

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI  
XALQ TA'LIMI VAZIRLIGI**

**NAVOIY DAVLAT PEDAGOGIKA INSTITUTI**

Fizika-matematika fakulteti  
“Umumiy matematika” kafedrası

# **KURS ISHI**

**Mavzu: Absolyut va shartli yaqinlashuvchi xosmas  
integrallar.**

**Bajardi:** 3-kurs “D” guruhi talabasi  
Raxmatova Komila Muzaffar qizi

**Qabul qildi:** o'q.Majidov Sh A

**Navoiy-2015**

## **REJA**

### **Kirish.**

- 1. Chegaralari cheksiz xosmas integrallar.**
- 2. Yaqinlashuvchi xosmas integralning sodda xossalari.**
- 3. Xosmas integralning yaqinlashuvchiligi.**
- 4. Manfiy bo'lmagan funksiya xosmas integralining yaqinlashuvchiligi.**
- 4. Manfiy bo'lmagan funksiya xosmas integralining yaqinlashuvchiligi.**

### **Xulosa.**

### **Adabiyotlar ro'yxati.**

## **Kirish**

*Ilmdan bir shu'la dilga tushgan on,  
Shunda bilursankim, ilm bepoyon.*

Mustaqillik yillarida biz ijtimoiy – siyosiy jarayonlar odamlar hayotini keskin tarzda bir o'zandan ikkinchi o'zanga burib yuborgan, hayotimiz butunlay boshqacha tus olgan va turmushimiz o'zgacha mazmun kasb etgan murakkab ruhiy – ma'naviy holatni boshdan kechiryapmiz. Yillar mobaynida qotib qolgan tushunchalarimiz o'zgarmoqda va mudrab qolgan ongimiz uyg'onmoqda. Keyingi yillarda hurriyat butun o'zgaruvchilik mo'jizasini ko'rsatib, dunyoqarashimizni o'zgartirib, fikrimiz, tafakkurimizni boyitmoqda. Voqealar rivojini butun mohiyati bilan anglashni, dunyoga kengroq va teranroq nazar bilan qarashni taqozo etadi.

“Kadrlar tayyorlash milliy dasturi” ning maqsadi – ta'lim sohasini tubdan isloh qilish uni o'tmishdan qolgan mafkuraviy qarashlar va sarqitlardan to'la xalos etish, yuksak ma'nqaviy – axloqiy talablarga javob beruvchi yuqori malakali kadrlar tayyorlash milliy tizimini yaratish” dan iboratdir.

Prezidentimiz Islom Abdug'aniyevich Karimov ta'kidlaganlaridek , jamiyatda mustaqil fikrlovchi, erkin shaxsni shakllantirsak, o'zining qadr – qimmatini anglaydigan, irodasi baquvvat, iymoni butun, hayotda aniq maqsadga ega bo'lgan insonlarni tarbiyalash imkoniga ega bo'lamiz.

O'zbekiston davlatining har tomonlama rivojlanishini va amalga oshirilayotgan islohatlarning muvaffaqiyati aholining ayniqsa, yosh avlodning mustaqil fikrlashi, keng bilimi, tarbiyasi va madaniyatining qay darajada shaakllanganlik darajasiga bog'liq. SHu sababli jamiyatimizdagi barcha yoshlarda erkin mushohada qilish, tanqidiy fikrlash qobiliyatini shakllantirishimiz lozim. Bu esa o'z navbatida ta'lim jarayoniga boshqacha nazar bilan qarashni talab etadi. Dunyoga yangi ko'z bilan qaraydigan, uddaburon, ishini ko'zini biluvchi, buyuk kelajagimiz poydevorini quruvchi va yuksaltiruvchi mutaxasis kadrlarni tayyorlash, Respublikamiz pedagoglari oldida turgan eng muhim va mas'uliyatli vazifadir.

Insoniyat turmush tarzining rivojlanishi yangi-yangi kashfiyotlarning yaratilishiga sabab bo'lmoqda. Inson yangilik yaratish jarayonida har xil to'siqlarga duch keladi va shu to'siqlarni yengib o'tish mobaynida yana yangi ixtirolar vujudga kelaveradi. Lekin hayot tajribalaridan ma'lumki, ko'pincha yangi kashfiyot ma'lum bir muammoni hal qilish jarayonida yuzaga keladi.

Uzluksiz ta'lim tizimida uzluksiz metodik xizmat ta'lim-tarbiya ishlarining asosini tashkil etadi.

