

ODDIY TEZ HARAKAT MA'NOSIDAGI OPTIMAL BOSHQARISH MASALALARIGA PONTRYAGINNING MAKSIMUM PRINSIPINI QO'LLASH

Nurmamatov M.Q. SamDU magistranti (2-bosqich)

Maqolada oddiy tez harakat ma'nosidagi optimal boshqarish masalalariga pontryaginning maksimum prinsipini qo'llash usullari masalalarning yechilish yullari orqali tushuntirilib beriladi.

Kirish. Ob'ektlarni optimal boshqarish masalasi, optimal jarayonlarning matematik nazariyasi deb ataluvchi matematik nazariyaning nisbatan yangi sohasiga tegishlidir.

Uning mohiyati quyidagicha. Ob'ekt t_0 - boshlang'ich vaqt momentida x_0 fazoviy holatda bo'lsin. Shunday boshqarishni tanlash talab qilinadiki, u obektni x_0 dan farqli berilgan x_1 oxirgi holatga shunday o'tkazilsinki, bu o'tkazish (jarayon) ma'lum ma'noda eng yaxshi bo'lsin. Bu eng yaxshi o'tish jarayoni optimal jarayon deyiladi.

Agar gap eng kichik o'tish vaqti haqida borayotgan bo'lsa, u holda bunday jarayonlar tez harakat manosida optimal deyiladi.

Masalaning umumiy matematik qo'yilishi. $R^n - n$ - o'lchovli fazo bo'lsin, $x \in R^n$ va $x(t)$ trayektoriya quyidagi

$$\dot{x}^i(t) = f^i(x(t), u(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

yoki vektorli formada

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)).$$

differentzial tenglamalar tizimini qanoatlantirsin.

Bu yerda $u(\cdot)$ - boshqarish funksiyasi bo'lib, $t \in [0, 1]$ vaqt kesmasida $\bar{U}$ - boshqarish sohasidan tanlanadi. $\bar{U}$ - boshqarish sohasi R^n fazodagi U - to'plamining yopilmasidir.

$$f^i(x, u) \text{ va } \frac{\partial f^i(x, u)}{\partial x^j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

funksiyalar $R^n \times \bar{U}$ da berilgan uzliksiz funksiyalardir.

Quyidagi integral funksiyani kiritamiz

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t)) dt \quad (1)$$

bu yerda f^0 yuqoridagi $f^i, i = 1, 2, \dots, n$ funksiyalar shartlarini qanoatlantiradi.

Masalaning qo'yilishi: fazoviy nuqtani x_0 xolatdan x_1 xolatga o'tkazuvchi $u = u(t)$ boshqarishlar ichidan shundayini topish kerakki (1) funksional mumkin bo'lgan eng kichik qiymatni qabul qilsin. Bu optimal boshqarish masalasining umumiy qo'yilishidir.

Biz quyida [1] da keltirilgan algoritm bo'yicha, optimal boshqarishga doir aniq amaliy masalalarni qaraymiz.

1-masala. Faraz qilaylik ob'ekt to'g'ri chiziq bo'yicha dvigatel beradigan u ($|u| \leq 1$) kuch tasirida erkin va ishqalanishsiz harakatlanibotgan bo'lsin.

Bu ob'ektning harakat tenglamasi

$$\ddot{x} = u$$

bo'lib, bu yerda $x = (x^1, x^2) \in R^2$, x^1, x^2 - ob'ektning fazoviy koordinatalari.

Ob'ektning harakatini quyidagi

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad -1 \leq u \leq 1$$

differensial tenglamalar tizimi orqali yozish mumkin. Ob'ektni eng qisqa trayektoriya bo'yicha boshlangich x_0 holatdan oxirgi $x_1 = (0, 0)$ holatga ya'ni kordinata boshiga olib keluvchi $u = u(t)$ optimal boshqarishni topish masalasini qaraymiz.

