

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС
ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**

**ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ
МЕХАНИКА-МАТЕМАТИКА ФАКУЛЬТЕТИ**

**«ҲИСОБЛАШ ТЕХНОЛОГИЯЛАРИ ВА МАТЕМАТИК
МОДЕЛЛАШТИРИШ» КАФЕДРАСИ**

**«Математик пакетларда ҳисоблаш хатоларини баҳолаш»
мавзусидаги**

БИТИРУВ МАЛАКАВИЙ ИШИ

Бажарди: «Амалий математика ва
информатика» таълим йўналиши битирувчи
4 курс талабаси Матназаров И.К.

ИЛМИЙ РАҲБАР:

ф.-м.ф.н., Худойбергандов М.Ў.

Битирув малакавий иши кафедрадан дастлабки ҳимоядан ўтди.

№ 18 сонли баённомаси «_1_» __май__ 2014 йил

ТОШКЕНТ – 2014 й

МУНДАРИЖА

Кириш.....	3
1–боб. Чизикли тенгламалар системасини ечиш усуллари.	4
1. Вектор ва матрица нормаси.	4
2. Чизикли тенгламалар системасини ечиш усуллари турғунлигининг матрица шартланганлик сонига боғлиқлиги.	6
3. Ечим вариацияси. Коррект ва нокоррект ечим	12
4. Регуляризация усули	15
2– боб. Оддий дифференциал тенгламани сонли ечиш усуллари	18
1. Эйлер усули	18
2. Иккинчи тартибли Рунге-Кутта методи.....	24
3. Ёмон шартланган оддий дифференциал тенгламаларга мисоллар	25
Хулоса.....	29
Адабиётлар.....	32
Илова.....	33

Кириш

Илм фаннинг турли соҳаларида классик усуллар билан аниқ ечимни топиб бўлмайдиган математик масалалар учраб туради. Бундан ташқари ечим шундай мураккаб кўринишда топиладики, ундан амалиётда фойдаланиш ноқулай. Ҳисоблаш математикасининг ривожланиши билан бундай масалаларнинг сони ошди.

Битирув малакавий иши амалий математиканинг энг муҳим муаммоларидан бири бўлган компьютерли ҳисоблашларнинг бошланғич берилганларга нисбатан аниқлиги ва ишончилигини текширишга бағишланади. Яъни агар бошланғич маълумотлар бирор $\pm \varepsilon$ аниқликда бўлса, ечимнинг энг кичик хатолиги қандай бўлиши мумкин? Масаланинг ечимсиз ҳисоблаш ишончилиги ҳақида гапириш мумкин эмас. Маълумки, баъзи масалаларда бошланғич шартлардаги кичик хатоликлар ечимнинг жуда катта хатоликларига сабаб бўлиши мумкин[1,2]. Мазкур муаммо бир неча маротоба тадқиқ қилинган ва ўтган асрнинг охирги ўн йиллигида эквивалент алмаштиришлар назариясида аниқланган натижалар ушбу муаммо учун янги йўналиш яратишга асос бўлди. Математикада кўп бажариладиган шунингдек, барча ҳисоблашларда эквивалент алмаштиришлар ўрганилаётган масаланинг корректлигини ўзгартиришига олиб келиши аниқланди. Математика, физика ва техникада барча масалаларни коррект ва нокорректликка ажратиш етарли бўлмай қолди. Энди учинчи синф масалалари – эквивалент алмаштиришлар натижасида ўзининг корректлигини ўзгартирадиган масалага ажратишга тўғри келди. Илгари масалада бемалол эквивалент алмаштиришлар бажарилган бўлса, энди масала учинчи типга хосмас эканлигини текшириш зарурати туғилди.

Учинчи синфга тегишли масалаларнинг учраши ҳисоблаш хатоликларига кейинчалик турли ҳалокатлар ва бахтсиз ҳосидасаларга сабаб бўлади. Турли хатоликларнинг пайдо бўлиш сабабларини ўрганиш, уларни

олдиндан аниқлаш ва баҳолаш мазкур малакавий битирув ишининг асосий мақсадларидан бири ҳисобланади.

1–боб. Чизиқли тенгламалар системасини ечиш усуллари.

1.Вектор ва матрица нормаси.

Ҳисоблаш усулларида хатоликларни тадқиқ этиш мақсадида дастлаб вектор ва матрица нормаси тушунчаларини киритиш лозим.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ векторнинг нормаси деб ($\|x\|$ каби белгиланади) n –ўлчовли фазода $x \in R^n$ қуйидаги хоссаларга эга бўлган норманфий сонга айтилади:

1. $\|x\| \geq 0$ ($\|x\| = 0$ фақат ва фақат x – нол вектор бўлса);
2. $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \|x\|$ ҳар қандай α сон учун;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$n \times n$ ўлчовли A матрицанинг нормаси деб ($\|A\|$ каби белгиланади) матрица элементлари ёрдамида ҳисобланадиган ва қуйидаги хоссаларга эга бўлган норманфий сонга айтилади:

1. $\|A\| > 0$ ($\|A\| = 0$ фақат ва фақат A – нол матрица бўлса $A = 0$);
2. $\|\alpha \cdot A\| = |\alpha| \|A\|$ ҳар қандай α сон учун;
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;
4. $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ қаралаётган барча $n \times n$ ўлчовли A ва B матрицалар учун.

Таърифдан кўриниб турибдики, вектор ва матрица нормаси(улар ўхшаш, фақат охиригисини эътиборга олмасак) бир–бири билан мослашган бўлиши лозим. Ушбу мослашув

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \quad (1)$$

тенгсизлик билан боғлиқ.

Қуйидаги нормалардан келгусида тез–тез фойдаланамиз:

$$\|x\|_1 = \max_i |x_i|,$$

$$\|x\|_2 = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

$$\|x\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{(x, x)}.$$

Энди ушбу вектор нормаларига мослашган матрица нормаларини келтирамиз:

$$\|A\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|,$$

$$\|A\|_2 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|,$$

$$\|A\|_3 = \sqrt{\max_i |\lambda_i|_{A^T A}}.$$

Ушбу матрица нормалари (1) тенгсизлик орқали вектор нормалари билан мослашганлигини осон кўрсатиш мумкин. Масалан, матрицанинг нормаси $\|A\|_3$ да квадрат илдиз остида $A^T A$ симметрик матрицанинг спектрал радиуси турибти. Тушунарлики симметрик матрицанинг хос сонлари мусбат бўлади.

Чизиқли алгебрадан маълумки, матрицанинг спектрал радиуси унинг нормасидан катта эмас. Ҳақиқатдан ҳам $Ax = \mu x$ тенгликдан қуйидаги келиб чиқади. $\|\mu x\| = |\mu| \|x\| = \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$, $|\mu| = \|A\|$ ёки $\rho(A) \leq \|A\|$. Бу ерда $\rho(A) = \max_i |\mu_i|$ A матрицанинг хос сонлари ичидан энг каттаси – спектрал радиуси. Шундай қилиб матрицанинг нормаси сифатида унинг спектрал радиусини олиш мумкин.

Мисол. Векторнинг $\|x\|_1$ нормасини матрицанинг $\|A\|_1$ нормаси билан мослашганлигини кўрсатинг.

$$\begin{aligned}\|Ax\|_1 &= \max_i |Ax| = \max_i \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij} x_j| \leq \max_i |x_j| \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \\ &= \|x\|_1 \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.\end{aligned}$$

Бундан эса $\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \leq \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ келиб чиқади ва (1) га асосан нормаларнинг мослашганлигини кўрсатади.

2. Чизиқли тенгламалар системасини ечиш усуллари турғунлигининг матрица шартланганлик сонига боғлиқлиги.

Масалаларни ечишда сонли методлардан фойдаланиш учун масаланинг хусусиятларини ва уни ечиш учун мўлжалланган алгоритм хоссаларини бири-биридан фарқ қилиш керак. Ҳар қандай математик масалани ечишдан олдин унинг корректлиги билан қизиқиш керак. Масала коррект қўйилган дейилади, агар масала ечими мавжуд, ягона ва бошланғич берилганларга узлуксиз боғлиқ бўлса. Охирги хосса турғунлик хоссаси деб айтилади. Масаланинг корректлиги унинг ечиш методининг яхши бўлишига кафолат эмас. Шу сабабли ечиш методининг хоссалари алоҳида тадқиқ қилиниши лозим. Кўп ҳолларда нокоррект масалаларни ҳам ечишга тўғри келади. Бу ерда масаланинг ва уни ечиш методларининг корректлиги n -тартибли A матрицали

$$Ax=f \tag{1}$$

чизиқли тенгламалар системасини ечиш мисолида кўриб чиқилади, $\det A \neq 0$ бўлганда ва фақат шундагина (1) - системанинг ечими мавжуд ва ягоналиги маълум. Бундай ҳолда A^{-1} мавжуд бўлиб, ечим

$$x = A^{-1}f \tag{2}$$

каби топилади.