Shuning uchun ham maktabda faoliyat yuritayotgan har bir o'qituvchi metodik xizmatning eng so'ngi yutuqlaridan boxabar bo'lishi shart. Ta'lim muassasalarida ijodiy mihitni rivojlantirish mezonini shakllantirishning talabi ham shu. Bu har bir pedagogdan izlanish va yangilikka intilishni taqazo etadi.

Fan o'qituvchilari o'quvchilarga dars berish davomida faqat darslik bilan chegaralanib qolmasliklari lozim. Har bir mavzu o'rganilayotganda ushbu mavzu bo'yicha atroflicha va mukammal bilim sohibi bo'lishlari talab etiladi.

## **Absolyut va shartli yaqinlashuvchi xosmas integrallar.**

### **1. Chegaralari cheksiz xosmas integrallar**

Funksiyaning aniq integrali (Riman integrali) tushunchasini kiritishda integrallash oraliq'ining chekli bulishi talab etilgan edi.

Endi cheksiz oraliqda  $[a, +\infty)$ ;  $(-\infty, a]$ ;  $(-\infty, +\infty)$  oraliqlar-da) berilgan funksiyaning shu oraliq bo'yicha integral tushunchasini keltiramiz va o'rganamiz.

1. Chegaralari cheksiz xosmas integral tushunchasi.  $f(x)$  funksiya  $[a, +\infty)$  oraliqda ( $a \in R$ ) berilgan bo'lib, ixtiyoriy  $[a, t]$  da ( $a \leq t < +\infty$ ) integrallanuvchi bo'lsin:  $f(x) \in R([a, t])$ .

Ushbu

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx$$

belgilashni kiritamiz.

**1-ta'rif.** Agar  $t \rightarrow +\infty$  da  $F(t)$  funksiyaning limiti mavjud bo'lsa, bu limiti  $f(x)$  funksiyaning  $[a, +\infty)$  cheksiz oraliq bo'yicha xosmas integrali deyiladi va

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

kabi belgilanadi:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx. \quad (1)$$

(1) integralni chegarasi cheksiz xosmas integral ham deb yuritiladi.

Qulaylik uchun, bundan keyin “chegarasi cheksiz xosmas integral” deyish o’rniga “integral” deymiz.

**2-ta’rif.** Agar  $t \rightarrow +\infty$  da  $F(t)$  funksiyaning limiti mavjud va chekli bo’lsa, (1) integral yaqinlashuvchi deyiladi.

Agar  $t \rightarrow +\infty$  da  $F(t)$  funksiyaning limiti cheksiz yoki mavjud bo’lmasa, (1) integral uzoqlashuvchi deyiladi.

**1-misol.** Ushbu

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$$

integralni qaraylik. Bu holda

$$F(t) = \int_0^t e^{-x} dx = -e^{-t} + 1$$

bo’lib,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 1$$

bo’ladi.

Demak, berilgan integral yaqinlashuvchi va

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1.$$

**2-misol.** Ushbu

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad (a > 0, \quad \alpha > 0)$$

integral uchun

$$F(t) = \int_a^t \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \ln t - \ln a, & \text{agar } \alpha = 1 \text{ бўлса} \\ \frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}, & \text{agar } \alpha \neq 1 \text{ бўлса} \end{cases},$$

bo’lib,  $t \rightarrow +\infty$  da

$$F(t) \rightarrow \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1} \quad (\alpha > 1),$$

$$F(t) \rightarrow +\infty \quad (\alpha \leq 1)$$

bo’ladi.

Demak,

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

integral  $\alpha > 1$  bo’lganda yaqinlashuvchi,  $\alpha \leq 1$  bo’lganda uzoqlashuvchi bo’ladi.

**3-misol.** Ushbu

$$\int_0^{+\infty} \cos x dx$$

integral uzoqlashuvchi bo’ladi, chunki  $t \rightarrow +\infty$  da

$$F(t) = \int_0^t \cos x dx = \sin t$$

funksiyaning limiti mavjud emas.

YUqoridagidek,

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

xosmas integrallar va ularning yaqinlashuvchiligi, uzoqla-shuvchiligi ta'riflanadi:

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx, \quad$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{u \rightarrow +\infty \\ v \rightarrow -\infty}} \int_v^u f(x) dx.$$

## 2. Yaqinlashuvchi xosmas integralning sodda xossalari.

Xosmas integralning turli xossalarini  $f(x)$  funksiyaning  $[a, +\infty)$  oraliq bo'yicha olingan

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

integrali uchun bayon etamiz. Bu xossalarni

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

integrallar uchun keltirishni o'quvchiga havola etamiz.