Yechish. Pontraginining maksimum prinspi teoremasidagi Gamilton funksiyasi

$$H(\psi, x, u) = \sum_{i=1}^2 \psi_i f^i(x, u)$$

ko'rinishda bo'lib $H = \psi_0 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u$ bo'ladi. Qo'yilgan ma-

sala sintez masalasi deyilib uni yechish tafsiloti [2] da qaralgan. Optimal boshqarish

$u \equiv 1$ va $u \equiv -1$ bo'lib ularga mos optimal trayektoriyalar $x^1 = \frac{1}{2}(x^2)^2 + c^1$ va $x^1 = -\frac{1}{2}(x^2)^2 + c'^1$ parabolaning yoylaridan iboratdirlar

2-masala. Jarayon

$$\frac{dx_1}{dt} = -ax_1 + u(t) = f_1(x, u)$$

differensial tenglama bilan ifodalanganda ushbu

$$\frac{1}{2} \int_0^T (x_1^2 + u^2) dt \rightarrow \min$$

integralni minimumga erishtiruvchi $u(t)$ boshqaruvni aniqlang.

Yechish. Yangi o'zgaruvchi kiritamiz:

$$x_2(t) = \frac{1}{2} \int_0^t (x_1^2(t) + u^2(t)) dt.$$

Bu o'zgaruvchi uchun berilgan differensial tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{2} (x_1^2(t) + u^2(t)) = f_2(x, u).$$

Uning boshlang'ich sharti esa $x_2(0) = 0$. Yangi o'zgaruvchidan foydalanib, minimal-lashtiriluvchi funksionalni quyidagicha yozamiz:

$$I[T] = x_2(T).$$

Gamilton funksiyasini quramiz:

$$H = \psi_1 f_1 + \psi_2 f_2 = \psi_1 (-ax_1 + u) + \psi_2 \frac{1}{2} (x_1^2 + u^2) = -a\psi_1 x_1 + \frac{1}{2} \psi_2 x_1^2 + \psi_1 u + \frac{1}{2} \psi_2 u^2.$$

Uning qo'shma sistemasini tuzib olamiz:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = a\psi_1 - \psi_2 x_1$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 0$$

Quyidagilarni yozish mumkin:

$$\psi_i(T) = -C; \quad Y_1(T) = 0; \quad Y_2(T) = -1.$$

Ushbu

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial t} = 0, \quad \psi_2 = \text{const}, \quad \psi_2(T) = -1,$$

tengliklardan $Y_2(T) = -1$. Endi Gamilton funksiyasini quyidagicha yoziladi:

$$H = aY_{|x|+Y|u-0.5x^2-0.5u^2|}.$$

Maksimum prinsipiga ko'ra H funksiya fiksirlangan x_1 va Y_1 da u bo'yicha maksimumga erishadi:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial u} = \psi_1 - u.$$

Bu yerdan

$$\psi_1(t) = u(t).$$

Endi yangi o'zgaruvchi x_1 va u ga nisbatan tuzilgan ushbu

$$\frac{dx_1}{dt} = -ax_1 + u(t) = f_1(x, u)$$

$$\frac{du}{dt} = au + x_1$$

differensial tenglamalar sistemasini

$$x_1(0) = x_{10}, u(T) = 0$$

chegaraviy shartlarda yechamiz. Bu tenglamalar sistemasini u ga nisbatan yozamiz:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = a \frac{du}{dt} + \frac{dx_1}{dt} \frac{d^2 u}{dt^2} = a \frac{du}{dt} - ax_1 + u$$

$$x_1 = -au + \frac{du}{dt}$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = a \frac{du}{dt} + a^2 u - a \frac{du}{dt} + u$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - (a^2 + 1)u = 0.$$

Bu sistemaga

$$u(T) = 0, \quad u(T) = u_0$$

chegaraviy shartni qo'shamiz va uni yechamiz. Xarakteristik tenglama quyidagicha yoziladi:

$$k^2 - (a^2 + 1) = 0, \quad k_{1,2} = \sqrt{a^2 + 1} = \pm \lambda$$

Umumiy yechim: $u = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{-\lambda t}$. Bunda $C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{-\lambda t} = 0$; $C_2 = C_1 e^{2\lambda t}$.

U holda

$$u(t) = C_1(e^{\lambda t} + e^{\lambda(2T-t)}) = -\frac{u_0}{2\lambda} e^{\lambda t}.$$

Chegaraviy shartlardan $C_1 = -\frac{u_0}{2\lambda} e^{\lambda t}$.

Shunday qilib, optimal yechim quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$u(t) = \frac{u_0}{2\lambda} [e^{\lambda(t-T)} - e^{-\lambda(t-T)}].$$

Adabiyot

1. Пантелеев А.В., Бартаковский А.С. Теория управления в примерах и задачах. – Москва: Высшая школа, 2003. – 586 с.
 2. Болтянский В.Г. математические методы оптимального управления- М.:Наука, 1966-308с.
-