(1) - масаланинг коррект бўлиши учун яна ечимнинг бошланғич берилганларга узлуксиз боғлиқлигини аниқлаш керак.

Шу муносабат билан иккита савол туғилади. Биринчиси: (1) - масаланинг бошланғич берилганлари нималар ва иккинчиси: узлуксиз боғланишни қандай тушуниш керак?

Биринчи саволга жавоб бериш осон: бошланғич берилганлар A матрицанинг a_{ij} элементлари ва f - ўнг томондан иборат. Шуларга мос ўнг томонга нисбатан (фақат f - ўнг томон ўзгариб A ўзгаришсиз қолади) турғунлик ва коэффицентларга нисбатан турғунлик (фақат A матрицанинг a_{ij} - коэффицентлари ўзгариб f -ўнг томон ўзгаришсиз қолади) ва умумий ҳолдаги турғунлик ҳолларини қараш мумкин.

Узлуксиз боғланиш ҳақида гапириш учун биз олдинги паарафда кўрган n - ўлчовли векторлар фазосида нормаларни киритиш лозим бўлади.

(1) - система билан бирга ўзгарган, ўнг томони билан фарқ қиладиган

(3)

системани қараймиз.

Биз ўнг томоннинг ўзгариши ечимни қанчалик ўзгартириши билан қизиқамиз. Бунинг учун

$$\delta x = \tilde{x} - x, \quad \delta f = \tilde{f} - f$$

белгилашларни киритамиз.

Агар

$$\|\delta x\| \leq M \|\delta f\| \quad (4)$$

бўлса, унда (1) - система ўнг томонга нисбатан турғун деб айтилади.

Бу ерда $M > 0$, f ва $\tilde{f}$ ларга боғлиқ бўлмаган доимий сондир. (4) – баҳо ечимининг ўнг томонга узлуксиз боғлиқлигини ифодалайди, яъни $\square \|\delta f\| \rightarrow 0$ бўлганда, $\square \|\delta x\| \rightarrow 0$ бўлишини кўрсатади.

Масаланинг турғунлиги уни сонли ечишда муҳим ҳисобланади, чунки кўп ҳолларда ўнг томон $\tilde{f}$ тақрибий бўлиб, уни аниқ топишга имконият бўлмайди. Агар f

Масалан: $\delta f = f - f$ хатолик, яхлитлаш хатолиги натижасида пайдо бўлиши мумкин.

Агар $\det A \neq 0$ бўлса, унда (1) - система ўнг томонга нисбатан турғун бўлади. Ҳақиқатан ҳам (1) ва (3) – дан $A(\delta x) = \delta f$ тенглик келиб чиқади. Ушбу тенгламалар системасининг ечими $\delta x = A^{-1}(\delta f)$ тенглик орқали аниқланади ва ушбу ечим учун қуйидаги тенгсизлик ўринли:

$$\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta f\| \quad (5)$$

яъни $M = \|A^{-1}\|$, (4) - тенгсизлик келиб чиқади. Бу ердан шунини сезиш мумкинки $\det A$ қанча нолга яқин бўлса, ўнг томоннинг хатолиги ечим хатолигидан шунча кўп фарқ қилади.

(4) – баҳода ечим хатолиги ва ўнг томон хатолиги қатнашяпти. (1) - системани сузувчи вергули ЭХМ лар ёрдамида ечилаётган пайтда

$$\frac{\|\delta f\|}{\|f\|}, \quad \frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$$

нисбий хатоликлар, масала турғунлигининг хусусиятини кўрсатиб туради.

(1) тенгламалар системасидан келиб чиқувчи

$$\|f\| \leq \|A\| \|x\| \quad (6)$$

тенгсизликдан фойдаланиб, ўнг томон нисбий хатолиги орқали ечимнинг нисбий хатолигини ифодаловчи баҳони топамиз. Бунинг учун (5) ва (6) тенгсизликларни кўпайтирамиз:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq M_A \frac{\|\delta f\|}{\|f\|}, \quad (7)$$

тенгсизлик ҳосил бўлади, бу ерда

$$M_A = \|A^{-1}\| \|A\|. \quad (8)$$

Ушбу баҳода қатнашаётган M_A сезгирлик сони, (ёки шартланганлик сони) деб айтилади ва ечим нисбий хатолигининг ўнг томон нисбий хатолигидан боғлиқлик даражасини аниқлайди. M_A сони катта бўлган матрицалар сезгирлиги кучли матрицалар деб юритилади ва ёмон шартланган матрица деб аталади. Матрицаси сезгир системаларни ечишда хатоликлар йиғилади.

(1) - системанинг ҳам ўнг томони, ҳам коэффициентлари ўзгарган бўлсин.

(1)- система билан бирга

$$\begin{pmatrix} A \\ f \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A + \delta A \\ f + \delta f \end{pmatrix} \quad (9)$$

системани қараймиз.

$$\delta A = A' - A, \quad \delta x = x' - x, \quad \delta f = f' - f$$

килиб белгилаймиз.

1-теорема. A матрицага тескари матрица мавжуд бўлиб

$$\|\delta A\| < \|A^{-1}\|^{-1}$$

тенгсизлик ўринли бўлсин. Унда $A' = A + \delta A$ тескари матрицага эга бўлиб, нисбий хатолик қуйидаги баҳога эга:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{M_A}{1 - M_A \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right)} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta f\|}{\|f\|} \right), \quad (10)$$

Чизиқли алгебраик тенгламалар системасини Гаусс методи билан ечишда яхлитлаш хатолигининг ечимга таъсири кўриб чиқамиз. Гаусс методи аниқ методларга мансуб бўлиб, чекли сондаги амаллар бажариш натижасида ечимнинг аниқ қийматини топишга имкон беради.. Аммо бошланғич маълумотларни ЭХМ га киритилганда улар яхлитланиб хатолик билан киритилади. Шу сабабли ҳисоблашларни ЭХМ ёрдамида бажарганда аниқ

ечимни деярли топиб бўлмайди. Матрица тартиби қанча катта бўлса охирги хатолик шунча катта бўлади. Ундан ташқари хатолик матрицанинг элементларига ҳам боғлиқ. Масалан, агар унинг детерминанти нолга яқин бўлса система ечимининг хатолиги катта бўлади. Аммо, яхлитлаш хатоликларининг йиғилиб бориши Гаусс ёки бошқа сонли методларни ишга яроқсиз қилиб қўяди деб ўйламаслик керак. Чунки, одатда ечимни аниқ топиш талаб қилинмасдан, уни бирор бир аниқлик билан топиш талаб қилинади. Бунда хатолик талаб қилинган чегаралардан ташқарига чиқмаслиги муҳимдир. Бунинг учун яхлитлаш хатоликлари ечимнинг аниқлигига таъсирини таҳлил қилиш лозим. Кўпгина ҳисоблаш алгоритмларида яхлитлаш хатолиги таъсирини $\|x\|$ системани қараб ҳисобга олиш керак. Бунда яхлитлаш хатоликлари таъсири остида (1)-системанинг ечими $\|x\|$ системанинг аниқ ечими деб ҳисобланади. Бошқача қилиб айтилганда (1) - системани яхлитлаш хатоликларини ҳисобга олган ҳолда ечиш жараёни $\|x\|$ системани аниқ ечишга эквивалентдир.

Фараз қиламиз f ўнг томон аниқ берилган бўлсин. Фараз қиламиз, (1) - системани яхлитлашлар хатоликларини ҳисобга олиб ечиш ўрнига

$$\|x\| \quad (11)$$

системанинг аниқ ечими топилган бўлсин. Бундай ҳолда $\delta A = \|A\|$ матрица эквивалент қўзгашлар матрицаси деб айтилади. Ҳар бир ҳисоблаш алгоритми учун ўзининг эквивалент қўзгашлар матрицаси мавжуд, агар δA матрица нормасининг баҳоси мавжуд бўлса, унда яхлитлаш хатоликлари натижасида ҳосил бўлган хатоликни (10) – мувофиқ баҳолаш мумкин, яъни

$$\frac{\|x - x^*\|}{\|x\|} \leq \frac{M_A}{1 - M_A \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right)} \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \quad (11)$$

муносабат ўринли бўлади.