**1-xossa.** Agar  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  integral yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\int_b^{+\infty} f(x) dx \quad (a < b)$$

integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi va aksincha. Bunda

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^{+\infty} f(x) dx \quad (2)$$

tenglik bajariladi.

◀ Ravshanki,

$$\int_a^t f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^t f(x) dx. \quad (a < b < t)$$

Aytaylik,  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  integral yaqinlashuvchi bo'lsin.  
Demak,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$$

mavjud va chekli bo'ladi:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

(2) tenglikdan foydalanib,  $t \rightarrow +\infty$  da

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_b^t f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx - \int_a^b f(x) dx$$

bo'lishini topamiz. Demak,  $\int_b^{+\infty} f(x) dx$  integral yaqinlashuvchi va

$$\int_b^{+\infty} f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx - \int_a^b f(x) dx$$

bo'ladi.

Aytaylik,  $\int_b^{+\infty} f(x) dx$  integral yaqinlashuvchi bo'lsin,

Demak,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_b^t f(x) dx = \int_b^{+\infty} f(x) dx$$

chekli bo'ladi.

(2) tenglikdan,  $t \rightarrow +\infty$  da

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^{+\infty} f(x) dx$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak,  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  integral yaqinlashuvchi va

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^{+\infty} f(x) dx$$

bo'ladi. ►

**2-xossa.** Agar  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  integral yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda  $\int_a^{+\infty} C \cdot f(x) dx$  ham  
( $C = \text{const}$ ) yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\int_a^{+\infty} C \cdot f(x) dx = C \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

bo'ladi.

**3-xossa.** Agar  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  integral yaqinlashuvchi bo'lib,  $\forall x \in [a, +\infty)$  da  $f(x) \geq 0$  bo'lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \geq 0$$

bo'ladi.

**4-xossa.** Agar  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  va  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  integrallar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$\int_a^{+\infty} (f(x) \pm g(x))dx$  integral ham yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\int_a^{+\infty} (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx \pm \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

bo'ladi.

**5-xossa.** Agar  $\forall x \in [a, +\infty)$  da  $f(x) \leq g(x)$  bo'lib,  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  va  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  integrallar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

bo'ladi.

2)- 5)- xossalarning isboti xosmas integral va uning yaqinlashuvchiligi ta'riflaridan bevosita kelib chiqadi.

Faraz qilaylik,  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar  $[a, +\infty)$  da berilgan bo'lib,  $f(x)$  funksiya chegaralangan ( $m \leq f(x) \leq M$ ,  $x \in [a, +\infty)$ ),  $g(x)$  funksiya esa o'z ishorasini o'zgartirmasin ( $\forall x \in [a, +\infty)$  da har doim  $g(x) \geq 0$  yoki  $g(x) \leq 0$ ).

**6-xossa.** Agar  $\int_a^{+\infty} f(x) \cdot g(x)dx$  va  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  integrallar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda shunday o'zgarmas  $\mu (m \leq \mu \leq M)$  topiladiki,

$$\int_a^{+\infty} f(x) \cdot g(x)dx = \mu \int_a^{+\infty} g(x)dx \quad (3)$$

bo'ladi.

◀ Aytaylik,  $\forall x \in [a, +\infty)$  da  $g(x) \geq 0$  bo'lsin. Unda  $m \cdot g(x) \leq f(x)g(x) \leq M g(x)$

bo'lib,

$$m \int_a^t g(x)dx \leq \int_a^t f(x)g(x)dx \leq M \int_a^t g(x)dx$$

bo'ladi. Bu tengsizliklardan,  $t \rightarrow +\infty$  da limitga o'tsak unda



$$m \int_a^{+\infty} g(x)dx \leq \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \leq M \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Ravshanki,

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx = 0$$

bo'lganda (3) tenglik bajariladi.

Aytaylik,

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx > 0$$

bo'lsin. Bu holda

$$m \leq \frac{\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx}{\int_a^{+\infty} g(x)dx} \leq M$$

bo'ladi.

Agar

$$\mu = \frac{\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx}{\int_a^{+\infty} g(x)dx}$$

deb olinsa, unda  $m \leq \mu \leq M$  bo'lib,

$$\int_a^{+\infty} f(x) \cdot g(x)dx = \mu \cdot \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

bo'ladi.

