i, y_n] = y_{k+i-1}, & 1 \leq i \leq n-k, 3 \leq k \leq n-1, \end{cases}$$

$$M_2 : \begin{cases} [y_i, y_1] = y_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2, \\ [y_i, y_n] = y_{\frac{n+1}{2}+i-1}, & 1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}, \\ [y_n, y_n] = \alpha y_{n-1}, & \alpha \neq 0, \end{cases}$$

$$M_3 : \begin{cases} [y_i, y_1] = y_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2, \\ [y_n, y_n] = y_{n-1}, \end{cases}$$

бу ерда иштирок этамаган кўпайтмалар нолга тенг ва $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ – тегишли алгебранинг базиси бўлади.

Қуйидаги теоремада нилрадикали табиий усулда градуирланган ечимли алгебрасининг таснифи келтирилган.

1.2.3-Теорема [4]. Нилрадикали F_n^2 га изоморф бўлган $(n+1)$ ўлчовли ечимли Лейбниц алгебраси, қуйидаги ўзаро изоморф бўлмаган алгебралардан бирига изоморф.

$$R_1(\alpha) : \begin{cases} [e_1, e_1] = e_3, & [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-1, \\ [e_1, x] = -e_1, & [e_i, x] = -(i-1)e_1, & 3 \leq i \leq n, \\ [x, e_1] = e_1, & [x, x] = \alpha e_2, & \alpha \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

$$R_2(\alpha) : \begin{cases} [e_1, e_1] = e_3, & [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-1, \\ [e_1, x] = -e_1, & [e_i, x] = -(i-1)e_1, & 3 \leq i \leq n, \\ [x, e_1] = e_1, & [e_2, x] = \alpha e_2, & \alpha \neq 0. \end{cases}$$

$$R_3 : \begin{cases} [e_1, e_1] = e_3, & [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-1, \\ [e_1, x] = -e_1, & [e_i, x] = -(i-1)e_1, & 3 \leq i \leq n, \\ [x, e_1] = e_1, & [e_2, x] = (1-n)e_2 + e_n. \end{cases}$$

$$R_4(\alpha) : \begin{cases} [e_1, e_1] = e_3, & [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-1, \\ [e_1, x] = -e_1, & [e_i, x] = -(i-1)e_1, & 3 \leq i \leq n, \\ [x, e_1] = e_1, & [e_2, x] = -\alpha e_2, & \alpha \neq 1, \\ [x, e_2] = \alpha e_2. \end{cases}$$

$$R_5(\alpha): \begin{cases} [e_1, e_1] = e_3, \\ [e_1, x] = -e_1 - \alpha e_2, & \alpha \in \{0,1\}, [e_2, x] = -e_2, \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-1, \\ [e_i, x] = -(i-1)e_i, & 3 \leq i \leq n-1 \\ [x, e_1] = e_1 + \alpha e_2, & [x, e_2] = e_2. \end{cases}$$

$$R_6(\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n, \lambda, \delta): \begin{cases} [e_1, e_1] = e_3, \\ [e_1, x] = \sum_{i=3}^n \alpha_i e_i, & [e_2, x] = -e_2, \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-1, \\ [e_i, x] = \sum_{j=i+1}^n \alpha_{j-i+2} e_j, & 3 \leq i \leq n-1 \\ [x, x] = \lambda e_n, & [x, e_2] = \delta e_2, \quad \delta \notin \{0, -1\}. \end{cases}$$

Лейбниц алгебраси учун когомологи группа таърифларини келтирамиз.

1.2.1-Таъриф. F майдонда L – Лейбниц алгебраси ва F -модул M берилган бўлсин, агар қуйидаги L ни M га ўтказувчи иккита акслантириш:

$$[-, -]: L^*M \rightarrow M, \quad [-, -]: M^*L \rightarrow M$$

қуйидаги учта аксиомани қаноатлантирса:

$$[m, [x, y]] = [[m, x], y] - [[m, y], x]$$

$$[x, [m, y]] = [[x, m], y] - [[x, y], m]$$

$$[x, [y, m]] = [[x, y], m] - [[x, m], y]$$

ихтиёрий $m \in M$, $x, y \in L$ учун.

У ҳолда, M тўплам L – Лейбниц алгебрасининг тасвири дейилади.

L – Лейбниц алгебраси ва унинг M тасвири учун белгилаш киритамиз:

$C^n(L, M) := \text{Hom}(L^{\otimes n}, M)$, $n \geq 0$ да ($n < 0$ да, $C^n(L, M)$ ни нол деб оламиз).

$C^*(L, M) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} C^n(L, M)$. $C^*(L, M)$ тўплам элементлари M қийматли L занжир

дейилди, $C^n(L, M)$ тўпламнинг элементлари n - даражали занжир дейилади.

$d^n : C^n(L, M) \rightarrow C^{n+1}(L, M)$ гомоморфизм қуйидагича аниқланган бўлсин:

$$\begin{aligned}
(d^n f)(x_1, \dots, x_{n+1}) := & [x_1, f(x_2, \dots, x_{n+1})] + \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^i [f(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}), x_i] + \\
& + \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{j+1} (f(x_1, \dots, x_{i-1}, [x_i, x_j], x_{i+1}, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{n+1})),
\end{aligned}$$

бу ерда $f \in C^n(L, M)$, $x_i \in L$ ва \hat{x} белгиси x нинг тушиб қолганини билдиради.

$d : C^*(L, M) \rightarrow C^*(L, M)$ шундай операторки, d оператор $C^n(L, M)$ да d^n билан устма-уст. d^n операторнинг ядросини ($Z^n(L, M) := \text{Ker} d^n$) n -тартибли коцикль, d^{n-1} операторнинг образи эса ($B^n(L, M) := \text{Im} d^{n-1}$) n -тартибли кочегара дейилади. Текшириш мумкинги, $B^n(L, M) \subseteq Z^n(L, M)$ муносабат ўринли.

$HL^n(L, M) := Z^n(L, M)/B^n(L, M)$ фактор фазо M қийматли L алгебранинг n -даражали когомологик фазоси дейилади.

1.2.2-Таъриф. $Z^2(L, M)$ га берилган L Лейбниц алгебрасининг инфинитезимал деформацияси дейилади.

1.2.4-Теорема [7]. G -чекли ўлчовли характеристикаси 0 бўлган ярим содда Ли алгебраси ва G да чекли ўлчовли ўнг M модул берилган бўлсин, у холда ихтиёрий $i > 0$ учун $HL^i(G, M) = 0$ ўринли бўлади.

**II-БОБ. БЕРИЛГАН ФИЛИФОРМ НИЛРАДИКАЛЛИ ЕЧИЛУВЧАН
ЛЕЙБНИЦ АЛГЕБРАЛАРИНИГ ИНФИНИТЕЗИМАЛ
ДЕФОРМАЦИЯСИ**

2.1-§ $R_1(\alpha)$ алгебранинг дифференциаллашлари

Ушбу параграфда 1.1.4-Теоремада келтирилган ечимли Лейбниц алгебраларининг биринчи синфининг дифференциаллашлари хисобланади.

$$R_1(\alpha) : \begin{cases} [e_1, e_1] = e_3, \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-1, \\ [x, e_1] = e_1, \\ [e_1, x] = -e_1, \\ [e_i, x] = -(i-1)e_i, & 3 \leq i \leq n, \\ [x, x] = \alpha e_2, & \alpha \in \{0,1\}. \end{cases}$$

2.1.1-Тасдиқ. $R_1(\alpha)$ алгебранинг дифференциаллашлари умумий кўриниши қуйидагича бўлади:

$$Der(R_1(\alpha)) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\alpha)c & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a & b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (n-2)a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (n-1)a & 0 \\ b & d & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

бу ерда $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

Исбот: $R_1(\alpha)$ алгебра базис элементлари учун дифференциаллаш шартини текширамыз.

Айтайлик

$$d(e_i) = \alpha_{i,1}e_1 + \alpha_{i,2}e_2 + \alpha_{i,3}e_3 + \dots + \alpha_{i,n}e_n + \beta_i x$$

$$d(x) = \gamma_1e_1 + \gamma_2e_2 + \gamma_3e_3 + \dots + \gamma_n e_n + \beta x$$

бўлсин.

Дастлаб, (e_1, e_1) жуфтлик учун дифференциаллаш шартини текширамыз:

$$1) (e_1, e_1): d(e_1 e_1) = d(e_1)e_1 + e_1 d(e_1)$$

$$d(e_3) = (\alpha_{i,1}e_1 + \alpha_{i,2}e_2 + \dots + \alpha_{i,n}e_n + \beta_i x)e_1 + e_1(\alpha_{i,1}e_1 + \alpha_{i,2}e_2 + \dots + \alpha_{i,n}e_n + \beta_i x)$$

$$\alpha_{3,1}e_1 + \alpha_{3,2}e_2 + \dots + \alpha_{3,n}e_n + \beta_3 x = \alpha_{1,1}e_3 + \alpha_{1,3}e_4 + \dots + \alpha_{1,n-1}e_n + \beta_1 e_1 + \alpha_{1,1}e_3 - \beta_1 e_1$$

Бу тенгликдан қуйидагича муносабатларни оламыз:

$$\begin{cases} \alpha_{3,1} = 0, \\ \alpha_{3,2} = 0, \\ \alpha_{3,3} = 2\alpha_{1,1}, \\ \alpha_{3,k} = \alpha_{1,k-1}, \quad 4 \leq k \leq n, \\ \beta_3 = 0. \end{cases}$$

Дифференциаллаш шартини (e_1, e_i) жуфтликлап учун текширсак

$$2) (e_1, e_i): d(e_1 e_i) = d(e_1)e_i + e_1 d(e_i) \quad 2 \leq i \leq n,$$

$$0 = (\alpha_{1,1}e_1 + \alpha_{1,2}e_2 + \dots + \alpha_{1,n}e_n + \beta_1 x)e_i + e_1(\alpha_{i,1}e_1 + \alpha_{i,2}e_2 + \dots + \alpha_{i,n}e_n + \beta_i x)$$

$$0 = \alpha_{i,1}e_3 - \beta_i e_1$$

қуйидаги муносабатни оламыз:

$$\begin{cases} \alpha_{i,1} = 0, \quad 2 \leq i \leq n, \\ \beta_i = 0, \quad 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

$$3) d(e_i e_1) = d(e_i)e_1 + e_i d(e_1) \quad 2 \leq i \leq n, \text{ мунсабатдан } 3 \leq i \leq n-1 \text{ бўлган}$$

