ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ХАЛҚ ТАЪЛИМИ ВАЗИРЛИГИ

МУҚИМИЙ НОМИДАГИ ҚЎҚОН ДАВЛАТ ПЕДАГОГИКА ИНСТИТУТИ

ИЛМ САРИ – ИЛК ҚАДАМ

Профессор-ўқитувчилар, иқтидорли талабалар, магистрантлар, катта илмий ходимлар-изланувчилар ва мустақил изланувчиларнинг илмий-услубий мақолалари

ТЎПЛАМИ

Тошкент – 2014

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА И О МЕТОДЕ ИХ РЕШЕНИЯ

Мамажонов М., КГПИ; Х.М.Шерматова, ФерГУ;
М.Мамаюсупова, магистрант КГПИ

В настоящей работе ставится и изучается ряд краевых задач для одного класса уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа в вогнутой шестиугольной области, которые воспользуются при изучении задач математической физики в магистратуре. Рассмотрим в области D уравнение $\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)(Lu)=0$, (1)

где $a,b,c\in R$, $Lu\equiv\begin{cases}L_1u\equiv u_{xx}-u_y\ \text{в}\ D_1,\\ L_iu\equiv u_{xx}-u_{yy}\ \text{в}\ D_i\ (i=2,3),\end{cases}$

$D=D_1\cup D_2\cup D_3\cup J_1\cup J_2$, $\quad D_1=\{(x,y)\in R^2: 0<x<1,\ 0<y\le 1\}$,

$D_2=\{(x,y)\in R^2: 0<x<1,\ x-1<y<0\}$, $\quad AB=\{(x,y)\in R^2: y=0,\ 0<x<1\}$,

$D_3=\{(x,y)\in R^2: 0<y<1,\ y-1<x<0\}$, $\quad AA_0=\{(x,y)\in R^2: x=0,\ 0<y<1\}$,

то есть $D-$ вогнутая шестиугольная область с вершинами в точках $A(0,0)$, $C(0,-1)$, $B(1,0)$, $B_0(1,1)$, $A_0(0,1)$, $D(-1,0)$.

Области D_2 и D_3 разделим по две части каждой с помощью отрезком

$E_1E_2=\left\{(x,y)\in R^2: y=-x,\ -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right\}$. Тогда эти области можно записать в виде $D_2=D_{21}\cup D_{22}\cup AE_1$, $D_3=D_{31}\cup D_{32}\cup AE_2$, где

$$D_{21}=\left\{(x,y)\in R^2:-\frac{1}{2}<y<0,\ -y<x<y+1\right\},\ D_{22}=\left\{(x,y)\in R^2:0<x<\frac{1}{2},\ x-1<y<-x\right\},$$

$$D_{31}=\left\{(x,y)\in R^2:0<y<\frac{1}{2},\ y-1<x<-y\right\},\ AE_1=\left\{(x,y)\in R^2:0<x<\frac{1}{2},\ y=-x\right\},$$

$$D_{32}=\left\{(x,y)\in R^2:-\frac{1}{2}<x<0,\ -x<y<x+1\right\},\ AE_2=\left\{(x,y)\in R^2:0<y<\frac{1}{2},\ x=-y\right\},$$

а $E_1\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $E_2\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Теперь переходим к постановке краевой задачи для уравнения (1). Перед тем, как приступить к постановке задачи запишем все краевые условия и условия склеивания на линиях изменения типа, которые воспользуются при постановке задачи.

Краевые условия:

$$u(1,y)=\varphi_1(y),\quad 0\le y\le 1, \tag{2}$$

$$u_x(1,y)=\varphi_2(y),\quad 0\le y\le 1, \tag{3}$$

$$u\big|_{BC}=\psi_1(x),\ 0\le x\le 1, \tag{4}$$

$$u\big|_{BE_1}=\psi_1(x),\ \frac{1}{2}\le x\le 1, \tag{4'}$$

$$u(x,0)=f_1(x),\quad -1\le x\le 0, \tag{5}$$

$$u_y(x,0)=f_2(x),\quad -1\le x\le 0, \tag{6}$$

$$u_{yy}(x,0)=f_3(x),\quad -1\le x\le 0, \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{BC}=\psi_2(x),\ 0\le x\le 1, \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{A_0D}=\psi_4(y),\ 0\le y\le 1, \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{E_2D}=\psi_4(y),\ 0\le y\le 1, \tag{9'}$$

$$u(0,y)=\varphi_3(y),\quad -1\le y\le 0, \tag{10}$$

$$u_x(0,y)=\varphi_4(y),\quad -1\le y\le 0, \tag{11}$$

$$u_{xx}(0,y)=\varphi_5(y),\quad -\frac{b}{a}\le y\le 0, \tag{12}$$

$$u_{xx}(0,y)=\varphi_5(y),\quad -1\le y\le 0. \tag{12'}$$

Условия склеивания на линиях изменения типа:

$$u(x,-0)=u(x,+0),\ 0\le x\le 1, \tag{13}$$

$$u_y(x,-0)=u_y(x,+0),\ 0\le x\le 1, \tag{14}$$

$$u_{yy}(x,-0)=u_{yy}(x,+0),\ 0\le x\le 1, \tag{15}$$

$$u(-0,y)=u(+0,y),\ 0\le y\le 1, \tag{16}$$

$$u_x(-0,y)=u_x(+0,y),\ 0\le y\le 1, \tag{17}$$

$$u_{xx}(-0,y)=u_{xx}(+0,y),\ 0\le y\le 1, \tag{18}$$

где $\varphi_i\ (i=\overline{1,5}),\ \psi_j\ (j=1,2,4),\ f_k\ (k=1,2,3)$ – заданные достаточно гладкие функции, n – внутренняя нормаль к прямым $x-y=1$ и $x-y=-1$.
В зависимости от коэффициентов a и b, т.е. от углового коэффициента $\gamma=\frac{b}{a}$ характеристик $bx-ay=const$ оператора $a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c$ уравнения (1) ставятся различные краевые задачи. Приступим к постановке краевой задачи для уравнения (1).

Задача 1. Требуется найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$;

2) удовлетворяет уравнению (1) в каждой из областей $D_i\ (i=1,2,3)$;

3) удовлетворяет следующим краевым условиям и непрерывным условиям склеивания на линии изменения типа:

Случаи	Краевые условия	Условия склеивания
1°. $a=0, b\neq 0\ (\gamma=\infty)$	(2), (4), (5), (6), (8), (9)	(13) – (17)
2°. $a\neq 0, b=0\ (\gamma=0)$	(2), (4), (5), (6), (8), (9)	(13), (14), (16) – (18)
3°. $0<\gamma<1$	(2), (4'), (5) – (9), (10), (12)	(13) – (18)
4°. $\gamma=1$	(2), (5) – (7), (10), (11), (12')	(13) – (18)
5°. $1<\gamma<+\infty$	(2), (4'), (5) – (8), (10), (12')	(13) – (18)
6°. $-\infty<\gamma<-1$	(2) – (4), (5), (6), (8), (9) или (2) – (4), (5), (6), (8), (9')	(13) – (17) или (13) – (18)
7°. $-1\leq\gamma<0$	(2) – (4), (5), (6), (8), (9)	(13) – (17)

Мы здесь будем указать идею решения поставленной задачи лишь в случае 2°. В этом случае уравнение (1) имеет вид: $\left(a\frac{\partial}{\partial x}+c\right)(Lu)=0$. Общее решение этошо уравнения имеет вид: $v=\omega(y)\exp\left(-\frac{c}{a}x\right)$. Тогда получим

$Lu_i=\omega(y)\exp\left(-\frac{c}{a}x\right)$, где введено обозначение

$u(x,y)=u_i(x,y),\ (x,y)\in D_i\ (i=1,2,3)$. (19)

Последнее уравнение можно записать в виде

$u_{1xx}-u_{1y}=\omega_1(y)\exp\left(-\frac{c}{a}x\right)$ (20), $u_{ixx}-u_{iyy}=\omega_i(y)\exp\left(-\frac{c}{a}x\right)\ (i=2,3)$, (21) где $\omega_i(y)$ $(i=1,2,3)$ – произвольные достаточно гладкие функции, подлежащие определению. В уравнении (21) $(i=2)$ введем обозначения $u_2(x,y)=u_{2k}(x,y)$, $\omega_2(y)=\omega_{2k}(y)$ при $(x,y)\in D_{2k}$ $(k=1,2)$. Тогда уравнение (21) имеет вид $u_{2kxx}-u_{2kyy}=\omega_{2k}(y)\exp\left(-\frac{c}{a}x\right)$ $(k=1,2)$. (22)