$\forall x \in [a, +\infty)$  da  $g(x) \leq 0$  bo'lganda (3) tenglikning bajari-lishi yuqoridagidek isbotlanadi. ►

Odatda, bu xossa o'rta qiymat haqidagi teorema deyiladi.

### 3. Xosmas integralning yaqinlashuvchiligi.

Aytaylik,  $f(x)$  funksiya  $[a, +\infty)$  oraliqda berilgan bo'lsin.

Ma'lumki,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

xosmas integralning yaqinlashuvchiligi ushbu

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx \quad (t > a)$$

funksiyaning  $t \rightarrow +\infty$  da chekli limitga ega bo'lishidan iborat.

funksiyaning chekli limitga ega bo'lishi haqidagi Koshi teoremasi, ya'ni  $F(t)$  funksiyaning  $t \rightarrow +\infty$  da chekli limitga ega bo'lishi uchun

$$\forall \varepsilon > 0, \exists t_0 > a, \forall t' > t_0, \forall t'' > t_0 :$$

$$|F(t'') - F(t')| < \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli ekani keltirilgan edi.

Bu tushuncha va tasdiqdan

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad (4)$$

xosmas integralning yaqinlashuvchiligini ifodalaydigan qkuyidagi teoreмага kelamiz.

**Teorema (Koshi teoremasi).** (4) integralning yaqinla-shuvchi bo'lishi uchun

$\forall \varepsilon > 0$  son olinganda ham shunday  $t_0 \in R$  ( $t_0 > a$ ) topilib, ixtiyoriy

$t' > t_0, t'' > t_0$  bo'lganda

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

Ushbu

$$\int_0^{+\infty} x \sin x dx$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo'ladimi?

Ushbu

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^3} dx = -\frac{1}{8}$$

tenglilik isbotlansin.

#### 4. Manfiy bo'lmagan funksiya xosmas integralining yaqinlashuvchiligi.

Aytaylik,  $f(x)$  funksiya  $[a, +\infty)$  oraliqda berilgan bo'lib,  $\forall x \in [a, +\infty)$  da  $f(x) \geq 0$  bo'lsin. Bu funksiyaning  $[a, t]$  da ( $a < t < +\infty$ ) integrallanuvchi deylik:

$f(x) \in R([a, t])$ . Bu holda

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx$$

funksiya  $(a, +\infty)$  oraliqda o'suvchi bo'ladi.

◀ Haqiqatdan ham,  $a < t_1 < t_2 < +\infty$  da

$$F(t_2) = \int_a^{t_2} f(x)dx = \int_a^{t_1} f(x)dx + \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx = F(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx$$

bo'lib,

$$\int_{t_1}^{t_2} f(x)dx \geq 0$$

bo'lganligi sababli

$$F(t_2) \geq F(t_1)$$

bo'ladi. Demak,  $\forall t_1, t_2 \in (a, +\infty)$  uchun

$$t_1 < t_2 \Rightarrow F(t_1) \leq F(t_2). \blacktriangleright$$

**1-teorema.** Manfiy bo'lmagan  $f(x)$  funksiya xosmas integrali

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad (f(x) \geq 0, x > a) \quad (1)$$

ning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun  $F(t)$  funksiyaning yuqoridan chegaralangan, ya'ni

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall t > a : F(t) \leq C$$

bo'lishi zarur va yetarli.

◀ Zarurligi. Aytaylik, (1) integral yaqinlashuvchi bo'lsin. Ta'rifga binoan

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t)$$

mavjud va chekli bo'ladi. Unda,  $\exists C \in \mathbb{R}, \forall t > a$  da  $F(t) \leq C$  bo'ladi.

Etarlilik. Aytaylik,  $F(t)$  funksiya  $(a, +\infty)$  da yuqorida-gi chegaralangan bo'lsin.

Ayni paytda,  $F(t)$  o'suvchi funksiya. Demak,  $t \rightarrow +\infty$  da  $F(t)$  funksiya chekli limitga ega. Bu esa (1) integralni yaqinlashuvchi bo'lishini bildiradi. ▶

Bu teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. Agar  $F(t)$  funksiya ( $t \in (a, +\infty)$ ) yuqoridan chegara-lanmagan bo'lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

integral uzoqlashuvchi bo'ladi.

**2. Taqqoslash teoremlari.** Ikki funksiya ma'lum munosabatda bo'lganda birining xosmas integralining yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo'lishidan ikkinchisining ham yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo'lishini ifodalovchi teoremlarni keltiramiz. Odatda, ular taqqoslash teoremlari deyiladi.