холда қуйидагига эга бўламыз:

$$d(e_{i+1}) = (\alpha_{i,2}e_2 + \dots + \alpha_{i,n}e_n + \beta_i x)e_1 + e_i(\alpha_{1,1}e_1 + \alpha_{1,2}e_2 + \dots + \alpha_{1,n}e_n + \beta_1 x)$$

$$\alpha_{i+1,2}e_2 + \dots + \alpha_{i+1,n}e_n + \beta_{i+1}x = \alpha_{i,3}e_4 + \dots + \alpha_{i,n-1}e_n + \alpha_{1,1}e_{i+1} - (i-1)\beta_1 e_i$$

Ушбу тенгликни соддалаштирсак қуйидагича тенгликларни оламыз:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{i+1,2} = 0, \\ \alpha_{i+1,3} = 0, \\ \alpha_{i+1,4} = \alpha_{i,3}, \\ \dots \\ \alpha_{i+1,i-1} = \alpha_{i,i-2}, \\ \alpha_{i+1,i} = \alpha_{i,i-1} - (i-1)\beta_1, \\ \alpha_{i+1,i+1} = \alpha_{i,i} + \alpha_{1,1}, \\ \alpha_{i+1,i+2} = \alpha_{i,i+1}, \\ \dots \\ \alpha_{i+1,n} = \alpha_{i,n-1}. \end{array} \right.$$

$i = 2$ холда $d(e_2 e_1) = d(e_2)e_1 + e_2 d(e_1)$ ушбу муносабат келиб чиқади.

$$\alpha_{2,3}e_4 + \alpha_{2,4}e_5 + \dots + \alpha_{2,n-1}e_n = 0$$

яъни

$$\alpha_{2,k} = 0, \quad 3 \leq k \leq n-1,$$

$$d(e_2) = \alpha_{2,2}e_2 + \alpha_{2,n}e_n.$$

$i = n$ холни қарасак $d(e_n e_1) = d(e_n)e_1 + e_n d(e_1)$ қуйидаги тенглик келиб чиқади

$$0 = (\alpha_{n,2}e_2 + \alpha_{n,3}e_3 + \dots + \alpha_{n,n}e_n)e_1 + e_n(\alpha_{1,1}e_1 + \alpha_{1,2}e_2 + \dots + \alpha_{1,n}e_n + \beta_1 x)$$

$$\alpha_{n,3}e_4 + \alpha_{n,4}e_5 + \dots + \alpha_{n,n-1}e_n - (n-1)\beta_1 e_n = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{n,k} = 0, \quad 3 \leq k \leq n-2, \\ \alpha_{n,n-1} = (n-1)\beta_1 \\ d(e_n) = (n-1)\beta_1 e_{n-1} + \alpha_{n,n}e_n. \end{array} \right.$$

Агар $(e_i, e_j) : 2 \leq i, j \leq n$, элементлар учун дифференциаллаш шартини текширсак, айний муносабат ҳосил бўлади.

Энди (e_1, x) жуфтлик учун дифференциаллаш шартини текширамыз

$$4) -d(e_1) = (a_{1,1}e_1 + a_{1,2}e_2 + \dots + a_{1,n}e_n + \beta_1 x)x + e_1(\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \dots + \gamma_n e_n + \beta x)$$

$$-(a_{1,1}e_1 + a_{1,2}e_2 + \dots + a_{1,n}e_n + \beta_1x) = -a_{1,1}e_1 - 2a_{1,3}e_3 - \dots - (n-1)a_{1,n}e_n + a\beta_1e_2 + \gamma_1e_3 - \beta e_1, \\ \beta e_1 + (-a_{1,2} - a\beta_1)e_2 + (a_{1,3} - \gamma_1)e_3 + 2a_{1,4}e_4 + \dots + (n-2)a_{1,n}e_n + \beta_1x = 0$$

Бундан куйидаги муносабатни оламиз:

$$\begin{cases} \beta = 0, \\ \beta_1 = 0, \\ \beta_{1,2} = 0, \\ a_{1,2} = 0, \\ a_{1,3} = \gamma_1, \\ a_{1,k} = 0, \quad 4 \leq k \leq n. \end{cases}$$

$$\text{яъни } de_1 = \alpha_{1,1}e_1 + \gamma_1e_3.$$

(x, e_i) ва (e_i, x) элементлар учун дифференциаллаш шартидан куйидагиларга эга бўламиз:

$$5) (x, e_1): d(xe_1) = d(x)e_1 + xd(e_1)$$

$$d(e_1) = (\gamma_1e_1 + \gamma_2e_2 + \dots + \gamma_n e_n + \beta x)e_1 + x(\alpha_{1,1}e_1 + \gamma_1e_3)$$

$$\alpha_{1,1}e_1 + \gamma_1e_3 = \gamma_1e_3 + \gamma_3e_4 + \dots + \gamma_{n-1}e_n + \alpha_{1,1}e_1$$

$$\Rightarrow \gamma_k = 0, \quad 3 \leq k \leq n-1 \quad \Rightarrow \quad d(x) = \gamma_1e_1 + \gamma_2e_2 + \gamma_n e_n.$$

$$6) (x, e_i): d(xe_i) = d(x)e_i + xd(e_i), \quad 2 \leq i \leq n \quad \Rightarrow \quad 0 = 0.$$

$$7) (e_i, x): d(e_i x) = d(e_i)x + e_i d(x), \quad 3 \leq i \leq n,$$

$$-(i-1)d(e_i) = (a_{i,3}e_1 + a_{i,4}e_4 + \dots + a_{i,n}e_n)x + e_i(\gamma_1e_1 + \gamma_2e_2 + \gamma_n e_n),$$

$$-(i-1)(a_{i,3}e_1 + a_{i,4}e_4 + \dots + a_{i,n}e_n) = -2a_{i,3}e_3 - 3a_{i,4}e_4 - \dots - (n-1)a_{i,n}e_n + \gamma_1e_{i+1}$$

Юқоридаги муносабатларни соддалаштириб куйидаги натижаларни оламиз:

$$\begin{cases} \alpha_{i,3} = 0, \\ \dots \\ \alpha_{i,i-1} = 0, \\ \alpha_{i,i+1} = \gamma_1, \\ \alpha_{i,i+2} = 0, \\ \dots \\ \alpha_{i,n} = 0. \end{cases} \stackrel{1)3)}{\Rightarrow} \begin{cases} \alpha_{i,i+1} = \gamma_1, & 3 \leq i \leq n-1, \\ \alpha_{i,i} = (i-1)\alpha_{1,1}, & 3 \leq i \leq n. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d(e_i) = (i-1)\alpha_{1,1}e_i + \gamma_1e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-1, \\ d(e_n) = (n-1)\alpha_{1,1}e_n. \end{cases}$$

$$i = 2: d(e_2x) = d(e_2)x + e_2d(x),$$

$$0 = (\alpha_{2,2}e_2 + \alpha_{2,n}e_n)x, \Rightarrow 0 = -(n-1)\alpha_{2,n}e_n, \Rightarrow \alpha_{2,n} = 0, \Rightarrow d(e_2) = \alpha_{2,2}e_2.$$

$$8) (x, x): d(xx) = d(x)x + xd(x),$$

$$\alpha d(e_2) = (\gamma_1e_1 + \gamma_2e_2 + \gamma_n e_n)x + x(\gamma_1e_1 + \gamma_2e_2 + \gamma_n e_n),$$

$$\alpha\alpha_{2,2}e_2 = -\gamma_1e_1 - (n-1)\gamma_n e_n + \gamma_1e_1,$$

$$\begin{cases} \gamma_n = 0, \\ \alpha_{2,2} = 0, \text{ агар } \alpha = 1 \text{ бўлса} \end{cases} \Rightarrow d(x) = \gamma_1e_1 + \gamma_2e_2.$$

Барча натижаларни соддалаштириб, уларни бирлаштириб, барча ҳоллар кўрилганлиги сабабли, қуйидаги охириги натижаларни ҳосил қиламиз:

$$d(e_1) = \alpha_{1,1}e_1 + \gamma_1e_3,$$

$$d(e_2) = (1-\alpha)\alpha_{2,2}e_2,$$

$$d(e_i) = (i-1)\alpha_{1,1}e_i + \gamma_1e_{i+1}, \Rightarrow 3 \leq i \leq n-1$$

$$d(e_n) = (n-1)\alpha_{1,1}e_n,$$

$$d(x) = \gamma_1e_1 + \gamma_2e_2.$$

Агар охириги натижадаги коэффициентларни қуйидагича алмаштирсак $\alpha_{1,1} = a$, $\alpha_{1,2} = c$, $\gamma_1 = b$, $\gamma_2 = d$ тасдиқ исботини ҳосил қиламиз.

□

2.2-§ $R_1(\alpha)$ алгебранинг инфинитезимал деформацияси.

Энди берилган $R_1(\alpha)$ алгебранинг инфинитезимал деформацияси хақидаги теоремани келтирайлик.

2.2.1-Теорема. $R_1(\alpha)$ алгебранинг инфинитезимал деформацияларининг умумий кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\varphi(e_1, e_1) = \sum_{k=2}^n \alpha_{1,1}^k e_k + \beta_{1,1} x,$$

$$\varphi(e_1, e_3) = \beta_{1,1} e_1,$$

$$\varphi(e_1, e_2) = 0,$$

$$\varphi(e_1, e_j) = 0, \quad 4 \leq j \leq n,$$

$$\varphi(e_i, e_1) = \sum_{k=2}^n \alpha_{i,1}^k e_k, \quad 3 \leq i \leq n$$

$$\varphi(e_2, e_1) = \sum_{k=4}^n \alpha_{2,1}^k e_k,$$

$$\varphi(e_2, e_j) = 0, \quad 3 \leq j \leq n,$$

$$\varphi(e_i, e_2) = \begin{cases} \alpha_{i,2}^i e_i, & \text{агар } \alpha = 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } \alpha = 1 \text{ бўлса,} \end{cases}, \quad 2 \leq i \leq n,$$

$$\varphi(e_i, e_3) = (i-1)\beta_{1,1} e_i, \quad 3 \leq i \leq n,$$

$$\varphi(e_i, e_j) = 0, \quad 3 \leq i \leq n, \quad 4 \leq j \leq n,$$

$$\varphi(e_1, x) = \mu_1^1 e_1 + \mu_1^2 e_2 - \sum_{i=3}^{n-1} (i-2)\alpha_{1,1}^{i+1} e_i + \mu_1 x,$$

$$\varphi(e_2, x) = \mu_2^2 e_2 - \sum_{i=4}^{n-1} (i-2)\alpha_{2,1}^i e_{i-1} + \mu_2^n e_n,$$

$$\varphi(e_3, x) = \mu_3^1 e_1 + \mu_3^2 e_2 + 2\mu_3^1 e_3 - \sum_{i=4}^n ((i-2)\alpha_{1,1}^{i+1} + (i-3)\alpha_{1,1}^i) e_i,$$

$$\varphi(e_i, x) = -((i-1)\alpha_{i,1}^2 + \alpha\beta_{i-1,1})e_2 + \sum_{k=3}^{i-1} (k-i) \sum_{j=1}^{k-2} \alpha_{i-j,1}^{k-j} e_k +$$

$$+ (i-1)\mu_1^1 e_i + \sum_{k=i+1}^n (k-i) \sum_{j=1}^{i-2} \alpha_{i-j,1}^{k-j} e_k, \quad 4 \leq i \leq n,$$

$$\varphi(x, e_1) = -\mu_1^1 e_1 + \sum_{i=2}^n \gamma_i^1 e_i + \gamma_1 x,$$

$$\varphi(x, e_2) = \alpha \alpha_{2,2}^2 e_2,$$

$$\varphi(x, e_i) = 0, \quad 3 \leq i \leq n,$$

$$\varphi(x, x) = \sum_{i=2}^n \gamma_i^1 e_i - \alpha \alpha_{2,2}^2 x.$$

Исбот: Исботлашда куйидаги айниятдан фойдаланамиз:

$$[a, \varphi(b, c)] - [\varphi(a, b), c] + [\varphi(a, c), b] + \varphi(a, [b, c]) - \varphi([a, b], c) + \varphi([a, c], b) = 0.$$