Бундан кўриниб турибдики ечим аниқлигига икки нарсa: А матрицанинг сезгирлик сони ва эквивалент кўзғаш таъсир қилади. Шунини таъкидлаймизки, сезгирлик сони алгоритмга боғлиқ эмас, балки у (1)-система хусусиятини акс эттиради холос. Эквивалент кўзғаш катталигини сонли алгоритм аниқлайди.

Агар матрицанинг шартланганлик сони қанча катта бўлса, ечимнинг аниқлиги шунча кичик бўлади.

Шартланганлик сони $M_A \approx 1 \div 10$ бўлса, бошланғич қийматларнинг хатолиги ечимга кам таъсир кўрсатади ва яхши шартланган дейилади. Агар $M_A \approx 10^2 \div 10^3$ бўлса ёмон шартланган дейилади.

Мисол. $\begin{cases} 101x + y = 102; \\ 100x + y = 101, \end{cases}$ системани тадқиқ этамиз. Тушунарлики система $x = 1, y = 1$ ечимга эга. Лекин ушбу система ёмон шартланган. Агар система иккинчи тенгламасида x номаълум олдидаги коэффициентни 0,5% га ўзгартирсак, ҳосил бўлган системанинг ечими бутунлай ўзгаради.

Ҳақиқатдан ҳам

$$\begin{cases} 101x + y = 102; \\ 100(1 + 0.005)x + y = 101, \end{cases}$$

системанинг ечими $x = 2, y = -100$ бўлади. Дастлабки системани эквивалент алмаштиришлар бажариб, осон ечиш мумкин, яъни унинг биринчи тенламаси чап томонидан иккинчи тенгламани айириб

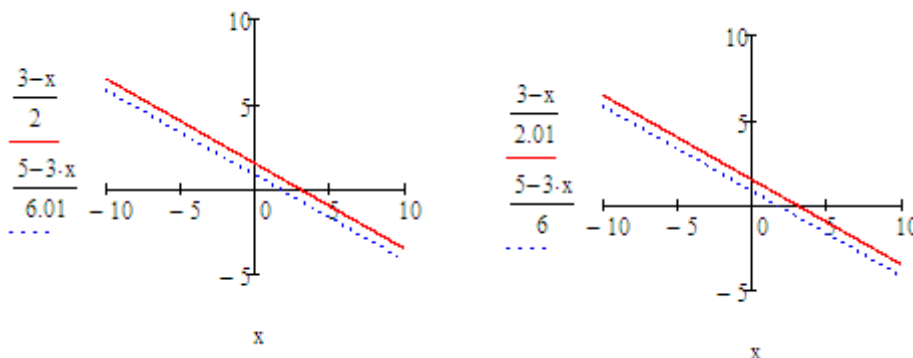
$x = 1$ тенглама билан дастлабки система биринчи тенгламасини қарасак, қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x = 1; \\ 100x + y = 101 \end{cases}$$

Мазкур система мисолда берилган системага эквивалент бўлиш билан бирга бошланғич берилганларга узлуксиз боғлиқ ҳам бўлади. Яъни яхши шартланган.

Мисол. $\begin{cases} x + 2y = 3; \\ 3x + 6.01y = 5, \end{cases}$ ва $\begin{cases} x + 2.01y = 3; \\ 3x + 6y = 5. \end{cases}$ бир-биридан жуда оз фарк

қилувчи мазкур тенгламалар системаларининг аниқ ечими бир-биридан жуда катта фарқ қилади. Хусусан биринчи тенгламалар системасининг ечими $x = 803$, $y = -400$ ва иккинчи тенгламалар системасининг ечими $x = -265$, $y = 133.33$ бўлади. Нокорректликни янада чуқурроқ тушуниш учун ушбу тенгламалар системаси графигини қарайлик.



Ёмон шартланган системаларнинг графиги деярли бир-бирига параллел бўлади. Шунинг учун кичик ўзгаришлар уларнинг ечимини аниқлашда сезиларли хатоликларга олиб келади.

Хулоса қилиб шуни айтиш мумкинки, масалада эквивалент алмаштириш бажариш ёрдамида яхши шартланган ёки ёмон шартланган масалана ҳосил қилиш мумкин экан. Демак ҳар қандай эквивалент алмаштиришни синчиклаб текшириш мақсадга мувофиқ экан

3.Ечим вариацияси. Коррект ва нокоррект ечим

Тенгламанинг коэффицентларини вариациялаганда унинг ечими ҳам вариацияланиши лозим. Ечим ва коэффицентларнинг вариацияси турлича бўлиши мумкин.Буни қуйидаги мисолда кўрсатамиз. Узунлиги « a » метр

бўлган тўсиқ ёрдамида юзаси « b » метр квадрат бўлган майдонни ўраш керак бўлсин. Масалани ечиш учун тўртбурчак томонларини x_1 ва x_2 орқали белгилаймиз ва қуйидаги тенгламалар системасини тузамиз:

$$2(x_1 + x_2) = a; \quad (1)$$

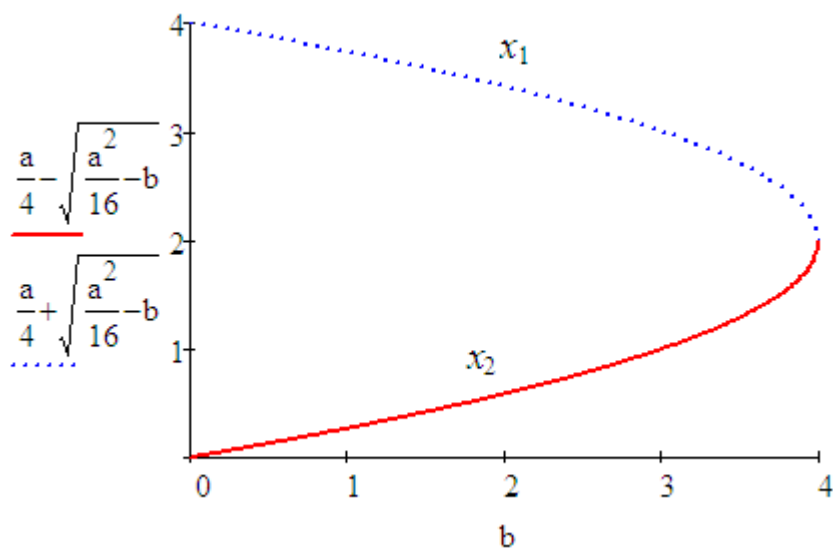
$$x_1 \cdot x_2 = b. \quad (2)$$

Ушбу тенгламаларни ечиб, x_1 ва x_2 қуйидаги квадрат тенгламанинг ечими бўлишини кўришимиз мумкин:

$$x^2 - \frac{a}{2}x + b = 0,$$

$$\text{яъни } x_1 = \frac{a}{4} + \sqrt{\frac{a^2}{16} - b}; \quad x_2 = \frac{a}{4} - \sqrt{\frac{a^2}{16} - b}. \quad (3)$$

Қуйидаги расмда $a = 8$ м бўлган ҳолда x_1 ва x_2 ечимларнинг b коэффициентга боғлиқлиги тасвирланган.



Агар $b < 4 \text{ м}^2$ бўлса x_1 ва x_2 қийматлар « b » узлуксиз боғлиқ бўлади. Яъни майдоннинг юзи « b » нинг озгина ўзгаришига x_1 ва x_2 озгина ўзгариши мос келади. Масалан, $b = 3$ бўлса, у ҳолда $x_1 = 3$; $x_2 = 1$ бўлади. Агар $b = 3 - \varepsilon$ бўлса, у ҳолда (3) формуладан

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{1 + \varepsilon} = 2 \pm \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \dots\right). \quad (4)$$

келиб чиқади. (4) формула $b < 4$ бўлганда x_1 и x_2 майдоннинг юзига узлуксиз боғлиқ бўлади. Бироқ, $b = 4 + \varepsilon$, бунда $\varepsilon > 0$ бўлганда ушбу узлуксиз боғлиқлик йўқолади ва комплекс қийматлар қабул қилади. Бунда

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-\varepsilon} \quad (5)$$

бўлиб, етарлича кичик $\varepsilon > 0$ да ҳақиқий илдизлар мавжуд эмас. $b = 4$ бўлганда x_1 ва x_2 ларнинг b га узлуксиз боғлиқлиги йўқолади.

