

Квадрат тенгламани комплекс сонлар фазосидаги илдизлари хақида.

Акбаров У.Й., Баратов Ф.

Бизга маълумки, квадрат тенглама комплекс текисликда иккита илдизга эга бўлади. Лекин, квадрат тенгламани комплекс фазода кўрадиган бўлсак, илдизи иккитадан кўп бўлар экан. Квадрат тенгламани комплекс фазодаги илдизлари хақида гапиришдан олдин фазодаги комплекс сонлар қандай пайдо бўлиши хақида тўхталамиз. Фазодаги комплекс сонларни пайдо бўлишига комплекс сондан илдиз чиқариш усулига кенгроқ ёндошиш оқали эришиш мумкин.

Маълумки, текисликдаги нолдан фарқли α комплекс сондан n -даражали илдиз чиқариш $z_k = \sqrt[n]{|\alpha|} e^{\frac{i(\arg\alpha + 2k\pi)}{n}} = \sqrt[n]{|\alpha|} \left(\cos \frac{\arg\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\arg\alpha + 2k\pi}{n} \right)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ формула билан амалга оширилар эди.

Қуйидаги

$$z^2 - 1 = 0$$

тенгламани кўрайлик. Унинг илдизини юқоридаги формула ёрдамида $+1$ сонидан иккинчи даражали илдиз чиқариш орқали аниқлаймиз. Агар (z) комплекс текисликни $0 \leq x \leq \infty$ тўғри чизик билан кесилган деб қарасак, комплекс текисликдаги $\alpha = +1$ сонига иккита $\arg\alpha = 0$ ва $\arg\alpha = 2\pi$ аргументлар мос келади ва бу сон комплекс текисликдаги иккита нуқта билан аниқланади, яъни биринчи нуқта (z) комплекс текисликни $0 \leq x \leq \infty$ тўғри чизик билан кесимнинг юқори қирғоғида бўлса, иккинчиси қуйи қирғоғида бўлади. Аргументлари турли бўлган бу икки нуқтадан квадрат илдиз чиқариш бир хил ± 1 натижани беради

$$z_k = \sqrt[1]{1} e^{\frac{i(0+2k\pi)}{2}}, z_{k=0} = 1, z_{k=1} = -1,$$

$$z_k = \sqrt[1]{1} e^{\frac{i(2\pi+2k\pi)}{2}}, z_{k=0} = -1, z_{k=1} = 1.$$

Энди юқоридаги тенгламани қуйидаги кўринишда олайлик

$$z^2 - (-1)(-1) = 0$$

Бу квадрат тенгламани илдизини $(-1)(-1)$ кўпайтмадан квадрат илдиз чиқариб аниқлаймиз

$$z_k = \sqrt[1]{-1} e^{\frac{i(\pi+2k\pi)}{2}} \sqrt[1]{-1} e^{\frac{i(\pi+2k\pi)}{2}} = e^{\frac{i(\pi+2k\pi)}{2}} e^{\frac{i(\pi+2k\pi)}{2}}, k = 0, 1.$$

У ҳолда $z_1 = -1$, $z_2 = -1$.

$z_k = e^{\frac{i(\pi+4k\pi)}{2} + \frac{j(\pi+2k\pi)}{2}}, k = 0, 1, j$ мавҳум бирлик i мавҳум бирликдан фақат белгиланиши билан фарқ қилади. У ҳолда

$$z_1 = (z_k)_{k=0} = e^{\frac{\pi i}{2}} e^{\frac{\pi j}{2}} = ji,$$

$$z_2 = (z_k)_{k=1} = e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi)} e^{j(\frac{\pi}{2}+\pi)} = -ji$$

Демак, фазодаги комплекс сон иккита аргумент орқали қуйидагича ифодаланар экан

$$v = Re^{i\varphi+j\psi}$$

Аргументларни циклик орттирмаси $\Gamma_k = (4\pi i + 2\pi j)k$, бу ерда k - бутун сон.

Демак, $+1$ нинг квадрат илдизи $\sqrt{1} = \pm 1$ ечимдан ташқари, фазовий $\sqrt{1} = \pm ij$ ечимга ҳам эга. i ва j мавҳум бирликлар қуйидаги алгебраик хоссаларга эга $(ij)^2 = (i)^2(j)^2 = i^2j^2 = (-1)(-1) = +1, ij = ji.$ (1)

Энди юқорида киритилган j мавҳум бирлик орқали аниқланган фазодаги комплекс сонлар системасида квадрат тенгламани ечиш усулини кўрсатамиз.

Сонлар майдонини кенгайтириш жараёнида комплекс сонлар майдонини кенгайтириш мумкин эмас деб ҳисобланган. Комплекс сонлар майдонини кенгайтириш бирор математик амални аниқлаш билан боғлиқ бўлиб, бу амал комплекс сонлар майдонида аниқланмаган бўлиши керак. Бунақанги амални аниқлашга эҳтиёж бўлмаганлиги учун комплекс сонлар майдони ёпиқ деб ҳисобланган. Аммо, комплекс сонлар майдонини кенгайтириш учун эҳтиёж туғдирадиган ҳолат мавжуд экан. Буни асослаш учун яна квадрат тенгламани ечиш жараёнига қайтамиз.

