

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
NAMANGAN MUHANDISLIK - PEDAGOGIKA
INSTITUTI

«Informatika va AT» kafedrasi

«Energetikaning matematik masalalari»

fanidan

MA'RUZALAR MATNI

Namangan

Ushbu ma`ruzalar matni 5310200 - Elektr energetikasi yo`nalishi bo`yicha ta`lim olayotgan talabalar uchun mo`ljallangan bo`lib, «Energetikaning matematik masalalari» fanidan ma`ruza mashg`ulotlarini o`z ichiga olgan. Ma`ruza matnidan, «Energetikaning matematik masalalari» fanini o`rganuvchi talabalar va fan o`qituvchilari foydalanishlari mumkin.

So`z boshi

Insoniyat tarixining ko`p yillik tarixi ezgu g`oyalardan va sog`lom mafkuradan mahrum biror bir jamiyatning uzoqqa bora olmasligini ko`rsatdi. Shu bois mustaqillik tufayli mamlakatimiz o`z oldiga ozod va obod Vatan, Erkin va farovon hayot barpo etish, rivojlangan mamlakatlar qatoridan o`rin olish, demokratik jamiyat qurish kabi ezgu maqsadlarni qo`ydi.

Bu esa kelajagimizni yaqqol tasavvur etish, jamiyatimizning ijtimoiy-ma`naviy poydevorini mustahkamlash ehtiyojini tug`diradi. Demak, galdagi eng asosiy vazifa: yosh avlodni Vatan ravnaqi, yurt tinchligi, xalq farovonligi kabi kabi olijanob tuyg`ular ruhida tarbiyalash, yuksak fazilatlarga ega, ezgu g`oyalar bilan qurollangan. Komil insonlarni voyaga yetkazish, jahon andozalariga mos, kuchli bilimli, raqobatbardosh kadrlar tayyorlashdir.

«Jahon sivilizasiyasiga dahldor bo`lgan eng zamonaviy ilmlarni egallamay turib, mamlakat taraqqiyotini ta`minlash qiyin», - degan edilar I. Karimov O`zbekistonning iqtisodiy va ijtimoiy sohalarida yuqori natijalarga erishishi, jahon iqtisodiy tizimida to`laqonli natijalarga to`laqonli sheriklik o`rmini egallay borishi, inson faoliyatining barcha jabhalarida zamonaviy axborot texnologiyalaridan yuqori darajada foydalanishning ko`lamlari qanday bo`lishiga hamda bu texnologiyalar ijtimoiy mehnat samaradorligining oshishida qanday rol o`ynashiga bog`liq.. Demak, zamonaviy kompyuterlardan amalda keng foydalana oladigan yetuk kadrlar tayyorlash kechiktirib bo`lmaydigan vazifadir.

Talabalar dasturlash tillarini va yo`nalish bo`yicha maxsus fanlarni o`rganish natijasida dasturchi darajasiga yetishadi. Lekin, ular olgan nazariy va amaliy bilimlarini amaliy masalalarni yechishga qo`llashda ko`pgina qiyinchiliklarga duch kelishadi. Chunki ularda tipik, taqribiy masalalarni yechishda oliy matematika va dasturlash masalalari bo`yicha Informatika va AT kursidan olgan bilimlarga mavjud. Shuning uchun, elektroenergetika yo`nalishida ta`lim olayotgan talabalar hayotiy masalalarning matematik modellarini tushuna olishlari, ularni yechishning sonli-taqribiy, taqribiy-analitik usullarini nazariy o`zlashtirishlari hamda o`rganishlari uchun «Energetikaning matematik masalalari» fanining ahamiyati katta hisoblanadi.

1-ma'ruza: Kirish. Matritsa va ular ustida amallar bajarish. Kompleks sonlar ustida amallar bajarish.

O'quv modul birliklari:

1. *Fanning maqsad va vazifalari.*
2. *Matritsa va ular ustida amallar bajarish.*
3. *Kompleks sonlar ustida amallar bajarish.*

Energetikaning matematik masalalari fani tabiiy matematik fanlar majmuasiga taaluqli hisoblanadi.

“Energetikaning matematik masalalari” fanining bosh muhim fazifasi elektroenergetika tizimlarining matematik modellarini tahlili, qo'llanishi va ularning echish usullarini ishlab chiqish, algoritmlarini qurish, dastur ta'minotlarini yaratish va olingan natijalarni tahlil qilish usullarini o'rgatishdan iboratdir. O'z navbatida energetikaning matematik masalalari fanidan olingan bilimlar elektroenergetika yo'nalishining boshqa mutahassislik fanlarini o'qitishda nazariy asos bo'ladi.

Energetikaning matematik masalalari fanini o'rgatishdan asosiy maqsad qilib quyidagilarni keltirish mumkin:

- Elektr zanjirlari asosiy qonuniyatlari va ularni qo'llash;
- Holat, tugun kuchlanish tenglamalarini matritsa ko'rinishida yozish va ular ustida amallar bajarish;
- Chiziqli va nochiziqli tenglamalar sistemalarining aniq va taqribiy echish usullarini tahlil qilish va ularni yechishda komp'yuter texnologiyasini qo'llash;
- Elektroenergetikada optimallashtirish va chiziqli modellashtirish masalalarini yechish usullari o'zlashtirish;
- Elektrokroenergetika masalalariga ehtimollar nazariyasi va matematik statistika apparatlarini tadbqiq etish;
- Elektrokroenergetika masalalariga interpolyasini tadbqiq etish;
- Energetika sistemasida o'tkinchi jarayonlarni matematik modellarini tahlil qilish va ularni yechishda komp'yuter texnologiyasini qo'llash;
- Tajriba natijalarini nazariy bilimlar asosida qayta ishlash va nazariy bilimlarni amalda tekshirish.

Matritsalar matematika kursining eng ko'p ishlatiladigan ob'ektlaridan biri hisoblanadi. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi, turli xil differentsial tenglamalarni yechish algoritmlari, ko'p argumentli funktsiyalar ustida turli amallarni bajarish jarayoni va chiziqli programmalash masalalarini yechish algoritmlari matritsalar ustida turli amallar bajarish va teskari matritsalarini hisoblashlarni o'z ichiga olishi mumkin. Shuning uchun, matritsalar algebrasining dasturiy ta'minotini yaratish dolzarb masalalardan hisoblanadi.

Matritsalar ustida asosan quyidagi amallarni bajarish mumkin:

1. Matritsalarini qo'shish yoki ayirish ($c_{i,j} = a_{i,j} \pm b_{i,j}$);
2. Matritsalarini o'zgarmasga ko'paytirish ($b_{i,j} = k a_{i,j}$)
3. Matritsalarini ko'paytirish

$$C_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

4. Matritsa teskarisini topish ($A^{-1}=?$)

Yuqoridagilardan ko'rinib turibdiki, matritsalar ustidagi uchta amal juda oson amalga oshiriladi, lekin teskari matritsani topish algoritmi ancha qiyinchiliklar hosil qilishi mumkin.

A matritsaning teskari matritsasini topish (A^{-1}) quyidagicha amalga oshiriladi:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Bu yerda A_{ij} ($i=1..n$, $j=1..n$) –A matritsaning algebraik to'ldiruvchilari.

Ma'lumki, algebraik to'ldiruvchilar yuqori tartibli determinantlar ko'rinishida bo'ladi. N^2 ta n - tartibli determinantlarni hisoblash algoritmi esa o'z navbatida juda ko'p xisoblash vaqtini talab qiladi. Shuning uchun teskari matritsani hisoblashning Gauss usuliga moslashtirilgan Jordan-Gauss usulidan foydalanish komp'yuter resurslaridan oqilona foydalanish imkonini beradi.

Teskari matritsani hisoblashning Jordan-Gauss usulini ishchi algoritmi va dasturi.

Bizga quyidagi n tartibli, kvadrat matritsa berilgan bo'lsin,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Bu matritsaga teskari matritsani A^{-1} deb belgilasak, u holda

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsa mavjud bo'lib, $A \cdot A^{-1} = E$ shart bajarilsa (bu yerda E -birlik matritsa), A^{-1} matritsa A matritsaga teskari matritsa deyiladi.

Agar A matritsaning har bir ustunini vektor deb olib, $A \cdot A^{-1} = E$ tenglikdan quyidagi ko'paytmalar tuzsak,

$$A^* \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \\ M \\ \gamma_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ M \\ 0 \end{pmatrix}; \quad A^* \begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \\ M \\ \gamma_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ M \\ 0 \end{pmatrix} \dots \dots \dots A^* \begin{pmatrix} \gamma_{1n} \\ \gamma_{2n} \\ M \\ \gamma_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ 1 \end{pmatrix}$$

teskari matritsaning no'malum ustun hadlariga nisbatan n ta tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz.

2-ma'ruza: Masalani EHMda yechish bosqichlari. Model turlari. O'quv modul birliklari:

1. Model.
2. Model turlari.
3. Matematik modellashtirish bosqichlari.
4. Kompyuterli modellshtirish.

Model (lotincha. modulus - o'lchov, me'yor) - biror ob'ekt yoki ob'ektlar tizimining obrazi yoki namunasidir.

Masalan, yerning modeli - globus, osmon va undagi yulduzlar modeli - planetariy ekrani, pasportdagi suratni shu pasport egasining modeli deyish mumkin.

