НДПИ физика-математика факултети математика ўқитиш методикаси таълим йўналиши **3**-д гурущ талабаси

Тожибоев Фазлиддиннинг математик анализ фанидан тайёрлаган

РЕФЕРАТ

Текширди: Норчаев Т. Й.

Бажарди: Тожибоев Ф

Навоий - **2015**й

Тригонаметрик системани (-1:1) сегментда фуръе қатори

Режа:

I. Кириш

1. Даврий миқдорлар ва гармоник анализ
2. Коеффитсийентларни эйлер-фуръе усули бўйича аниқлаш
3. Фақат косинуслар ёки фақат синуслар бўйича ёйиш

Хулоса

Кириш.

Республикамизда Таълим тў\рисидаги қонуннинг қабул қилиниши, кадрлар тайёрлашнинг миллий дастури замон талабларига жавоб берадиган мутахассисларни тайёрловчи олий ўқув юртларига, айниқса университетларга катта маъ-сулият юклади. Давлат таълим стандартлари, ўқув дастурлари асосида дарсликлар, ўқув қўлланмаларни яратиш масаласи юзага келди.

Давлат таълим стандартлари барча фанлардан, жумладан математик анализ бўйича мавжуд дарслик ва қўлланмаларга янгича нуқтаи назардан қарашни тақозо этади.

Математик анализ олий математиканинг фундаментал бўлимларидан бўлиб, математиканинг пойдевори ҳисобла-нади.

Маълумки, математик анализ курси давомида кўпгина тушунча ва тасдиқлар, шунингдек уларнинг татбиқлари келтирилади.

Кўп олий ўқув юртлари талабаларининг ўқиш давомида дуч келадиган жиддий фанлардан бири ҳам математик анализдир.

Математик анализ фанининг асосий вазифаси шу фаннинг тушунча, тасдиқлар ва бошқа математик маълумот-лар мажмуаси билан таништиришгина бўлмасдан, балки талабаларни мантиқий фикрлашга, математик усулларни амалий масалаларни йечишга қўллашни ўрганишдан иборат.

Мазкур ўқув қўлланма, муаллифларнинг кўп йиллик тажрибалари асосида, замонавий талабаларни ҳисобга олган ҳолда ёзилган бўлиб, у маърузалар шаклида баён этилган. Мавзуларни маърузалар бўйича баён этилиши талабаларни мавзу мазмуни ва моҳиятини чуқурроқ англашга ёрдам беради деб ўйлаймиз.

Муаллифлар ҳар бир маърузанинг мазмуни равон, математик қатъий, ўз навбатида талаба томонидан тушунарли бўлишига харакат қилдилар.

Маърузаларнинг мантиқий кетма-кетликда, бир-бирига узвий бо\лиқликда, тушунчаларни равон айтилишига, тасдиқлар исботларини аниқ, илмийликка асосланган бўлишига эътибор қаратилаган. Ҳар бир маъруза сўнгида назарий ва амалий аҳамиятга эга бўлган машқлар келтирил-ган. Ўйлаймизки, бундай машқлар талабаларни мустақил ишлашга, мантиқий фикрлашга ўргатади.

Даврий миқдорлар ва гармоник анализ. Фанда ва техникада тез-тез даврий ҳодисалар билан иш кўришга тўғри келиб туради. Агар бирор ҳодиса маълум бир вақт оралиги T дан кейин аввалги ҳолигача такрорланиб турса, бундай ҳодисани даврий ҳодиса, T ни эса унинг даври дейилади.

Тўла айланишни тугагандан сўнг ўзининг бошланғич ҳолатидан яна ўтадиган буғ машинасининг барқарор ҳаракати, ўзгарувчан ток билан боғлиқ баъзи ҳодисалар даврий ҳодисаларга мисол бўла олади.

Шу даврий ҳодисалар билан боғлиқ бўлган турли миқдорлар T давр ўтгач, яна ўзларининг аввалги қийматларига эришадилар ва демак бу миқдорлар вақт t нинг даврий функциялари бўладилар, яъни улар ушбу тенглик билан характерланадилар.

$$\varphi(t+T)=\varphi(t).$$

Масалан, ўзгарувчан токнинг кучи ва кучланиши, ёки—буғ машинаси мисолида—крейцкопфнинг йўли, тезлиги ва тезланиши, буғнинг босими, кривошип бармоғидаги уринма таъсир кучи ва ҳоказолар шундай функциялардир.

Даврий функцияларнинг энг соддаси (агар ўзгармас миқдорни эътиборга олмасак) ушбу *синусоидал миқдордир:* $A\sin(\omega t+\alpha)$, бу ерда ω частота деб аталувчи миқдор бўлиб, у давр T билан қуйидаги боғланишда:

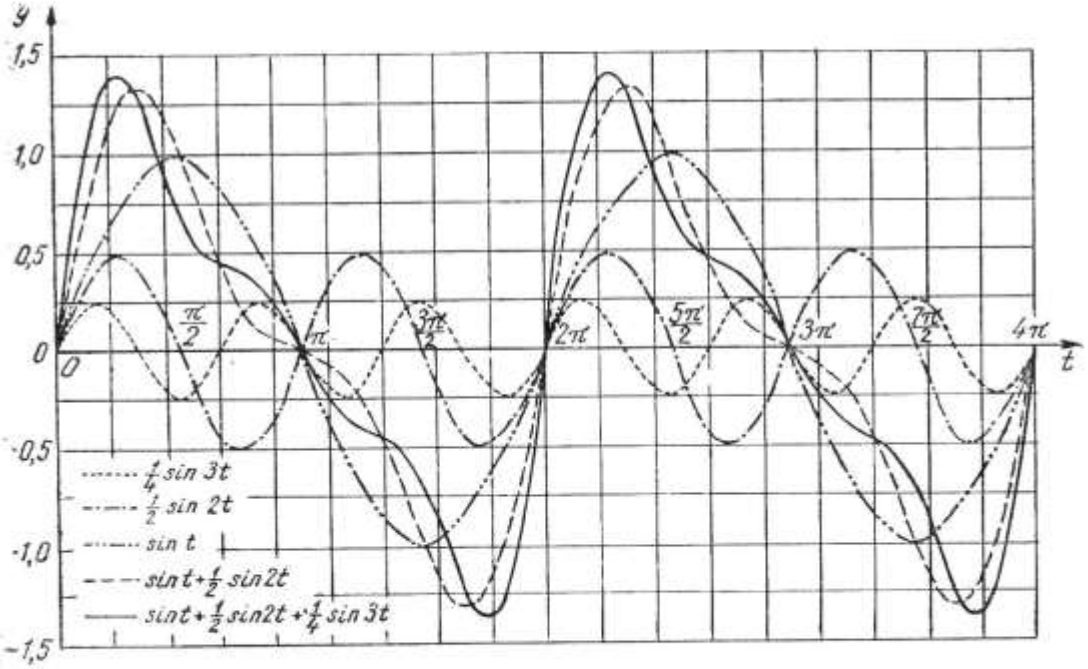
$$\omega=\frac{2\pi}{T}. \qquad (1)$$

Бундай содда даврий функциялардан мураккаброқ бўлган даврий функциялар ҳосил қилиш мумкин. Равшанки, бир хил частотали бир неча синусоидал миқдорларни қўшиш натижасида шу частотали синусоидал миқдорга эга бўламиз. Демак, мураккаброқ даврий функция ҳосил қилиш учун турли частотали синусоидал миқдорларни қўшиш керак.

Частоталари ω, 2ω, 3ω, ... бўлган (ўзгармас миқдорни ҳисобга олмаганда) даврлари T, $\frac{1}{2}T$, $\frac{1}{3}T$, ... бўлган ушбу

$$\left.\begin{aligned} y_0 = A_0,\ y_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1),\ y_2 = A_2 \sin(2\omega t + \alpha_2), \\ y_3 = A_3 \sin(3\omega t + \alpha_3),\ \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

миқдорлардан бир нечасини қўшсак (2) даги функциялардан фарқли бўлган даврий (даври T бўлади) функция ҳосил бўлади.



73- чизма.

Мисол учун учта синусоидал миқдорларнинг йиғиндиси

$$\sin t + \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{4}\sin 3t$$

ни олиб кўрайлик. Бу функция графиги (73- чизма) ўзининг характери бўйича синусоидадан анча фарқ қилади. (2) кўринишдаги миқдорлардан тузилган чексиз қатор йиғиндиси учун бундай фарқ янада равшанроқ намоён бўлади.

Энди, аксинча, ушбу саволни қўйиш табиийдир: даври T га тенг бўлган берилган даврий $\varphi(t)$ функцияни чекли сондаги ёки, ҳеч бўлмаса, чексиз сондаги (2) кўринишли синусоидал миқдорлар йиғиндиси сифатида ифодалаш мумкинми? Қуйида кўрамизки, бу саволга функцияларнинг жуда кенг синфи учун ижобий жавоб айтиш мумкин, аммо бунинг учун (2) кўринишдаги миқдорларнинг чексиз кетма-кетлигини жалб

қилиш зарур бўлади. Мазкур синфга тегишли бўлган функцияларни „тригонометрик“ қаторга ёйиш мумкин бўлади:

$$\varphi(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(2\omega t + \alpha_2) +$$

$$+ A_3 \sin(3\omega t + \alpha_3) + \ldots = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \alpha_n), \qquad (3)$$

бу ерда A_0, A_1, α_1, A_2, α_2, ... ҳар бир берилган функцияга боғлиқ бўлган қийматлар қабул қилувчи ўзгармас миқдорлар бўлиб, ω частота эса (1) формуладан аниқланади.

Геометрик нуқтаи назардан (3) тенглик *даврий функциянинг графиги бир қанча синусоидаларни қўшишдан ташкил топишини кўрсатади.* Механик нуқтаи назардан, агар ҳар бир синусоидал миқдор гармоник тебранма ҳаракатни ифодалайди, деб қаралса, *$\varphi(t)$ функция билан характерланувчи мураккаб ҳаракат айрим-айрим гармоник тебранишларга ёйилади* деб айтиш мумкин. Шу муносабат билан (3) ёйилманинг ҳар бир ҳадидаги синусоидал миқдорларни $\varphi(t)$ функциянинг *гармоник тузувчилари* ёки соддароқ (биринчи, иккинчи ва ҳоказо) *гармоникалари* деб атайдилар. Даврий функцияни гармоникаларга ёйиш процессининг ўзини эса *гармоник анализ* деган ном билан юритилади.

Боғлиқ бўлмаган ўзгарувчи сифатида

$$x = \omega t = \frac{2\pi}{T} t$$

олинса, ана шу x аргументнинг функцияси ҳосил бўлади:

$$f(x) = \varphi\left(\frac{x}{\omega}\right).$$

Бу функция ҳам даврий бўлиб, у стандарт 2π даврга эга бўлади. (3) ёйилма қуйидаги кўринишга келади:

$$f(x) = A_0 + A_1 \sin(x + \alpha_1) + A_2 \sin(2x + \alpha_2) +$$

$$+ A_3 \sin(3x + \alpha_3) + \ldots = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx + \alpha_n). \qquad (4)$$

Йиғиндининг синуси формуласини бу қаторнинг ҳар бир ҳадига қўлланиб ва ушбу

$$A_0 = a_0, \; A_n \sin\alpha_n = a_n, \; A_n \cos\alpha_n = b_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

белгилашлардан фойдаланиб, тригонометрик ёйилманинг охирги, энг қулай кўринишини топамиз:

$$f(x) = a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) +$$

$$+ (a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x) + \ldots = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (5)$$

биз ҳамма вақт ёйилманинг мана шу кўринишини ўрганамиз*. Бу ерда 2π даврга эга бўлган x бурчакнинг функцияси x га каррали бўлган бурчакларнинг косинус ва синуслари бўйича ёйиляпти.