Коэффициентлари a ва b (ҳақиқий ёки мавҳум) бўлган $v^2 + 2av + b = 0$ квадрат тенгламани ечишнинг классик усулини кўрайлик

$$v^2 + 2av + b + a^2 - a^2 = 0,$$

$$(v + a)^2 - (a^2 - b) = 0,$$

$$[(v + a) - \sqrt{a^2 - b}][(v + a) + \sqrt{a^2 - b}] = 0,$$

$$(a^2 - b) \left[\frac{v+a}{\sqrt{a^2-b}} - 1 \right] \left[\frac{v+a}{\sqrt{a^2-b}} + 1 \right] = 0.$$

$a^2 - b \neq 0$ деб ҳисоблаймиз. Бир-биридан фарқли иккита X ва Y кўпайтувчиларни кўпайтмаси нолга тенг бўладиган қуйидаги учта ҳолни кўрайлик:

- 1) $X=0, Y \neq 0$,
 - 2) $X \neq 0, Y=0$,
 - 3) $X \neq 0, Y \neq 0$.
- (2)

Биринчи иккита ҳол тенгламани классик усулда ечиш натижасидаги илдизлар олиб келади, яъни ҳақиқий ёки комплекс бўлган қуйидаги иккита

$$v_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - b} \text{ илдизни топиш мумкин.}$$

Учинчи ҳол нолнинг бўлувчиларини аниқлайди. Бу ҳолни ҳисобга олмаслик мантиқий нуқтаи назардан тўғри келмайди. Нолга тенг бўлмаган иккита соннинг кўпайтмаси нол бўладиган сонлар фазодаги комплекс сонлар ичида мавжуд.

$\frac{v+a}{\sqrt{a^2-b}} = \pm ij$ деб белгилаймиз. Ифодани квадрат тенгламага олиб бориб қўйиб, $(ij)^2 = +1, (i)^2 = -1, (j)^2 = -1, ij = ji$ эканлигини ҳисобга олсак, $(ij - 1)(ij + 1) = (ij)^2 - ji + ji - 1 = 0$ тенгликка эга бўламиз. Бундан квадрат тенглама фазодаги комплекс сонлар системасида яна қуйидаги иккита илдизга эгаллиги келиб чиқади

$$v_{3,4} = -a \pm ji\sqrt{a^2 - b}.$$

Квадрат илдиз олдида ij коэффициентни пайдо бўлиши фазо ўлчамини ўзгариши билан ечимни тармоқланишини билдиради. Квадрат илдиз ҳар қандай ўлчамдаги фазода мусбат ва манфий қийматли тармоққа ажралади ва илдизлар қўшма бўлади. Шунинг учун квадрат тенглама камида тўртта илдизга эга бўлади.

Мисол.

$$v^2 + 4v + 3 = 0$$

тенглама берилган бўлсин. Тенглама ҳақиқий соҳада $v_1 = -1, v_2 = -3$ илдизларга эга бўлиб, тенглама қуйидагича кўпайтувчиларга ажралади

$$v^2 + 4v + 3 = (v + 1)(v + 3) = 0.$$

Тенгламани сонларни комплекс фазосидаги илдизлари мос равишда қуйидагига тенг бўлади

$v_{3,4} = -2 \pm ji|\sqrt{1}|$, бундан $v_3 = -2 + ji, v_4 = -2 - ji$, ва тенглама куйидагича кўпайтувчига ажралади

$$v^2 + 4v + 3 = (v + 2 - ji)(v + 2 + ji) = 0.$$

Бу вариантдаги илдизлар учун ҳам, юқоридаги илдизлар вариантыдаги каби иккита кўпайтувчини нолга тенглиги амал қилади. Агар бу кўпайтувчилардаги v ўрнига текисликдаги -1 ёки -3 ни қўйсак, у холда бу ифода нолнинг бўлувчилари кўпайтмаси шаклига киради

$$v^2 + 4v + 3 = (-1 + 2 - ji)(-1 + 2 + ji) = (1 - ji)(1 + ji) = 0, \text{ бу ерда } 1 - ji \neq 0, 1 + ji \neq 0.$$

Худди шунга ўхшаш $v^2 + 4v + 3 = (v + 1)(v + 3) = 0$ ифода кўпайтувчиларидаги v ўрнига комплекс фазодаги v_3 ёки v_4 илдизларни қўйсак, у холда бу ифода ҳам нолнинг бўлувчилари кўпайтмаси шаклига киради. Демак, бирор ўлчамли фазодаги илдиз иккинчи бир ўлчамдаги фазонинг бирор ўқида ётар экан.

Мисол. $v^2 - 1 = 0$ квадрат тенглама тўртта илдизга эга. $v_1 = 1, v_2 = -1$ ҳақиқий сонлар соҳасидаги илдизлар, $v_3 = ji, v_4 = -ji$ лар комплекс сонлар фазосидаги илдизлар. Фазода берилган квадрат тенглама бир-бирига тенг бўлган куйидаги иккита кўринишдаги кўпайтувчиларга ажралади

$$v^2 - 1 = (v + 1)(v - 1) = (v + ji)(v - ji) = 0.$$

Бу ерда ҳам бир фазодаги ихтиёрий илдизни иккинчи фазода ҳосил қилинган кўпайтувчилардаги v ўрнига қўйсак нолнинг бўлувчилари кўпайтмаси ҳосил бўлади.

Адабиётлар.

1. В.Е.Елисеев. Введение в методы теории функций пространственного комплексного переменного. М. 1990-2003, 486 с.
- 2.