

FUNKSIYANING MONOTONLIK XOSSASLARI VA ULAR YORDAMIDA AYRIM AMALIY MASALARNI IFODALOVCHI TENGSIZLIKLARNI YECHISH.

U.Y.Akbarov-f.-m.f.n.;

M.O.Umarova-magistrant, Qo'qon DPI

Bizga ma'lumki, funksiya tushunchasi va uning asosiy xossalari, funksiyaning turlari va berilish usullari umumta'lim maktablari o'quvchilari ongida yuqori sinfdan boshlab shakllantirilib boriladi. Dastlab funksiya tushunchasi sodda ko'rinishda, kundalik hayotimizda uchrab turadigan misollar orqali beriladi. Shundan so'ng darslarda turli misol va masalalar yechib funksiya tushunchasi mustahkamlanadi.

Masalan: Poyezd Toshkentdan Samarqandga tomon 60km/soat tezlik bilan harakat qilmoqda. U jo'nagandan t soat keyin Toshkentdan qancha masofada bo'ladi?

Yechish. Agar izlanayotgan masofa S harfi bilan belgilansa, javobni bunday formula bilan yozish mumkin:

$$S = 60t. \quad (1)$$

Poyezdning harakati davomida s yo'l va t vaqt o'zgarib boradi. Shuning uchun ular o'zgaruvchi kattalik (miqdor)lar yoki o'zgaruvchilar deyiladi. Bunda s va t ixtiyoriy ravishda emas, balki (1) tekis harakat qonuniga bo'ysingan holda o'zgarishi muhim ahamiyatga ega. Bu qonunga muvofiq, t vaqtning har bir qiymatiga s yo'lning aniq bir qiymati mos keladi (mos qo'yiladi). Masalan, $t=2$ bo'lganda (1) formula bo'yicha quyidagini hosil qilamiz:

$$S = 120$$

Shunday qilib, (1) formula s yo'lni t vaqtning berilgan qiymati bo'yicha hisoblash qoidasini belgilaydi. Bu masalada t musbat va poyezdning Toshkentdan Samarqandgacha harakat vaqtidan katta bo'lishi mumkin emas.

Qaralgan misolda bir o'zgaruvchili miqdorning oldindan berilgan qiymati bo'yicha ikkinchisining qiymatini topishga imkon beruvchi qoidalar ko'rsatildi.

Agar sonlarning biror to'plamidan olingan x ning har bir qiymatiga y son mos keltirilgan bo'lsa, u holda shu to'plamda $y(x)$ funksiya berilgan deyiladi. Bunda x erкли o'zgaruvchi yoki argument, y esa erksiz o'zgaruvchi yoki funksiya deyiladi.

Ta'rif. $f(x)$ funksiya $(a;b)$ oraliqda aniqlangan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $x_1 \leq x_2$ tengsizlikni qanoatlantiradigan $x_1, x_2 \in (a,b)$ nuqtalar uchun $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$) tengsizlik bajarilsa, u holda f funksiya (a,b) oraliqda o'suvchi (kamayuvchi) funksiya funksiya deyiladi, (a,b) oraliq esa monotonlik oralig'i deb yuritiladi.

Ta'rif. $f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda aniqlangan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $x_1 < x_2$ tengsizlikni qanoatlantiradigan $x_1, x_2 \in (a,b)$ nuqtalar uchun $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$) tengsizlik bajarilsa, u holda f funksiya (a,b) oraliqda qat'iy o'suvchi (kamayuvchi) funksiya deyiladi.

Teorema. $f(x)$ funksiya $(a;b)$ oraliqda aniqlangan va differentsiallanuvchi bo'lsin. $f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lishi uchun shu intervalda $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) tengsizlik bajarilishi zarur va yetarli.

