

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**

**МИРЗО УЛУҒБЕК НОМИДАГИ
ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ**

**МЕХАНИКА-МАТЕМАТИКА ФАКУЛТЕТИ ДЕФОРМАЦИЯЛАНУВЧИ
ҚАТТИҚ ЖИСМ МЕХАНИКАСИ МУТАХАССИСЛИГИ**

**ТУТАШ МУХИТЛАР МЕХАНИКАСИНИНГ ТАНЛАНГАН
БОБЛАРИ ФАНИДАН**

КУРС ИШИ

Мавзу: Характиристик метод ёрдамида барқарор бир жинсли оқимни ҳисоблаш.

Бажарди: Адилов Ф.

Қабул қилди: Хусанов Б.

Тошент 2015

Мавзу: Характиристтик метод ёрдамида барқарор бир жинсли оқимни ҳисоблаш.
(Хоскин методи)

Режа:

1. Кириш.
2. Харакат тенгламаси.
3. Вақт бўйича фиксирланган қадам билан характиристтик метод ҳисоби.
4. Хулоса.
5. Фойдаланилган адабиётлар.

1. Кириш.

А. Ечимнинг усуллари

Сиқилувчан суюқлик оқими - термодинамик ўзгарувчилар билан боғланган ҳолат тенгламасини, ҳаракат миқдорини ўзгариши ва энергия сақланиши яна шунингдек массани сақланиш қонуни орқали ифодаланган хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар билан ифодаланади. Ушбу тенгламалар бошланғич қийматлар ва чегаравий шартлар билан биргаликда ечилади. Кейинги вақт моментида оқишни қуриш учун интегралланиши ҳам мумкин. Бошланғич узлуксиз ечимларда чизиқсиз бўлганлиги учун бу тенгламада бузилиш (яъни зарб тўлқини) бўлиши мумкин ёки бошланғич вақт моментининг ўзидаёқ зарб тўлқини пайдо бўлиши мумкин. Бу зарб тўлқинини ҳаракатини аниқлашнинг аҳамиятлиги кейинги вақт моментида ечимнинг тўғри бўлишидир.

Б. Характиристик ўзгарувчилар

Агар ёпишқоқ ва иссиқликдаги каби диссипатив жараёни эътиборга олмасак, у ҳолда ушбу масаладаги хусусий ҳосилали дифференциал тенглама гиперболик типга тегишли бўлади, шундай экан ҳақиқий характиристикага эга бўлади. Бу йўналишлар бирпараметрли характиристик эгричизиқлар оиласини ифодалайди (оддатда оддий қилиб характиристик дейилади). Биринчидан биз турли оилаларда ётган кесишган характиристикалардан тузилган нуқталардаги ечимларни ифодаланишини кўрамиз. Кейинчалик қутб координатасида ва вақтнинг доимий қийматларида тузилган чизиқларда махсус ҳисобланган сеткалардан фойдаланиб характиристик тенгламанинг ечимини қисқача кўриб чиқамиз.

В. Характиристик методнинг бошқа методларга нисбатан устунлиги

Аввал характиристик методни бошқа чекли-айирмалар усулидан устунлигига тўхталамиз. Чекли-айирмалар схемасини асосий камчилиги шундаки, айирмалар сеткасини чекли қадамда қўллаганимизда марказлашган тўлқин камайиши хусусиятини аниқ кўриш имкони бўлмайди.

Газ динамикаси тенгламаларини характиристик турғунликни сонли усулда ечишда ҳисоблаш сеткаси қадам ўлчамига чегара қўймайди, бундан кўринадики сетка қадами ошиши билан апроксимация хатолиги ошиб боради. Газ динамикаси тенгламаси характиристик формада ҳосила фақат характиристик йўналиш бўйича олинади. Шунинг учун агар баъзи нуқталарда бошланғич вақт моментида қандайдир ҳосилада бошланғич ҳосила бузилса, унда бундай бузилиш шу нуқталардан ўтадиган характиристик эгри чизиқ бўйлаб диффузия тарқалади дейилади. Бундан кўринадики турли типдаги узлуксиз оқим соҳаси чегараланган бўлиши керак ва характиристик эгричизиқли бир биридан алоҳида бўлиши керак. Бундай ҳолда характиристик сетка нуқталарида олинган ечимларда алоҳида тўлқин аниқ қурилади. Чекли-айирмалар усулида олинган ечимда бундай

чегаралар аралашиб кетади ва характеристик методдагидай аниқликка эришиш учун жуда кичик сетка олишга тўғри келади. Шунинг учун характеристик метод чекли-айирмалар усулига қараганда етарлича аниқ ечим олиш учун ортиқча қийинчилик туғдирмайди.