Биз функцияни тригонометрик қаторга ёйиш фикрига келишда даврий, тебранма ҳаракатлар ва улар билан боғлиқ бўлган миқдорлардан бошлаган эдик. *Бироқ, шуни қайд қилиш муҳимдирки, берилган чекли оралиқда аниқланган ва ҳеч қандай тебранма ҳаракат билан боғланмаган функцияларни текширишда ҳам юқоридаги ёйилмалар кўпинча фойдали бўлади.*

Коэффициентларни Эйлер — Фурье усули бўйича аниқлаш. Берилган 2π даврга эга бўлган $f(x)$ функция учун (5) тригонометрик ёйилма ўринли эканлигини аниқлаш учун ундаги $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ коэффициентларни билишимиз керак. Уларни аниқлашнинг қуйида келтириладиган усули XVIII аср иккинчи ярмида Эйлер томонидан, XIX аср бошларида Эйлерга боғлиқ бўлмаган равишда Фурье томонидан қўлланилган.

*Бундан буён ҳамма вақт $f(x)$ функцияни $[-\pi, \pi]$ оралиқда узлуксиз ёки бўлакли узлуксиз деб фараз қиламиз***.*

Ёйилма (5) ўринли деб фараз этайлик ва уни $-\pi$ дан $+\pi$ гача ҳадма-ҳад интеграллайлик: у ҳолда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 2\pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx\right]$$

га эга бўламиз.

Аммо, равшанки,

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = \left.\frac{\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0 \\ \text{ва} \quad &\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = -\left.\frac{\cos nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

* Равшанки, бу ёйидмадан, зарур бўлса (4) кўринишдаги ёйилмага осонгина қайтиш мумкин.

** Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқнинг чекли сондаги нуқталарида сакрашга эга бўлиб, бошқа ҳамма нуқталарида узлуксиз бўлса, бу $f(x)$ функция $[a, b]$ да бўлакли узлуксиз дейилади. Демак, $[a, b]$ оралиқни чекли сондаги сегментчаларга шундай ажратиш мумкинки, бу сегментчаларнинг ички нуқталарида $f(x)$ узлуксиз бўлади. Агар функциянинг сегментлар чегаравий нуқталаридаги қиймати сифатида шу функциянинг лимити олинса, $f(x)$ функция шу сегментчаларда узлуксиз бўлади. Бўлакли узлуксиз функцияни бир неча узлуксиз функцияларнинг „уланиши" дан ҳосил бўлган деб тасаввур этиш мумкин. Бироқ бу ҳолда „уланиш нуқталари" да (ва демак, сегментчалар чегаравий нуқталарида) функциянинг қиймати махсус аниқланади.

Шунинг учун йиғинди белгиси остидаги барча ҳадлар нолга тенг бўлиб қоладилар ва натижада, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx. \qquad (7)$$

Коэффициент a_m ни аниқлаш учун (5) тенгликнинг (биз уни ҳамма вақт ўринли деб фараз қиламиз) ҳар икки томонини $\cos mx$ га кўпайтириб яна ўша оралиқда ҳадма-ҳад интеграллаймиз:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\, dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx +$$

$$+ b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\, dx].$$

(6) муносабатга кўра, ўнг томондаги биринчи ҳад нолга айланади.

Агар $n \neq m$ бўлса,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin (n+m)\, x + \sin (n-m]\, dx = 0 \quad (8)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n+m)x + \cos(n-m)\, x] dx = 0. \quad (9)$$

Шунингдек

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2mx}{2}\, dx = \pi. \qquad (10)$$

Шундай қилиб, йиғинди ишораси остидаги коэффициенти a_m бўлмаган ҳамма интеграллар нолга айланади. Шундан коэффициент a_m ни топамиз:

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\, dx \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (11)$$

Худди шу тарзда, (5) ёйилманинг иккала томонини $\sin mx$ га кўпайтириб, сўнг ҳадма-ҳад интеграллаб, синус олдидаги коэффициентни топамиз:

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx\, dx \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (12)$$

Бунда биз (6) ва (8) тенгликлардан ташқари яна ушбу муносабатларга асосланамиз:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\, dx = 0, \text{ агар } m \neq n \text{ бўлса} \tag{13}$$

ва

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx\, dx = \pi. \tag{14}$$

Бу муносабатларни осонгина текшириб кўриш мумкин. Юқоридаги (7), (11), (12) формулалар *Эйлер—Фурье формулалари* номи билан маълум: шу формулалар билан ҳисобланган коэффициентларни берилган функциянинг *Фурье коэффициентлари*, улар ёрдамида тузилган (5) тригонометрик қаторни берилган функциянинг *Фурье қатори* дейилади. Биз ушбу бобда Фурье қаторлари билан шуғулланамиз.