Insoniyatni farovon hayot shart-sharoitlarini yaratish, tabiiy ofatlarni oldindan aniqlash muammolari qadimdan qiziqtirib kelgan. Shuning uchun ham insoniyat tashqi dunyoning turli xodisalarini o'rganishi tabiiy xoldir.

Aniq fan soxasi mutaxassislari u yoki bu jarayonning faqat ularni qiziqtirgan xossalarinigina o'rganadi. Masalan, geologlar yerning rivojlanish tarixini, ya'ni qachon, qayerda va qanday xayvonlar yashaganligi, o'simliklar o'sganligi, iqlim qanday o'zgarganligini o'rganadi. Bu ularga foydali qazilma konlarini topishlarida yordam beradi. Lekin ular yerda kishilik jamiyatining rivojlanish tarixini o'rganishmaydi - bu bilan tarixchilar shug'ullanadi.

Atrofimizdagi dunyoni o'rganish natijasida noaniq va to'liq bo'lmagan ma'lumotlar olinishi mumkin. Lekin bu koinotga uchish, atom yadrosining sirini aniqlash, jamiyatning rivojlanish qonunlarini egallash va boshqalarga xalaqit etmaydi. Ular asosida o'rganilayotgan xodisa va jarayonning modeli yaratiladi. Model ularning xususiyatlarini mumkin qadar to'laroq akslantirishi zarur.

Modelning taqribiylik xarakteri turli ko'rinishda namoyon bo'lishi mumkin. Masalan, tajriba o'tkazish mobaynida foydalaniladigan asboblarning aniqligi olinayotgan natijaning aniqligiga ta'sir etadi.

Modellashtirish - bilish ob'ektlari (fizik xodisa va jarayonlar) ni ularning modellari yordamida tadqiq qilish mavjud predmet va xodisalarining modellarini yasash va o'rganishdir.

Modellash uslubidan hozirgi zamon fanida keng foydalanilmoqda. U ilmiy tadqiqot jarayonini yengillashtiradi, ba'zi xollarda esa murakkab ob'ektlarni o'rganishning yagona vositasiga aylanadi. Mavsum ob'ekt, olisda joylashgan ob'ektlar, juda kichik xajmdagi ob'ektlarni o'rganishda modellashtirishning ahamiyati katta. Modellashtirish uslubidan fizika, astronomiya, biologiya, iqtisod fanlarida ob'ektning faqat ma'lum xususiyat va munosabatlarini aniqlashda xam foydalaniladi.

Modellarni tanlash vositalariga qarab uni uch guruhga ajratish mumkin. Bular **abstrakt**, **fizik** va **biologik** guruhlar.

Abstrakt modellar qatoriga matematik, matematik-mantiqiy va shu kabi modellar kiradi. Fizik modellar qatoriga kichiklashtirilgan maketlar, turli asbob va qurilmalar, trenajyorlar va shu kabilar kiritiladi.

Modellarning mazmuni bilan qisqacha tanishib chiqamiz.

1. Abstrakt modellar. Bu modellarga matematik va matematik mantiqiy modellar misol bo'la oladi. Matematik model o'rganilayotgan jarayonni ifodalovchi parametrlar o'rtasidagi bog'lanishni shu sohaga tegishli qonuniyatlar asosida olinishiga aytiladi.

2. Fizik model. Tekshirilayotgan jarayonning tabiati va geometrik tuzilishi asl nusxadagidek, ammo undan miqdor (o'lchami, tezligi, ko'lami) jixatidan farq qiladigan modellar, masalan, samolyot, kema, avtomobil, poezd, GES va boshqalarni modellari fizik modelga misol bo'ladi.

3. Biologik model turli tirik ob'ektlar va ularning qismlari - molekula, xujayra, organizm va shu kabilarga xos biologik tuzilish, funktsiya va jarayonlarni modellashtirishda qo'llaniladi. Biologiyada, asosan, uch xil modeldan foydalaniladi. Ular biologik, fizik va matematik modellardir.

Biologik model - odam va xayvonlarda uchraydigan ma'lum bir xolat yoki kasallikni laboratoriyada xayvonlarda sinab ko'rish imkonini beradi. Bunda shu xolat yoki kasallikning kelib chiqish mexanizmi, kechishi, oqibati kabilar tajriba asosida o'rganiladi. Biologik modelda xar xil usullar: genetik apparatga ta'sir qilish, mikroblar yuqtirish, ba'zi organlarni olib tashlash yoki ular faoliyati maxsul bo'lgan garmonlarni kiritish va boshqa usullar qo'llaniladi. Bunday modellarda genetika, fiziologiya, farmakologiya sohasidagi bilimlar tadqiq qilinadi.

Matematik modellar tirik organizmlarning tuzilishi, o'zaro aloqasi, vazifasiga oid qonuniyatlarning matematik va mantiqiy -matematik tavsifidan iborat bo'lib, tajriba ma'lumotlariga ko'ra yoki mantiqiy asosda tuziladi, so'ngra tajriba yo'li bilan tekshirib ko'riladi.

Biologik xodisalarning matematik modellarini kompyuterda o'rganish tekshirilayotgan biologik jarayonning o'zgarish xarakterini oldindan bilish imkonini beradi. SHuni ta'kidlash kerakki, bunday jarayonlarni tajriba yo'li bilan tashkil qilish va o'tkazish ba'zan juda qiyin kechadi. Matematik va matematik-mantiqiy modelning yaratilishi, takomillashishi va ulardan foydalanish matematik xamda nazariy biologiyaning rivojlanishiga qulay sharoit tug'diradi.

4. Fizik-kimyoviy modellar biologik tuzilish, funksiya yoki jarayonlarni fizik yoki kimyoviy vositalar bilan qaytadan xosil qilishdir.

5. Istisodiy modellar taxminan XVIII asrdan qo'llanila boshlandi. F.Kenening „Iqtisodiy jadvallar“ida birinchi marta butun ijtimoiy takror ishlab chiqarish jarayonining shakllanishini ko'rsatishga xarakat qilingan.

Iqtisodiy tizimlarning turli faoliyat yo'nalishlarini o'rganish uchun xar xil modellardan foydalaniladi. Iqtisodiy taraqqiyotning eng umumiy qonuniyatlari xalq xo'jaligi modellari yordamida tekshiriladi. Turli murakkab ko'rsatkichlar, jumladan, milliy daromad, ish bilan bandlik, istemol, jamg'armalar, investisiya ko'rsatkichlarining dinamikasi va nisbatini taxlil qilish, uni oldindan aytib berish uchun katta iqtisodiy modellar qo'llaniladi. Aniq xo'jalik vaziyatlarini tekshirishda kichik iqtisodiy tizimlardan, murakkab iqtisodiy tizimlarni tekshirishda, asosan, matematik modellardan foydalaniladi.

Savol va topshiriqlar

1. Model deganda nimani tushunasiz?
2. Model xodisa va jarayonni qanday akslantirishi kerak?
3. Modelning taqribiylik xarakteri qanday ko'rinishlarda namoyon bo'ladi?
4. Modellashtrish uslublaridan qacda foydalaniladi?
5. Modellashtrish qanday ob'ektlarni o'rganishda, ayniqsa, muxim ?
6. Modellarini qanday turlarga ajratish mumkin?
7. Abstrakt va fizik modellarni farqi nimada?
8. Biologik model deganda nimani tushunasiz?
9. Iqtisodiy model deganda nimani tushunasiz?

Matematik modellashtrish va uning bosqichlari.

Matematik modellashtrish aniq fanlardagi turli amaliy masalalarni yechishda muvaffaqiyat bilan qo'llanib kelinmoqda. Matematik modellashtrish uslubi masalani xarakterlaydigan u yoki bu kattalikni mikdor jihatdan ifodalash, so'ngra bog'liqligini o'rganish imkoniyatini beradi.

Uslub asosida matematik model tushunchasi yotadi.

Matematik model deb o'rganilayotgan ob'ektni matematik formula yoki algoritim ko'rinishida ifodalangan xarakteristikalar orasidagi funksional bog'lanishga aytiladi.

Kompyuter ixtiro etilganidan so'ng matematik modellashning ahamiyati keskin oshdi. Murakkab texnik, iqtisodiy va ijtimoiy tizimlarni yaratish, so'ngra ularni kompyuterlar yordamida tatbiq etishning haqiqiy imkoniyati paydo bo'ldi. Endilikda ob'ekt, ya'ni haqiqiy tizim ustida emas, balki uni almashtiruvchi matematik model ustida tajriba o'tkazila boshlandi.

Kosmik kemalarning harakat traektoriyasi, murakkab muhandislik inshootlarini yaratish, transport magistrallarini loyihalash, iqtisodni rivojlantirish va boshqalar bilan bog'liq bo'lgan

ulkan hisoblashlarning kompyuterda bajarilishi matematik modellash uslubining samaradorligini tasdiqlaydi.