Г. Белгилаш ва терминалогия

Агар дисипатив жараён ҳисобга олинмаса унда суюқликнинг ҳар бир элементи энтропияси элемент қандайдир зарб тўлқини билан кесишмагунча ўзгармас бўлиб қолади. Курант ва Фридрихс қарашига кўра мос оқимни *адиабатик* деб атаимиз. Агар барча элементларнинг энтропияси битта ва бир қийматли бўлса, у ҳолда бундай оқим *изэнтропик* дейилади. Биз адиабатик бўлган лекин изэнтропик бўлмаган оқимни қараймиз.

Кейинги параграфларда қатнашадиган тенгламалардаги ўзгарувчи микдорларни қуйидагича белгилаб оламиз: R -Эйлер кутб координотаси, r -Лагранж кутб координатаси, t -вақт, u -суюқлик тезлиги, U -зарб тўлқини тезлиги, p -босим, ρ -зичлик, ρ_0 -бошланғич зичлик, $\vartheta = \rho_0 / \rho$ – нисбий ҳажм, c – товуш тезлиги, T - темепература, S - энтропия, E – ички энергия, мос равишда текис, цилиндрик ва сферик оқим учун $\alpha=0, 1, 2$.

2. Харакат тенгламаси

А. Тенгламанинг оддий формаси

Аввал (r,t) текисликда зарранинг траекторияси $r=const$ тенглама билан ифодаланган Лагранж ўзгарувчисили ҳаракат тенгламасини қараймиз (ва текислик турли иккита муҳитга ажратилган). Унда массанинг сақланиш қонунидан, ҳаракат микдори ўзгариши ва энергиянинг сақланиш қонунидан қуйидаги тенгламани оламиз:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{R}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\alpha u v}{R} \quad 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{R}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad 2$$

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t} + p \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad 3$$

Бундан ташқари

$$\frac{\partial R}{\partial t} = u \quad (4)$$

ва қуйидаги формада ёзилган ҳолат тенгламасига эга бўламиз

$$p = p(v, E) \quad (5)$$

Б. Характеристик форма

(3) тенглама керакли характеристик формага эга, чунки ундан факат битта йўналишга эга хосила чиқади. Энди (1) ва (2) тенгламаларни характеристик формага келтирамиз. Товуш тезлиги куйидаги тенглик билан ифодаланади

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}_r = -\frac{v^2}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial v}_r \quad (6)$$

Ундан (1) тенгламани c/v кўпайтириб ва (6) ни кўллаб

$$\frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{c}{v} \frac{R}{r}^\alpha \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\alpha u c}{R} \quad 7$$

(2) ва (7) тенгламага йиғиштириш амалини кўллаб

$$\frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{c}{v} \frac{R}{r}^\alpha \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c}{v} \frac{R}{r}^\alpha \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\alpha u c}{R} \quad 8$$

(7) тенгламадан (2) тенгламани ҳисобга олиб

$$\frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{c}{v} \frac{R}{r}^\alpha \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c}{v} \frac{R}{r}^\alpha \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\alpha u c}{R} \quad 9$$

ни оламиз. Бундай ҳолда (8) ва (9) тенгламалар характеристик формага эга бўлади ва уларни куйидагича ёзиш мумкин

$$\frac{1}{\rho c} dp + du + \frac{\alpha u c}{R} dt = 0 \quad 10$$

$$dr = \frac{c}{r} \frac{R}{r}^\alpha dt = 0 \quad 11$$

(10) тенглама (11) атрофида ва

$$\frac{1}{\rho c} dp - du + \frac{\alpha u c}{R} dt = 0 \quad 12$$

$$dr = -\frac{c}{r} \frac{R}{r}^\alpha dt = 0 \quad 13$$

(12) тенглама (13) атрофида.

(3) тенгламани характеристик формада куйидагича ёзиш мумкин

$$dE + p dv = 0 \quad \text{ёки} \quad dS = 0 \quad 14$$

$$dr = 0 \quad 15$$

атрофида.