**2-teorema.** Faraz qilaylik,  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar  $[a, +\infty)$  oraliqda berilgan

bo'lib,  $\forall x \in [a, +\infty)$  da

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad (2)$$

bo'lsin.

Agar  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Agar  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

◀ Aytaylik, (2) munosabat o'rinli bo'lib,  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  yaqinlashuvchi bo'lsin. Unda 1-teoremaga ko'ra

$$G(t) = \int_a^t g(x)dx \leq C$$

bo'ladi. Ayni paytda,

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx \leq G(t)$$

bo'lganligi sababli ya'ni 1-teoremaga binoan  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  yaqinlashuvchi bo'ladi.

Aytaylik, (2) munosabat o'rinli bo'lib,  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  uzoqlashuvchi bo'lsin. Unda yuqorida keltirilgan natija va  $F(t) \leq G(t)$

tengsizlikdan  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  integralning uzoqlashuvchiligi kelib chiqadi. ▶

3-teorema. Faraz qilaylik,  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar  $[a, +\infty)$  da  $f(x) \geq 0$   $g(x) \geq 0$  bo'lib,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \quad (0 \leq k \leq +\infty)$$

bo'lsin.

Agar  $k < +\infty$  bo'lib,  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Agar  $k > 0$  bo'lib,  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

◀ Aytaylik,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k < +\infty$$

bo'lib,  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  yaqinlashuvchi bo'lsin. Limit ta'rifiga binoan  $\forall \varepsilon > 0, \exists t_0 > a, \forall t > t_0$

da

$$f(x) < (k + \varepsilon)g(x) \quad (3)$$

bo'ladi. YAqinlashuvchi integralning xossasiga ko'ra

$$\int_a^{+\infty} (k + \varepsilon)g(x)dx$$

yaqinlashuvchi bo'ladi.

(3) munosabat va 2-teoremdan foydalanib,  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  integralning yaqinlashuvchi bo'lishini topamiz.

Aytaylik,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k > 0$$

bo'lib,  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  uzoqlashuvchi bo'lsin. Bu holda  $k_1$  son ( $k > k_1 > 0$ ) uchun shunday  $t'_0 > a$  topiladiki,  $\forall x > t'_0$  da

$$\frac{f(x)}{g(x)} > k_1,$$

ya'ni

$$g(x) < \frac{1}{k_1} f(x) \quad (4)$$

bo'ladi.

(4) munosabat va 2-teoremdan foydalanib  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  integralning uzoqlashuvchi bo'lishini topamiz. ►

Natija. Agar

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$$

bo'lib,  $0 < k < +\infty$  bo'lsa, u holda  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  va  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  integrallar bir vaqtda yoki yaqinlashuvchi, yoki uzoqlashuvchi bo'ladi. Ko'p hollarda biror xosmas integralning yaqinlashuvchi-ligini yoki uzoqlashuvchiligini aniqlashda avvaldan

yaqinla-shuvchiligi yoki uzoqlashuvchiligi ma'lum bo'lgan integral bilan taqqoslab (yuqorida keltirilgan teoremlardan foydalanib) qaralayotgan integralning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo'lishi topiladi.

Masalan,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

integralni

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad (a > 0, \alpha > 0)$$

integral bilan taqqoslab, quyidagi natijaga kelamiz:

Natija. Aytaylik, biror  $C$  ( $0 < C < +\infty$ ) va  $\alpha > 0$  sonlar uchun  $x \rightarrow +\infty$  da

$$f(x) \sim \frac{C}{x^\alpha},$$

ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha \cdot f(x) = C$$

bo'lsin. Unda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

integral  $\alpha > 1$  bo'lganda yaqinlashuvchi,  $\alpha \leq 1$  bo'lganda uzoqla-shuvchi bo'ladi.

**1-misol.** Ushbu

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{1+x^2} dx$$

integral yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◀ Agar

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{1+x^2}, \quad g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

deyilsa, unda  $\forall x \in [0, +\infty)$

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

bo'ladi.

Ravshanki,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

integral yaqinlashuvchi. 2-teoremaga ko'ra berilgan xosmas integral yaqinlashuvchi bo'ladi. ▶

**2-misol.** Ushbu

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

integral yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◀  $\forall x \geq 1$  da

$$f(x) = e^{-x^2}, \quad g(x) = e^{-x}$$

funksiyalari uchun

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

bo'ladi. Quyidagi

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$$

integralning yaqinlashuvchiligi ravshan. Demak,

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

integral yaqinlashuvchi bo'ladi. ►

## 5. Xosmas integralning absolyut va shartli yaqinlashuvchiligi.

Aytaylik,  $f(x)$  funksiya  $[a, +\infty)$  oraliqda berilgan bo'lsin. Bunda,  $\forall x \in [a, +\infty)$  uchun  $f(x) \geq 0$  bo'lishi shart emas

**Ta'rif.** Agar

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

integral yaqinlashuvchi bo'lsa,  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  integral absolyut yaqinlashuvchi deyiladi.