Odatda, matematik model ustida hisoblash tajribasini o'tkazish haqiqiy ob'ektni tajribada tadqiq etish mumkin bo'lmagan yoki iqtisodiy jihatdan maqsadga muvofiq bo'lmagan hollarda o'tkaziladi. Bunday hisoblash tajribasining natijalari haqiqiy ob'ekt ustida olib boriladigan tajribaga qaraganda juda aniq emasligini ham hisobga olish kerak. Lekin shunday misollarni keltirish mumkinki, kompyuterda o'tkazilgan hisoblash tajribasi o'rganilayotgan jarayon yoki hodisa haqidagi ishonchli axborotning yagona manbai bo'lib xizmat qiladi. Masalan, faqat matematik modellash va kompyuterda hisoblash tajribasini o'tkazish yo'li bilan yadroviy urushning iqlimga ta'siri oqibatlarini oldindan aytib berish mumkin. Kompyuter yadro qurolli urushda mutloq g'olib bo'lmashini ko'rsatadi. Kompyuterli tajriba yer yuzida bunday urush oqibatida ekologik o'zgarishlar, ya'ni haroratning keskin o'zgarishi, atmosferaning changlanishi, qutblardagi muzliklarning erishi ro'y berishi, hatto yer o'z o'qidan chiqib ketishi mumkinligini ko'rsatadi.

Matematik modellashda berilgan fizik jarayonlarning matematik ifodalari modellashiriladi. Matematik model tashqi dunyoning matematik belgilar bilan ifodalangan qandaydir hodisalari sinfining taqribiy tavsifidir. Matematik model tashqi dunyoni bilish, shuningdek, oldindan aytib berish va boshqarishning kuchli uslubi hisoblanadi.

Matematik modelni taxlil qilish o'rganilayotgan hodisaning mohiyatiga singish imkoniyatini beradi. hodisalarni matematik model yordamida o'rganish to'rt bosqichda amalga oshiriladi.

Birinchii bosqich - modelning asosiy ob'ektlarini bog'lovchi qonunlarni ifodalash.

Ikkinchi bosqich - modeldagi matematik masalalarni tekshirish,

Uchinchi bosqich - modelning qabul qilingan amaliyot mezonlarini qanoatlantirishni aniqlash. Boshqacha aytganda, modeldan olingan nazariy natijalar bilan olingan ob'ektni kuzatish natijalari mos kelishi masalasini aniqlash.

To'rtinchi bosqich - o'rganilayotgan hodisa haqidagi ma'lumotlarni jamlash orqali modelning navbatdagi tahlilini o'tkazish va uni rivojlantirish, aniqlashtirish.

Shunday qilib, modellashirishning asosiy mazmunini ob'ektni dastlabki o'rganish asosida modelni tajriba orqali va (yoki) nazariy taxlil qilish, natijalarni ob'ekt haqidagi ma'lumotlar bilan taqqoslash, modelni tuzatish (takomillashtirish) va shu kabilar tashkil etadi.

Matematik model tuzish uchun, dastlab masala rasmiylashtiriladi. Masala mazmuniga mos holda zarur belgilar kiritiladi. So'ngra kattaliklar orasida formula yoki algoritim ko'rinishida yozilgan funksional bog'lanish hosil qilinadi.

Ayib o'tilganlarni aniq misolda ko'rib chiqamiz.

O'yagan sonni topish masalasi (matematik fokus). Tabakalarga ixtiyoriy sonni o'ylash va u bilan quyidagi amallarni bajarish talab etiladi:

- 1.O'yangan son beshga ko'paytirilsin.
- 2.Ko'paytmaga bugungi sanaga mos son (yoki ixtiyoriy boshqa son) qo'shilsin.
- 3.Hosil bo'lgan yig'indi ikkilantirilsin.
- 4.Natijaga joriy yil soni qo'shilsin.

Olib boruvchi biroz vaqtdan so'ng talaba o'yagan sonni topishi mumkinligini ta'kidlaydi. Ravshanki, talaba o'yagan son matematik fokusga mos model yordamida aniqlanadi. Masalani rasmiylashtiramiz: X – o'quvchi o'yagan son, U - hisoblash natijasi, M - sana, M - joriy yil.

Demak, olib boruvchining ko'rsatmalari:

$$U = (X \cdot 5 + K) \cdot 2 + M$$

formula orqali ifodalanadi. Ushbu formula masalaning (matematik fokusning) matematik modeli bo'lib xizmat qiladi va X o'zgaruvchiga nisbatan chiziqli tenglamani ifodalaydi.

Tenglamani yechamiz:

$$X = (U - (M + 2N)) / 10$$

Ushbu formula o'yangan sonni topish algoritmini ko'rsatadi.

Savol va topshiriqlar

1. Matematik model deganda nimapi tushunasiz?
2. Matematik model qaysi sohada qo'llaniladi?
3. Matematik modelning samaradorligini nima tasdiqlaydi?
4. Matematik modellashda nima modellashtiriladi?
5. Matematik modelni tahlil qilish nimalarga olib kelishi mumkin?
6. Hodisalarni matematik model orqali o'rganish necha bosqichda amalga oshiriladi? Bosqichlarni sanab o'ting.

Kompyuterda modellashtirish va uning mohiyati

Ma'lumotlar omborini loyihalash va yaratishdan oldin shu ma'lumotlar omboriga joylashtiriladigan axborotlarning umumiy tuzilishi haqida tasavvurga ega bo'lish lozim. Ma'lumotlar omboridan kerakli savollarga javob olish va ma'lumotlarga turli o'zgartirishlar kiritish uchun xam uning umumiy tuzilishini bilish maqsadga muvofiq. Chunki ma'lumotlar omborida qanday ma'lumotlar borligini bilsangizgina, ularga mos savollarni qo'ya olasiz. Bir axborotni turli xil vositalar orqali va turli shakllarda ifodalash mumkin.

Axborotlarni ifodalovchi vositalar majmuini ma'lumotlar modeli deb ataladi. Albatta, turli odamlar tashqi dunyoni turlicha taqin qiladilar va ular haqida turlicha bilimga ega bo'ladi. Shuning uchun ham haqiqiy dunyo va undagi xodisalarni anglashda turlicha modellardan foydalaniladi. Modellashtirish yoki modellashning rasmiy muammolarini o'rganadigan va tadqiq etadigan yaxlit nazariya mavjud (bunday nazariyalar oliy o'quv yurtlarida o'rganiladi).

Hozirgi kunda kompyuterda modellashtirish texnologiyasi mavjud bo'lib, uning maqsadi atrofimizni o'rab turgan tabiat, unda ro'y beradigan xodisa, voqealarni va jamiyatdagi o'zgarishlarni anglash, tushunib yetish jarayonini zamonaviy usullar vositasida tezlashtirishdir. Kompyuterda modellashtirish texnologiyasini o'zlashtirish kompyuter tizimlarini (vositachi qurilma sifatida) yaxshi bilishni va unda modellash texnologiyalarini ishlata olishni talab qiladi.

Kompyuterda dasturlash tillaridan foydalanish matematik modellashtirish usulida jiddiy burilish yasadi. XX asr oxirlarida yaratilgan yuqori quvvatli Rentium prosessorli kompyuterlarda o'rganilayotgan jarayonlar modellarning turli xil ko'rinishlarini (grafik, diagramma, animasiya, multiplikasiya va h.k.) kompyuter ekranida qosil qilish mumkin.

Ektranda hosil qilingan modelni kompyuter xotirasida fayl ko'rinishida saqlash va undan bir necha marta foydalanish mumkin.

Umuman olganda, kompyuterli modellashtirishning metodologiyasida quyidagi yo'nalishlarni ajratish mumkin:

1. Geometrik yo'nalishdagi tajribalarni tashkillashtirish koordinatalar tekisligida amalga oshiriladi. Kompyuter geometrik ob'ektlarning xossalarini o'rganish va matematik farazlarni tekshirishda modellarni qurish va ularni tadqiq etish vositasi sifatida ishlatiladi.

2. Ikkinchi yo'nalish turli xil harakatlarni modellashtirish bilan bog'liq. Kompyuter modellari orqali turli xil xarakatli masalalarni yechish mumkin. Bu ro'y beradigan jarayonlarning mohiyatini chuqurroq va kengroq his qilishga, olingan natijalarni xaqiqiy baholash va kompyuterda modellashtirish imkoniyatlari haqidagi tasavvurlarning kengayishiga olib keladi.

3. Uchinchi yo'nalish - kompyuter ekranida funksiya grafiklarini modellashtirish - kasbiy kompyuter tizimlarida keng qo'llaniladi. Masalan, Logo dasturi funksiya grafiklari, tenglama va tenglamalar tizimini yechish va ularning natijalarini olish imkoniyatlarini beradi. Eng muximi shundaki, kompyuterda modellashtirish texnologiyasidan foydadanish xaqiqiy voqelikni anglashda, bilish jarayonini amalga oshirishda yangi bosqich rolini o'ynaydi.

Ma'lumotlar modellari shakli qanday bo'lishidan qat'iy nazar quyidagi talablarni bajarishi kerak:

1. Soddalik. Ma'lumotlar modeli kam sondagi bog'lanishli tuzilish turlariga ega bo'lishi lozim.
2. Yaqqollik. Ma'lumotlar modeli vizual (ko'zga ko'rinadigan, tasvirlanadigan) bo'lishi kerak.

3. Qismlarga bo'linishi. Ma'lumotlar modeli ma'lumotlar omborida oddiy o'rin almashtirish imkoniyatiga ega bo'lishi lozim.