Куйидаги белгилашларни киритиб олайлик:

$$\varphi(e_i, e_j) = \alpha_{i,j}^1 e_1 + \alpha_{i,j}^2 e_2 + \alpha_{i,j}^3 e_3 + \dots + \alpha_{i,j}^n e_n + \beta_{i,j}^1 x_1,$$

$$\varphi(e_i, x) = \mu_i^1 e_1 + \mu_i^2 e_2 + \mu_i^3 e_3 + \dots + \mu_i^n e_n + \mu_i x,$$

$$\varphi(x, e_i) = \gamma_i^1 e_1 + \gamma_i^2 e_2 + \gamma_i^3 e_3 + \dots + \gamma_i^n e_n + \gamma_i x,$$

$$\varphi(x, x) = \gamma^1 e_1 + \gamma^2 e_2 + \gamma^3 e_3 + \dots + \gamma^n e_n + \beta x.$$

Барча мумкин бўлган элементлар комбинациясини кўриб чиқамиз:

Соддалик учун $[x, y]$ кўпайтманинг ўрнига x у белгилашни киритамиз

1). (e_1, e_1, e_1) : $e_1 \varphi(e_1, e_1) + \varphi(e_1, e_3) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_{1,3}^1 = \beta_{1,1}, \\ \alpha_{1,3}^3 = -\alpha_{1,1}^1, \\ \alpha_{1,3}^2 = 0, \\ \alpha_{1,3}^k = 0, \quad 4 \leq k \leq n, \\ \beta_{1,3} = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \varphi(e_1, e_3) = \beta_{1,1} e_1 - \alpha_{1,1}^1 e_3.$$

2). (e_1, e_1, e_i) : $e_1 \varphi(e_1, e_i) + \varphi(e_1, e_i) e_1 - \varphi(e_1 e_1, e_i) = 0, \quad 2 \leq i \leq n,$

$$-\alpha_{3,i}^1 e_1 - \alpha_{3,i}^2 e_2 + (2\alpha_{1,i}^1 - \alpha_{3,i}^3) e_3 + (\alpha_{1,i}^3 - \alpha_{3,i}^4) e_4 + \dots + (\alpha_{1,i}^{n-1} - \alpha_{3,i}^n) e_n - \beta_{3,i} x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_{3,i}^1 = \alpha_{3,i}^2 = 0, \quad 2 \leq i \leq n, \\ \beta_{3,i} = 0, \quad 2 \leq i \leq n, \\ \alpha_{3,i}^3 = 2\alpha_{1,i}^1, \quad 2 \leq i \leq n, \\ \alpha_{3,i}^k = \alpha_{1,i}^{k-1}, \quad 2 \leq i \leq n, \quad 4 \leq k \leq n. \end{cases}$$

3). (e_1, e_i, e_1) : $e_1 \varphi(e_i, e_1) - \varphi(e_1, e_i) e_1 + \varphi(e_3, e_i) + \varphi(e_1, e_{i+1}) = 0, \quad 3 \leq i \leq n-1$

$$e_1(\alpha_{i,1}^1 e_1 + \alpha_{i,1}^2 e_2 + \dots + \alpha_{i,1}^n e_n + \beta_{i,1} x) - (\alpha_{1,i}^1 e_1 + \alpha_{1,i}^2 e_2 + \dots + \alpha_{1,i}^n e_n + \beta_{1,i} x)e_1 + \\ + \alpha_{3,i}^1 e_1 + \alpha_{3,i}^2 e_2 + \dots + \alpha_{3,i}^n e_n + \beta_{3,i} x + \alpha_{1,i+1}^1 e_1 + \alpha_{1,i+1}^2 e_2 + \dots + \alpha_{1,i+1}^n e_n + \beta_{1,i+1} x,$$

Бундан ва олдинги натижалардан қуйидагича тенгликларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} \alpha_{1,i+1}^1 = \beta_{i,1} + \beta_{1,i}, & 3 \leq i \leq n, \\ \alpha_{i,1}^1 + \alpha_{1,i}^1 + \alpha_{1,i+1}^3 = 0, & 3 \leq i \leq n, \\ \alpha_{1,i+1}^k = 0, & 3 \leq i \leq n, 4 \leq k \leq n, \\ \beta_{1,i+1} = 0, & 3 \leq i \leq n. \end{cases} \Rightarrow \varphi(e_1, e_i) = \alpha_{1,i}^1 e_1 + \alpha_{1,i}^3 e_3, \quad 4 \leq i \leq n.$$

$i=2$ бўлганда $e_1 \varphi(e_2, e_1) - \varphi(e_1, e_2) e_1 + \varphi(e_3, e_2) = 0$,

$$e_1(\alpha_{2,1}^1 e_1 + \alpha_{2,1}^2 e_2 + \dots + \alpha_{2,1}^n e_n + \beta_{2,1} x) - (\alpha_{1,2}^1 e_1 + \alpha_{1,2}^2 e_2 + \dots + \alpha_{1,2}^n e_n + \beta_{1,2} x)e_1 + \\ + \alpha_{3,2}^1 e_1 + \alpha_{3,2}^2 e_2 + \dots + \alpha_{3,2}^n e_n + \beta_{3,2} x = 0.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta_{3,2} = 0, \\ \beta_{2,1} + \beta_{1,2} = 0, \\ \alpha_{2,1}^1 - \alpha_{1,2}^1 + \alpha_{3,2}^3 = 0, \\ \alpha_{3,2}^k - \alpha_{1,2}^{k-1} = 0, & 4 \leq k \leq n, \end{cases}$$

$i=n$ бўлганда

$$\begin{cases} \alpha_{3,n}^2 = \beta_{3,n} = 0, \\ \alpha_{3,n}^1 = \beta_{n,1}, \\ \alpha_{3,n}^3 = \alpha_{1,n}^1 - \alpha_{n,1}^1, & \Rightarrow \varphi(e_3, e_n) = \beta_{n,1} e_1 + (\alpha_{1,n}^1 - \alpha_{n,1}^1) e_3 + \alpha_{1,n}^3 e_4. \\ \alpha_{3,n}^4 = \alpha_{1,n}^3, \\ \alpha_{3,n}^k = 0, & 5 \leq k \leq n. \end{cases}$$

4). (e_i, e_1, e_1) : $e_i \varphi(e_1, e_1) + \varphi(e_i, e_3) = 0, \quad 3 \leq i \leq n-1$,

$$e_i(\alpha_{1,1}^1 e_1 + \alpha_{1,1}^2 e_2 + \dots + \alpha_{1,1}^n e_n + \beta_{1,1} x) + (\alpha_{i,3}^1 e_1 + \alpha_{i,3}^2 e_2 + \dots + \alpha_{i,3}^n e_n + \beta_{i,3} x) = 0, \\ \alpha_{1,1}^1 e_{i+1} - (i-1)\beta_{1,1} e_i + \alpha_{i,3}^1 e_1 + \alpha_{i,3}^2 e_2 + \dots + \alpha_{i,3}^n e_n + \beta_{i,3} x = 0,$$

Бундан қуйидаги муносабатларни оламиз:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{i,3}^1 = 0, \\ \alpha_{i,3}^2 = 0, \\ \dots \\ \alpha_{i,3}^{i-1} = 0, \\ \alpha_{i,3}^i = (i-1)\beta_{1,1}, \\ \alpha_{i,3}^{i+1} = -\alpha_{1,1}^1, \\ \alpha_{i,3}^{i+2} = 0, \\ \dots \\ \alpha_{i,3}^n = 0, \\ \beta_{i,3} = 0. \end{array} \right. \Rightarrow \varphi(e_i, e_3) = (i-1)\beta_{1,1}e_i - \alpha_{1,1}^1 e_{i+1}.$$

Энди $i=2$ ҳамда $i=n$ бўлган ҳолларни алоҳида текширамиз

$$i=2 : \varphi(e_2, e_3) = 0.$$

$$i=n : e_n \varphi(e_1, e_1) + \varphi(e_n, e_3) = 0,$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{n,3}^n = (n-1)\beta_{1,1}, \\ \beta_{n,3} = 0, \\ \alpha_{n,3}^k = 0, \quad 1 \leq k \leq n-1, \end{array} \right. \Rightarrow \varphi(e_n, e_3) = (n-1)\beta_{1,1}e_n.$$

$$5). (e_1, e_i, e_j): e_1 \varphi(e_i, e_j) = 0, \quad 2 \leq i, j \leq n.$$

$$\alpha_{i,j}^1 e_3 - \beta_{i,j} e_1 = 0, \Rightarrow \alpha_{i,j}^1 = \beta_{i,j} = 0, \quad 2 \leq i, j \leq n.$$

$$6). (e_i, e_1, e_j): e_i \varphi(e_1, e_j) + \varphi(e_i, e_j) e_1 - \varphi(e_{i+1}, e_j) = 0, \quad 4 \leq i \leq n-1, 4 \leq j \leq n. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{i+1,j}^k = \alpha_{i,j}^{k-1}, \quad 4 \leq k \leq n, \quad k \neq i+1, \\ \alpha_{i+1,j}^{i+1} = \alpha_{i,j}^i + \alpha_{1,j}^i. \end{array} \right.$$