Амалий жиҳатдан бу юзаси 4 м^2 дан катта бўлган майдонни 8 м узунликдаги тўсиқлар билан ўраб бўлмаслигини англатади.

Агар $b = 4 \text{ м}^2$ (ёки, умумий ҳол учун $b = \frac{a^2}{16}$) бўлганда (3) формуладан фойдаланиб қуйидаги ечимни топамиз:

$$x_1 = x_2 = \frac{a}{4}.$$

Бу ечим амалий маънога эга эмас. Чунки у b параметрнинг етарлича кичик ўзгаришларига бунлай ўзгариб кетиши мумкин.

Мисол: Юқорида кўрилган масала $a = 8$ ва $b = 3$ коррект. $a = 8$ ва $b = 4$ бўлганда ечим $x_1 = x_2 = 4$ – нокоррект; $b = 4 + \varepsilon$ бўлганда ечим бутунлай ўзгариб кетади яъни етарлича кичик ε да ечим мавжуд бўлмайди.

4.Регуляризация усули

Нокоррект масалаларни ечиш учун, хусусан ёмон шартланган чизиқли тенгламалар системасини ечиш учун регуляризация усули қўлланилади. Унинг асосини функционалга минимум қиймат берувчи векторни топиш ташкил этади.

$$Ax = b \quad (1)$$

тенгламалар системаси

$$\Omega(x, \lambda) = |Ax - b|^2 + \lambda|x - x_0|^2 \quad (2)$$

бу ерда λ мусбат регуляризация параметри бўлиб, бирор оптимал усул билан аниқланади. (2) функционални минималлаштирувчи векторни топиш масаласини бошқа бир чизиқли тенгламалар системасини ечишга олиб келинади:

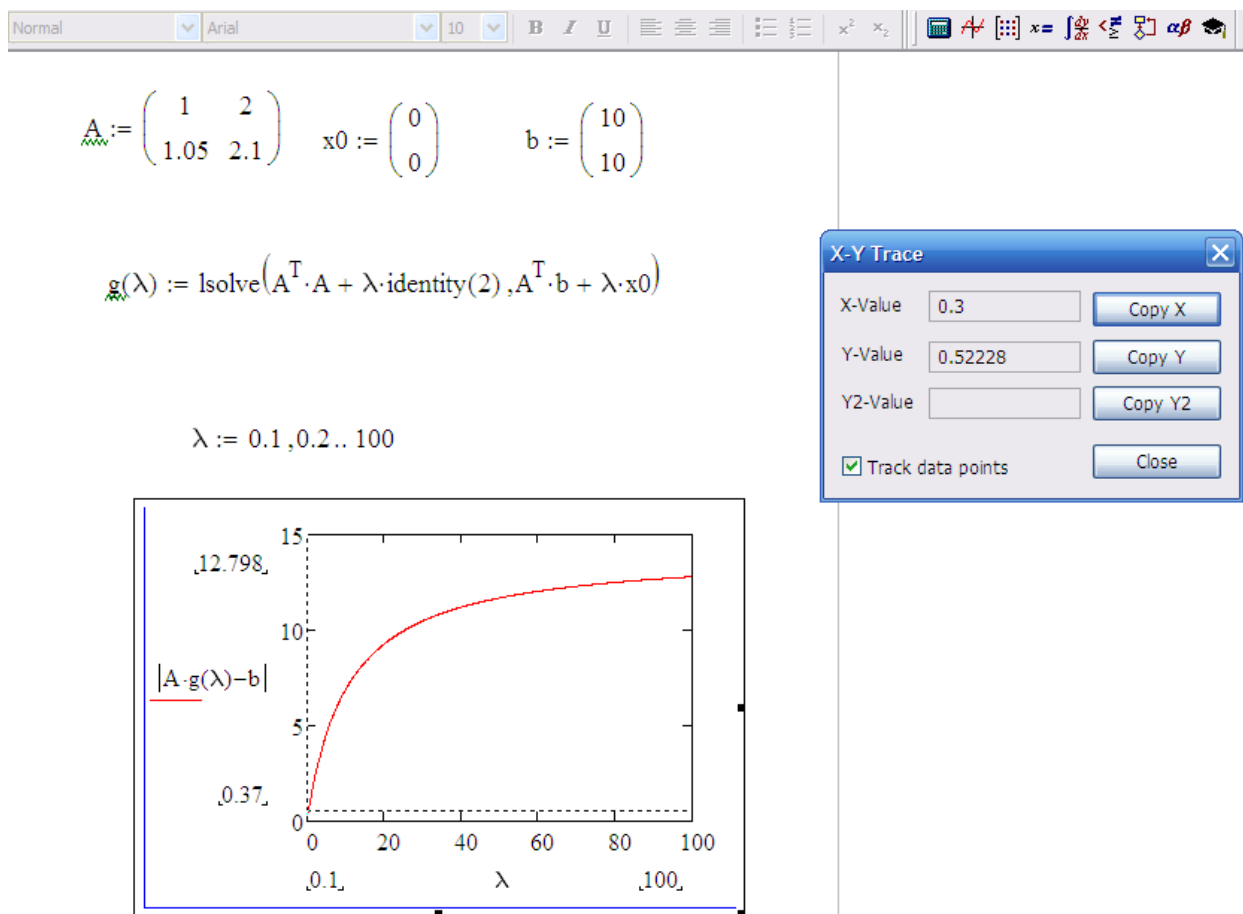
$$(A^T A + \lambda E)x = A^T b + \lambda x_0$$

бунда $\lambda \rightarrow 0$ да дастлабки системага келинади, етарлича катта λ ларда яхши шартланган масала x_0 ечимга эга бўлади.

Мисол. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1.05 & 2.1 \end{pmatrix}$, $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$ тенгламалар системасини қарайлик. Масалани регуляризация қилиш мақсадида қуйидаги функционални тузамиз:

$$g(\lambda) = (A^T A + \lambda E)x - A^T b - \lambda x_0.$$

Регуляризациялашнинг асосий қисми оптимал λ ни топишдан иборат. Бунда унинг икки варианты мавжуд. Биринчиси хатолик нормаси баҳосидан келиб чиққан ҳолда танлаш.



1-расм.

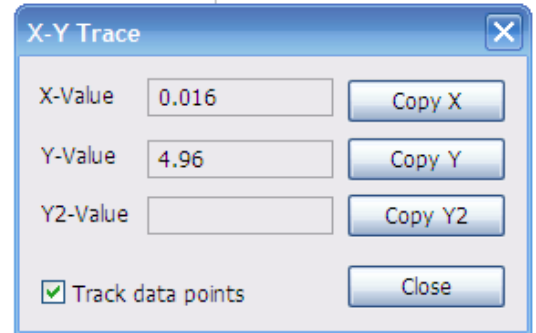
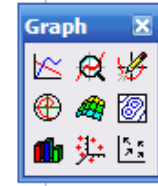
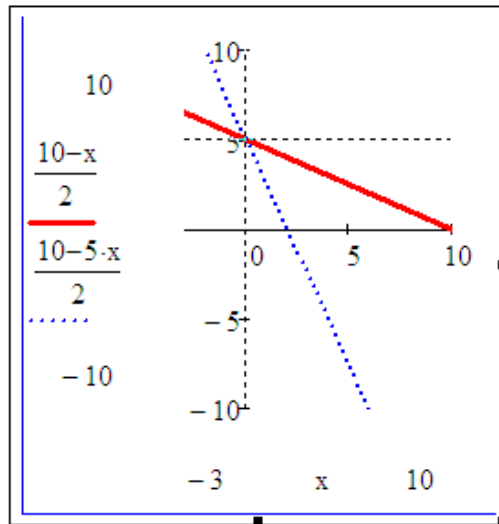
Ушбу расмда λ параметр қиймати сифатида штрих билан кўрсатилган қиймат танланади.

Ёмон шартланган матрицали тенгламалар системасини ечимини тасаввур қилиш учун уларнинг графигига мурожаат қилайлик. 2-расмда яхши шартланган матрицали тенгламалар системасидаги тўғри чизиқлар тасвирланган. 3-расмдан кўриниб турибдики ёмон шартланган матрицали тенгламалар системасида чизиқлар деярли устма-уст тушувчи чизиқлардан иборат бўлади. Матрица элементлари яъни бошланғич берилганларнинг озгина ўзгаришига ечимнинг сезиларли ўзгаришига олиб келади.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

шартланганлик сони

$$\text{lsolve}(A, b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{conde}(A) = 4.25$$



2-расм.