4. O'rin almashtirish. Ma'lumotlar modeli o'ziga o'xshash modellar bilan almashtirish imkoniyatiga ega bo'lishi kerak.

5. Erkinlik. Ma'lumotlar modeli aniq bo'lakchalarnigina o'z ichiga olmasligi lozim.

Yuqorida ko'rsatilgan talablar ham yaratiladigan modellarning idealligini ta'minlay olmaydi. Chunki modellashtirishda haqiqiy ob'ektning ba'zi bir muhim xususiyatlarigina ishtirok etadi xolos.

Savol va topshiriqlar

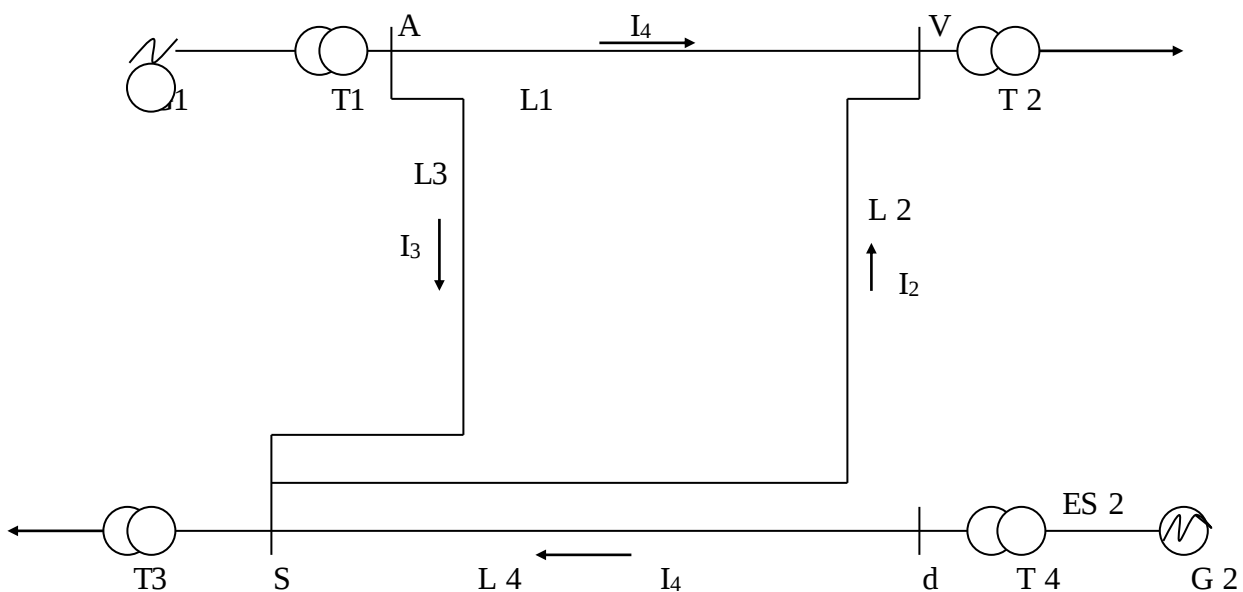
1. Ma'lumot modeli nima?
2. Kompyuterda modellashtirish texnologiyasining umumiy ko'rinishini qanday tasavvur qilasiz?
3. Kompyuterda modellashtirishning qanday yo'nalishlarini bilasiz? Bu yo'nalishlar haqida gapirib bering.
4. Ma'lumotlar modellariga qanday talablar qo'yiladi? Ularning mazmuni haqida gapirib bering.

3-ma'ruza: Chiziqli elektr zanjirlari holat tenglamasi. Tugun kuchlanishi tenglamalari. M va N ulanishlar matritsasi.

O'quv modul birliklari:

1. Elektr zanjir prinsipial sxemasi.
2. M va N ulanishlar matritsasi.

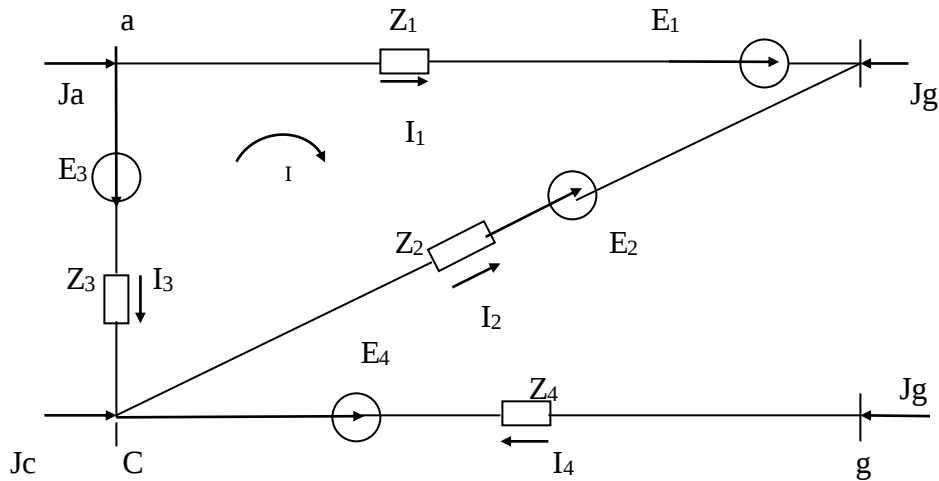
Elektr energetika tizimining prinsipial sxemasi berilgan bo'lsa [], matritsa ko'rinishdagi xolat tenglamasi tuzilsin.



1 - rasm. Elektr energetika tizimining prinsipial sxemasi.

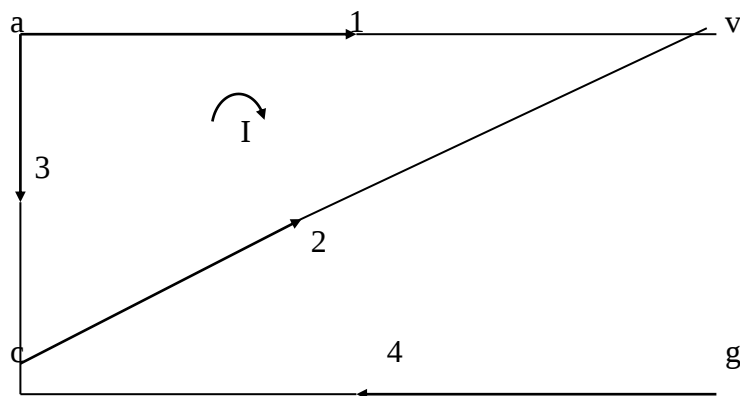
G1, G2 – ES 1 va ES 2 elektr stantsiyalari generatorlari, T1, T4 – elektr stantsiyalar podstantsiyalari transformatorlari, T3, T4 – podstantsiyalar transformatorlari, L1, L2 – elektr uzatish liniyalari.

Elektr almashtirish sxemalarini tuzamiz (2-rasm).



2 – rasm. Elektr tizimining almashtirish sxemasi.

Elektr energetika tizimining sxemasi konfiguratsiyasini bog'langan graf shaklida tasvirlaymiz. Grafning tarmoqlari ma'lum bir belgilangan yo'nalishga ega bo'lganligi uchun (tok yo'nalishi bo'yicha), grafni yo'naltirilgan deb qabul qilamiz.



2 – rasm. Elektr energetika tizimining bog'langan yo'naltirilgan grafi.

2 – rasmda ko'rsatilgan elektr energetika tizimining bog'langan yo'naltirilgan grafi uchun M_{Σ} matritsa quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$M_{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} a \\ e \\ c \\ d \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} \right\} \text{тугунлар}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}} \right\} \text{тармоқлар}$$

Matritsa N quyidagi shaklda bo'ladi:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}} \right\} \text{bog'liq bo'lmagan konturlar}$$

bu yerda

a) Tarmoqlarining tugunlarda ulanishini ko'rsatuvchi matritsa (birinchi ulushlar matritsasi – intsedentsiya matritsasi) M_{Σ} - tug'ri burchakli matritsa bo'lib, uning qatorlar soni elektr energetika tizimi tugunlar soniga (n ga), ustunlar soni esa energetika tizimi tarmoqlari soniga (m ga) teng. U quyidagicha ifodalanadi.

$$M_{\Sigma} = (M_{ij}), i = 1, 2, \dots, n: j = 1, 2, \dots, m.$$

M_{Σ} - matritsaning elementlari uchtdan bitta qiymatni qabul qiladi: $M_{ij}=+1$; agar tugun i tarmoq j ning boshlang'ich nuqtasi bo'lsa; $M_{ij}=-1$; agar tugun i tarmoq j ning oxirgi nuqtasi bo'lsa; $M_{ij}=0$, agar tugun i tarmoq j ga tegishli bo'lmasa.

b) Tarmoqlarning mustaqil konturlarida ulanishini ko'rsatuvchi matritsa (ikkinchi ulanishlar matritsasi - intsedentsiyasi) N – to'g'ri burchakli matritsa bo'lib, uning qatorlar soni elektr energetika tizimidagi mustaqil konturlar soniga (k ga), ustunlar soni esa elektr energetika tizimi tarmoqlari soniga (m ga), teng. U quyidagicha ifodalanadi

$$N = (n_{ij}), i = 1, 2, \dots, k: j = 1, 2, \dots, m.$$

N – matritsaning elementlari uchtdan bitta qiymatni qabul qiladi:

$n_{ij}=+1$, agar tarmoq j kontur k ga kirsa va ularning yo'nalishlari bir xil bo'lsa;
 $n_{ij}=-1$, agar tarmoq j kontur k ga kirsa va ularning yo'nalishlari teskari bo'lsa;
 $n_{ij}=0$, agar tarmoq j kontur k ga kirmasa.