$i=3, 4 \leq j \leq n$ бўлганда текширамиз ва қуйидаги тенгликларни оламиз, ҳамда юқоридаги натижадан ва бу ифодалардан e_i ва e_j базис элементлари учун инфинитизимал деформацияни оламиз:

$$\begin{cases} \alpha_{4,j}^k = 0, & 2 \leq k \leq n, k \neq 4,5 \\ \alpha_{4,j}^4 = 3\alpha_{1,j}^1, \\ \alpha_{4,j}^5 = -(\alpha_{j-1,1}^1 + \alpha_{1,j-1}^1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi(e_i, e_j) = (i-1)\alpha_{1,j}^1 e_i - (\alpha_{j-1,1}^1 + \alpha_{1,j-1}^1) e_{i+1}, & 4 \leq i \leq n-1, 4 \leq j \leq n, \\ \varphi(e_n, e_j) = (n-1)\alpha_{1,j}^1 e_n. \end{cases}$$

$i = 2, 4 \leq j \leq n$ да:

$$\varphi(e_2, e_j) e_1 = 0, \Rightarrow \alpha_{2,j}^k = 0, 3 \leq k \leq n-1, \Rightarrow \varphi(e_2, e_j) = \alpha_{2,j}^2 e_2 + \alpha_{2,j}^n e_n$$

$2 \leq i \leq n, j = 3$:

$$e_i \varphi(e_1, e_3) + \varphi(e_i, e_3) e_1 - \varphi(e_{i+1}, e_3) = 0$$

$3 \leq i \leq n-1, j = 2$:

$$e_i \varphi(e_1, e_2) + \varphi(e_i, e_2) e_1 - \varphi(e_{i+1}, e_2) = 0$$

$$\begin{cases} \alpha_{i+1,2}^2 = 0, \\ \alpha_{i+1,2}^3 = 0, \\ \alpha_{i+1,2}^k = \alpha_{i,2}^{k-1}, & 4 \leq k \leq n, k \neq i, i+1 \\ \alpha_{i+1,2}^i = \alpha_{i,2}^{i-1} - (i-1)\beta_{1,2}, \\ \alpha_{i+1,2}^{i+1} = \alpha_{i,2}^i + \alpha_{1,2}^1. \end{cases}$$

Бу рекуррент ифодани содалаштириб қуйидаги натижани оламиз:

$$\begin{cases} \alpha_{n,2}^k = 0, & 2 \leq k \leq n-2. \\ \alpha_{n,2}^{n-1} = \alpha_{3,2}^2 - (2+3+\dots+n-2)\beta_{1,2}, \\ \alpha_{n,2}^n = \alpha_{3,2}^3 + (n-3)\alpha_{1,2}^1. \end{cases}$$

хамда e_2 ва e_n элементлар учун қуйидаги эга бўламиз:

$$\varphi(e_n, e_2) = (\alpha_{3,2}^2 - (2+3+\dots+n-2)\beta_{1,2})e_{n-1} + (\alpha_{3,2}^3 + (n-3)\alpha_{1,2}^1)e_n$$

Агар $i = n, j = 2$ бўлган холни қарасак, у холда

$e_n \varphi(e_1, e_2) + \varphi(e_n, e_2) e_1 = 0$ тенглик келиб чиқади. Бу тенглик эса бизга

$$\alpha_{3,2}^2 = (2+3+\dots+n-2+n-1)\beta_{1,2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2} \beta_{1,2}$$

муносабатни беради.

ЯЪНИ

$$\varphi(e_i, e_2) = \left(\frac{(n+1)(n-2)}{2} - \frac{i(i-3)}{2} \right) \beta_{1,2} e_{i-1} + (\alpha_{3,2}^3 + (i-3)\alpha_{1,2}^1) e_i + \alpha_{3,2}^4 e_{i+1} + \alpha_{3,2}^5 e_{i+2} \dots + \alpha_{3,2}^{n-i+3} e_n.$$

$\varphi(e_2, e_2) e_1 = 0$, тенгликдан $\alpha_{2,2}^k = 0$, $3 \leq k \leq n-1$ келиб чиқади, яъни

$$\varphi(e_2, e_2) = \alpha_{2,2}^1 e_2 + \alpha_{2,2}^n e_n$$

7). (e_i, e_j, e_1) : $e_i \varphi(e_j, e_1) - \varphi(e_i, e_j) e_1 + \varphi(e_i, e_{j+1}) + \varphi(e_{i+1}, e_j) = 0$, $2 \leq i, j \leq n-1$.

$$4 \leq i, j \leq n-1: \quad (i-1)(\alpha_{1,j+1}^1 - \beta_{j,1}) e_i = 0 \Rightarrow \alpha_{1,j+1}^1 = \beta_{j,1} \quad 4 \leq j \leq n-1.$$

$$i=2, 4 \leq j \leq n-1: \quad \varphi(e_2, e_{j+1}) = 0,$$

$$4 \leq i \leq n-1, j=n: \quad e_i \varphi(e_n, e_1) - \varphi(e_i, e_n) e_1 + \varphi(e_{i+1}, e_n) = 0$$

$$(\alpha_{n,1}^1 + \alpha_{1,n}^1) e_{i+1} - (i-1) \beta_{n,1} e_i = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_{n,1}^1 + \alpha_{1,n}^1 = 0, \\ \beta_{n,1} = 0. \end{cases}$$

$4 \leq i \leq n-1, j=3$ бўлган ҳолда эса:

$$e_i \varphi(e_3, e_1) - \varphi(e_i, e_3) e_1 + \varphi(e_{i+1}, e_3) + \varphi(e_i, e_4) = 0 \Rightarrow$$

$$(i-1)(\beta_{3,1} - \alpha_{1,4}^1) e_i + (2\beta_{1,1} - \alpha_{1,3}^1) e_{i+1} = 0$$

$$\begin{cases} \beta_{1,1} = \alpha_{1,3}^1, \\ \beta_{3,1} = \alpha_{1,4}^1. \end{cases}$$

$$i=3, j=3: \quad e_3 \varphi(e_3, e_1) - \varphi(e_3, e_3) e_1 + \varphi(e_4, e_3) + \varphi(e_3, e_4) = 0$$

$$(\alpha_{4,3}^2 + \alpha_{3,4}^2) e_2 + (\alpha_{4,3}^3 + \alpha_{3,4}^3 - 2\alpha_{1,4}^1) e_3 + (\alpha_{4,3}^4 + \alpha_{3,4}^4 + \alpha_{3,1}^1 - 2\beta_{1,1}) e_4 + (\alpha_{4,3}^5 + \alpha_{3,4}^5 + \alpha_{1,1}^1) e_5 + (\alpha_{4,3}^6 + \alpha_{3,4}^6) e_6 + \dots + (\alpha_{4,3}^n + \alpha_{3,4}^n) e_n = 0. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_{4,3}^2 + \alpha_{3,4}^2 = 0, \\ \alpha_{4,3}^3 + \alpha_{3,4}^3 = 2\alpha_{1,4}^1, \\ \alpha_{4,3}^3 + \alpha_{3,4}^3 + \alpha_{3,1}^1 = 2\beta_{1,1}, \\ \alpha_{4,3}^3 + \alpha_{3,4}^3 + \alpha_{1,1}^1 = 0, \\ \alpha_{4,3}^k + \alpha_{3,4}^k = 0, \quad 6 \leq k \leq n. \end{cases}$$

$i = 2, j = 3$ бўлганда e_2 ва e_4 базис элементлар учун ушбу тенгликни оламиз

$$\varphi(e_2, e_4) = 0.$$

$$3 \leq i \leq n-1, j = 2: e_i \varphi(e_2, e_1) - \varphi(e_i, e_2) e_1 + \varphi(e_{i+1}, e_2) = 0,$$

$$\begin{aligned} & e_i (\alpha_{2,1}^1 e_1 + \dots + \alpha_{2,1}^n e_n) - \left\{ \left[\frac{(n+1)(n-2)}{2} - \frac{i(i-3)}{2} \right] \beta_{1,2} e_{i-1} + (\alpha_{3,2}^3 + (i-1)\alpha_{1,2}^1) e_i + \right. \\ & \left. + \alpha_{3,2}^4 e_{i+1} + \dots + \alpha_{3,2}^{n-i+3} e_n \right\} e_1 + \left[\frac{(n+1)(n-2)}{2} - \frac{(i+1)(i-2)}{2} \right] \beta_{1,2} e_i + \\ & + (\alpha_{3,2}^3 + i\alpha_{1,2}^1) e_{i+1} + \alpha_{3,2}^4 e_{i+2} + \dots + \alpha_{3,2}^{n-i+2} e_n = 0 \end{aligned}$$

буни соддалаштириб қуйидаги тенгликларни топамиз:

$$\begin{cases} \alpha_{2,1}^1 + \alpha_{1,2}^1 = 0, \\ \beta_{1,2} + \beta_{2,1} = 0. \end{cases}$$

$$8). (e_i, e_j, e_k): e_i \varphi(e_j, e_k) = 0, 2 \leq i, j, k \leq n. \Rightarrow 0 = 0.$$

Шундай қилиб, юқоридаги тенгликларни ва рекуррент муносабатларни бирлаштириб, қуйидаги натижаларни хосил қиламиз:

$$\varphi(e_1, e_3) = \beta_{1,1} e_1 - \alpha_{1,1}^1 e_3$$

$$\varphi(e_1, e_i) = \alpha_{1,i}^1 e_1 - (\alpha_{1,i}^1 + \alpha_{1,i}^1) e_3, 4 \leq i \leq n-1,$$

$$\varphi(e_1, e_n) = \alpha_{1,n}^1 e_1,$$

$$\varphi(e_3, e_i) = 2\alpha_{1,i}^1 e_3 - (\alpha_{i-1,1}^1 + \alpha_{1,i-1}^1) e_4, 4 \leq i \leq n,$$

$$\varphi(e_i, e_3) = (i-1)\beta_{1,1} e_i - \alpha_{1,1}^1 e_{i+1}, 3 \leq i \leq n,$$

$$\varphi(e_2, e_i) = 0, 3 \leq i \leq n-1,$$

$$\varphi(e_2, e_2) = \alpha_{2,2}^2 e_2 + \alpha_{2,2}^n e_n,$$

$$\varphi(e_2, e_3) = 0,$$

$$\varphi(e_i, e_j) = (i-1)\alpha_{1,j}^1 e_1 - (\alpha_{j-1,1}^1 + \alpha_{1,j-1}^1) e_{i+1}, 4 \leq i \leq n-1, 4 \leq j \leq n-1,$$

$$\varphi(e_n, e_i) = (n-1)\alpha_{1,i}^1 e_1, 4 \leq i \leq n,$$

$$\varphi(e_i, e_2) = \left[\frac{(n+1)(n-2)}{2} - \frac{i(i-1)}{2} \right] \beta_{1,2} e_{i-1} + (i-1)\alpha_{1,2}^1 e_i + \alpha_{1,2}^3 e_{i+1} + \dots + \alpha_{1,2}^{n-i+2} e_n, 3 \leq i \leq n-1,$$

$$\varphi(e_n, e_2) = (n-1)\beta_{1,2} e_{n-1} + (n-1)\alpha_{1,2}^1 e_n.$$

Энди қолган комбинацияларни кўриб чиқайлик.