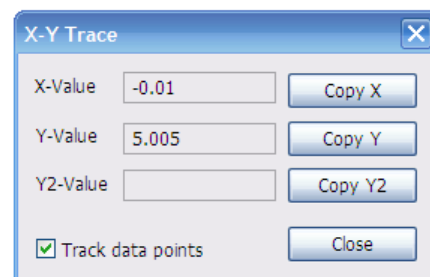
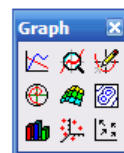
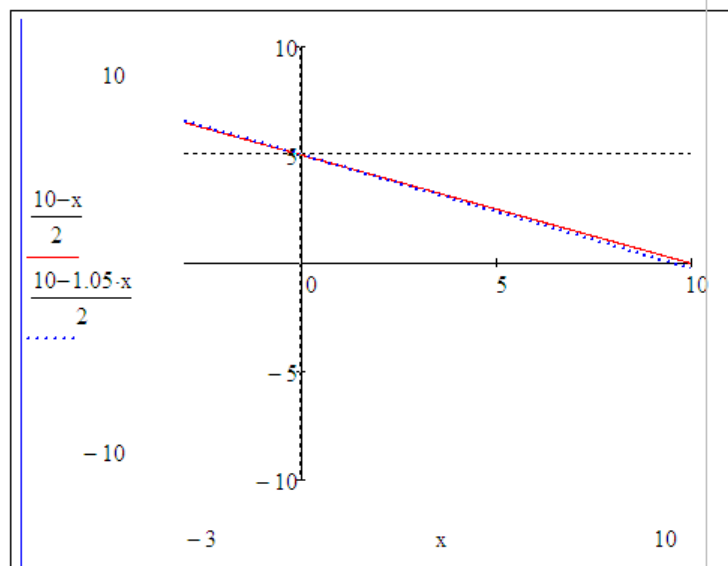
Берилган масалада асосий матрица элементларидан бирини 0,05 га ўзгартирамиз ва системани Гаусс усули билан ечамиз. 3-расмдан кўриб турибдики тенгламалар системасидаги тўғри чизиклар бир-бирига жуда яқин жойлашган. Бу эса тенгламалар системасининг ёмон шартланганлигини кўрсатади.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1.05 & 2 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

шартланганлик сони

$$\text{lsolve}(A, b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{conde}(A) = 101.025$$



3-расм.

2- боб. Оддий дифференциал тенгламани сонли ечиш усуллари

1.Эйлер усули

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), \quad u(0) = u^0 \quad (1)$$

система учун ёки батафсилроқ

$$\frac{du_i(t)}{dt} = f_i(t, u_1, u_2, \dots, u_n), \quad t > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

$$u_i(0) = u_i^{(0)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

Коши масаласини қараймиз. Агар

$$f_i(t, u_1, u_2, \dots, u_n), D = \{t | \leq a, |u_i - u_i^{(0)}| \leq b, i = 1, 2, \dots, n\}$$

ёпиқ соҳада узлуксиз бўлса, унда

$|f_i| \leq M$, $i=1,2,...,n$ шарт ўринли бўлади.

Бундан ташқари агар f_i лар, D - соҳада исталган $(t, u_1', u_2', ..., u_n')$, $(t, u_1'', u_2'', ..., u_n'')$ нуқталар учун u_i аргументлар бўйича, исталган u' ва u'' учун Липшиц шартини қаноатлантирса, яъни

$$|f_i(t, u_1', u_2', ..., u_n') - f_i(t, u_1'', u_2'', ..., u_n'')| \leq L \{|u_1' - u_1''| + |u_2' - u_2''| + ... + |u_n' - u_n''|\}$$

бўлса, унда (2) системанинг $u_1 = u_1(t), u_2 = u_2(t), ..., u_n = u_n(t)$

$|t| \leq t_0 = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ ва (3) - шарталарни қаноатлантирувчи ечими мавжуд бўлиб ягона бўлади.

Коши масаласини сонли ечиш ва уни тадқиқ этишда Коши масаласининг ечими мавжуд ва бирдан-бир ва кераклича силлиқ деб фараз қиламиз.

Коши масаласини ечишнинг икки гуруҳ сонли методлари мавжуд:

Кўп қадамли айирмалли методлар ва Рунге-Кутт методлари. қуйида сонли методларнинг бир қанча мисолларини қараб чиқамиз.

Соддалик учун бирта

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), t > 0, u(0) = u_0 \quad (4)$$

тенгламани қараймиз.

$$\omega_\tau = \{t_i = i\tau, i = 0, 1, 2, ...\}$$

нуқталар тўпламини қараймиз. Буни тўр деб атаймиз. $u(t)$ (4) - тенгламанинг аниқ ечими бўлсин. $y_i = y(t_i)$ (4) - масаланинг тақрибий ечими бўлсин. y_i тақрибий ечим тўр функция деб айтилади, яъни фақат ω_τ тўрда аниқланган функциядир.

Эйлер усули.

(4) - тенглама

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\tau} - f(t_i, y_i) = 0, i = 0, 1, ..., y_0 = u_0 \quad (5)$$

айирмали тенглама билан алмаштирилади. Бу тенгламанинг ечими

$$y_{i+1} = y_i + \tau f(t_i, y_i) = 0, i = 0, 1, \dots, y_0 = u_0$$

рекуррент формула ёрдамида ошкор тарзда топилади.

Тақрибий методлар қаралганда яқинлашиш уларнинг асосий хоссаси ҳисобланади. Тақрибий методлар яқинлашишини турлича таърифлаш мумкин. Чекли айирмалар методида $\tau \rightarrow 0$ даги яқинлашиш тушунчаси кўп тарқалган. Бу қуйидагилардан иборат. t - нуқтани танлаб олиб шундай ω_τ турлар кетма-кетлигини қараймизки

$$\tau \rightarrow 0, t_i = i\tau = t(i \rightarrow \infty)$$

бўлсин.

(5) метод t - нуқтада яқинлашади деб айтилади, агар $\tau \rightarrow 0$ $|y_i - u(t_i)| \rightarrow 0$. (5)- метод $(0,0]$ кесмада яқинлашади деб айтилади, агар бу метод кесманинг ҳар бир нуқтасида яқинлашса.

Методнинг тартиби p -га тенг деб айтилади, агар $p > 0$ учун $\tau \rightarrow 0$ $|y_i - u(t_i)| = O(\tau^p)$

бўлса. Метод хатолиги $z_i = y_i - u(t_i)$ ни қаноатлантирадиган тенгламани ҳосил қиламиз. $y_i = z_i + u_i$ ни (5) - га қўйиб

$$\frac{z_{i+1} - z_i}{\tau} = f(t_i, u_i + z_i) - \frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} \quad (6)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. (6) - нинг ўнг томонини

$$\psi_i^{(1)} + \psi_i^{(2)}$$

йиғинди кўринишда ёзиш мумкин.

Бунда

$$\psi_i^{(1)} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} + f(t_i, u_i) \quad , \quad \psi_i^{(2)} = f(t_i, u_i + z_i) - f(t_i, u_i)$$

$\psi_i^{(1)}$ функция (5) - айирмали тенгламанинг (4) – дастлабки тенглама ечимидаги аппроксимация хатолиги деб айтилади. Аппроксимация хатолиги (5) - айирмали тенглама чап томонига (4) - дастлабки тенглама аниқ ечими $u(t)$

кўйилганда ҳосил бўлган фарқдан иборат эканлиги кўриниб турибди. u_i тақрибий ечим $u(t_i)$ - аниқ ечимга тенг бўлганда хатолик нолга тенг бўлади.

Агар $\tau \rightarrow 0$, $\psi_i^{(1)} \rightarrow 0$ айирмали метод дастлабки дифференциал тенгламани аппроксимациялайди деб айтилади. Агар $\psi_i^{(1)} = o(\tau^p)$ булса айирмали метод дастлабки тенгламани p - тартиб билан аппроксимациялайди деб айтилади. Кейинроқ жуда катта умумий фаразларда аниқлик тартибининг аппроксимация тартибига тенглиги кўрсатилади.

$$\psi_i^{(2)} = f(t_i, u_i + z_i) - f(t_i, u_i)$$

Агар дастлабки тенгламанинг o нг томони $u(t)$ га боғлиқ бўлмаса бу функция айнан нолга тенг бўлади. Умумий ҳолда $\psi_i^{(2)}, z_i$ хатоликка пропорционалдир, чунки

$$\psi_i^{(2)} = \frac{df}{du}(t_i, u_i + \theta \cdot z_i) \cdot z_i, |\theta| \leq 1.$$

Эйлер методининг аппроксимация тартибини Тейлор формуласини қўллаб топиш қийин эмас.