Энди юқоридаги мулоҳазаларимизнинг мантиқий нуқтаи назардан нақадар асосли эканига эътибор қилайлик. Биз (5) тригонометрик ёйилма ўринли бўлсин деб фараз қилган эдик. Бу фаразимизнинг тўғри эканлиги ҳақидаги масала, табиийки, очиқдир. Ана шу фараз асосида биз (5) ёйилманинг коэффициентларини Эйлер ва Фурье формулалари бўйича топдик. Бу жараёндаги мулоҳазаларимизнинг ҳаммаси ишонарли бўлдими? Биз қаторни ҳадма-ҳад интеграллашдан бир неча марта фойдаландик, аммо бу амал ҳамма вақт ҳам мумкин бўлавермайди [**269-** n°]. Қаторни ҳадма-ҳад интеграллашнинг мумкинлиги учун етарли шарт шу қаторнинг текис яқинлашувчилигидир. Шундай қилиб, биз фақат қуйидагини қатъий исбот қилинган деб ҳисоблай оламиз:

агар $f(x)$ функция текис яқинлашувчи (5) тригонометрик қаторга ёйилган бўлса, бу қатор унинг Фурье қаторидир.*

Қаторнинг текис яқинлашувчи бўлиши аввалдан фараз қилинмаса, бизнинг юқоридаги мулоҳазаларимиз ҳатто функцияни фақат Фурье қаторига ёйиш мумкинлигини ҳам исбот этмайди. У ҳолда келтирилган мулоҳазаларнинг қандай маъноси бор? Уларни шундай бир йўл-йўриқ деб қараш мумкинки, бу йўл-йўриқ функциянинг тригонометрик ёйилмасини қидиришни, унинг Фурье қаторидан бошлаш етарли эканлигини кўрсатади. Айни вақтда, бу қаторнинг қандай шартларда яқинлашувчи бўлиши ва йиғиндиси худди берилган функцияни ифодалаши қатъий исбот қилиниши керак.

Фақат косинуслар ёки фақат синуслар бўйича ёйиш. Агарда $[-\pi, \pi]$ оралиқда (узлуксиз ёки ҳеч бўлмаса, бўлакли-узлуксиз) тоқ $f(x)$ функция берилган бўлса, у ҳолда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$$

бўлади. Бу интегрални иккита интеграл йиғиндиси $\int_{0}^{\pi} + \int_{-\pi}^{0}$ сифатида ёзиб, иккинчи интегралда ўзгарувчи x ни $-x$ га алмаштириш билан бунга ишонч ҳосил қилиш мумкин. Худди шунингдек, жуфт $f(x)$ функция учун

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx$$

эканини кўрсатиш мумкин.

Энди, $[-\pi, \pi]$ да бўлакли-дифференциалланувчи, жуфт функция $f(x)$ берилган бўлсин. У ҳолда $f(x)\sin nx$ кўпайтма тоқ функция бўлади ва, демак,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0.$$

Шундай қилиб, *жуфт функциянинг Фурье қаторида фақат косинусларгина иштирок этади:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \qquad (15)$$

Айни вақтда $f(x)\cos nx$ функция ҳам жуфт бўлгани учун ва, юқоридаги иккинчи эслатмага асосланиб a_n коэффициентларни қуйидагича ёза оламиз:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots) \qquad (16)$$

Агар берилган $f(x)$ функция тоқ бўлса, у ҳолда $f(x)\cos nx$ ҳам тоқ функция бўлади ва, демак,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Бундан *тоқ функциянинг Фурье қаторида фақат синусларгина иштирок этади* деган хулосага келамиз:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \qquad (17)$$

Шу билан бирга, $f(x)\sin nx$ нинг жуфт функция бўлишлигидан ёза оламиз:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (18)$$

Кези келганда шуни ҳам айтиб ўтиш керакки, $[-\pi, \pi]$ да берилган ихтиёрий $f(x)$ функцияни иккита — бири тоқ, бири жуфт функцияларнинг йиғиндиси сифатида ёзиш мумкин:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

бу ерда

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

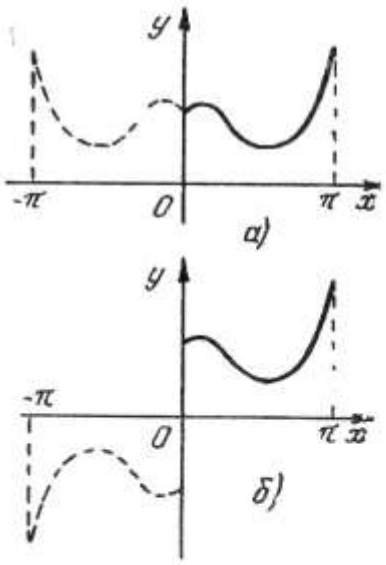
Равшанки, $f(x)$ функциянинг Фурье қатори $f_1(x)$ нинг фақат косинуслар бўйича, $f_2(x)$ нинг фақат синуслар бўйича ёйилмаларининг йиғиндисидан иборат бўлади.

Энди $f(x)$ функциямиз фақат $[0, \pi]$ оралиқда берилган деб фараз қилайлик. Уни шу оралиқда Фурье қаторига ёйиш ниятида, функциямизни x нинг $[-\pi, 0)$ оралиқдаги қийматлари учун ихтиёрий (аммо бўлакли-дифференциалланишни сақлаб) аниқлаб, аниқланиш соҳасини $[-\pi, \pi]$ га тўлдирамиз. Сўнг **403-** n° даги айтилган фикрларни қўлланамиз. Функцияни аниқлашдаги бу ихтиёрийлик, функция учун ҳар хил тригонометрик қаторлар ҳосил қилиш имкониятини беради.