$$9). (\mathbf{x}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1): x\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{e}_3) = 0$$

$$x(\alpha_{1,1}^1 \mathbf{e}_1 + \alpha_{1,1}^2 \mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_{1,1}^n \mathbf{e}_n + \beta_{1,1} \mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{e}_3) = 0$$

$$\alpha_{1,1}^1 \mathbf{e}_1 + \alpha \beta_{1,1} \mathbf{e}_2 + \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{e}_3) = 0, \Rightarrow \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{e}_3) = -\alpha_{1,1}^1 \mathbf{e}_1 - \alpha \beta_{1,1} \mathbf{e}_2.$$

$$10). (\mathbf{e}_1, \mathbf{x}, \mathbf{e}_1): \mathbf{e}_1 \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) - \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{x}) \mathbf{e}_1 + \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) \mathbf{x} + \varphi(\mathbf{e}_3, \mathbf{x}) + 2\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 0,$$

$$(-\gamma_1 + \mu_1 + \alpha_{1,1}^1 + \mu_3^1) \mathbf{e}_1 + (\alpha \beta_{1,1} + 2\alpha_{1,1}^2 + \mu_3^2) \mathbf{e}_2 + (\gamma_1^1 - \mu_1^1 + \mu_3^3) \mathbf{e}_3 +$$

$$+ (-\mu_1^3 - \alpha_{1,1}^4 + \mu_3^4) \mathbf{e}_4 + \dots + (-\mu_1^{n-1} - (n-3)\alpha_{1,1}^n + \mu_3^n) \mathbf{e}_n + (2\beta_{1,1} + \mu_3) \mathbf{x} = 0,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma_1 = \mu_1 + \alpha_{1,1}^1 + \mu_3^1, \\ \alpha \beta_{1,1} + 2\alpha_{1,1}^2 + \mu_3^2 = 0, \\ \gamma_1^1 - \mu_1^1 + \mu_3^3 = 0, \\ \mu_1^{k-1} + (k-3)\alpha_{1,1}^k - \mu_3^k = 0, \quad 4 \leq k \leq n, \\ 2\beta_{1,1} + \mu_3 = 0. \end{cases}$$

$$11). (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{x}): \mathbf{e}_1 \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) \mathbf{x} + \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{x}) \mathbf{e}_1 - 2\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) - \varphi(\mathbf{e}_3, \mathbf{x}) = 0$$

$$(-\mu_3^1 - \alpha_{1,1}^1) \mathbf{e}_1 + (-\alpha \beta_{1,1} - 2\alpha_{1,1}^2 - \mu_3^2) \mathbf{e}_2 + (2\mu_1^1 - \mu_3^3) \mathbf{e}_3 + (\alpha_{1,1}^4 + \mu_1^3 - \mu_3^4) \mathbf{e}_4 +$$

$$+ (2\alpha_{1,1}^5 + \mu_1^4 - \mu_3^5) \mathbf{e}_5 + \dots + ((n-3)\alpha_{1,1}^n + \mu_1^{n-1} - \mu_3^n) \mathbf{e}_n + (-2\beta_{1,1} - \mu_3) \mathbf{x} = 0$$

$$\begin{cases} \mu_3^1 = -\alpha_{1,1}^1, \\ \alpha \beta_{1,1} + 2\alpha_{1,1}^2 + \mu_3^2 = 0, \\ 2\mu_1^1 - \mu_3^3 = 0, \\ (k-3)\alpha_{1,1}^k + \mu_1^{k-1} - \mu_3^k = 0, \quad 4 \leq k \leq n, \\ \mu_3 = -2\beta_{1,1}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1 = \mu_1, \\ \gamma_1^1 = -\mu_1^1. \end{cases}$$

$$12). (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_i, \mathbf{x}): \mathbf{e}_1 \varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_i) \mathbf{x} - i\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_i) = 0, \quad 4 \leq i \leq n-1,$$

$$\mathbf{e}_1 (\mu_i^1 \mathbf{e}_1 + \mu_i^2 \mathbf{e}_2 + \dots + \mu_i^n \mathbf{e}_n + \mu_i \mathbf{x}) - (\alpha_{1,i}^1 \mathbf{e}_1 - (\alpha_{1,i}^1 + \alpha_{1,i}^1) \mathbf{e}_3) \mathbf{x} - i(\alpha_{1,i}^1 \mathbf{e}_1 - (\alpha_{1,i}^1 + \alpha_{1,i}^1) \mathbf{e}_3) = 0,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_i = (1-i)\alpha_{1,i}^1, \quad 4 \leq i \leq n-1, \\ \mu_i^1 = (2-i)(\alpha_{1,i}^1 + \alpha_{1,i}^1), \quad 4 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

$$i = n \text{ да: } \mathbf{e}_1 \varphi(\mathbf{e}_n, \mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \mathbf{x} - n\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) = 0$$

$$\mathbf{e}_1 (\mu_n^1 \mathbf{e}_1 + \mu_n^2 \mathbf{e}_2 + \dots + \mu_n^n \mathbf{e}_n + \mu_n \mathbf{x}) + \alpha_{1,n}^1 \mathbf{e}_1 - n\alpha_{1,n}^1 \mathbf{e}_1 = 0, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_n = (1-n)\alpha_{n,1}^1, \\ \mu_n^1 = 0, \end{cases}$$

$$i = 3 \text{ да: } e_1\varphi(e_3, x) - \varphi(e_1, e_3)x - 3\varphi(e_1, e_3) = 0,$$

$$e_1(\mu_3^1 e_1 + \mu_3^2 e_2 + \dots + \mu_3^n e_n + \mu_3 x) - (\beta_{1,1} e_1 - \alpha_{1,1}^1 e_3)x - 3(\beta_{1,1} e_1 - \alpha_{1,1}^1 e_3) = 0, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_3^1 = -\alpha_{1,1}^1, \\ \mu_3 = -2\beta_{1,1}. \end{cases}$$

$$i = 2 \text{ да: } e_1\varphi(e_2, x) - \varphi(e_1, e_2)x - \varphi(e_1, e_2) = 0, \Rightarrow$$

$$e_1(\mu_2^1 e_1 + \dots + \mu_2^n e_n + \mu_2 x) - (\alpha_{1,2}^1 e_1 + \dots + \alpha_{1,2}^n e_n + \beta_{1,2} x)x + (\alpha_{1,2}^1 e_1 + \dots + \alpha_{1,2}^n e_n + \beta_{1,2} x) = 0,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_2^1 = -\alpha_{1,2}^3, \\ \mu_2 = 0, \\ \beta_{1,2} = 0, \\ \alpha_{1,2}^2 = 0, \\ \alpha_{1,2}^k = 0, 4 \leq k \leq n \end{cases} \Rightarrow \varphi(e_1, e_2) = \alpha_{1,2}^1 e_1 + \alpha_{1,2}^3 e_3.$$

13). (e_i, e_1, x) : Олдин i нинг қиймати $3 \leq i \leq n - 1$ бўлганда текширайлик:

$$e_i\varphi(e_1, x) - \varphi(e_i, e_1)x + \varphi(e_i, x)e_1 + \varphi(e_i, x)e_1 - \varphi(e_{i+1}, x) + \varphi(e_i, e_1 x) = 0, \Rightarrow$$

$$e_i(\mu_1^1 e_1 + \mu_1^2 e_2 + \dots + \mu_1^n e_n + \mu_1 x) - (\alpha_{i,1}^1 e_1 + \alpha_{i,1}^2 e_2 + \dots + \alpha_{i,1}^n e_n + \beta_{i,1} x)x + \\ + (\mu_i^1 e_1 + \mu_i^2 e_2 + \dots + \mu_i^n e_n + \mu_i x)e_1 - i(\alpha_{i,1}^1 e_1 + \alpha_{i,1}^2 e_2 + \dots + \alpha_{i,1}^n e_n + \beta_{i,1} x) - \\ - (\mu_{i+1}^1 e_1 + \mu_{i+1}^2 e_2 + \dots + \mu_{i+1}^n e_n + \mu_{i+1} x) = 0,$$

$$((1-i)\alpha_{i,1}^1 - \mu_{i+1}^1 + \mu_i)e_1 + (-\alpha\beta_{i,1} - i\alpha_{i,1}^2 - \mu_{i+1}^2)e_2 + (\mu_i^1 + (2-i)\alpha_{i,1}^3 - \mu_{i+1}^3)e_3 + \\ - (\mu_i^3 - \mu_{i+1}^4 + (3-i)\alpha_{i,1}^4)e_4 + (\mu_i^4 - \mu_{i+1}^5 + (4-i)\alpha_{i,1}^5)e_5 + \dots + (\mu_i^{i-2} - \mu_{i+1}^{i-1} + \\ + (i-2-i)\alpha_{i,1}^{i-1})e_{i-1} + (\mu_i^{i-1} - \mu_{i+1}^i + (i-1-i)\alpha_{i,1}^i - (i-1)\mu_i)e_i + \\ + (\mu_i^i - \mu_{i+1}^{i+1} + \mu_1^1)e_{i+1} + (\mu_i^{i+1} - \mu_{i+1}^{i+2} + (i+1-i)\alpha_{i,1}^{i+2})e_{i+2} + \\ + \dots + (\mu_i^{n-1} - \mu_{i+1}^n + (n-1-i)\alpha_{i,1}^n)e_n + (-i\beta_{i,1} - \mu_{i+1})x = 0,$$