Agar  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  yaqinlashuvchi bo'lib,  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

shartli yaqinlashuvchi integral deyiladi.

**4-teorema.** Agar integral absolyut yaqinlashuvchi bo'lsa, u yaqinlashuvchi bo'ladi.

◀ Aytaylik,

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

integral yaqinlashuvchi bo'lsin. Berilgan  $f(x)$  va  $|f(x)|$  funk-siyalar yordamida ushbu

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} (f(x) + |f(x)|) ,$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2} (-f(x) + |f(x)|)$$

funksiyalarni tuzamiz.

Bu funksiyalar uchun,  $\forall x \in [a, +\infty)$  da

1)  $\varphi(x) \geq 0$  ,  $\psi(x) \geq 0$

2)  $\varphi(x) \leq |f(x)|$  ,  $\psi(x) \leq |f(x)|$

3)  $\varphi(x) - \psi(x) = f(x)$

bo'ladi. Yuqorida keltirilgan 2-teoremadan foydalanib, quyidagi

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx, \quad \int_a^{+\infty} \psi(x) dx$$

integral yaqinlashuvchiligini topamiz.

Unda

$$\int_a^{+\infty} (\varphi(x) - \psi(x)) dx$$

integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Demak,

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

yaqinlashuvchi bo'ladi. ►

Ushbu integral

$$\int_0^{+\infty} \left( e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}} \right) dx$$

integral yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

2.  $k$  ning qanday qiymatlarida

$$\int_1^{+\infty} x^k \frac{x + \sin x}{x - \sin x} dx \quad (k < 1)$$

integral yaqinlashuvchi bo'ladi?

### Integralning yaqinlashuvchiligi alomatlari.

1. Dirixle alomati. Faraz qilaylik,  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar  $[a, +\infty)$  oraliqda berilgan bo'lsin.

**1-teorema (Dirixle alomati).**  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$f(x)$  funksiya  $[a, +\infty)$  da uzluksiz va uning shu oraliqdagi boshlang'ich  $F(x)$  ( $F'(x) = f(x)$ ) funksiyasi chegara-lang'an;

$g(x)$  funksiya  $[a, +\infty)$  da uzluksiz  $g'(x)$  hosilaga ega ;

$g(x)$  funksiya  $[a, +\infty)$  da kamayuvchi;



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

U holda

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$$

integral yaqinlashuvchi bo'ladi.

◀ Ravshanki,

$$f(x) \in C([a, +\infty)), g(x) \in C([a, +\infty)) \Rightarrow f(x)g(x) \in C([a, +\infty))$$

bo'ladi. Binobarin,  $f(x) \cdot g(x)$  funksiya  $[a, t]$  ( $a < t < +\infty$ ) oraliqda integrallanuvchi bo'ladi. Bo'laklab integrallash formulasi-dan hamda teoremaning 1)- va 2)- shartlaridan foydalanib topamiz:

$$\int_a^t f(x)g(x)dx = \int_a^t g(x)dF(x) = g(x)F(x) \Big|_a^t - \int_a^t f(x)g'(x)dx \quad (1)$$

Endi

$$|g(t)F(t)| \leq Mg(t) \quad (M = \sup|F(t)| < +\infty)$$

bo'lishini e'tiborga olsak, undan  $t \rightarrow +\infty$  da

$$g(t)F(t) \rightarrow 0$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Berilishiga ko'ra,  $g(x)$  funksiya  $[a, +\infty)$  oraliqda uzluk-siz differensiallanuvchi hamda shu oraliqda kamayuvchi funksiya. Demak,  $\forall x \in [a, +\infty)$  da

$$g'(x) \leq 0$$

bo'ladi. SHuni e'tiborga olib topamiz:

$$\begin{aligned} \int_a^t |F(x)g'(x)|dx &\leq M \int_a^t |g'(x)|dx = -M \int_a^t g'(x)dx = \\ &= M(g(a) - g(t)) \leq M g(a) \quad (g(t) \geq 0). \end{aligned}$$

Unda 44 - ma'ruza-dagi 2 -teoremadan foydalanib

$$\int_a^{+\infty} F(x)g'(x)dx$$

xosmas integralning yaqinlashuvchi ekanligini aniqlaymiz.