Функциянинг $[-\pi, 0]$ оралиқда аниқланишининг ихтиёрийлигидан фойдаланиб, $f(x)$ ни фақат косинуслар ёки фақат синуслар бўйича ёйилмасини ҳосил қилиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам $0 < x \leqslant \pi$ да

$$f(-x) = f(x) \tag{19}$$

деб олсак, натижада $[-\pi, \pi]$ да жуфт функция ҳосил бўлади (75- *а*, чизма). Унинг ёйилмаси юқорида кўрганимиздек, фақат косинуслардан иборат бўлади. Ёйилма коэффициентларини (16) формула билан ҳисоблаш мумкин; бу формулага аввал берилган функциянинг қийматларигина киради.



75- *а*, *б*, чизма.

Агар функциянинг аниқланишини функция тоқ бўлиб қоладиган қилиб қуйидагича

$$f(-x) = -f(x) \tag{20}$$

тўлдирсак, $0 < x \leqslant \pi$, у ҳолда (75-*б*, чизма) унинг ёйилмасида фақат синуслар бўлган ҳадлар иштирок этади. Коэффициентлар (18) формуладан аниқланади.

Шундай қилиб, $[0, \pi]$ *оралиқда берилган функцияни маълум шартлар бажарилса, косинуслар бўйича ҳам, синуслар бўйича ҳам қаторга ёйиш мумкин экан.*

Лекин, $x = 0$ ва $x = \pi$ нуқталарда бу ёйилмаларнинг характери алоҳида текшириш талаб этади. Бу нуқталарда иккала ёйилма турлича характердадир. Соддалик учун берилган $f(x)$ функция $x = 0$ ва $x = \pi$ нуқталарда узлуксиз деб олайлик ва косинуслар бўйича ёйилмани текширайлик. Аввало $x = 0$ да (19) шарт функциянинг узлуксизлигини сақлайди ва

демак, (15) қатор $x=0$ да $f(0)$ га яқинлашади. Ундан ташқари,

$$f(-\pi+0)=f(\pi-0)=f(\pi)$$

бўлгани учун $x=\pi$ да ҳам вазият юқоридагидек бўлади.

Синуслар бўйича ёйилманинг характери бошқачароқдир. (20) шартнинг узлуксизликни бузишига доир ва бошқа мулоҳазаларга берилмасдан фақат шунигина қайд қиламизки, (17) қаторнинг йиғиндиси $x=0$ ва $x=\pi$ нуқталарда нолга тенг. Демак, бу қаторнинг йиғиндиси $f(0)$ ва $f(\pi)$ га фақатгина уларнинг қиймати ноль бўлгандагина тенг бўлади.

Агар $f(x)$ функция $[0, l]$ $(l>0)$ оралиқда берилган бўлса, **404-** n° даги каби, ўзгарувчини алмаштириш ёрдамида, уни косинуслар бўйича

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$$

ёки синуслар бўйича

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

қаторларга ёйиш масаласини ҳозиргина юқорида кўрилган ҳолга келтирамиз. Бу ёйилмаларнинг коэффициентлари эса, мос равишда ушбу формулалар бўйича ҳисобланади:

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (n=0, 1, 2, \ldots) \qquad (21)$$

ёки

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (n=1, 2, 3, \ldots). \qquad (22)$$

406. Мисоллар. Қуйида мисол сифатида келтириладиган функциялар дифференциалланувчи ёки бўлакли-дифференциалланувчи функциялар синфига тегишлидир. Демак, уларни Фурье қаторига ёйишнинг ўзи шубҳадан ҳоли ва шу сабабли бу масалага тўхталиб ўтирмаймиз.

1) Ушбу

$$f(x)=\frac{\pi-x}{2}$$

функция $(0, 2\pi)$ оралиқда қаторга ёйилсин.

399- n° нинг (1 а) формуласига кўра:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\,dx=\frac{1}{2\pi}\left(\pi x-\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_0^{2\pi}=0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2}\cos nx\,dx = \frac{1}{2\pi}(\pi - x)\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{2\pi} +$$

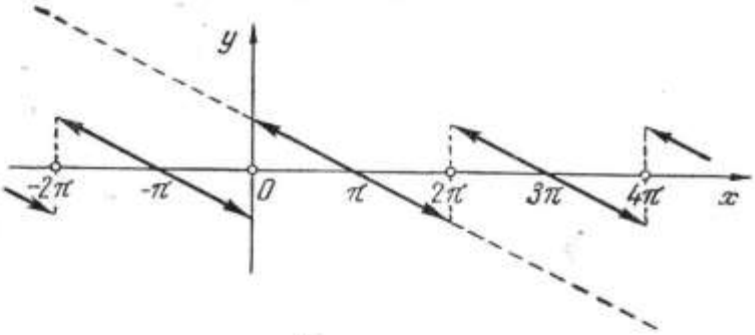
$$+ \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi} \sin nx\,dx = 0 \qquad (n = 1,\ 2,\ 3.\ \ldots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2}\sin nx\,dx = -\frac{1}{2\pi}(\pi - x)\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx = \frac{1}{n}.$$

Шундай қилиб, фақат синусларгина иштирок этган ажойиб ва содда ёйилмага эга бўламиз:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \qquad (0 < x < 2\pi) \qquad (*)$$

$x = 0$ (ёки $x = 2\pi$) нуқтада қатор йиғиндиси нолга айланади ва тенглик бузилади. Эслаб ўтилган оралиқдан ташқарида ҳам тенглик бажарилмайди. Қатор йиғиндиси $S(x)$ нинг графиги (76- чизма) чексиз параллел кесмалардан ва x ўқидаги айрим-айрим нуқталардан ташкил топган.



76- чизма.