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} = u'(t_i) + o(\tau)$$

бўлганлиги учун (4) га асосан

$$\psi_i^{(1)} = -u'(t_i) + f(t_i, u_i) + o(\tau) = o(\tau) ,$$

яъни, Эйлер методи биринчи тартибли аппроксимацияга эга. Буни ҳосил қилишда $u''(t)$ нинг чегараланганлигини фараз қилинди.

Мисол 1. (Эйлер методи). Соддалиқ учун битта тенглама учун

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u &= f(t, u), t > 0 \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

Коши масаласини қараймиз. Масалан теглама ўнг томони сифатида

$$f(t, u) := -\sin(t) \text{ функцияни ва бошланғич шарт сифатида } u_0 := 0$$

олишимиз мумкин. Одатда сонли метод ердамида Коши масаласини

чекли соҳада ечамиз. Шу сабабли биз ҳам фараз қиламиз теглама

$0 < t < T$ соҳада ечилади. Соддалик учун $T := 3.1$ деб оламиз. Эйлер методида

$[0, T]$ кесмани n бўлакга бўламиз (масалан $n := 12$). Натижада $\tau := \frac{T}{n}$

қадамли $i := 0, 1 \dots n$ тартибга эга булган $t_i := i \cdot \tau$ тугун нуқталар

тўпламини ҳосил қиламиз. Ушбу тугун нуқталар устида дастлабки Коши

масаласининг ечими қуйидаги тартибда топилади. Аввал бошланғич

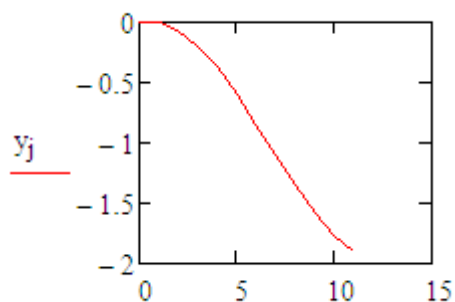
шартдан фойдаланиб $y_0 := u_0$ топилади. Сунгра $j := 0, 1 \dots n - 1$ деб олиб

$$y_{j+1} := y_j + \tau \cdot f(t_j, y_j)$$

рекуррент формулалар орқали

$y_1, y_2 \dots y_n$ лар топилади. Топилган ечим

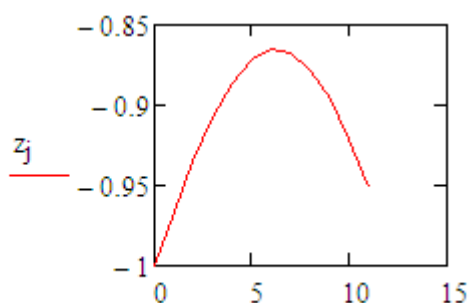
графики қуйидагича



Дастлабки Коши масаласининг аниқ ечими $v(t) := \cos(t)$ бўлишини

кўриш мумкин. Хатолик функцияси эса $z_j := y_j - v(t_j)$ формула ёрдамида

ҳисобланади. Унинг графики қуйидагича булади:

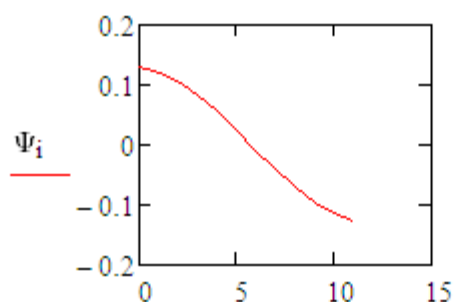


Аппроксимация хатолиги

$$i := 0, 1 \dots n - 1$$

$$\Psi_i := -\frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{\tau} + f(t_i, v(t_i))$$

формула ёрдамида ҳисобланади. Унинг графиги қуйидагича бўлади:



Симметрик схема.

(4) - тенглама

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} - \frac{1}{2} [f(t_i, u_i) + f(t_{i+1}, u_{i+1})] = 0, i = 0, 1, \dots, u_0 = u_0 \quad (7)$$

айирмали схема билан алмаштирилади.

Бу метод Эйлер методига қараганда анча мураккабдир, чунки y_{i+1} қиймат олдин аниқланган u_i қиймат орқали

$$y_{i+1} - \frac{1}{2} \tau \cdot f(t_{i+1}, y_{i+1}) = F,$$

бунда

$$F_i = u_i + \frac{1}{2} \tau \cdot f(t_i, u_i)$$

тенгламани ечиш билан аниқланади. Шу сабабли метод ошкормас деб айтилади. (7) - методнинг (5)- га нисбатан афзаллиги унинг юқори тартибли аниқлигидадир.

$$\psi_i^{(1)} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} + \frac{1}{2} [f(t_i, u_i) + f(t_{i+1}, u_{i+1})]$$

функция учун

$$\psi_i^{(1)} = -u_i' - \frac{\tau}{2}u_i'' + O(\tau^2) + \frac{1}{2}(u_i' + u_{i+2}') = -u_i' - \frac{\tau}{2}u_i'' + \frac{1}{2}[u_i' + u_i' + \tau u_i'' + O(\tau^2)]$$

ўринлидир, яъни $\psi_i^{(1)} = O(\tau^2)$. Шундай қилиб, (7) - метод иккинчи тартибли аппроксимацияга эга. Келтирилган мисоллар айирмали методлар деб аталувчи методлардан энг соддаларидирлар, улар яна айирмали схемалар ҳам деб айтилади.

Рунге- Кутт методининг айирмали методлардан фарқи шундаки, тенгламаларнинг ўнг томони $f(t,u)$ қийматлари нафақат тўр нуқталарида, балки оралиқ нуқталарда ҳам ҳисобланиб топилади

2. Иккинчи тартибли Рунге-Кутта методи.

Фараз қиламиз, дастлабки y_i ечим $t=t_i$ лаҳзада аниқланган бўлсин.

$y_{i+1} = y(t_{i+1})$ қийматни топиш учун энг аввал

$$\frac{y_{i+\frac{1}{2}} - y_i}{0,5\tau} = f(t_i, u_i) \quad (8)$$

Эйлер схемаси бўйича $y_{i+\frac{1}{2}}$ оралиқ қийматни топиб, ундан сўнг

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\tau} = f(t_i + 0,5\tau, y_{i+\frac{1}{2}}) \quad (9)$$

схемадан y_{i+1} ни ошкор тарзда топамиз.

Хатоликни тадқиқ этиш учун $y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + 0,5\tau f(t_i, u_i)$ - ни (9)-га қўйиб

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\tau} - f(t_i + 0,5\tau, y_i + 0,5\tau, f(t_i, u_i)) = 0 \quad (10)$$

айирмали тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламанинг хатолиги

$$\psi_i^1 = -\frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} - f(t_i + 0,5\tau, u_i + 0,5\tau, f(t_i, u_i)) \quad (11)$$

кўринишда ёзилади.

Тейлор формуласига асосан

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} = \frac{u_i + u_i'\tau + \frac{1}{2}u_i''\tau^2 + O(\tau^3) - u_i}{\tau} = u_i' + \frac{1}{2}u_i''\tau + O(\tau^2)$$

ва

$$f(t_i + 0,5\tau, u_i + 0,5\tau f(t_i, u_i)) = f(t_i, u_i) + 0,5\tau \frac{\partial f}{\partial t}(t_i, u_i) + 0,5\tau f(t_i, u_i) \frac{\partial f}{\partial u}(t_i, u_i) + O(\tau^2) =$$

$$f(t_i, u_i) + 0,5\tau \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t_i, u_i) + f(t_i, u_i) \frac{\partial f}{\partial u}(t_i, u_i) \right] + O(\tau^2) = f(t_i, u_i) + 0,5\tau u_i'' + O(\tau^2),$$

чунки, (4) га асосан

$$u_i'' = \frac{\partial f}{\partial t}(t_i, u_i) + f(t_i, u_i) \frac{\partial f}{\partial u}(t_i, u_i).$$

Булардан (10) - нинг иккинчи тартибли аппроксимация хатолигига эга эканлиги келиб чиқади, $\psi_i^{(1)} = O(\tau^2)$ ва (7) - дан фарқли ошкор методдир. (10) - методни қўллаш икки босқичдан иборат, шунинг учун бу метод предикатор-корректор деб айтилади. (10) - метод бошқача амалга оширилиши мумкин.