(11) тенгламада аниқланган эгри чизик одатда *биринчи оила характеристикаси* дейилади, (13) тенгламада аниқланган эгри чизик эса *иккинчи оила характеристикаси* дейилади. Эйлер ўзгарувчиларида характеристик эгри чизикларни куйидаги дифференциал муносабат билан кўрсатиш мумкин

$$dR = (u \pm c) dt \quad 16$$

бу ерда кўшиш белгиси биринчи оила характеристикасини, айириш белгиси иккинчи оила характеристикасини англатади.

Изэнтропик оқимда учинчи характеристик мослик [(14) ёки (15)] талаб қилинмайди, бу ҳолда энтропия ўзгарувчи миқдор бўлмайди. Лекин умумий ҳолда масалани ечиш учун учта турли характеристик эгри чизик бўйлаб характеристик муносабатни қўллаш зарур.

В.Узилишлар

Икки турдаги узилишлар мавжуд. Содда тури: ўтиш ҳолатида босим ва тезлик узлуксиз бўлиб қолувчи, энергия ва энтропия эса узилишга эга бўлган туташ сирт (яъни сирт икки муҳит ва эркин сиртга ажралган). Бу сиртларни ҳаракат қонуни қуйидагича бўлди

$$dR = udt, \quad dr = 0 \quad 17$$

Узилишнинг иккинчи турига қуйидагича дифференциал тенглама билан ифодаланувчи зарб тўлқини мос келади

$$dR = Udt \quad 18$$

Барча боғлиқ ўзгарувчилар зарб тўлқини орқали ўтганда узилишга учрайди. У зарб тўлқини тезлиги оқимнинг бошқа параметрларининг функцияси бўлгани учун, зарб тўлқини ҳаракат қонуни тўлқиннинг бошқа барча соҳаларини ҳисобга олиб бирвақтда ифодаланиши керак. Оқим параметрларининг бу узилишдаги катталиклари зарб тўлқини орқали ўтагандаги ҳаракат миқдорини ўзгариши ва энергия сақланиши, массани сақланиши шартларини ифодаловчи Ренкин-Гюгон ечимига мос келади. Агар 0 ва 1 индекслар билан сакрашнинг олдинги ва ортки шартини белгиласак, унда бу муносабатни қуйидагича ёзиш мумкин

$$\rho(u_1 - u_0)^2 = p_1 - p_0 \quad v_1 - v_0, \quad 19$$

$$U = \frac{v_0 u_1 - v_1 u_0}{v_1 - v_0}, \quad 20$$

$$E_1 - E_0 = \frac{1}{2} (p_1 + p_0) (v_0 - v_1), \quad 21$$

Бу муносабатлар ҳолат тенгламалари билан бирга v_1, u_0, p_1, E_1, U 5 та номаълум функцияни аниқловчи 4 та тенгламани ифодалайди. Бу ерда сакраш олдидаги шарт қаралмоқда. Бундай ҳолада, агар айтайлик u_1 ўзгарувчи маълум бўлса, унда қолган номаълумларни топиш мумкин.

(21) тенглама қуйидаги кўринишда ёзилади

$$0 = \delta = 2E_1 - 2E_0 + (p_1 + p_0) (v_1 - v_0) \quad (22)$$

бу ерда δ ҳақиқий ечим аниқланганда нолга айланувчи боғлиқсизликни кўрсатади. Кейинги ҳисоблар қуйидаги тартибда бажарилади.

а) v_1 га баъзи тақрибий бошланғич қийматлар берилади.

б) (19) тенгламадан p_1 ҳисобланади.

в) Ҳолат тенгламаларидан E_1 ҳисобланади ва агар (21) тенгламани қаноатлантирса нолга айлануви δ ни ҳисоблаш мумкин бўлади.

г) Агар (22) тенглама қаноатлантирилмаса, унда v_1 ни аниқ қийматини топиш учун u_1 фиксирланганда δ ни v_1 бўйича ҳосиласини ҳисолаш керак. Бу ҳосилани аниқ ҳисоблаш мумкин.

д) Кейин δ катталиқни нолга келтириш учун v_1 ни аниқ қийматини олиш мумкин. Ундан кейин “б” тартибдан бошлаб шу ишлар такрорланади токи δ катталиқ етарлича кичик бўлгунча.