2) Юқоридаги ёйилмадан натижа сифатида бошқа қизиқ ёйилмалар ҳосил қилиш мумкин. x ўрнига $2x$ қўйиб ва тенгликнинг иккала томонини 2 га бўлиб, (*) дан

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{2k} \qquad (0 < x < \pi)$$

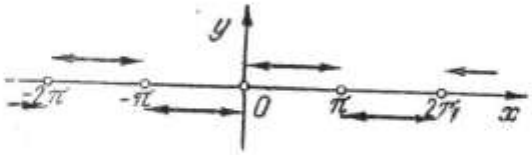
га эга бўламиз. Бу ёйилмани юқоридагисидан айириб,

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin (2k-1)x}{2k-1} \qquad (0 < x < \pi)$$

ни ҳосил қиламиз.

Бу қатор йиғиндисини $S(x)$ деб белгилайлик. Равшанки, $S(0) = S(\pi) = 0$. x нинг ишорасини ўзгартириб, синуснинг тоқ функциялигидан фойдаланиб x нинг $(-\pi, 0)$ даги қийматлари учун $S(x) = -\frac{\pi}{4}$ эканини топамиз.

x нинг бошқа қийматлари учун эса $S(x)$ даврийлик қонунига кўра топилади, масалан, $(2\pi, 3\pi)$ оралиқда яна $S(x) = \frac{\pi}{4}$ ва ҳоказо. $S(x)$ функция графиги 77- чизмада тасвирланган; 78- чизма эса қатор хусусий йиғиндиларнинг бу узлукли функцияга аста-секин яқинлашишини характерлайди.

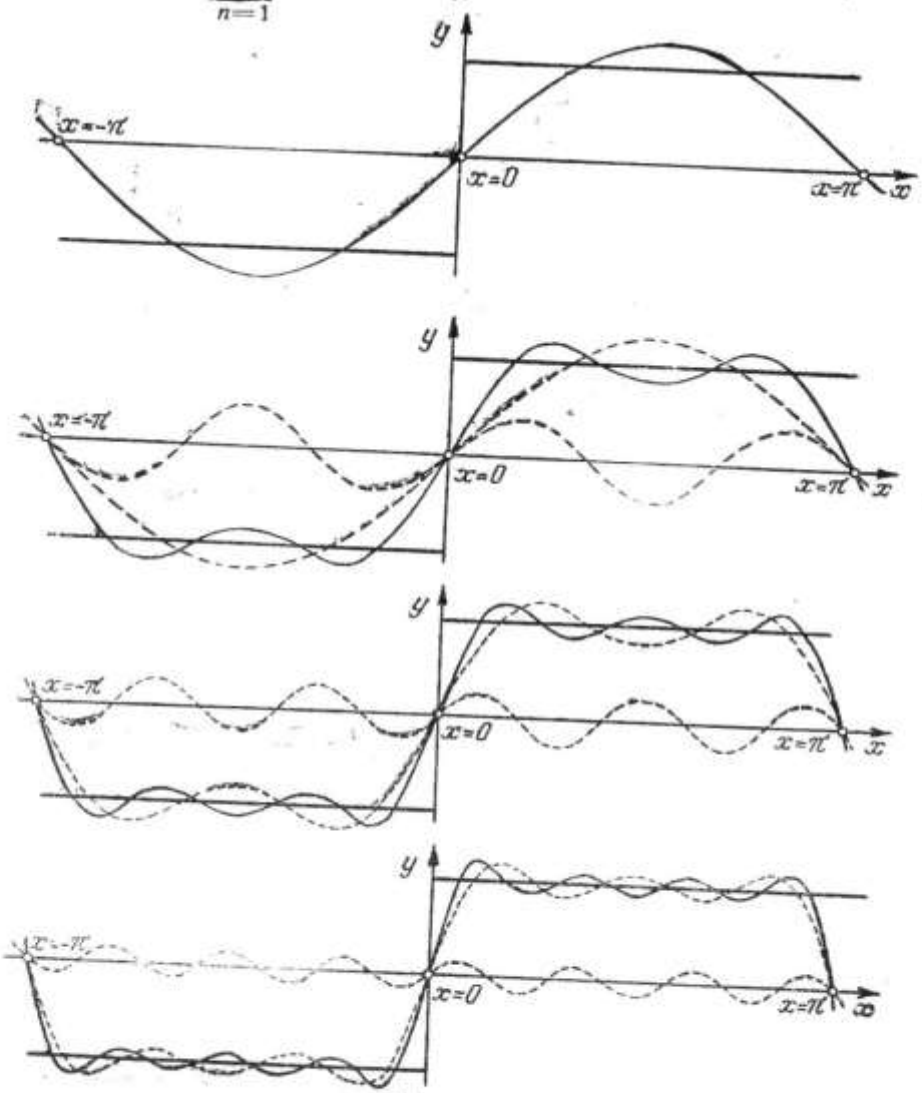


77- чизма.

Эслатма. Келтирилган ёйилмада $x = \frac{\pi}{2}$ деб олинса, бизга маълум бўлган [255- $n°$, (20)] Лейбниц қаторига эга бўламиз: $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$

Бу ёйилмани (*) ёйилма билан бирга қараб, x функциянинг ўзи учун қуйидаги қаторни ҳосил қилиш осон:

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n} \qquad (-\pi < x < \pi).$$



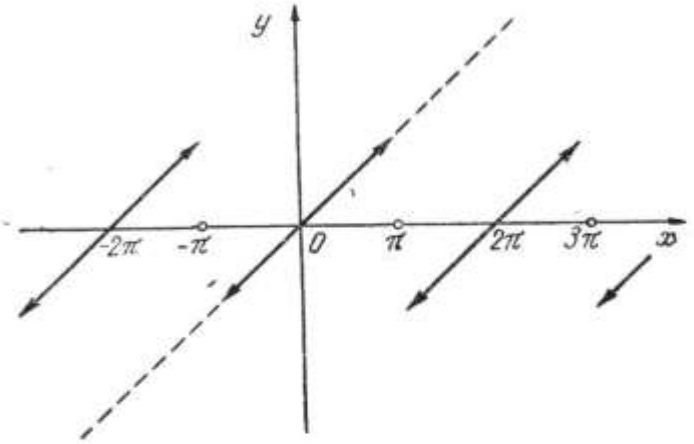
78- чизма.