(1)tenglikda  $t \rightarrow +\infty$  da limitga o'tib, ushbu

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x)g(x)dx$$

limitning mavjud va chekli bo'lishini topamiz. Bu esa integralning yaqinlashuvchi bo'lishini bildiradi. ▶

**Misol.** Ushbu

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$$

$$J = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \quad (\alpha > 0)$$

integralni yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◀ Berilgan integralni quyidagicha

$$J = \int_1^{+\infty} \sin x \frac{1}{x^\alpha} dx \quad (\alpha > 0)$$

yozib,  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$  deymiz. Bu funksiyalar yuqorida keltirilgan teoremaning barcha shartlarini qanoatlanti-radi.

$f(x) = \sin x$  funksiya  $[1, +\infty)$  oraliqda uzluksiz va uning boshlang'ich funksiyasi  $F(x) = -\cos x$  funksiya  $[1, +\infty)$  da chegara-langani;

$$g(x) = \frac{1}{x^\alpha} \quad (\alpha > 0) \text{ funksiya } [1, +\infty) \text{ da}$$

$$g'(x) = -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$$

hosilaga ega va u uzluksiz;

$$3) \quad g(x) = \frac{1}{x^\alpha} \quad (\alpha > 0) \text{ funksiya } [1, +\infty) \text{ da kamayuvchi;}$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0. \quad (\alpha > 0)$$

Unda Dirixle alomatiga ko'ra

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \quad (\alpha > 0)$$

integral yaqinlashuvchi bo'ladi. ►

**2. Abel alomati.** Faraz qilaylik,  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar  $[a, +\infty)$  oraliqda berilgan bo'lsin.

**2-teorema (Abel alomati).**  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

- 1)  $f(x)$  funksiya  $[a, +\infty)$  da uzluksiz bo'lib,  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  integral yaqinlashuvchi;
- 2)  $g(x)$  funksiya  $[a, +\infty)$  da uzluksiz  $g'(x)$  hosilaga ega va bu hosila  $[a, +\infty)$  da o'z ishorasini saqlasin;
- 3)  $g(x)$  funksiya  $[a, +\infty)$  da chegaralangan.

U holda

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$$

integral yaqinlashuvchi bo'ladi.

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$  integralning yaqinlashuvchi bo'li-shidan  $f(x)$  funksiyaning  $[a, +\infty)$  oraliqda chegaralangan  $F(x)$  boshlang'ich funksiyaga ega bo'lishi kelib chiqadi.  
 Teoremaning 2)- va 3)- shartlaridan hamda monoton funksiyaning limiti haqidagi

teoremadan foydalanib ushbu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

limitning mavjud va chekli bo'lishini topamiz:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = b$$

Unda

$$g_1(x) = g(x) - b$$

funksiya  $x \rightarrow +\infty$  da monoton ravishda nolga intiladi:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g_1(x) = 0$$

Shunday qilib  $f(x)$  va  $g_1(x)$  funksiyalari Dirixle alomati keltirilgan barcha shartlarni qanoatlantiradi. Dirixle alomatiga ko'ra

$$\int_a^{+\infty} f(x) g_1(x) dx$$

integral yaqinlashuvchi bo'ladi.

Ayni paytda,

$$f(x) g(x) = f(x) b + f(x) g_1(x)$$

bo'lganligi sababli,

$$\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$$

integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi. ►

## Xulosa

Mening kurs iishim mavzusi “Absolyut va shartli yaqinlashuvchi xosmas integrallar” bo’lib, ush Bunda qo’yilgan asosiy masalalar

Aytaylik,  $f(x)$  funksiya  $[a, +\infty)$  oraliqda berilgan bo’lsin.

Ma’lumki,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

xosmas integralning yaqinlashuvchiligi ushbu

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx \quad (t > a)$$

funksiyaning  $t \rightarrow +\infty$  da chekli limitga ega bo’lishidan iborat.

funksiyaning chekli limitga ega bo’lishi haqidagi Koshi teoremasi, ya’ni  $F(t)$  funksiyaning  $t \rightarrow +\infty$  da chekli limitga ega bo’lishi uchun

$$\forall \varepsilon > 0, \exists t_0 > a, \forall t' > t_0, \forall t'' > t_0 :$$

$$|F(t'') - F(t')| < \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli ekani keltirilgan edi.