D tugunni balanslovchi deb qabul qilib (oxirgi qator bo'lgani uchun) M_{Σ} - matritsadan oxirgi qatorni o'chirib M matritsani xosil qilamiz.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

M – matritsa asosida elektr energetika tizimining xolat tenglamasini matritsa ko'rinishida ifodalaymiz.

$$\mathbf{M I} = \mathbf{J}$$

$$\mathbf{N} = (\mathbf{Z}_B \mathbf{I} - \mathbf{E}) = \mathbf{0}$$

$\mathbf{I} = (\mathbf{I}_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$ – tarmoq toklar ustuni; $\mathbf{J} = (\mathbf{J}_j)$, $j = 1, 2, \dots, n-1$ tugunga berilgan toklar ustuni; $\mathbf{Z}_n = \mathbf{a}_{ing} = (\mathbf{Z}_{vj})$, $i = 1, 2, \dots, m$ – tarmoqlar qarshiliklar dioganali matritsasi;

$\mathbf{E} = (\mathbf{E}_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$ – tarmoq e.yu.k lari ustuni.

Elektr energetika tizimining umumlashgan xolat tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$\mathbf{A} \times \mathbf{I} = \mathbf{F}$$

Bu yerda

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{NZ}_g \end{bmatrix} \quad \text{elektr energetika tizimi almashtirish sxemasi parametrlarini matritsasi}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{E}_F \end{bmatrix} \quad \text{elektr energetika tizimi berilgan parametrlari va kattaliklari matritsasi.}$$

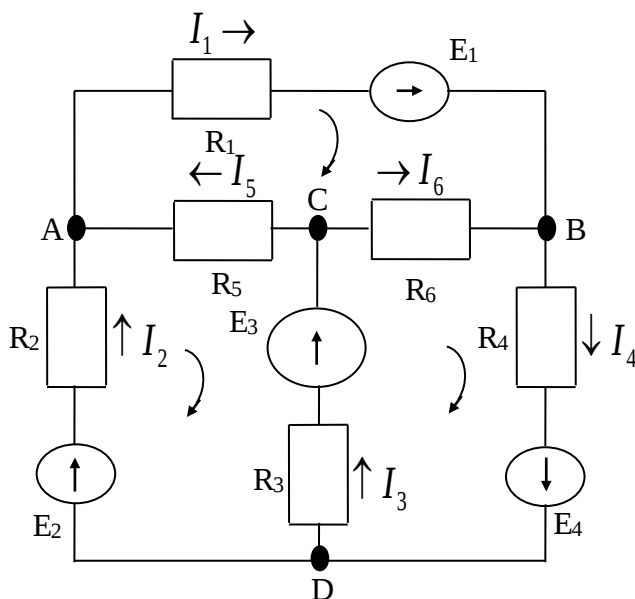
4-ma'ruza: Chiziqli elektr zanjirlari holat tenglamasini matritsa holatida shakllantirish.

O'quv modul birliklari:

1. Chiziqli elektr zanjirlari holat tenglamasini matritsa holida shakllantirish.
2. Elektr zanjirlari holat tenglamasini o'rniga qo'yish usuli bilan yechish.

Elektr zanjirlarni xisoblashdan asosiy vazifa tokning zanjir tarmoqlaridan qanday taqsimlanganligini aniqlashdir. Bu kabi masalalarni yechishda elektr zanjir holat tenglamasini matritsa ko'rinishda shakllantirib, so'ngra matritsa ko'rinishdagi tenglamalar sistemasini yechish usullaridan foydalanamiz. Bu vazifa elektr zanjirlari uchun asosiy bo'lgan Om va Kirxgof qonunlaridan foydalanib xal etiladi.

Misol tariqasida 4.1 – rasmda ko'rsatilgan elektr zanjirlaridagi toklarini aniqlaylik. EYUK va qarshiliklar ma'lum, deb faraz qilaylik.



4.1- rasm. elektr zanjiri sxemasi.

Zanjir tarmoqlaridagi toklarni aniqlash uchun Kirxgof konunlarini bevosita qo'llash usulidan foydalanamiz. Ushbu rasmda ko'rinib turibdiki, sxema soddalashmaydi. Mustaqil konturlarga ajratilgan (VSAV, VDSV, ASDA), eyuk qo'llanishi va toklarning shartli musbat yo'nalishi ko'rsatilgan. Konturni aylanib chiqishining ixtiyoriy yo'nalishi ko'rsatilgan. Demak, Kirxgof 1,2 qonunlari yordamida tenglamalar sistemasini tuzamiz. Sxemada $n=4$ ta tugun nuqta, $k=6$ ta no'malum toklar mavjud. Demak Kirxgof 1- qonuniga ko'ra $n-1=4-1=3$ ta - tenglama, Kirxgof 2 - qonuniga ko'ra $k-(n-1)=6-(4-1)=3$ ta tenglamasi tuziladi.

Yuqorida berilgan elektr zanjirlari sxemasi uchun quyidagi tenglamalarni olamiz.

$$I_4 - I_3 - I_2 = 0 \quad \text{- D nukta uchun} \quad (4.1)$$

$$I_3 - I_5 - I_6 = 0 \quad \text{- S nukta uchun} \quad (4.2)$$

$$I_6 + I_1 - I_4 = 0 \quad \text{- V nukta uchun} \quad (4.3)$$

$$R_2 \cdot I_2 - I_5 \cdot R_5 - I_3 \cdot R_3 = E_2 - E_3 \quad (4.4)$$

$$R_3 \cdot I_3 + I_6 \cdot R_6 - I_4 \cdot R_4 = E_4 + E_3 \quad (4.5)$$

$$R_5 \cdot I_5 - I_6 \cdot R_6 - I_1 \cdot R_1 = E_1 \quad (4.6)$$

6 ta no`malum uchun, 6ta tenglama hosil qilindi. (4.1), (4.2), (4.3) tenglamalar – Kirxgof 1 - qonuniga ko`ra, (4.4), (4.5), (4.6) tenglamalar Kirxgof 2 - qonuniga ko`ra hosil qilindi.

4.1 - rasmda ko`rsatilgan elektr zanjiri uchun quyidagilar:

$$E_1 = 20B, E_2 = 25B, E_3 = E_4 = 15B$$

$$R_1 = 12Om, R_2 = 11Om, R_3 = 10Om, R_4 = 10Om, R_5 = R_6 = 5Om$$

ma`lum bo`lsin.

Ushbu kattaliklarni (4.1) - (4.6) tenglamalarga qo`yib quyidagi tenglamalar sistemasi hosil qilamiz.

$$(4.7) \quad \begin{cases} I_4 - I_3 - I_2 = 0 \\ I_3 - I_5 - I_6 = 0 \\ I_6 + I_1 - I_4 = 0 \\ 11 \cdot I_2 - 5 \cdot I_5 - 10 \cdot I_3 = 10 \\ 10 \cdot I_3 + 5 \cdot I_6 + 10 \cdot I_4 = 30 \\ 5 \cdot I_5 - 5 \cdot I_6 + 12 \cdot I_1 = 20 \end{cases}$$

(4.7)-sistemasi oliy matematika kursidan ma`lum bo`lgan $A \cdot X = B$ matrisa ko`rinishdagi tenglamalar sistemasi ekanligini bilish qiyin emas.

(4.7) tenglamalar sistemasini aniq usullari (Gauss, Kramer, bosh elementlar va x.k) yoki iterasion usullar (oddiy iterasiya) Zeydel relaksasiya va x.k) yordamida yechish mumkin.

Biz bu yerda xisoblar ishlarin osonlashtirish uchun va tenglamalar sistemasidan kelib chiqib noma`lumlarni o`rniga qo`yish usulidan foydalanib yechamiz. (4.7) tenglamalar sistemasi birinchi uchta tenglamalaridan foydalanib.

$$I_1 = I_4 - I_6, I_3 = I_4 - I_2, I_5 = I_4 - I_2 - I_6 \quad (4.8)$$

munosabatlarini olib, qolgan 3 ta tenglamaga qo`yib, quyidagi 3 ta noma`lumli tenglamalar sistemasini xosil qilamiz.

$$\begin{cases} 26I_2 - 15I_4 + 5I_6 = 10 \\ -2I_2 + 4I_4 + I_6 = 6 \\ -5I_2 + 17I_4 - 22I_6 = 20 \end{cases} \quad (4.9)$$

(4.9) tenglamalar sistemasini 2-tenglamasidan

$$I_6 = 6 + 2I_2 - 4I_4 \quad (4.10)$$

munosabatini olib qolgan tenglamalarga qo`yib, quyidagi 2 noma`lumli tenglamalar sistemasini xosil qilamiz.