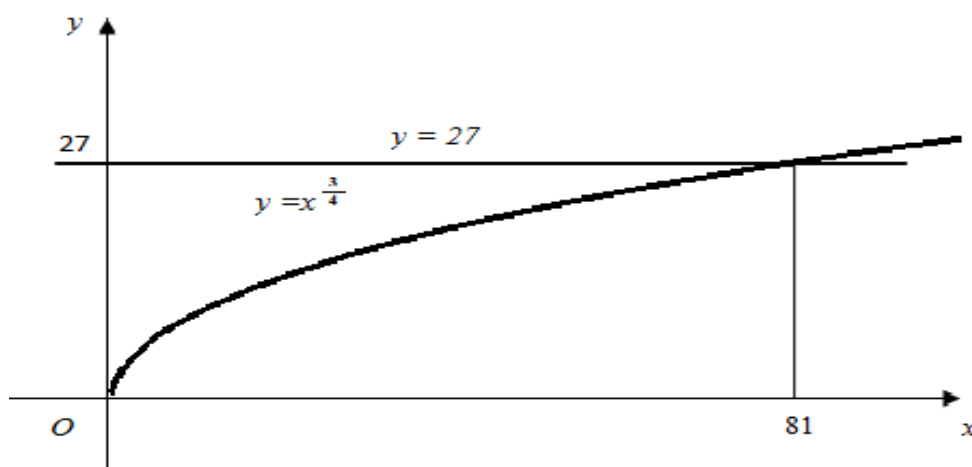
Agar $(a;b)$ intervalda $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) tengsizlik bajarilsa, u holda $f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda qat'iy o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.

Quyida biz funksiyaning monotonlik xossalari yordamida ayrim amaliy masalalarni ko'ramiz.

1-masala. $x^{\frac{5}{4}} = 27$ tenglamani yeching.

Yechish. $y = x^{\frac{5}{4}}$ funksiya $x \geq 0$ da aniqlangan. Shuning uchun berilgan tenglama faqat nomanfiy ildizlarga ega bo'lishi mumkin. Bunday ildizlardan biri: $x = 27^{\frac{4}{5}} = (\sqrt[5]{3^3})^4 = 3^4 = 81$. Tenglamaning boshqa ildizlari yo'q, chunki $y = x^{\frac{5}{4}}$

funksiya $x \geq 0$ bo'lganda o'sadi va shuning uchun, agar $x > 81$ bo'lsa, u holda $x^{\frac{3}{4}} > 27$, agar $x < 81$ bo'lsa, $x^{\frac{3}{4}} < 27$ bo'ladi. (1-rasm).

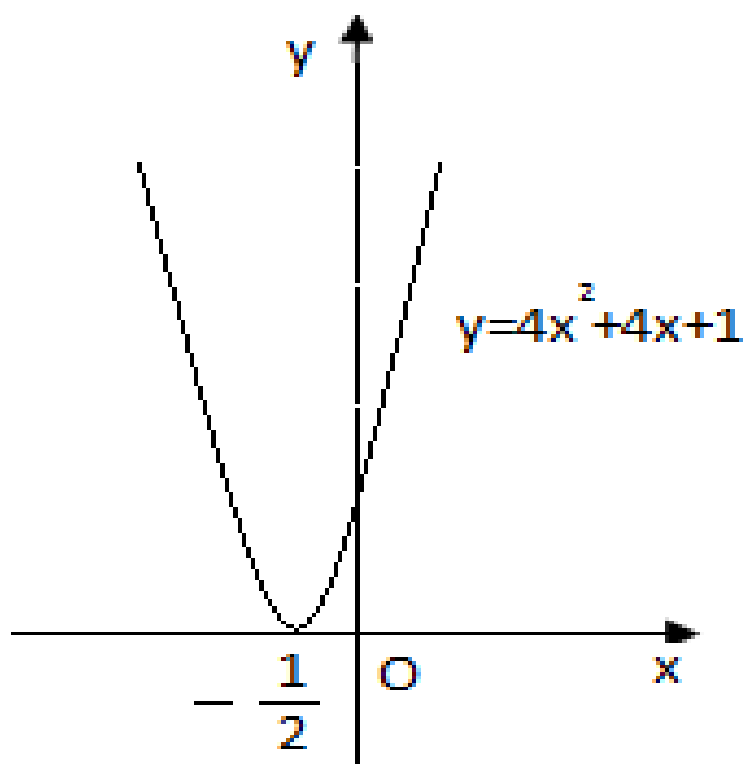


(1-rasm)