Бу ёйилма бевосита x нинг $0 < x < \pi$ қийматлари учун келиб чиқади, аммо ў $x = 0$ да ҳам, равшанки, ўринли. Бундан ташқари ҳар икки томон тоқ функциялар бўлгани учун, ёйилма, умуман, $(-\pi, \pi)$ оралиқ учун ҳам тўғри бўлади.

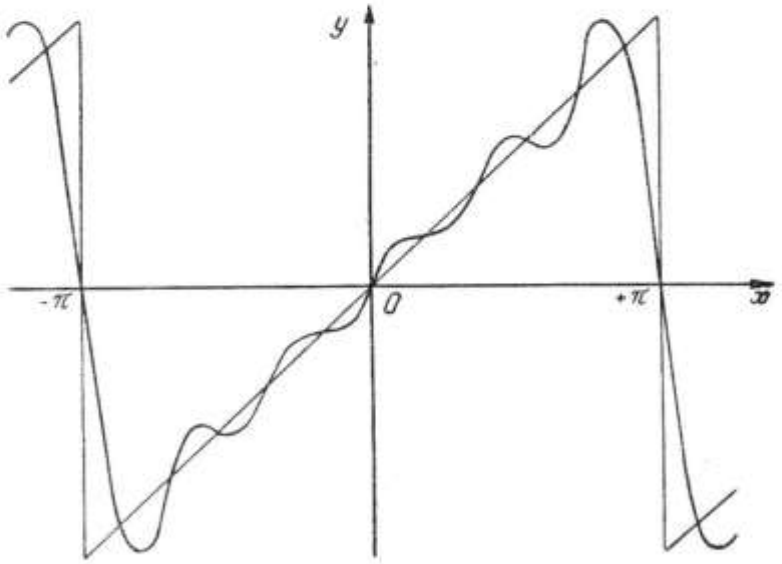
Қатор йиғиндисининг, аргумент x — ∞ дан $+\infty$ гача ўзгаргандаги графиги 79- чизмада келтирилган. 80- чизмада эса ушбу

$$y = s_5(x) = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5}\right)$$

хусусий йиғиндининг графиги тасвирланган.



79- чизма.



80 - чизма.

3) Қуйидаги функциялар қаторга ёйилсин (а ни бутун сон эмас деб оламиз).

(а) $f_1(x) = \cos ax$ жуфт функцияни $[-\pi, \pi]$ оралиқда косинуслар бўйича.

(б) $f_2(x) = \sin ax$ т о қ функцияни $(-\pi, \pi)$ оралиқда синуслар бўйича].
(а) Ҳисоблашлар ўтказамиз:

$$\frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ax \, dx = \frac{\sin a\pi}{a\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ax \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos (a+n) x + \cos (a-n) x] \, dx =$$

$$= (-1)^n \frac{2a}{a^2 - n^2} \frac{\sin a\pi}{\pi}.$$

Демак,

$$\frac{\pi \cos ax}{2 \sin a\pi} = \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{a^2 - n^2} \qquad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi).$$

(б) *Жавоб:*

$$\frac{\pi}{2} \frac{\sin ax}{\sin a\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{a^2 - n^2} \qquad (-\pi < x < \pi).$$

Э с л а т м а. Бу ёйилмалардан ҳам ажойиб натижалар олиш мумкин. (а) да $x = 0$ деб олинса,

$$\frac{1}{\sin a\pi} = \frac{1}{a\pi} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a\pi}{(a\pi)^2 - (n\pi)^2}$$

ҳосил бўлади. Ёки бу ерда $a\pi = z$ деб олсак:

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - (n\pi)^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi}\right]$$

ёйилмага эга бўламиз (z — ихтиёрий, π га каррали бўлмаган сон). Биз $\frac{1}{\sin z}$ функциянинг „содда касрларга ёйилмаси" га келдик (ундан **293-** n°, 3° да ва **308-** n°, 1° да фойдаланган эдик). Яна (а) да $x = \pi$ деб ҳисоблаб, $\operatorname{ctg} z$ функциянинг „содда касрларга ёйилмаси"ни топишимиз мумкин:

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - (n\pi)^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi}\right).$$

4) Ушбу $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2}$ функцияни $[0, \pi]$ оралиқда к о с и н у с л а р б ў й и ч а ёйилсин.

Коэффициентларни (16) формулалар бўйича ҳисоблаймиз:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{x^2}{4} - \frac{n\pi}{2}\right) dx = -\frac{\pi^2}{6}$$

Теореманинг исботини (23) кўринишдаги иккита тригонометрик кўпҳад кўпайтмаси ҳам тригонометрик кўпҳад сифатида ёзилиши мумкинлигини кўрсатишдан бошлайлик, Бу факт ушбу

$$\cos kx \cdot \cos lx, \quad \cos kx \cdot \sin lx, \quad \sin kx \cdot \sin lx$$

кўринишдаги, мумкин бўлган кўпайтмалар тригонометриянинг маълум формулаларига кўра, йиғинди сифатида—масалан,

$$\cos kx \cos lx = \frac{1}{2} \cos (k+l)x + \frac{1}{2} \cos (k-l)x$$

тасвирланишидан бевосита келиб чиқади.