Энг аввал кетма-кет

$$k_1 = f(t_i, y_i) \quad , \quad k_2 = f(t_i + 0,5\tau, y_i + 0,5\tau k_1)$$

хисобланади, ундан кейин y_{i+1} , $(y_{i+1} - y_i)/\tau = k_2$ тенгламадан топилади. (10)-методнинг бундай қўлланилиши Рунге-Кутт методи деб айтилади.

3. Ёмон шартланган оддий дифференциал тенгламаларга мисоллар

Энди оддий дифференциал тенгламаларни ечиш усулларини тадқиқ қиламиз. Бунинг учун дастлаб қуйидаги мисолларни қараймиз.

Иккита тенгламадан иборат дифференциал тенгламалар системасини кўриб чиқамиз: (бунда $D = \frac{d}{dt}$)

$$(1,03D^2 + 2D + 1)x_1(t) + Dx_2(t) = 0; \quad (1)$$

$$Dx_1(t) + x_2(t) = 0, \quad (2)$$

Фараз қилайлик номаълум $x_1(t)$ функциянинг $t = 1$ даги қийматини топиш талаб қилинсин. Ушбу тенгламалар системасининг характеристик тенгламаси қуйидаги дитерменантга тенг:

$$\det = \begin{vmatrix} 1,03\lambda^2 + 2\lambda + 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 0,03\lambda^2 + 2\lambda + 1 \quad (3)$$

Унинг илдизлари: $\lambda_1 = -0,5038$, $\lambda_2 = -66,1629$ (вергулдан кейин тўртта ишончли рақам) га тенг. (1)-(2) системанинг умумий ечими

$$x_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (4)$$

бунда C_1 ва C_2 – ўзгармас сонлар бошланғич шартлардан аниқланади. Фараз қилайлик улар $C_1 = 1$; $C_2 = 1$ бўлсин. (4) формуладан фойдаланиб, ихтиёрий t учун $x_1(t)$ ни топиш мумкин. Хусусан $t = 1$ бўлган $x_1(1) = 0,6042$.

Энди қуйидаги саволни қўямиз: агар (1)–(2) тенгламалар системасидаги коэффицентлар яъни (1) тенгламадаги D^2x_1 ва Dx_2 олдидаги коэффицентлар ва (2) тенгламадаги Dx_1 олдидаги коэффицентлар бирор юздан бир аниқликда маълум бўлса, масаланинг ечими турғун бўладими? Бу саволга жавоб бериш учун

$$[1,03(1 + \varepsilon_1)D^2 + 2D + 1]x_1 + (1 + \varepsilon_2)Dx_2 = 0; \quad (5)$$

$$(1 + \varepsilon_3)Dx_1 + x_2 = 0 \quad (6)$$

тенгламаларнинг ечимлар оиласини топиш лозим. Бунда ε_1 ; ε_2 ; ε_3 , қуйидаги тенгсизликларни қаноатлантиради:

$$-0,01 \leq \varepsilon_1 \leq +0,01; \quad (7)$$

$$-0,01 \leq \varepsilon_2 \leq +0,01; \quad (8)$$

$$-0,01 \leq \varepsilon_3 \leq +0,01. \quad (9)$$

Агар $\varepsilon_1 = -0,01$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$, бўлса, (5)–(6) системанинг характеристик тенгламаси қуйидагича:

$$\det = \begin{vmatrix} 1,0197\lambda^2 + 2\lambda + 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 0,0197\lambda^2 + 2\lambda + 1 \quad (10)$$

унинг илдизлари $\lambda_1 = -0,5025$, $\lambda_2 = -101,0204$ бўлиб, $x_1(1)$ нинг дастлабки берилганларда, яъни $C_1 = C_2 = 1$ да $x_1(1) = 0,6050$ бўлади. Бу эса $\varepsilon_1 = 0$ даги ҳолдан 0,13% га катта.

Агар $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = +0,01$ бўлса, у ҳолда (5)–(6) системанинг характеристик тенгламаси:

$$\det = \begin{vmatrix} 1,03(1+0,01)\lambda^2 + 2\lambda + 1 & \lambda(1+0,01) \\ \lambda(1+0,01) & 1 \end{vmatrix} = 0,0202\lambda^2 + 2\lambda + 1 \quad (11)$$

бўлиб, унинг илдизлари $\lambda_1 = -0,50351$, $\lambda_2 = -98,5074$ бўлиб, $x_1(1) = 0,6044$ бўлади ва у $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ бўлгандаги ҳолдан 0,03% га катта.

Бу мисол коэффицентларнинг озгина ўзгаришига ечимнинг озгина ўзгариши мос келадиган мисол эди. Аммо ҳамма вақт ҳам бундай бўлавермайди.

Масалан, $\varepsilon_1 = -0,01$, а $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = +0,01$ бўлганда (5)–(6) система характеристик кўпҳади

$$\det = -0,0004\lambda^2 + 2\lambda + 1 \quad (12)$$

бўлади ва унинг илдизи $\lambda_1 = -0,5$, $\lambda_2 = +5000,5$. Шунинг учун $x_1(1)$ нинг қиймати жуда катта: $x_1(1) > e^{5000}$.

Бундан келиб чиқадики (7)–(9) тенгсизликлар билан аниқланувчи коэффицентларнинг аниқмаслиги сабабли (1)–(2) система билан тавсифланадиган объектнинг математик модели объект ҳолати ҳақида тўлиқ маълумот бера олмайди.

Бошланғич берилганлардаги хатоликлар (1)–(2) масаланинг $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ бўлгандаги ҳолатидан фарқ қилувчи $x_1(t)$ ечимнинг қисқа вақт давомида жуда тез ўсишига олиб келади.

Энди юқоридаги масалани MathCAD тизимида ечамиз. Бунинг учун тизимнинг ички функцияси Odesolve функциясидан фойдаланамиз. Функциянинг умумий кўриниши қуйидагича:

Odesolve([vector],x,b,[step])

бу ерда [vector] – изланаётган номаълум функцияларнинг номи, x– ўзгарувчининг номи, b– ечим изланаётган соҳанинг охириг чегараси, [step]– кадам катталиги.

MathCAD тизимида мазкур оддий дифференциал тенгламалар системасини сонли ечиш учун дастлаб системани нормал кўринишга келтириб оламиз. Бунинг учун (2) тенгламани (1) тенгламага қўйиб қуйидагини топамиз:

$$0.3Dx_2(t) = 2x_2(t) + x_1(t)$$

Тенгламани ҳар икки томонини 0.3 га бўлиб

$$Dx_2(t) = -\frac{20}{3}x_2(t) + \frac{10}{3}x_1(t) \quad (13)$$

тенгламани топамиз. Энди (2) ва (13) тенгламалар системасининг $x_1(0) = 2$ ва $x_2(0) = 1$ шартларни каноатлантирувчи сонли ечимини топамиз.

$$T1 := 10$$

Given

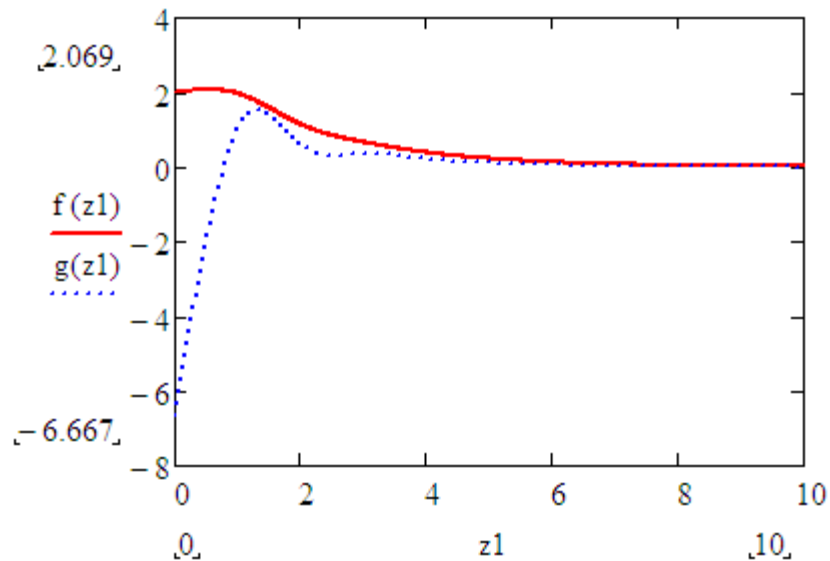
$$\frac{d}{dt}x_2(t) = -\frac{20}{3}x_2(t) + \frac{10}{3}x_1(t) \quad x_1(0) = 2$$

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = -x_2(t) \quad x_2(0) = 1$$

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} := \text{Odesolve} \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, t, T1, 10 \right]$$

$$z1 := 0, \frac{T1}{1000} .. T1$$

Масаланинг тақрибий ечимининг графиги қуйидаги расмда тасвирланган:



бунда $f(z_1)$, биринчи номаълум $x_1(t)$ функция, $g(z_1)$ эса иккинчи номаълум $x_2(t)$ функция.