2-masala. Tengsizlikni yeching:

$$4x^2 + 4x + 1 > 0$$

Yechish. $y = 4x^2 + 4x + 1$ funksiya grafigini chizamiz. Bu parabolaning tarmoqlari yuqoriga yo'nalgan. $4x^2 + 4x + 1 = 0$ tenglama bitta $x = -\frac{1}{2}$ ildizga ega, shuning uchun parabola Ox o'qiga $(-\frac{1}{2}; 0)$ nuqtada urinadi. Bu funksiyaning grafigi 2-rasmda tasvirlangan. Berilgan tengsizlikni yechish uchun x ning qanday qiymatlarda funksiyaning qiymatlari musbat bo'lishini aniqlash kerak. Shunday qilib, $4x^2 + 4x + 1 > 0$ tengsizlikni x ning parabolaning nuqtalari Ox o'qidan yuqorida yotuvchi qiymatlari qanoatlantiradi. 2-rasmdan ko'rinib turibdiki, bunday qiymatlar $x = -0.5$ dan boshqa barcha haqiqiy sonlar bo'ladi. J: $x \neq -0.5$.



2-rasm.

3-masala. e^π va π^e . sonlarni taqqoslang.

Yechilishi. $f: [e; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ funksiyani qaraymiz. Uning hosilasi barcha x , $x \in (e; +\infty)$ larda $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$ manfiy qiymat qabul qiladi va f funksiya $[e; +\infty)$ da uzluksiz, shunday qilib, f $[e; +\infty)$ da qat'iy kamayadi. Bu yerdan $e < \pi$ ekanligini hisobga olib

$$f(e) > f(\pi) \Rightarrow \frac{\ln e}{e} > \frac{\ln \pi}{\pi} \Rightarrow \pi \ln e > e \ln \pi$$

ni olamiz. Demak, $e^\pi > \pi^e$.

4-masala. $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, $n=1, 2$, sonli ketma-ketlikni chegaralanganlikka tekshiring.

Yechilishi. Dastlab

$$\ln(1+x) \leq x \quad (x \geq 0) \quad (1)$$

tengsizlikni isbotlaymiz. Buning uchun $f: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = x - \ln(1+x)$ funksiyani qaraymiz. f funksiya aniqlanish sohasida uzluksiz va barcha $x, x \in (0; +\infty)$ lar uchun $f'(x) = \frac{x}{x+1}$ tenglik o'rinli, bu yerdan $f'(x) > 0$, $x, x \in (0; +\infty)$ ekanligi kelib chiqadi.

Shunday qilib f funksiya $D(f)$ aniqlanish sohasida qa'tiy o'sadi va demak, $f(x) \geq f(0)$. ($x \geq 0$) dan (1) tengsizlikning to'g'riligi kelib chiqadi.

(1) tengsizlikdan $x = \frac{1}{n}$ deb olib ($n=1,2,\dots$),

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \quad (n=1,2,\dots) \quad (2)$$

ni hosil qilamiz.

(2) tengsizlikdan

$$\ln 2 - \ln 1 \leq 1, \ln 3 - \ln 2 \leq \frac{1}{2}, \dots, \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n} \quad (3)$$

kelib chiqadi. (3) tengsizliklarni hadma-had qo'shib,

$$\ln(n+1) \leq 1 + \dots + \frac{1}{n}$$

tengsizlikni olamiz.

Demak, $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, $n=1,2,\dots$ sonli ketma-ketlik chegaralanmagan.

Tengsizliklarni funksiyaning monotonlik xossalaridan foydalanib isbotlash bugungi kunda katta ahamiyatga ega. Yechilgan amaliy masalalar hayotimizning turli sohalarida, fan va texnikaning rivojida keng qo'llanilmoqda.

Adabiyotlar.

1. Mirzaahmedov M., Rahimqoriyev A. Matematika 7-sinf. Toshkent. 2007 yil.
2. Alimov Sh., Xolmuhammedov O., Mirzaahmedov M., Algebra 8-sinf. Toshkent. 2010-yil.
3. Ismoilov Sh., Qo'chqorov A., Abdurahmonov B., Tengsizliklar-2. Isbotlashning zamonaviy usullari. Toshkent, 2008 yil, 53 bet.