Саркашдан кейинги шартда ҳам сакраш тезлиги, энтропия, товуш тезлиги ва ҳ.к. лар худди шундай ҳисобланади. Агар сакрашдан олдинги шарт фиксирланмаган бўлса, бу шартни итерация усули билан ҳисоблаш керак.

Г. Чекли-айирмалар усулидаги формаси

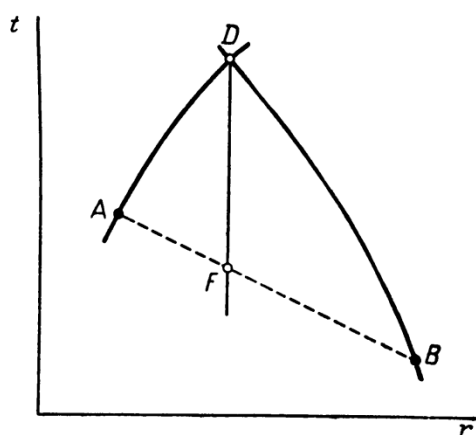
Тенгламанинг барча ҳоллари бўйича чекли-айирмалар формасига келтириш учун ҳосилани баъзи интервалларда айирмаларга ажратиб алмаштириш керак ва бошқа миқдорларни шу интервалда ўрта арифметик қийматига ажратиш керак. Масалан, туташ сиртда A ва B нуқталарда маҳкамланган интервал учун тенглама $\frac{dR}{dt} = u$ қуйидаги тенгламага алмаштирилади

$$\frac{R_B - R_A}{t_B - t_A} = \frac{1}{2} u_B + u_A \quad (23)$$

Бундай айирмали схемада хатолик ячейканинг охириги ўлчамига боғлиқ бўлиб, сетка қадамининг квадрати тартибига эга бўлади.

Д. Характистик сетка нуқталарида ечимни аниқлаш

Ечим A ва B (1-расм) нуқталарда аниқланган бўлсин, агар зарб тўлқини бўлмаса унда янги нуқталарда ечимни аниқлаш учун оддий таққослаш амали бажарилади.



1-расм. Характистик методда оддий нуқталар ҳисоби; AD , BD – турли оиладаги характистикалар, DF – ток чизиғи

Янги D нуқта A нуқтадан ўтган биринчи оила характистикаси билан B нуқтадан ўтган иккинчи оила характистикаси кесишган жойда жойлашган. Унда AD чизик бўйлаб (10) ва (11) тенгламалар бажарилади, BD чизик бўйлаб эса (12) ва (13) тенгламалар бажарилади. Агар M_A билан M нинг A нуқтадаги баъзи ўзгарувчи миқдорларини белгиласак, M_{AB} билан A ва B нуқталардаги бу қийматларни ўртачасини белгиласак, унда керакли тенгламаларни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин

$$\frac{1}{\rho c} AD p_D - p_A + u_D - u_A + \frac{\alpha u c}{R_{AD}} t_D - t_A = 0, \quad (24)$$

$$r_D - r_A - \frac{c}{v} \frac{R}{r_{AD}}^{\alpha} t_D - t_A = 0, \quad (25)$$

$$\frac{1}{\rho c} BD p_D - p_B - u_D - u_B + \frac{\alpha u c}{R_{BD}} t_D - t_B = 0, \quad (26)$$

$$r_D - r_B + \frac{c}{v} \frac{R}{r_{BD}}^{\alpha} t_D - t_B = 0, \quad (27)$$

$$R_D - R_A - u + c_{AD} t_D - t_A = 0, \quad (28)$$

$$R_D - R_B - u - c_{BD} t_D - t_B = 0, \quad (29)$$

Бундан ташқари

$$E_D - E_F + \frac{1}{2} p_D + p_F v_D - v_F = 0, \quad (30)$$

бу ерда $F-D$ нуктадан ўтувчи ток чизигининг баъзи нуқталари, яъни $r=r_0=\text{const}$ чизигидаги. F нуктадаги параметрларни A ва B нукталардаги қийматлари бўйича интерполяция қилиб топиш мумкин.

Бу тенгламаларнинг ечими итерация усулида содда формага келтирилади. Фараз қиламиз квадрат қавсга олинган миқдорларнинг ўртача қиймати олдиндан маълум. Унда ҳисоблашни қуйидаги тартибда амалга ошириш мумкин.

а) (25) ва (27) тенгламалардан r_D ва t_D топилади.