Бу тенгликдан қуйидаги тенгликни оламиз, бу тенглик кейинчалик бизга қолган комбинацияларни ҳисоблашда муҳум аҳамиятга эга.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{i+1}^1 = (1-i)\alpha_{i,1}^1 + \mu_i, \\ \mu_{i+1}^2 = -\alpha\beta_{i,1} - i\alpha_{i,1}^2, \\ \mu_{i+1}^3 = (2-i)\alpha_{i,1}^3 + \mu_i^1, \\ \mu_{i+1}^4 = (3-i)\alpha_{i,1}^4 + \mu_i^3, \\ \dots \\ \mu_{i+1}^{i-1} = (i-2-i)\alpha_{i,1}^{i-1} + \mu_i^{i-2}, \\ \mu_{i+1}^3 = (i-1-i)\alpha_{i,1}^3 + \mu_i^{i-1} - (i-1)\mu_1, \\ \mu_{i+1}^{i+1} = \mu_i^i + \mu_1^1, \\ \mu_{i+1}^{i+2} = (i+1-i)\alpha_{i,1}^{i+1} + \mu_i^{i+1}, \\ \dots \\ \mu_{i+1}^n = (n-1-i)\alpha_{i,1}^n + \mu_i^{n-1}, \\ \mu_{i+1} = -i\beta_{i,1}. \end{array} \right.$$

$$i = 2 \text{ да: } -\varphi(e_2, e_1)x + \varphi(e_2, x)e_1 - \varphi(e_1, e_1) = 0, \Rightarrow$$

$$-(\alpha_{2,1}^1 e_1 + \alpha_{2,1}^2 e_2 + \dots + \alpha_{2,1}^n e_n + \beta_{2,1} x)x + (\mu_2^1 e_1 + \mu_2^2 e_2 + \dots + \mu_2^n e_n + \mu_2 x)e_1 -$$

$$-(\alpha_{2,1}^1 e_1 + \alpha_{2,1}^2 e_2 + \dots + \alpha_{2,1}^n e_n + \beta_{2,1} x) = 0, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu_2 = 0, \\ \alpha_{2,1}^2 = 0, \\ \mu_2^1 = -\alpha_{2,1}^3, \\ \mu_2^{k-1} = (2-k)\alpha_{2,1}^k, \quad 4 \leq k \leq n. \end{array} \right.$$

$$i = n \text{ да: } e_n \varphi(e_1, x) - \varphi(e_n, e_1)x + \varphi(e_n, x)e_1 + \varphi(enx, e_1) + \varphi(e_n, e_1 x) = 0,$$

$$e_n (\mu_1^1 e_1 + \mu_1^2 e_2 + \dots + \mu_1^n e_n + \mu_1 x) - (\alpha_{n,1}^1 e_1 + \alpha_{n,1}^2 e_2 + \dots + \alpha_{n,1}^n e_n + \beta_{n,1} x)x +$$

$$+ (\mu_n^1 e_1 + \mu_n^2 e_2 + \dots + \mu_n^n e_n + \mu_n x)e_1 - n(\alpha_{n,1}^1 e_1 + \alpha_{n,1}^2 e_2 + \dots + \alpha_{n,1}^n e_n + \beta_{n,1} x) = 0,$$

$$((1-n)\alpha_{i,1}^1 + \mu_n)e_1 - n\alpha_{n,1}^2 e_2 + (\mu_n^1 + (2-n)\alpha_{n,1}^3)e_3 + (\mu_n^3 + (3-n)\alpha_{n,1}^4)e_4 + (\mu_n^4 + (4-n)\alpha_{n,1}^5)e_5 + \dots + (\mu_n^{n-2} + (n-2-n)\alpha_{n,1}^{n-1})e_{n-1} + (\mu_n^{n-1} + (n-1-n)\alpha_{n,1}^n - (n-1)\mu_1)e_n = 0, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_2 = (n-1)\alpha_{n,1}^1, \\ \alpha_{n,1}^2 = 0, \\ \mu_n^1 = (n-2)\alpha_{n,1}^3, \\ \mu_n^{k-1} = (n-k)\alpha_{n,1}^k, \quad 4 \leq k \leq n-1. \\ \mu_n^{n-1} = (n-1)\mu_1 + \alpha_{n,1}^n. \end{cases}$$

14). (e_1, x, e_i) : $e_1\varphi(x, e_i) + \varphi(e_1, e_i)x + \varphi(e_1, e_i) = 0$, $4 \leq i \leq n-1$.

$$e_1(\gamma_i^1 e_1 + \gamma_i^2 e_2 + \dots + \gamma_i^n e_n + \gamma_i x) - (\alpha_{1,i}^1 e_1 - (\alpha_{1,i}^1 + \alpha_{i,1}^1) e_3)x + \alpha_{1,i}^1 e_1 - (\alpha_{1,i}^1 + \alpha_{i,1}^1) e_3 = 0,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma_i = 0, \quad 4 \leq i \leq n, \\ \gamma_i^1 = -(\alpha_{1,i}^1 + \alpha_{i,1}^1), \quad 4 \leq i \leq n. \end{cases}$$

$i = 2$: $e_1\varphi(x, e_2) + \varphi(e_1, e_2)x + \varphi(e_1, e_2) = 0 \Rightarrow$

$$e_1(\gamma_2^1 e_1 + \gamma_2^2 e_2 + \dots + \gamma_2^n e_n + \gamma_2 x) + (\alpha_{1,2}^1 e_1 + \alpha_{1,2}^3 e_3)x + \alpha_{1,2}^1 e_1 + \alpha_{1,2}^3 e_3 = 0,$$

$$\begin{cases} \gamma_2 = 0, \\ \gamma_2^1 = \alpha_{1,2}^3. \end{cases}$$

$i = n$ да: $e_1\varphi(x, e_n) + \varphi(e_1, e_n)x + \varphi(e_1, e_n) = 0$,

$$\begin{cases} \gamma_n = 0, \\ \gamma_n^1 = 0. \end{cases}$$

15). (x, e_1, e_i) : $x\varphi(e_1, e_i) + \varphi(x, e_i)e_1 - \varphi(e_1, e_i) = 0$, $4 \leq i \leq n-1$.

$$x(\alpha_{1,i}^1 e_1 - (\alpha_{1,i}^1 + \alpha_{i,1}^1) e_3) + (-(\alpha_{1,i}^1 + \alpha_{i,1}^1) e_1 + \gamma_i^2 e_2 + \dots + \gamma_i^n e_n) e_1 - (\alpha_{1,i}^1 e_1 - (\alpha_{1,i}^1 + \alpha_{i,1}^1) e_3) = 0,$$

$$\Rightarrow \gamma_i^k = 0, \quad 3 \leq k \leq n-1, \quad 4 \leq i \leq n-1 \Rightarrow \varphi(x, e_i) = -(\alpha_{1,i}^1 + \alpha_{i,1}^1) e_1 + \gamma_i^2 e_2 + \gamma_i^n e_n$$

$i = 2$ бўлганда ҳам худди шу муносабатни оламиз:

$$x\varphi(e_1, e_2) + \varphi(x, e_2)e_1 - \varphi(e_1, e_2) = 0,$$

$$x(\alpha_{1,2}^1 e_1 + \alpha_{1,2}^3 e_3) + (\alpha_{1,2}^3 e_1 + \gamma_2^2 e_2 + \dots + \gamma_2^n e_n) e_1 - (\alpha_{1,2}^1 e_1 + \alpha_{1,2}^3 e_3) = 0,$$

$$\Rightarrow \gamma_2^k = 0, \quad 3 \leq k \leq n-1 \Rightarrow \varphi(x, e_2) = \alpha_{1,2}^3 e_1 + \gamma_2^2 e_2 + \gamma_2^n e_n$$

$i = n$: $x\varphi(e_1, e_n) + \varphi(x, e_n)e_1 - \varphi(e_1, e_n) = 0$,

$$x(\alpha_{1,n}^1 e_1) + (\gamma_2^2 e_2 + \dots + \gamma_2^n e_n) e_1 - \alpha_{1,n}^1 e_1 = 0,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_{1,n}^1 = 0, \\ \gamma_n^k = 0, \quad 3 \leq k \leq n-1, \end{cases} \Rightarrow \varphi(x, e_n) = \gamma_n^2 e_2 + \gamma_n^n e_n.$$

$$\begin{aligned}
16). (\mathbf{x}, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_1): 4 \leq i \leq n-2: & \quad x\varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_1) - \varphi(x, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_1 + \varphi(x\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_i) + \varphi(x, \mathbf{e}_i\mathbf{e}_1) = 0, \\
& \quad x(\alpha_{i,1}^1\mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_{i,i}^n\mathbf{e}_n) - (-\alpha_{1,i}^1 + \alpha_{1,i}^1)\mathbf{e}_1 + \gamma_i^2\mathbf{e}_2 + \gamma_i^n\mathbf{e}_n\mathbf{e}_1 + \alpha_{1,i}^1\mathbf{e}_1 - (\alpha_{1,i}^1 + \alpha_{1,i}^1)\mathbf{e}_3 + \\
& \quad + (-\alpha_{1,i+1}^1 + \alpha_{1,i+1}^1)\mathbf{e}_1 + \gamma_{i+1}^2\mathbf{e}_2 + \gamma_{i+1}^n\mathbf{e}_n = 0, \\
& \quad \begin{cases} \alpha_{i,1}^1 + \alpha_{1,i}^1 = \alpha_{i+1,1}^1 + \alpha_{1,i+1}^1, & 4 \leq i \leq n-2, \\ \gamma_{i+1}^2 = -\alpha\beta_{i,1}, & 4 \leq i \leq n-2, \\ \gamma_{i+1}^n = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i = 3 \text{ да: } & \quad x\varphi(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) - \varphi(x, \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_1 + \varphi(x\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) + \varphi(x, \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1) = 0, \\
& \quad x(\alpha_{1,1}^1\mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_{3,1}^n\mathbf{e}_n + \beta_{3,1}x) + (\alpha_{1,1}^1\mathbf{e}_1 + \alpha\beta_{1,1}\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_1 + \beta_{1,1}\mathbf{e}_1 - \alpha_{1,1}^1\mathbf{e}_3 - \\
& \quad - (\alpha_{1,4}^1 + \alpha_{4,1}^1)\mathbf{e}_1 + \gamma_4^2\mathbf{e}_2 + \gamma_4^n\mathbf{e}_n = 0, \\
& \quad \begin{cases} \alpha_{4,1}^1 + \alpha_{1,4}^1 = \alpha_{3,1}^1, \\ \gamma_4^2 = -\alpha\beta_{3,1}, & \Rightarrow \alpha_{i,1}^1 + \alpha_{1,i}^1 = \alpha_{3,1}^1, & 4 \leq i \leq n-1. \\ \gamma_4^n = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i = 2 \text{ да: } & \quad x\varphi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) - \varphi(x, \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_1 + \varphi(x\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 0, \\
& \quad x(\alpha_{2,1}^1\mathbf{e}_1 + \alpha_{2,1}^3\mathbf{e}_3) - (\alpha_{1,2}^3\mathbf{e}_1 + \gamma_2^2\mathbf{e}_2 + \gamma_2^n\mathbf{e}_n)\mathbf{e}_1 + \alpha_{2,1}^1\mathbf{e}_1 + \alpha_{2,1}^3\mathbf{e}_3 = 0. \\
& \quad \begin{cases} \alpha_{2,1}^1 = 0, \\ \alpha_{2,1}^3 = \alpha_{1,2}^3. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i = n-1 \text{ да: } & \quad x\varphi(\mathbf{e}_{n-1}, \mathbf{e}_1) - \varphi(x, \mathbf{e}_{n-1})\mathbf{e}_1 + \varphi(x\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_{n-1}) + \varphi(x, \mathbf{e}_{n-1}\mathbf{e}_1) = 0, \\
& \quad x(\alpha_{n-1,1}^1\mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_{n-1,1}^n\mathbf{e}_n) - (-\alpha_{3,1}^1\mathbf{e}_1 + \gamma_{n-1}^2\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_1 + \alpha_{1,n-1}^1\mathbf{e}_1 - (\alpha_{1,n-1}^1 + \alpha_{n-1,1}^1)\mathbf{e}_3 + \gamma_n^2\mathbf{e}_2 + \gamma_n^n\mathbf{e}_n = 0, \\
& \quad \begin{cases} \alpha_{n-1,1}^1 + \alpha_{1,n-1}^1 = 0, \\ \gamma_n^2 = -\alpha\beta_{n-1,1}, \\ \gamma_n^n = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Бундан ва олдинги натижаларни бирлаштириб қуйидаги муносабатни ва тенгликларни қиламиз:

$$\begin{cases} \alpha_{i,1}^1 + \alpha_{1,i}^1 = 0, & 4 \leq i \leq n-1, \\ \alpha_{3,1}^1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \varphi(x, \mathbf{e}_i) = -\alpha\beta_{i-1,1}\mathbf{e}_2, \quad 4 \leq i \leq n.$$

$$17). (\mathbf{e}_i, \mathbf{x}, \mathbf{e}_1): 3 \leq i \leq n-1:$$

$$e_i \varphi(x, e_1) - \varphi(e_i, x) e_1 + \varphi(e_i, e_1) x + i \varphi(e_i, e_1) + \varphi(e_{i+1}, x) = 0,$$