Биз, ҳар қандай сон $\varepsilon > 0$ берилганда ҳам $[-\pi, \pi]$ оралиқдаги барча x лар учун ушбу $|f(x) - T(x)| < \varepsilon$ тенгсизликни қаноатлантирувчи тригонометрик кўпҳад $T(x)$ нинг мавжуд эканлигини кўрсатсак теорема исботланган бўлади.

Жуфт $f(x)$ функция учун бу осонгина исботланади. Вейерштрасснинг биринчи теоремасига [278- n°] кўра энг аввал t нинг $[-1, 1]$ оралиқдаги барча қийматлари учун $|f(\arccos t) - P(t)| < \varepsilon^*$ тенгсизликни қаноатлантирадиган алгебраик $P(t)$ кўпҳадни тузиб оламиз. Энди, бу ерда $t = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$ деб олсак, бутун $[0, \pi]$ оралиқ учун

$$|f(x) - P(\cos x)| < \varepsilon$$

ни ҳосил қиламиз. $f(x)$ ва $\cos x$ функциялар жуфт функциялар бўлганликлари учун, бу тенгсизлик x ўрнига $-x$ олинганда ҳам бажарилаверади; яъни — $[-\pi, \pi]$ даги барча x лар учун ва, демак, даврийликка кўра, бутун $(-\infty, +\infty)$ оралиқ учун ўз кучини сақлайди. Юқорида эслатилган фактимизга кўра, $P(\cos x)$ ифода тригонометрик кўпҳад сифатида ёзилиши мумкин. Бундан, кўрилаётган ҳол учун теорема ўринли экани келиб чиқади.

Энди умумий ҳолни, яъни *2π даврли ихтиёрий узлуксиз $f(x)$ функцияни кўрайлик.* Исбот қилинган юқоридаги ҳолга кўра, ушбу жуфт

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ ва } f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \cdot \sin x$$

функциялар учун шундай иккита $T_1(x)$, $T_2(x)$ тригонометрик кўпҳадлар мавжудки,

$$|f_1(x) - T_1(x)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |f_2(x) - T_2(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

тенгсизликлар бажарилади.

Булардан $|f_1 \sin^2 x - T_1 \sin^2 x| < \frac{\varepsilon}{4}$, $|f_2 \sin x - T_2 \cdot \sin x| < \frac{\varepsilon}{4}$ тенгсизликлар келиб чиқади. Буларни қўшиб, ушбу

$$|f(x) \sin^2 x - T_3(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{25}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз, бу ерда

$$T_3(x) = T_1(x) \sin^2 x + T_2(x) \sin x$$

тригонометрик кўпҳад [юқоридаги эслатмага қаранг].

Хулоса.

Математик анализ талабаларни зарурий маълумотлар мажмуаси (тушунчалар, тасдиқлар ва уларнинг исботи, масалаларини йечиш усуллари ва бошқалар) билан таништиради. Айни пайтда у талабаларни мантиқий фикрлашга, натижавий хулосани тў\ри чиқаришга ўргатади ҳамда математик маданиятни оширишга хизмат қилади.

Ушбу мустақил ишим орқали мен сонли кетма – кетликнинг юқори ва қуйи лимитларини аниқлаш методикасини олтита режа орқали кўриб ўтдим.

Маълумки, Президентимиз И.Каримовнинг ташаббуслари билан Республикамизда узлуксиз таълим тизимини жорий этилди ҳамда асоси бўлмиш «Таълим тў\рисида»ги +онун ва «Кадрлар тайёрлаш миллий дастури» қабул қилинди. (Олий Мажлиснинг 1997 йил 29 августдаги ИХ сессияси) Унда келтирилишича ўқитувчиларнинг шахси ва касбий тайёргарлигидаги қатор камчиликлар, муаммолар аниқланди. Жумладан, ўқитувчиларнинг ўқувчиларга замонавий билим беришига имкон яратадиган замонавий билим, кўникма ва малакаларга эга эмаслиги, ўқитувчи таълим-тарбия жараёнида якка ҳоким эканлиги, педагогик муносабат¬лар авторитар принсипга асосланиши, ўқитувчи ва ўқувчилар ўртасидаги муносабат мажбурий итоаткорликка асосланганлиги, ўқувчилар¬да онгли интизомни вужудга келтиришга эътибор берилмаёт¬ганлиги, ўқувчиларнинг билиш фаолияти эса билим ва кўникмаларни репродуктив даражада ўзлаштиришга қаратилганлиги, ўқувчиларнинг фаолияти эркин ва мустақил эмаслиги таъкидланиб, уларни бартараф этиш долзарб муаммо эканлиги қайд этилган.

“Ташқаридан қараганда математикани олий ўқув юртларида ўқитиш жуда содда ва асосан қуйидаги икки муаммодан иборатдек кўринади: биринчидан, ўқув режасига кўра ажратилган соатларда баён этиш мумкин бўлган материални ажратиш, ва иккинчидан, уни талабаларга мантиқий баён этиш. Ва бунинг натижасида олий ўқув юрти педагогикаси мазкур масалалар билангина чегараланади деган тасаввур пайдо бўлади. Лекин аслини олганда танлаб олинган ўқув материалини ўқитиш муаммолари бир мунча мураккабдир.

А д а б и ё т л а р:

1. Гмурман В.Е., Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика.-Т.:

О`қитувчи, 1977.

2. Соатов Ё.У. Олий математика.,3-ж.-Тошкент: О`збекистон, 1996.

3. Гмурман В.Е. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан масалалар йечишга доир қо`лланма.-Тошкент: О`қитувчи, 1980.

4. Абдуалимов Б.ва бош., Олий математикадан масалалар ечиш бо`йича қо`лланма.-Тошкент, О`қитувчи , 1985.

ццц.гоогле.ру

ццц. Зиёнет.уз

ццц.реф.уз