б) Топилган t_D ни қийматини (24) ва (26) тенгламаларга қўйиб p_D ва u_D ни аниқлаймиз.

в) p_D ни (30) тенгламага қўйиб ва ҳолат тенгламаси билан ҳисоблаб E_D ва v_D ни аниқлаймиз.

г) c товуш тезлигини ҳисоблаб R_D ни (28) тенгламадан ёки (29) тенгламадан топиш мумкин. Бу иккита R_D ни ыймати мос келиши керак, ундай бўлмаса ячейка ўлчамига шарт қўйишда хатолик бўлганини кўрсатади.

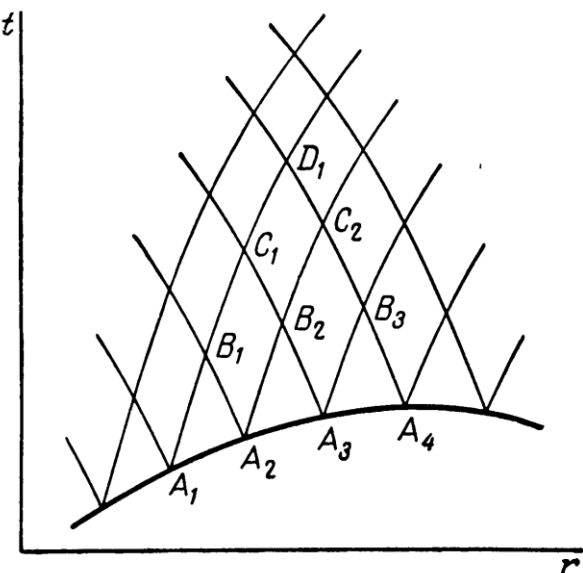
д) Энди квадрат қавсдан чиққан ифодадан функцияни ҳисоблаш мумкин. Кейин худди шу ҳисоблар “а” тартибдан бошлаб барча функциялар чиқарилгунча бажарилади.

Нуктанинг бошқа турларини аниқлаш учун келтирилган методни кўринишини ўзгартириш мумкин. Масалан, агар D эркин сиртдаги нуктани ифодаласа ва агар B эркин сиртдан олдинги нуктани ифодаласа, унда (26), (27) ва (29) тенгламаларни қуйидагича алмаштириш керак:

$$p_D = 0, \quad (31)$$

$$r_D = r_B, \quad (32)$$

$$R_D - R_B - \frac{1}{2} u_D - u_B t_D - t_B = 0 \quad 33$$



2-расм. D_1 нукта таъсир этувчи соҳасини кўрсатувчи характеристик сетка

Бундай ҳолда тенгламалар системасини аналитик кўринишда ечиш мумкин.

Қаралаётган итерация методи схемаси қаноатлантирадиган даражада ишламоқда; бундай ҳисоблаш жараёнини 2-расмда кўрсатилгандек бошқа нукталарда ҳам давом эттириш мумкин. Кўринадики, ечимдан бошқа информацияларнинг мавжудмаслигидан A_1, A_2, A_3 ва A_4 нукталардаги бошланғич маълум ҳисоблашлар $B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, D_1$ нукталарни ўз ичига олган соҳа билан чегараланган ва уларни вақт бўйича жойлаштиришни D_1 нуктадан кейинги нуктага давом эттириб бўлмайди. Бу соҳа D_1 нуктанинг таъсир этиш соҳаси дейилади.

4. Вақт бўйича фиксирланган қадам билан характеристик метод ҳисоби.

Характеристик сетка ёрдамида ечишнинг камчилиги шундаки, ҳисобловчи ечимни ифодаловчи нукталарни бошқара олмайди. Агар берилган вақт моментида ечим фазо бўйлаб тарқалишини олиш талаб этилса, унда характеристик сеткада икки ўзгарувчи бўйича интерполяция қилишда муаммога дуч келинади. Хартри [2] таклиф қилган схемада тугун нукталар олдиндан фазода қандай берилган бўлса, вақт бўйича ҳам шундай берилиши билан муаммони четлаб ўтилади ва ҳисоблаш жараёнида интерполяцияга келтирилади. Бу схемада кўп ҳолларда интерполяция бир ўзгарувчи бўйича амалга ошириш керак.