Масаланинг турғунлигини ўрганиш учун (5), (6) оддий дифференциал тенгламалар системасини тадқиқ қиламиз. Бу тенгламалар системасини ҳам дастлаб нормал шаклга келтирамиз:

$$Dx_1 = \frac{1}{1+\varepsilon_3}x_2 \quad (14)$$

$$\left(-\frac{1,03(1+\varepsilon_1)}{(1+\varepsilon_2)} + (1+\varepsilon_2)\right) Dx_2 = \frac{2}{(1+\varepsilon_3)}x_2 - x_1 \quad (15)$$

(15) тенгламани ҳар икки томонини $\left(-\frac{1,03(1+\varepsilon_1)}{(1+\varepsilon_2)} + (1+\varepsilon_2)\right)$ кўпайтувчига бўлиб, нормал кўринишдаги оддий дифференциал тенгламалар системасини оламиз ва уни MathCAD тизимида ечамиз.

$$\varepsilon_1 := 0.1 \quad \varepsilon_2 := 0.1 \quad \varepsilon_3 := 0.1$$

$$T1 := 10$$

Given

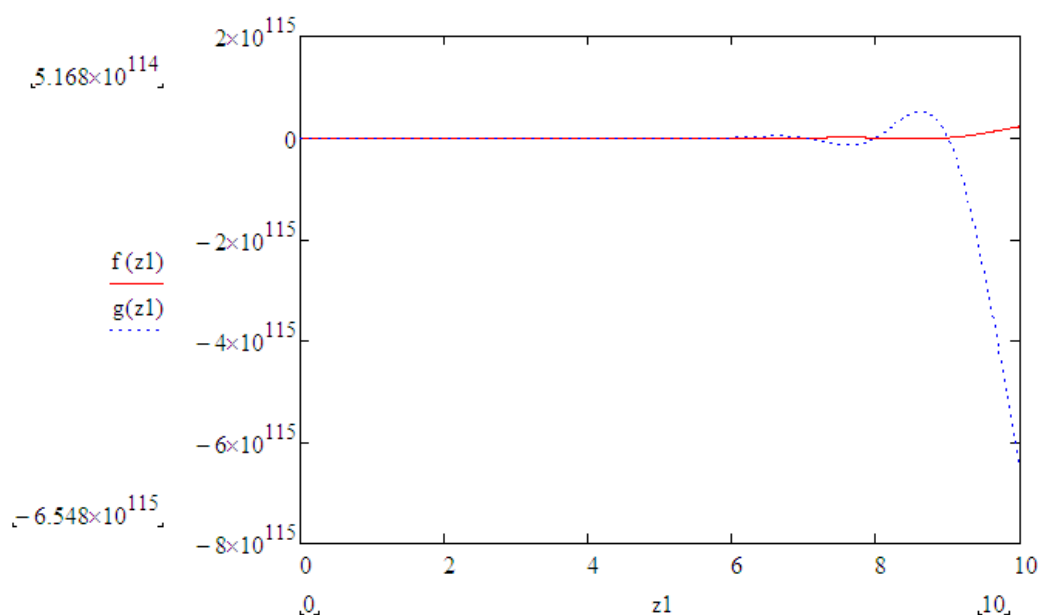
$$\frac{d}{dt}x_2(t) = \frac{\frac{2}{1+\epsilon_3}}{\frac{-1.03 \cdot (1+\epsilon_1) + (1+\epsilon_2)^2}{1+\epsilon_2}} \cdot x_2(t) - \frac{1}{\frac{-1.03 \cdot (1+\epsilon_1) + (1+\epsilon_2)^2}{1+\epsilon_2}} \cdot x_1(t)$$

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = \frac{-1}{1+\epsilon_3} \cdot x_2(t) \quad \begin{matrix} x_2(0) = 2 \\ x_1(0) = 1 \end{matrix}$$

$$z1 := 0, \frac{T1}{1 \times 10^3} .. T1$$

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} := \text{Odesolve} \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, t, T1, 10 \right]$$

Энди ушбу ечимнинг графигини чизамиз:



бу ерда $f(z1)$, биринчи номаълум $x_1(t)$ функция, $g(z1)$ эса иккинчи номаълум $x_2(t)$ функция.

Графиклардан кўриниб турибдики (2), (13) ҳамда (14),(15) дифференциал тенгламаларга қўйилган қўйилган Коши масаласининг ечими бир–биридан катта фарқ қилади. Лекин ушбу системаларнинг коэффицентлари бир–биридан жуда ҳам кичик миқдорга фарқ қилади. Бу эса қаралаётган масаланинг ёмон шартланганлигини кўрсатади.

Хулоса

Ушбу битирув ишини бажариш давомида ҳисоблаш усуллари хатоликлари, масаланинг шартланганлик сони ва унинг масала ечимига таъсирини ўрганиб чиқдим. Матрица ва вектор нормалари тушунчаси билан танишиб, уларни ҳисоблаш усуллариини ўргандим.

Чизиқли тенгламалар системасини ечиш усуллариини ўрганган ҳолда асосий матрица шартланганлик сонини ҳисоблашни ва ечимнинг бошланғич берилганларга боғлиқлигини текширдим. Шу билан бирга тенгламалар системасидаги тенгламаларни графикларини чизиб, ёмон шартланган матрицали чизиқли тенгламалар системасида графиклар бир–бирига жуда яқин жойлашганлигини ва тенгламалар системаси коэффициентларининг озгина ўзгариши ечимга катта таъсир қилишлигини аниқладим. Регуляризация усулидан фойдаланиб тенгламалар системасини ечдим.

Оддий дифференциал тенгламалар системасига қўйилган Коши масаласини сонли ечдим. Бунда тақрибий ечиш усуллариини Эйлер, Рунге–Кутта усуллари ва математик пакетлардан MathCAD ва MAPLE да тизимнинг ички функцияларидан фойдаланиб масалани сонли ва аналитик ечдим. Ечим графикларини чиздим ва хатоликларни баҳоладим.

Битирув малакавий битирув ишини бажариш давомида масалани ечиш мобайнида бажариладиган эквивалент алмаштиришлар ҳамма вақт ҳам ўринли бўлмаслигини, яъни ёмон шартланган масалани ёмон шартланмаган масалага ва аксинча шартланганлик сони кичик бўлган масалани шартланганлик сони катта бўлган масала олиб келишига ишонч ҳосил қилдик.

Малакавий битирув ишини бажаришда менга ҳисоблаш усуллари, математик физика тенгламалари, оддий дифференциал тенгламалар, сонли усуллар ва программалаштириш курсларидан олган билимларим ёрдам берди.

Адабиётлар

1. Исроилов М.И. Ҳисоблаш методлари. I, II қисм. Тошкент: Ўқитувчи, 2000, 2008.
2. Алоев Р.Д., Худойбергганов М.Ў. Ҳисоблаш усуллари курсидан лаборатория машғулоти тари тўплами. ЎзМУ. Ўқув қўлланма. 2008 й. 110б.
3. Н.М. Андрушевский. Анализ устойчивости решений систем линейных алгебраических уравнений. Учебное пособие. – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ имени М.В. Ломоносова. Пресс, 2008. – 71 с.
4. Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. – М.: Мир, 1969.
5. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. -М., Наука. 1989.
6. Бахвалов Н.С. Численные методы. -М., Наука. 1987.
7. Ширапов Д.Ш. Численные методы линейной алгебры: Учебное пособие. – Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2003. - 96 с.
8. Сборник задач по методам вычислений. Под редакцией Монастырного П.И. Минск, Выща школа. 1983.

Илова