Bu tushuncha va tasdiqdan

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad (4)$$

xosmas integralning yaqinlashuvchiligini ifodalaydigan qkuyidagi teoremaga kelamiz.

**Teorema (Koshi teoremasi).** (4) integralning yaqinla-shuvchi bo’lishi uchun

$\forall \varepsilon > 0$  son olinganda ham shunday  $t_0 \in R$  ( $t_0 > a$ ) topilib, ixtiyoriy

$t' > t_0$ ,  $t'' > t_0$  bo’lganda

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

**Manfiy bo’lmagan funksiya xosmas integralining yaqinlashuvchiligi.**

Aytaylik,  $f(x)$  funksiya  $[a, +\infty)$  oraliqda berilgan bo’lib,  $\forall x \in [a, +\infty)$  da  $f(x) \geq 0$  bo’lsin. Bu funksiyaning  $[a, t]$  da ( $a < t < +\infty$ ) integrallanuvchi deylik:

$f(x) \in R([a, t])$ . Bu holda

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx$$

funksiya  $(a, +\infty)$  oraliqda o’suvchi bo’ladi.

◀ Haqiqatdan ham,  $a < t_1 < t_2 < +\infty$  da

$$F(t_2) = \int_a^{t_2} f(x)dx = \int_a^{t_1} f(x)dx + \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx = F(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx$$

bo'lib,

$$\int_{t_1}^{t_2} f(x)dx \geq 0$$

bo'lganligi sababli

$$F(t_2) \geq F(t_1)$$

bo'ladi. Demak,  $\forall t_1, t_2 \in (a, +\infty)$  uchun

$$t_1 < t_2 \Rightarrow F(t_1) \leq F(t_2). \blacktriangleright$$

**1-teorema.** Manfiy bo'lmagan  $f(x)$  funksiya xosmas integrali

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad (f(x) \geq 0, x > a) \quad (1)$$

ning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun  $F(t)$  funksiyaning yuqoridan chegaralangan, ya'ni

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall t > a : F(t) \leq C$$

bo'lishi zarur va yetarli.

◀ Zarurligi. Aytaylik, (1) integral yaqinlashuvchi bo'lsin. Ta'rifga binoan

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t)$$

mavjud va chekli bo'ladi. Unda,  $\exists C \in \mathbb{R}, \forall t > a$  da  $F(t) \leq C$  bo'ladi.

Etarlilik. Aytaylik,  $F(t)$  funksiya  $(a, +\infty)$  da yuqorida-gi chegaralangan bo'lsin.

Ayni paytda,  $F(t)$  o'suvchi funksiya. Demak,  $t \rightarrow +\infty$  da  $F(t)$  funksiya chekli limitga ega. Bu esa (1) integralni yaqinlashuvchi bo'lishini bildiradi. ▶

Bu teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. Agar  $F(t)$  funksiya ( $t \in (a, +\infty)$ ) yuqoridan chegara-lanmagan bo'lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

integral uzoqlashuvchi bo'ladi. Shu ma'lumotlarni o'rgandim. Nazariy bilimlarni misol va masalalar yechisda ko'rib o'tdim.

# Adabiyotlar

- Azlarov T., Mansurov H. Matematik analiz, 1-tom, Toshkent, «O'zbekiston», 1994, 1995.
- Xudoyberganov G., Varisov A., Mansurov H. Matematik analiz, 1 va 2 qismlar, Qarshi, «Nasaf», 2003.
- Arxipov G., Sadovnichiy V., Chubarikov V. Lekcii po matematicheskomu analizu, Moskva, «Vysshaya shkola», 1999.
- Ilin V., Sadovnichiy V., Sendov B. Matematicheskiy analiz, Moskva «Nauka», 1979.
- Kudryavsev L. Kurs matematicheskogo analiza TT, 1, 1973.
- Rudin U. Основы математического анализа, Moskva «Mir», 1976.
- Dorogovsev A. Matematicheskiy analiz, Kiyev, «Vysshaya shkola», 1985.
- Fixtengols G. Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya, TT, I, II, Moskva «fizmat-lit», 2001.
- Sa'dullayev A., Mansurov H., Xudoyberganov G., Varisov A., G'ulomov R. Matematik analiz kursidan misol va masalalar to'plami, 1 va 2- tomlar, Toshkent, «O'zbekiston», 1993, 1996.
- Demidovich B. Sbornik zadach i uprajneniy po matematicheskomu analizu, Moskva, «Nauka», 1990.