После обозначения (19) условия склеивания (13) – (18) переходят к виду

$$u_2(x,0)=u_1(x,+0)=\tau_1(x),\ 0\le x\le 1, \tag{23}$$

$$u_{2y}(x,0)=u_{1y}(x,0)=\nu_1(x),\ 0\le x\le 1, \tag{24}$$

$$u_{2yy}(x,0)=u_{1yy}(x,0)=\mu_1(x),\ 0\le x\le 1, \tag{25}$$

$$u_3(0,y)=u_1(0,y)=\tau_2(y),\ 0\le y\le 1, \tag{26}$$

$$u_{3x}(0,y)=u_{1x}(0,y)=\nu_2(y),\ 0\le y\le 1, \tag{27}$$

$$u_{3xx}(0,y)=u_{3xx}(0,y)=\mu_2(y),\ 0\le y\le 1, \tag{28}$$

Здесь $\tau_1,\nu_1,\tau_2,\nu_2,\mu_1,\mu_2$ – неизвестные пока достаточно гладкие функции, подлежащие определению, кроме того выполняются следующие условия согласования: $\tau_1(0)=\tau_2(0)=f_1(0)$, $\nu_1(0)=\tau_2'(0)=f_2(0)$, $\tau_1(1)=\varphi_1(0)$. Сначала поставленную задачу 1 будем исследовать в области D_2. Записывая решение уравнения (22) $(k=1)$, удовлетворяющее условиям (23), (24) и подставляя это решение в (8), находим неизвестную функцию $\omega_{21}(y)$ в промежутке $-\frac{1}{2}\le y\le 0$. Затем введя обозначения $u_{22}(0,y)=\tau_3(y)$, $u_{22x}(0,y)=\nu_3(y)$ $(-1\le y\le 0)$ (где $\tau_3(y)$ $\nu_3(y)$ – неизвестные пока функции, подлежащие определению) и записывая решение уравнения (22) $(k=2)$, удовлетворяющее этим условиям и подставляя это решение в условие (8), находим неизвестную функцию $\omega_{22}(y)$ при $-1\le y\le -\frac{1}{2}$.

Воспользуясь условием $\left.\left(\frac{\partial u_{21}}{\partial x}+\frac{\partial u_{21}}{\partial y}\right)\right|_{AE_1}=\left.\left(\frac{\partial u_{22}}{\partial x}+\frac{\partial u_{22}}{\partial y}\right)\right|_{AE_1}$, находим неизвестную функцию $\omega_{22}(y)$ в промежутке $-\frac{1}{2}\le y\le 0$.

Подставляя решение уравнения (22) при $k=1$ в (4) после некоторых выкладок, получим первое соотношение между неизвестными функциями $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$: $\tau_1'(x)+\nu_1(x)=\alpha(x)$, $0\le x\le 1$, (29) где $\alpha(x)$ – известная функция. После этого в уравнении (20) переходя к пределу при $y\to 0$ с учетом условий (23), (24), имеем второе соотношение между неизвестными функциями $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$: $\tau_1''(x)-\nu_1(x)=\omega_1(0)\exp\left(-\frac{c}{a}x\right)$. (30)

Исключая из системы (29), (30) функцию $\nu_1(x)$ после некоторых выкладок, мы приходим к дифференциальному уравнению относительно

$\tau_1(x)$. Решая это уравнение при условиях $\tau_1(0)=f_1(0)$, $\tau_1(1)=\psi_1(1)$, мы находим неизвестную функцию $\tau_1(x)$ и тем самым – функции $\nu_1(x)$, $u_{21}(x,y)$ в D_{21}.

Воспользуясь условиям $u_{22}(x,-x)=u_{21}(x,-x)$ и (4), мы получим две соотношения между неизвестными функциями $\tau_3(x)$ и $\nu_3(x)$, из которых находим эти функции. Тем самым – и функцию $u_{22}(x,y)$ в D_{22}. Таким образом, мы нашли функцию $u_2(x,y)$ в области D_2 единственным образом.

Переходим в область D_3. Аналогично, как и в области D_2, определяются неизвестные функции $\omega_{31}(y)$ и $\omega_{32}(y)$. В области D_3 из формулы решения и из уравнения (21) $(i=3)$ при $x\to 0$ мы получим две соотношения между неизвестными функциями $\tau_2(y)$, $\nu_2(y)$ и $\mu_2(y)$.

Переходим в область D_1. Запишем решение уравнения (20), удовлетворяющее условиям (2), (23), (26). Дифференцируем это решение по x. Затем в полученном равенстве и в уравнении (20) полагаем $x\to 0$, тогда в силу условия (27), (28), получим еще две соотношения между функциями $\nu_2(y)$, $\mu_2(y)$ и $\omega_1(y)$. Исключаем из полученных четырех соотношений функции $\tau_2(y),\nu_2(y)$ и $\mu_2(y)$, тогда мы приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно функции $\omega_1(y)$. Ядро этого уравнения имеет слабую особенность, а правая часть непрерывна. Поэтому это уравнение допускает единственное решение из класса непрерывных функций. Решая это уравнение, находим функцию $\omega_1(y)$ и тем самым – функции $\tau_2(y)$, $\nu_2(y)$, $u_1(x,y)$ и $u_3(x,y)$.

Таким образом, мы нашли единственное решение поставленной задачи 1 в случае 2°. Аналогично исследуются остальные случаи.
В работах [1, 2] рассмотрен ряд краевых задач для таких уравнений.

Литература:

1. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Т.: Фан, 1986. 220 с.

2. Джураев Т.Д., Мамажанов М. О корректной постановке краевых задач для одного класса уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа. //Дифференциальные уравнения. 1983, т.19, №1, с.37-50.