$$\begin{cases} 36I_2 - 35I_4 = -20 \\ -49I_2 + 105I_4 = 152 \end{cases} \quad (4.11)$$

$$I_2 = \frac{35I_4 - 20}{36} \quad (4.12)$$

(4.12)- munosabatni (4.11)- tenglamalar sistemasini 2- tenglamasiga qo'yib:

$$-49 \frac{35I_4 - 20}{36} + 105I_4 = 152 \quad \text{ekanini aniqlaymiz.}$$

Bu tenglamani yechib:

$$-49 \cdot 35I_4 + 49 \cdot 20 + 36 \cdot 105I_4 = 36 \cdot 152$$

$$I_4 = 2.175 \approx 2.18$$

ekanligini topamiz. Aniqlangan I_4 – qiymatni (4.12), (4.10), (4.8) –munosabatlariga qo'yib, qolgan no'malum toklar qiymatini aniqlaymiz.

$$I_2 = \frac{35 \cdot 2.18 - 20}{36} \approx 1.56$$

$$I_6 = 6 + 2 \cdot 1.56 - 4 \cdot 2.18 \approx 9.12 - 8.71 = 0.40$$

$$I_1 = I_4 - I_6 = 2.18 - 0.40 \approx 1.78$$

$$I_3 = I_4 - I_2 = 2.18 - 1.56 \approx 0.62$$

$$I_5 = I_4 - I_2 - I_6 = 2.18 - 1.56 - 0.40 \approx 0.22$$

Demak berilgan elektr zanjiri tarmoqlardagi toklar qiymati quyidagilarga teng ekan.

$$I_1 = 1.78A, \quad I_2 = 1.56A, \quad I_3 = 0.62A$$

$$I_4 = 2.18A, \quad I_5 = 0.22A, \quad I_6 = 0.40A$$

Ushbu natijalarni [] da (24-27 betlar) keltirilgan kontur toklar usuli yordamida olingan natijalar bilan solishtirib yechim aniq olinganligini ko'rish mumkin. I_1, I_5, I_6 - qiymatlarining kichik farqini hisoblashlardagi yaxlitlash xatoligi bilan izoxlash mumkin.

5-ma'ruza: Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish usullari. Kramer va Gauss usullari.

O'quv modul birliklari:

1. *Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini echish usullari.*
2. *Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini echishni Kramer usuli.*
3. *Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini echishni Gauss usuli.*

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish usullari ikkita guruhga bo'linadi: to'g'ri (aniq) va iteratsion (taqribiy) usullar.

To'g'ri usullar yordamida sistemaning yechimi chekli sondagi aniq arifmetik amallar bajarish orqali hisoblanadi. Bu usullar keng sinfdagi sistemalarni yechish imkoniyatiga ega. Lekin, shu bilan birga, ular ayrim kamchiliklardan ham holi emas. Masalan, ular EHMda ishlatilganda hotira qurilmasida sistema koeffitsientlari va ozod hadlarning barchasi saqlanishi kerak. Sistema koeffitsientlari matritsasi A ning elementlari siyrak bo'lsa, ya'ni 0 ga teng elementlari ham bo'lsa, ularni xotira qurilmasiga yozish ko'p joyni egallaydi. Bundan tashqari, usullar asosida yotuvchi algoritmlar aniq bo'lishiga qaramasdan yechim ma'lum darajada taqribiy topiladi. Chunki yaxlitlash xatoliklari ketma-ket bajariluvchi hisoblash bosqichlarida doimo jamlanib boradi. Ayniqsa yuqori tartibli va yomon shartlangan sistemalar uchun bu butunlay yaroqsiz yechim olinishiga sabab bo'lishi mumkin. Shuning uchun to'g'ri usullar yaxshi shartlangan, past tartibli, elementlari siyrak bo'lmagan matritsali sistemalarni yechishda ishlatiladi.

Ushbu n -tartibli n ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

Bu yerda a_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$) lar ma'lum sonlardan iborat bo'lib, noma'lumlarning koeffitsi yentlari deyiladi, $x_1, x_2, \dots, x_n$ - noma'lumlar, $b_1, b_2, \dots, b_n$ - sistema tenglamalarining ozod hadlari, ular ham ma'lum sonlardan iborat.

Bunda A -n ta satr va n ta ustundan iborat kvadrat matritsa, a_{ij} elementlarning soni n^2 ta, X V - n ta elementlardan iborat vektor ustunlar.

$$A^*X=B \quad (5.3)$$

Sistemaning yagona yechimi mavjudligining zaruriy va yetarli sharti A matritsa determinantining noldan farqli bo'lishidir, ya'ni

Agar $D=0$ bo'lsa, sistemalar maxsus sistemalar deyiladi va ularning yechimi yoki mavjud emas, yoki cheksiz ko'p bo'ladi (bunday sistemalarni aynigan sistemalar deb ataladi).

Faraz qilaylik birinchi darajali, ikki noma'lumli ikkita algebraik tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

(5.4) sistemaning 1-tenglamasini a_{22} ga, 2-tenglamasini $-a_{12}$ ga ko'paytirib qo'shsak

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22}-b_2a_{12} \quad x_1 = \frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \quad (5.5)$$

Agar (5.4) sistemaning 1-sistemasini a_{21} ga 2-tenglamasini a_{11} ga ko'paytirib qo'shsak

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11}-b_1a_{21} \quad x_2 = \frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \quad (5.6)$$

(5.4.) va (5.6) larga etibor bersak ikkinchi taribli determinatining ta'rifiga ko'ra, quyidagilarni yozish mumkin:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad (5.7)$$

(5.7) munosabatar esa Kramer formulasi deyiladi

Gauss usuli.

Gauss usuli bizga tanish bo'lgan nomalumlarni ketma - ket yo'qotish usulining umumiy sxemasidan iboratdir. Muloxazalarni asossiz murakkablashtirmaslik uchun ushbu to'rt nomalumni to'rtta tenglama sistemasini ko'rib chiqamiz.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_{15} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = a_{25} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = a_{35} \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = a_{45} \end{cases} \quad (5.8)$$

Birinchi tenglamada $a_{11} \neq 0$ bo'lsin. Agar bu shart bajarilmasa, birinchi tenglama sifatida boshqa, x_1 oldidagi koeffisienti 0 ga teng bo'lmagan tenglamani olishimiz mumkin. Bir vaqtning o'zida barcha a_{i1} ($i=1,4$) koeffisientlar 0 ga teng bo'lishi mumkin emas. Shu sababli $a_{11} \neq 0$ sharti xamma vaqt bajariluv shartdir. (5.8) tenglamalar sistemasida birinchi tenglamani a_{11} koeffisientga bo'lib,

$$x_1 + e_{12}x_2 + e_{13}x_3 + e_{14}x_4 = e_{15} \quad (5.9)$$

bu yerda

$$e_{1j} = a_{1j}/a_{11}, j > 1$$

Tenglamani xosil qilamiz.

Oxirgi (5.9) tenglamadan foydalanib (5.8) sistemadan x_1 noma'lumni yo'qotish (chiqarish) mumkin. Buning uchun (5.9) tenglamani a_{21} ga ko'paytirib (5.8) sistemaning ikkinchi tenglamasidan, a_{31} ga ko'paytirib uchinchi tenglamasidan vanixoyat a_{41} ga ko'paytirib to'rtinchi tenglamasidan ayirish kifoya. Bu amallarni bajarish natijasida

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 = a_{25}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + a_{34}^{(1)}x_4 = a_{35}^{(1)} \\ a_{42}^{(1)}x_2 + a_{43}^{(1)}x_3 + a_{44}^{(1)}x_4 = a_{45}^{(1)} \end{cases} \quad (5.10)$$

sistemaga ega bo'lamiz. Bunda

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}b_{1j} \quad (i, j \geq 2)$$

Endi (5.10) sistemaning birinchi tenglamasini $a_{22}^{(1)} \neq 0$ koeffitsientga bo'lamiz.

$$x_2 = e_{23}^{(1)}x_3 + e_{24}^{(1)}x_4 + e_{25}^{(1)}, e_{2j}^{(1)} = a_{2j}^{(1)}/a_{22}^{(1)}, j > 2 \quad (5.11)$$

Yuqoridagi singari bu yerda xam $a_{22}^{(1)} \neq 0$ shartni xamma vaqt ta'minlashimiz mumkinligini kursatish qiyin emas.

Uchiinchi tartibli (5.10) sistemada xuddi x_1 noma'lum yo'qotilgani kabi x_2 noma'lumni yo'qotamiz

$$\begin{cases} a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 = a_{35}^{(2)} \\ a_{43}^{(2)}x_3 + a_{44}^{(2)}x_4 = a_{45}^{(2)} \end{cases} \quad (5.12)$$

Bu yerda $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)}b_{2j}^{(1)}$ ($i, j \geq 3$) koeffisientlar (5.10) tenglamani $a_{32}^{(1)}, a_{42}^{(1)}$ larga ko'paytirib, (5.12) sistemani ikkinchi va uchinchi tenglamalaridan mos ravishda ayirishdan xosil bo'ladi.