А. Одатий нукталар ҳисоби

3-расмда ўзгарувчи сифатида Лагранж координатаси ва вақт олинган типик ҳисоблаш сеткаси қурилган. P нуктадаги параметрларни аниқлаш учун иккита характеристика кесишишидаги нукталардан ташкил топган L ва M нукталарда оқим параметрларининг қиймати керак бўлади. Бу қийматларни A, B, C нукталардаги микдорлар бўйича чизиқли ёки квадрат интерполяция ёрдамида аниқлаш мумкин. Биз Лагранж фазосини қараганимиз учун PB чизиқ ток чизигини ифодалайди ва кўринадики энергиянинг ўзгаришига кўра ток чизиги бўйлаб интерполяция қилиш шарт эмас. Бу схемада ечилиши керак бўлган тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин

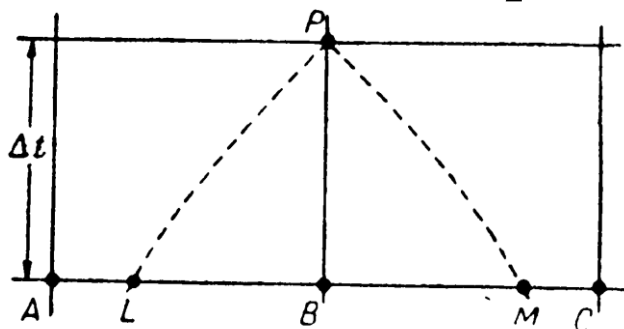
$$\frac{1}{\rho c} \left(p_P - p_L + u_P - u_L + \frac{\alpha u c}{R} \right) \Delta t = 0, \quad 34$$

$$r_P - r_L - \frac{c}{v} \frac{R}{r} \Delta t = 0, \quad 35$$

$$\frac{1}{\rho c_{PM}} p_P - p_M - (u_P - u_M) + \frac{\alpha u c}{R_{PM}} \Delta t = 0, \quad 36$$

$$r_P - r_M + \frac{c}{v} \frac{R}{r_{PM}} \Delta t = 0, \quad 37$$

$$E_P - E_B + \frac{1}{2} p_P + p_B v_P - v_B = 0, \quad 38$$



3-расм. Вакт бўйича фиксирланган кадам билан одатий нукта ҳисоби; PL, MP – характеристикалар

Бундан тақари қуйидагиларга эга бўламиз

$$p_P = p_B, \quad 39$$

$$R_P - R_L - u + c_{PL} \Delta t = 0, \quad 40$$

$$R_P - R_M - u - c_{PM} \Delta t = 0, \quad 41$$

§ 2, Д, да кўрилгандек, агар квадрат қавс ичидаги катталикларга тақрибий қиймат берилса, ҳисоблашни қуйидагича амалга ошириш мумкин:

а) (35) тенгламадан r_L топилади, (37) тенгламадан эса r_M ҳисобланади.

б) u_L, p_L, u_M, p_M оқим параметрлари қийматлари бўйича A, B ва C нукталарда интерполяция ёрдамида аниқланади.

в) (34) ва (36) тенгламалар u_P ва p_P ларга нисбатан ечилади.

г) Ҳолат тенгламасини ҳисобга олиб (38) тенгламадан E_P ва v_P топилади.

д) Квадрат қавс ичидаги функция ҳисобланади, ва “а” тартибдан бошлаб етарлича яқинлашиш бўлгунча юқоридаги амаллар такрорланади.

5. Хулоса

Келтирилган ҳар иккала ҳисоблаш методи мураккаб бўлмаган масалаларда ўзини оқлайди. Лекин чекли-айирмалар сони ошса ёки боғланиш мураккаблашса, у ҳолда характеристик метод ҳосил бўладиган барча махсус ҳолларни ҳисоблашда устунликни йўқотади. Бундай ҳолларда тенгламани ечишда суний эгилиш киритиб чекли-айирмалар схемаси ёрдамидан фойдаланган мақсадга мувофиқ.

Фойдаланилган адабиётлар

1. Олдер Б., Фернбах С., и Ротенберг М., Вычислительные методы в гидродинамике. МИР. Москва 1967.
2. Курант Р., Фридрихс К., Сверхзвуковое течение и ударные волны. ИЛ, М., 1950.
3. Hartree D. R., AECU-2713, 1953
4. Keller H. B., Levine D. A., Whitham G. B., J. Fluid Mech., 7 (1960). 302.