Бу тенгликдан биз қуйидагини, ҳудди 13) даги каби рекуррент формулани ҳосил қиламиз:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{i+1}^1 = (1-i)\alpha_{i,1}^1 + \mu_i, \\ \mu_{i+1}^2 = -\alpha\beta_{i,1} - i\alpha_{i,1}^2, \\ \mu_{i+1}^3 = (2-i)\alpha_{i,1}^3 + \mu_i^1, \\ \mu_{i+1}^4 = (3-i)\alpha_{i,1}^4 + \mu_i^3, \\ \dots \\ \mu_{i+1}^{i-1} = (i-2-i)\alpha_{i,1}^{i-1} + \mu_i^{i-2}, \\ \mu_{i+1}^3 = (i-1-i)\alpha_{i,1}^3 + \mu_i^{i-1} - (i-1)\mu_1, \\ \mu_{i+1}^{i+1} = \mu_i^i + \mu_1^1, \\ \mu_{i+1}^{i+2} = (i+1-i)\alpha_{i,1}^{i+1} + \mu_i^{i+1}, \\ \dots \\ \mu_{i+1}^n = (n-1-i)\alpha_{i,1}^n + \mu_i^{n-1}, \\ \mu_{i+1} = -i\beta_{i,1}. \end{array} \right.$$

$$18). (e_i, e_j, x): 3 \leq i, j \leq n: e_i \varphi(e_j, x) - \varphi(e_i, e_j) x - (i+j-2)\varphi(e_i, e_j) = 0.$$

$$e_i(\mu_j^1 e_1 + \dots + \mu_j^n e_n + \mu_j x) - ((i-1)\alpha_{1,j}^1 e_1) x - (i+j-2)\varphi(e_i, e_j) = 0,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{1,j}^1 = 0, \\ \mu_j = 0, \Rightarrow \varphi(e_i, e_j) = 0, 4 \leq j \leq n-1, 3 \leq i \leq n, \\ \mu_j^1 = 0 \end{array} \right.$$

$$i = 2: \varphi(e_2, e_j) x + \varphi(e_2, e_j) x = 0, 3 \leq j \leq n, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(e_2, e_j) = \alpha_{2,j}^j e_j, 3 \leq j \leq n.$$

$$j = 2, 2 \leq i \leq n: e_i \varphi(e_2, e_j) - \varphi(e_i, e_2) x + \varphi(e_i, e_2) x = 0,$$

$$\Rightarrow \varphi(e_i, e_2) = \alpha_{i,2}^i e_i, 2 \leq i \leq n.$$

$$19). (e_i, x, e_j): 3 \leq i, j \leq n: e_i \varphi(x, e_j) + \varphi(e_i, e_j) x + (i-1)\varphi(e_i, e_j) = 0. \Rightarrow \alpha_{3,1}^1 = 0.$$

$$i = 2, 3 \leq j \leq n \text{ да: } \varphi(e_2, e_j) x = 0 \Rightarrow \alpha_{2,j}^j = 0 \Rightarrow \varphi(e_2, e_j) = 0, 3 \leq j \leq n.$$

$$j = 2, 3 \leq i \leq n \text{ да: } e_i \varphi(x, e_2) + \varphi(e_i, e_2) x + (i-1)\varphi(e_i, e_2) = 0. \Rightarrow \alpha_{1,2}^3 = 0.$$

20). $(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$: $2 \leq i, j \leq n$ бўлганда ушбу айниятни оламиз: $0 = 0$.

21). $(\mathbf{e}_i, \mathbf{x}, \mathbf{x})$: $2 \leq i \leq n$ да: $e_i \varphi(x, x) + \varphi(e_i, xx) = 0$,

$$e_i(\gamma^1 e_1 + \gamma^2 e_2 + \dots + \gamma^n e_n + \beta x) + \alpha \alpha_{i,2}^i e_i = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma^1 = 0, \\ \alpha_{i,2}^i \neq 0, \text{ агар } \alpha = 1, 2 \leq i \leq n. \\ \beta = 0, \text{ агар } \alpha = 0, \end{cases}$$

22). $(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i, \mathbf{x})$: $x\varphi(e_i, x) - \varphi(x, e_i)x - (i-1)\varphi(x, e_i) = 0$,

$$x(\mu_i^1 e_1 + \mu_i^2 e_2 + \dots + \mu_i^n e_n + \mu_i x) - (\gamma_i^1 e_1 + \gamma_i^2 e_2 + \dots + \gamma_i^n e_n + \gamma_i x)x - \\ - (i-1)(\gamma_i^1 e_1 + \gamma_i^2 e_2 + \dots + \gamma_i^n e_n + \gamma_i x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_i = (i-1)\gamma_i^2 - \alpha\gamma_i, 2 \leq i \leq n, \\ \mu_i^1 = -(i-1)\gamma_i^1, 2 \leq i \leq n, \\ \gamma_i^k = 0, 3 \leq k \leq n, 2 \leq i \leq n, i \neq k. \end{cases}$$

23). $(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{e}_i)$, $3 \leq i \leq n$: $0=0$.

$$i = 2 \text{ да: } x\varphi(x, e_2) + \varphi(x, e_2)x - \varphi(xx, e_2) = 0 \Rightarrow \gamma_2^n = 0.$$

24). $(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x})$: $x\varphi(x, x) + \alpha\varphi(x, e_2) = 0$.

Биз барча комбинацияларни кўриб бўлдик. Бу комбинациялардан олган натижаларни ва рекуррент муносабатларни бирлаштириб, уларни таҳлил қилиб коэффицентларни ихчамласак у ҳолда теореманинг исботи келиб чиқади.

2.3-§ $Z^2(L, M)$, $B^2(L, M)$, $HL^2(L, M)$ фазоларнинг ўлчамлари

2.1-§ Параграфда келтирилган 2.1.1-тасдиқдан қийидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\dim B^2(L, M) = (n + 1)^2 - (4 - \alpha).$$

Бу тенглик бизга 2 – группа когомологиясининг $HL^2(L, L)$ ўлчамини топиш имконини беради. Яна бир 2 – группа когомологиясининг $HL^2(L, L)$ ўлчамини топишда ёрдам берадиган теоремани келтирамыз.

2.3.1-теорема. Қуйидаги бичизиқли акслантиришлар $B^2(L, M)$ да баъзис ташкил қилади:

$$g_{k,p}(e_k, e_1) = e_{k+1}, 1 \leq k \leq n, 3 \leq p \leq n-1,$$

$$g_{k,n+1}(e_i, e_k) = -(i-1)e_1, 3 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n,$$

$$g_{1,p}(x, e_1) = -e_p, 2 \leq p \leq n,$$

$$g_{1,n+1}(x, e_1) = \alpha e_2 - x,$$

$$g_{1,p}(e_1, x) = -(p-2)e_p, 3 \leq p \leq n,$$

$$g_{1,2}(e_1, x) = \alpha e_2,$$

$$g_{1,n+1}(e_1, x) = \alpha e_2 + x,$$

$$g_{k,1}(e_k, e_1) = e_3, 2 \leq k \leq n,$$

$$g_{k,n+1}(e_k, e_1) = e_1, 2 \leq k \leq n,$$

$$g_{k,1}(e_i, e_k) = e_{i+1}, 2 \leq k \leq n, 3 \leq i \leq n-1,$$

$$g_{k,1}(e_1, e_k) = e_3, 2 \leq k \leq n,$$

$$g_{k,n+1}(e_i, e_k) = -e_1, 2 \leq k \leq n,$$

$$g_{k,1}(x, e_k) = e_1, 2 \leq k \leq n,$$

$$g_{k,n+1}(x, e_k) = \alpha e_2, 2 \leq k \leq n,$$

$$g_{2,p}(x, x) = -\alpha e_p, 1 \leq p \leq n,$$

$$g_{2,n+1}(x, x) = -\alpha x,$$

$$g_{2,p}(e_2, x) = -(p-1)e_p, \quad 3 \leq p \leq n,$$

$$g_{2,1}(e_2, x) = -e_1,$$

$$g_{2,n+1}(e_2, x) = \alpha e_2,$$

$$g_{k,p}(e_{k-1}, e_1) = -e_p, \quad 1 \leq p \leq n, \quad 3 \leq k \leq n,$$

$$g_{k,n+1}(e_{k-1}, e_1) = -x, \quad 3 \leq k \leq n-3,$$

$$g_{k,p}(e_k, x) = (k-p)e_p, \quad 3 \leq k, p \leq n, \quad k \neq p,$$

$$g_{k,1}(e_k, x) = (k-2)e_1, \quad 3 \leq k \leq n,$$

$$g_{k,2}(e_k, x) = (k-1)e_1, \quad 3 \leq k \leq n-1,$$

$$g_{k,n+1}(e_k, x) = \alpha e_2 + (k-1)x, \quad 3 \leq k \leq n,$$

$$g_{n+1,p}(x, e_1) = e_{p+1}, \quad 3 \leq p \leq n-1,$$

$$g_{n+1,n+1}(x, e_1) = e_1,$$

$$g_{n+1,1}(x, e_1) = e_3,$$

$$g_{n+1,1}(e_i, x) = e_{i+1}, \quad 3 \leq i \leq n-1,$$

$$g_{n+1,1}(e_1, x) = e_3,$$

$$g_{n+1,n+1}(e_i, x) = -(i-1)e_i, \quad 3 \leq i \leq n,$$

$$g_{n+1,n+1}(e_1, x) = -e_1,$$

$$g_{n+1,p}(x, x) = -(p-1)e_p, \quad 3 \leq p \leq n.$$

Исбот:

Маълумки L чизиқли фазони L га акстантирувчи барча чизиқли акслантиришлар фазосида қуйидагича базис олиш мумкин:

$$f_{j,k}(x_j) = x_k, \quad j, k = \overline{1, n+1}, \quad (j, k) \neq (1, 1), (1, 3), (n+1, 2).$$

$B^2(L, M)$ фазонинг аниқланишига кўра унинг элементи қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$g_{k,p}(x, y) = f_{k,p}(x)y + xf_{k,p}(y) - f_{k,p}(xy).$$

Энди x ва y ларнинг ўрнига базис элементларни алмаштирамиз ва уларнинг барча комбинацияларини текшириб ҳисоблаймиз

Биринчи бўлиб $k=1$, бўлган ҳолни ҳисоблаб текшираимиз:

$$g_{1,p}(e_i, e_j) = f_{1,p}(e_i)e_j + e_i f_{1,p}(e_j) - f_{1,p}(e_i e_j) =$$

$$= \begin{cases} e_{p+1}, & i=1, j=1, 3 \leq p \leq n-1, \\ -(i-1)e_i, & 3 \leq i \leq n, j=1, p=n+1, \\ -e_p, & i=n+1, j=1, 2 \leq p \leq n, \\ e_2 - x, & i=n+1, j=1, p=n+1, \\ -(p-2)e_p, & i=1, j=n+1, 3 \leq p \leq n, \\ e_2, & i=1, j=n+1, p=2, \\ e_2 + x, & i=1, j=n+1, p=n+1. \end{cases}$$

Бу ерда келтирилмаган базис элементларнинг берилган бичизиқли акслантиришдаги қийматлари нолга тенг

$$k=2: g_{2,p}(e_i, e_j) = f_{2,p}(e_i)e_j + e_i f_{2,p}(e_j) - f_{2,p}(e_i e_j) =$$

$$= \begin{cases} e_{p+1}, & i=2, j=1, 3 \leq p \leq n-1, \\ e_3, & i=2, j=1, p=1, \\ e_1, & i=2, j=1, p=n+1, \\ e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-1, j=2, p=1, \\ e_3, & i=1, j=2, p=1, \\ -(i-1)e_i, & 3 \leq i \leq n, j=2, p=n+1, \\ -e_1, & i=1, j=2, p=n+1, \\ e_1, & i=n+1, j=2, p=1, \\ e_2, & i=2, j=1, p=1, \\ -e_p, & i=n+1, j=n+1, 1 \leq p \leq n+1, \\ -(p-1)e_p, & i=2, j=n+1, 3 \leq p \leq n, \\ -e_1, & i=2, j=n+1, p=1, \\ e_2, & i=2, j=n+1, p=n+1. \end{cases}$$

$$3 \leq k \leq n-1: g_{k,p}(e_i, e_j) = f_{k,p}(e_i)e_j + e_i f_{k,p}(e_j) - f_{k,p}(e_i e_j) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} e_{p+1}, & i = k, j = 1, 3 \leq p \leq n-1, \\ e_3, & i = k, j = 1, p = 1, \\ e_1, & i = k, j = 1, p = n+1, \\ e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-1, j = k, p = 1, \\ e_3, & i = 1, j = k, p = 1, \\ -(i-1)e_i, & 3 \leq i \leq n, j = k, p = n+1, \\ -e_1, & i = 1, j = k, p = n+1, \\ -e_p, & i = k-1, j = 1, 1 \leq p \leq n, \\ -x, & i = k-1, j = 1, p = n+1, \\ e_1, & i = n+1, j = k, p = 1, \\ e_2, & i = 1, j = k, p = n+1, \\ (k-p)e_p, & i = k, j = n+1, 1 \leq p \leq n+1, p \neq k, \\ (k-2)e_1, & i = k, j = n+1, p = 2, \\ (k-1)e_2, & i = k, j = n+1, p = 1, \\ \alpha e_2 + (k-1)e_2, & i = k, j = n+1, p = n+1. \end{array} \right.$$

Агар $k = n$ ва $k = n+1$ ҳолларни қарасак, қуйидаги муносабатлар келиб чиқади

$$g_{n,p}(e_i, e_j) = f_{n,p}(e_i)e_j + e_i f_{n,p}(e_j) - f_{n,p}(e_i e_j) =$$

$$= \begin{cases} e_{p+1}, & i = n, j = 1, 3 \leq p \leq n-1, \\ e_3, & i = n, j = 1, p = 1, \\ e_1, & i = n, j = 1, p = n+1, \\ e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-1, j = n, p = 1, \\ e_3, & i = 1, j = n, p = 1, \\ -(i-1)e_i, & 3 \leq i \leq n, j = n, p = n+1, \\ -e_1, & i = 1, j = n, p = n+1, \\ -e_p, & i = n-1, j = 1, 1 \leq p \leq n, \\ -x, & i = n-1, j = 1, p = n+1, \\ e_1, & i = n+1, j = n, p = 1, \\ \alpha e_2, & i = n+1, j = n, p = n+1, \\ (n-p)e_p, & i = n, j = n+1, 3 \leq p \leq n, \\ \alpha e_2 + (n-1)x, & i = n, j = n+1, p = n+1, \\ (n-2)e_1, & i = n, j = n+1, p = 1. \end{cases}$$

$$k = n+1: \quad g_{n+1,p}(e_i, e_j) = f_{n+1,p}(e_i)e_j + e_i f_{n+1,p}(e_j) - f_{n+1,p}(e_i e_j) =$$

$$= \begin{cases} e_{p+1}, & i = n+1, j = 1, 3 \leq p \leq n-1, \\ e_3, & i = n+1, j = 1, p = 1, \\ e_1, & i = n+1, j = 1, p = n+1, \\ e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-1, j = n+1, p = 1, \\ e_3, & i = 1, j = n+1, p = 1, \\ -(i-1)e_i, & 3 \leq i \leq n, j = n+1, p = n+1, \\ -e_1, & i = 1, j = n+1, p = n+1, \\ -(p-1)e_p, & i = n+1, j = n+1, 3 \leq p \leq n. \end{cases}$$

Буни ва олдинги кўрилган ҳолларнинг натижаларининг ўхшашлари бўлганлиги сабабли яни қуйидагиларни инобатга олиб

$$k=1, \quad \text{ҳолдаги} \quad g_{1,p}(e_1, e_1) = e_{p+1}, \quad 3 \leq p \leq n-1,$$

$$k=2, \quad \text{ҳолдаги} \quad g_{2,p}(e_2, e_1) = e_{p+1}, \quad 3 \leq p \leq n-1,$$

$$3 \leq k \leq n-1, \quad \text{ҳолдаги} \quad g_{k,p}(e_k, e_1) = e_{p+1}, \quad 3 \leq p \leq n-1,$$

ва $k=n$ ҳолдаги $g_{n,p}(e_n, e_1) = e_{p+1}$, $3 \leq p \leq n-1$,

тенгликларни битта қилиб

$$g_{k,p}(e_k, e_1) = e_{p+1}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad 3 \leq p \leq n-1$$

каби ёзиш мумкин, худди шу каби барчасини соддалаштириб ёзсак теореманинг исботи келиб чиқади.

□

Аввалги параграфда исботланган 2.2.1-теоремадан қуйидаги натижа келиб чиқади

Натижа 2.3.1. $\dim Z^2(L, M) = n^2 + 2n + 4 - 2\alpha$.

Кўриш мумкинки 2.3.1-теоремадан берилган $R_1(\alpha)$ алгебрасининг 2-гуруппа когомологи фазосининг ўлчовини топиш мумкин.

$$B^2(L, M) \subseteq Z^2(L, M) \quad \text{муносабат} \quad \text{ва} \quad HL^2(L, M) = Z^2(L, M) / B^2(L, M)$$

тенгликдан ушбу натижани оламиз

Натижа 2.3.2. $\dim HL^2(L, M) = 7 - 3\alpha$, бу ерда $\alpha \in \{0; 1\}$.

ХУЛОСА

Ушбу битирув малакавий иши нилрадикали филиформ Лейбниц алгебрасидан иборат бўлган ечимли Лейбниц алгебраларининг инфинитезимал деформацияларини топишга бағишланган. Битирув малакавий ишида юқорида келтирилган шартни қаноатлантирувчи алгебраларнинг бирини дифференциаллашлари ва иккинчи группа когомологиялари тўлиқ таснифланган. Олинган таснифлардан қаралган алгебраларнинг каттиқ эмаслиги келиб чиқади.

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати

1. Balavoine D. Déformations des algébras de Leibniz. C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math. – 1994. - Vol. 319. - P. 783-788.
2. Gerstenhaber M. On the deformation of rings and algebras, I, III, Ann. of Math. (2) 79 (1964) 59–103.
3. Casas J.M., Ladra M., Omirov B.A., Karimjanov I.A. Classification of solvable Leibniz algebras with null-filiform nilradical, Linear and Multilinear algebra, vol. 61(6), 2013, p. 758 – 774.
4. Casas J.M., Ladra M., Omirov B.A., Karimjanov I.A. Classification of solvable Leibniz algebras with naturally graded filiform nilradical, Linear algebra and its Applications, vol. 438(7), 2013, p. 2973-3000.
5. Khudoyberdiyev A. Kh., Omirov B. Infinitesimal deformations of null-filiform Leibniz superalgebras, Journal of Geometry and Physics, vol. 74, 2013, p. 370 – 380.
6. Loday J.-L. Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz. Enseign. Math. – 1993. - Vol. 39. – P. 269-293.
7. Loday J.-L., Pirashvili T. Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology. Math. Ann. – 1993. - Vol. 296. – P. 139-158.
8. Nijenhuis A., Richardson R. W. Cohomology and deformations in graded Lie algebras, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), p. 1–29.
9. Аюпов Ш.А., Омиров Б.А. Нильпотентные свойства алгебры Лейбница $M_n(\mathbb{C})_D$. Сиб. мат. Журнал. – 2004. – Т. 45. - № 3. - С. 399-409.
10. Омиров Б.А. Нильпотентные алгебры и супералгебры Лейбница: Автореф. дис.... док. физ.-мат. наук. – Ташкент: Институт Математики, 2006. – 235.с.
11. Худойбердиев А.Х. Классификация некоторых конечномерных комплексных нильпотентных градуированных алгебр Лейбница: Автореф. дис.... канд. физ.-мат. наук. – Ташкент: Институт Математики, 2010. – 105. с.