Endi (5.12) sistemaning birinchi tenglamasini $a_{33}^{(2)} \neq 0$ koeffisientga bo'lamiz.

$$x_3 + a_{34}^{(2)} = a_{35}^{(2)}, a_{3j}^{(2)} = a_{3j}^{(2)} / a_{33}^{(2)}, \quad j > 3 \quad (5.13)$$

Oxirgi tenglamadan foydalanib (5.13) sistemadan x_3 noma'lumni yo'qotamiz.

$$a_{44}^{(3)}x_4 = a_{45}^{(3)} \quad (5.14)$$

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - a_{i3}^{(2)}b_{3j}^{(2)} \quad (i, j \geq 4) \quad x_4 \text{ noma'lum} \quad (5.13) \text{ tenglamadan}$$

osongina topiladi:

$$x_4 = \frac{a_{45}^{(3)}}{a_{44}^{(3)}} = b_{45}^{(3)} \quad (5.14)$$

qolgan noma'lumlar esa (5.12), (5.10) va (5.8) tenglamalardan topiladi:

$$\begin{aligned} x_3 &= b_{35}^{(2)} - b_{34}^{(2)}x_4 \\ x_2 &= b_{25}^{(1)} - b_{23}^{(1)}x_3 - b_{21}^{(1)}x_4 \\ x_1 &= b_{15} - b_{12}x_2 - b_{13}x_3 - b_{14}x_4 \end{aligned}$$

$a_{11}, a_{22}^{(1)}, a_{33}^{(2)}, a_{44}^{(3)}$ koeffisientlar yetakchi elementlari deyiladi. Yuqoridagi shartlarga binoan ularning barchasi 0 dan farqli bo'ladi.

Shunday qilib, Gauss usulining asosiy g'oyasi berilgan (5.8) sistemadan koeffisientlari uchburchak matrisani tashkil qiluvchi tenglamalar sistemasini xosil qilishdir. Mazkur usulning xisoblash algoritmi ikki bosqichdan iborat. Birinchi bosqich to'g'ri yurish deb atalib (5.12), (5.10), (5.9) va (5.8) tenglamalardan barcha $b_{1j} (j > 1)$ va $b_{ij}^{(k)} (i = 2, 3, 4; j > 2, k = 1, 2, 3)$ koeffisientlarni xisoblashdan iborat. Ikkinchi bosqich esa teskari yurish deb atalib, unda barcha noma'lumlarning qiymatlari (ya'ni yechimlar) indeksning kamayib borish tartibida topiladi.

Yuqorida keltirilgan algoritm bo'yicha ixtiyoriy n - tartibli sistemalarni yechish mumkin. Bunda algoritmning umumiy sxemasi xech qanday o'zgarishsiz qolaveradi.

**6-ma'ruza: Elektroenergetika tizimining umumlashgan holat tenglamasini echishni
Gauss bosh elementni tanlash sxemasi.
O'quv modul birliklari:**

1. Gauss bosh elementni tanlash sxemasi.
2. Iteratsiya usuli.
3. Qulay usulni ajratish.

Ayrim hollarda yuqoridagi usullarni qo'llashda yahlitlash hisobiga xatoliklar ortib ketadi va natijada yomon yechimga ega bo'linadi yoki umuman xato yechim olinadi. Bu xolatni bartaraf etish uchun Gaussning **bosh elementni tanlash sxemasi** usulidan foydalaniladi.

Holat tenglamasini Gauss usuli (**bosh elementni tanlash sxemasi**) bilan yechish. Bizga quyidagi tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin []:

$$\begin{cases} 10x_1 - 5x_3 = -0.6 \\ 10x_2 - 5x_3 = -0.8 \\ -5x_1 - 5x_2 + 20x_3 - 5x_4 = -0.6 \\ -5x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases} \quad (6.1)$$

- 1) Avvalambor (6.1) sistema yechimga ega yoki ega emasligini bilish uchun noma'lumlar koeffitsientlaridan tuzilgan A- matritsaning determinantini xisoblaymiz, buni amalga oshirish qiyin emas. $A \neq 0$ sistema yagona yechimga ega.

- 2) No'malum x_1 ning koeffitsientlari $a_{11} = 10; a_{21} = 0; a_{31} = -5; a_{41} = 0$ lardan iborat. Absolyut qiymat buyicha eng katta koeffitsienti

$$\max |a_{i1}| = \max(10, 0, |-5|, 0) = 10$$

$$1 \leq i \leq 4$$

Birinchi tenglamadadir. Shu sababli tenglamalar o'rnini almashtirishga xojat yo'q (1) sistemaning birinchi tenglamasini yetakchi element bo'lgan $a_{11} = 10$ koeffitsientga bo'lib,

$$x_1 - 0.5 \cdot x_3 = -0.06 \quad (6.2)$$

Tenglamaga ega bo'lamiz.

Bu tenglamani -5 ga ko'paytirib, xosil bo'lgan tenglamani (6.1) sistemaning uchinchi tenglamasidan (**ikkinchi va to'rtinchi tenglamalarda x_1 - oldidagi koeffitsient 0 ga teng**) ayiramiz. Natijada olingan tenglama va (6.1) sistemaning ikkinchi va to'rtinchi tenglamasi uchinchi tartibli x_1 - no'malum qatnashgan sistemani tashkil qiladi.

$$\begin{cases} 10x_2 - 5x_3 = -0.8 \\ 5x_2 - 17.5x_3 + 5x_4 = 0.9 \\ -5x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases} \quad (6.3)$$

No'malum x_2 ning koeffitsientlari orasida absolyut qiymati bo'yicha eng kattasi birinchi tenglamadadir. Shu sababli tenglamalarning o'rinlarini almashtirishga xojat yo'q. Demak, $a_{22}^{(1)}$ yetakchi element sifatida 10 koeffitsient olinadi.

$$\max |a_{i2}^{(1)}| = \max(10, 5, |-5|) = 10$$

$$2 \leq i \leq 4$$

(6.3) sistemani birinchi tenglamasini bu koeffitsientga bo'lib,

$$x_2 - 0.5 \cdot x_3 = -0.08 \quad (6.4)$$

Tenglamani olamiz. Bu tenglamani 5 ga ko'paytirib, xosil bo'lgan tenglamani (6.3) sistemaning ikkinchi tenglamasidan (**uchinchi tenglamadagi x_2 - oldidagi koeffitsient 0 ga teng**) ayirib, ushbu ikkinchi tartibli sistemani xosil qilamiz:

$$\begin{cases} 15x_3 - 5x_4 = -1,3 \\ -5x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases} \quad (6.5)$$

Bu tenglamalar o'rnini almashtirishga xam xojat yo'q. Chunki,

$$\max |a_{i3}^{(2)}| = \max(15, |-5|) = 15$$

$$3 \leq i \leq 4$$

Demak (6.5) sistemada yetakchi element sifatida 15 koeffitsient olinadi. Sistemaning birinchi tenglamasini bu elementga bo'lamiz:

$$x_3 - \frac{1}{3}x_4 = -\frac{13}{150} \quad (6.6)$$

(6.6) tenglamani -5 ga ko'paytirib, xosil bo'lgan tenglamani (6.5) sistemaning ikkinchi tenglamasidan ayiramiz:

$$-\frac{10}{3}x_4 = -\frac{17}{30}$$

Oxirgi tenglamadan x_4 no'malum topamiz:

$$x_4 = \left(-\frac{17}{30}\right) : \left(-\frac{10}{3}\right) = \frac{17}{30} \cdot \frac{3}{10} = \frac{17}{100} = 0,17$$

$$x_4 = 0,17 \quad (6.7)$$

Endi (6.6), (6.4) va (6.2) tenglamalardan (6.7) ni xisobga olib, barcha qolgan no'mallarni topishimiz mumkin:

$$x_3 = -\frac{13}{150} + \frac{1}{3}x_4 = -\frac{13}{150} + \frac{1}{3} \cdot \frac{17}{100} = \frac{-13}{150} + \frac{17}{300} = \frac{-26 + 17}{300} = \frac{-9}{300} = \frac{-3}{100} = -0,03$$

$$x_2 = -0,08 + 0,5x_3 = \frac{-8}{100} + \frac{-3}{200} = \frac{-16 + 3}{200} = \frac{-13}{200} = -0,065$$

$$x_1 = \frac{-6}{100} + 0,5x_4 = \frac{-6}{100} + \frac{3}{200} = \frac{-12 + 3}{200} = \frac{-9}{200} = -0,045$$

Demak berilgan (1) tenglamalar sistemasining yechimi $x_1 = -0,045$; $x_2 = -0,065$; $x_3 = -0,03$; $x_4 = 0,17$ dan iborat ekan.

Topilgan yechimlarni (6.1) sistemaning istalgan tenglamasiga qo'yib, ularning ayniyatga aylanishini tekshirib ko'rishimiz mumkin.

Masalan:

$$10x_2 - 5x_3 = -0,8$$

$$10 \cdot \left(\frac{-13}{200}\right) - 5 \cdot \left(\frac{-3}{100}\right) = -0,8$$

$$\frac{-13}{20} + \frac{3}{20} = -0,8$$

$$\frac{-10}{20} = -0,8$$

$$-0,8 = -0,8$$

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini aniqmas usullar yordamida yechish usullari, aniq usullarga nisbatan kamroq yoritilgani va talabalarga no'malum bo'lganligi sababli ko'p

tarqalgan iteratsiya usulini keltirib o'tamiz [1]. Bizga quyidagi tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \Lambda + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + \Lambda + a_{2n}x_n = b_2 \\ \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda \\ a_{n1}x_n \Lambda + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

Iteratsiya usulida $Ax=b$ – tenglama $x=dx+c$ ko'rinishga keltiriladi va iteratsion jarayon

$$X^{(k+1)} = D \cdot X^{(k)} + c$$

formula ga asosida olib boriladi. Iteratsion jarayon

$$\left|X^{(k+1)} - X^{(k)}\right| \leq EPS$$

shart bajarilguncha davom ettiriladi. Yuqorida berilgan tenglamalar sistemasini quyidagi ko'rinishda yozib olamiz: (bu murakkab emas) .

[illegible]

k – iteratsiya nomeri. $k=0, 1, 2, \dots$

Iteratsiya $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \text{eps}$ shart bajarilguncha davom ettiriladi. Iteratsiyon jarayonlarda asosiy masala, uni yaqinlashish shartini bajarilishidir. Yuqoridagi tenglamalar sistemasi uchun u quyidagicha ko'rinishda bo'ladi:

Iteratsiya yaqinlashi sharti:

$$\text{a) } \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \pi |a_{ii}|, \quad i = 1, n$$

b) $\sum_{i=1}^n |a_{ij}| p_j \pi |a_{ii}| \cdot p_i, \quad i=1, n$ - shartidan biri bajarilsa yaqinlashadi;

aks xolda uzoqlashadi. Bu yerda p -ihtiyoriy musbat haqiqiy sonlar.

Masala yechish namunasi:

$$\begin{cases} 10x_1 - 5x_3 = -0,6 \\ 10x_2 - 5x_3 = -0,8 \\ -5x_1 - 5x_2 + 20x_3 - 5x_4 = -0,6 \\ -5x_3 + 5x_4 = 1,0 \end{cases}$$

Tenlamalar sistemasini iteratsiya usuli bilan berilgan aniqlikda eching.

▲ V.A.Venikov idr. «Matematicheskie zadachi elektro energetiki». M.Vo'sshaya shkola – 1981. 91 – 96 str.

Yechish: Ushbu tenglamalar sistemasi uchun, yaqinlashish shartlarini tekshiramiz:

$$a) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \pi |a_{ij}| \quad i = \overline{1, K, n}$$

Bizning masalada $n=4$ ga teng. Ushbu shart 4 – tenglama uchun bajarilmaydi, ya'ni:

$$\begin{cases} |0| + |-5| + |0| \pi |10| \\ |0| + |-5| + |0| \pi |10| \\ |-5| + |-5| + |-5| \pi |20| \\ |0| + |0| + |-5| = |5| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 \pi 10 \\ 5 \pi 10 \\ 15 \pi 20 \\ 5 = 5 \end{cases}$$

diogonal bo'lmagan $a_{43}=-5$ element, diogonal $a_{44}=5$ elementga absolyut qiymat bo'yi-cha teng.

b) Agarda $P_1=P_2=P_4=1$ va $P_3=0,8$ qiymatlar tanlansa

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| P_j \pi |a_{ii}| P_i \quad i = \overline{1, K, 4}$$

Shart bajarilishini ko'rish mumkin.

$$\begin{cases} |0| \cdot 1 + |-5| \cdot 0,8 + |0| \cdot 1 \pi |10| \cdot 1 \\ |0| \cdot 1 + |-5| \cdot 0,8 + |0| \cdot 1 \pi |10| \cdot 1 \\ |-5| \cdot 1 + |-5| \cdot 1 + |-5| \cdot 1 \pi |20| \cdot 0,8 \\ |0| \cdot 1 + |0| \cdot 1 + |-5| \cdot 0,8 \pi |5| \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 \pi 10 \\ 4 \pi 10 \\ 15 \pi 16 \\ 4 \pi 5 \end{cases}$$

Demak, bundan kelib chiqadiki iteratsiya usuli bo'yicha olingan yechim yaqinlashadi.

Berilgan tenglamalar sistemasini quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = -0,06 + 0,5 * x_3^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} = -0,08 + 0,5 * x_3^{(k-1)} \\ x_3^{(k)} = -0,03 + 0,25(x_2^{(k-1)} + x_2^{(k-1)} + x_4^{(k-1)}) \\ x_4^{(k)} = 0,2 + x_3^{(k-1)} \end{cases}$$

k-iteratsiya parametri, $k=1,2,\dots$

Iteratsiya jarayoni:

$$|x^{(k)} - x^{(k-1)}| < Eps$$

shart bajarilguncha davom ettiriladi.

Boshlang'ich yechim sifatida $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = x_4^{(0)} = 0$ deb olamiz.

Quyida natijalarini keltiramiz:

k	x_1	x_2	x_3	x_4
	-0,06750	-0,08750	-0,03000	0,18500
25	-0,07499	-0,09499	-0,03000	0,17000

Natijalardan ko'rinadiki $eps=10^{-5}$ aniqlika $k=25$ -chi iteratsiyada erishadi, agar aniqlik kamaytirilsa ($10^{-4}, 10^{-3}$) iteratsiya soni 20 va 12 ni tashkil etadi.

1. Chiziqsiz algebraik tenglamalar sistemasini taqribiy yechish usullari.
2. Yaqinlashish sharti.
3. Chiziqsiz algebraik tenglamalar sistemasini iteratsiya usuli bilan yechish.
4. Boshlangich yechimni ajratish usuli.

Nochizig'iy tenglamalar tizimining analitik yechim xatto bu zanjirning Volt-Amper xarakteristikasi analitik xolda berilganda xam nihoyatda murakkab masala va ba'zi hollarda yechimga ega bo'lmashligi mumkin. Shu tufayli zanjirlarni hisoblash uchun turli taxminiy usullarga ketma-ket yaqinlashish va graf-analitik va boshqa usullardan keng foydalanishga to'g'ri keladi.

Berilgan ushbu:

tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishdagi:

kanonik shaklga keltiriladi.

So'ng $\rightarrow x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ boshlang'ich qiymatlar yordamida keyingi yaqinlashishlar:

formulalar bo'yicha izlanadi. Agar $\varphi_i (i = 1, n)$ funksiyalar $\max \left| \frac{\vec{x} - \vec{x}^0}{x - x^0} \right| \leq \delta$ soxada aniqlangan va uzluksiz differensiallanuvchi va

$$q_m = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \max_{\left| \begin{smallmatrix} \rightarrow \\ x-x \end{smallmatrix} \right| \leq \delta} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right| \right\} < 1 \quad (7.4)$$

tengsizliklarni qanoatlantirsa, hamda $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$

boshlang'ich yaqinlashishlar uchun $|X_i^{(0)} - \varphi_i(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \dots, X_n^{(0)})| \leq \eta$

$$q_m = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \max_{\left| \begin{smallmatrix} \rightarrow \\ x-x \end{smallmatrix} \right| \leq \delta} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right| \right\} < 1$$

$(i = 1, n), \frac{\eta}{1 - q_m} \leq \delta$ shartlar bajarilsa, (7.2) tenglamalar sistemasi shu soxada yagona

$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ yechimga ega bo'ladi va (7.3) ketma-ketliklar bu yechimga intiladi va intilish tezligi

$$|\xi_i - X_1^{(k)}| \leq \frac{\eta}{1 - q_m} q_m^n \quad (i = 1, \bar{n}) \quad (7.5)$$

tengsizliklar bilan baxolanadi. q ning qiymati m masofada (kubik masofada, normada) xisoblanadi. U s (oktaedrik) yoki 1 (sferik) masofada ham berilishi mumkin.

$$f_1(x, y) = 2x^2 - x(y + 5) + 1 = 0,$$

$$f_2(x, y) = x + 3 \lg x - y^2 = 0$$

sistemaning musbat ildizlari $e = 0,5 \cdot 10^{-4}$ aniqlikda topilsin.

Yechish. Sistemaning ildizlarini grafik yordamida taqriban aniqlaymiz. Ildiz $3,4 < x < 3,6$ $2,1 < y < 2,3$ to'g'ri to'rtburchak ichida yotadi. (x_0, y_0) boshlang'ich yaqinlashish sifatida $(3,5; 2,2)$ nuqtani olamiz. Sistemani kanonik shaklga keltiramiz:

$$x = \sqrt{0,5(x(y+1)-1)} = \varphi_1(x, y)$$

$$y = \sqrt{x + 3 \lg x} = \varphi_2(x, y)$$

Endi $|x - 3,5| \leq 0,1, |y - 2,2| \leq 0,1$ soxada (7.4) shartning bajarilishini tekshiramiz ($M=0,43429$ -o'tish moduli):

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{y+5}{\sqrt[4]{0,5(x(y+5)-1)}}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{y+5}{\sqrt[4]{0,5(x(y+5)-1)}},$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{1 + \frac{3M}{x}}{\sqrt[2]{x + 3 \lg x}}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0, \max_{x,y} \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| = \frac{(2,3+5)\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3,4(2,1+5)-1}} < 0,54,$$

$$\max_{x,y} \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right| = \frac{3,6\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3,4(2,1+5)-1}} < 0,27, \quad \max_{x,y} \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right| = \frac{1 + \frac{3M}{3,4}}{\sqrt[2]{3,4 + 3\lg 3,4}} < 0,27, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0$$

$$\max_{x,y} \left(\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right| \right) < 0,81 \quad \max_{x,y} \left(\left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right| \right) < 0,27$$

Demak, $q=0,81 < 1$, bo'lgani uchun iteratsiya jarayoni yaqinlashadi.
Ketma-ket yaqinlashishlarni

$$x_{k+1} = \sqrt{0,5(x_k(y_k + 5) - 1)} \quad \text{va} \\ y_{k+1} = \sqrt{x_k + 3\lg x_k} \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

formular bo'yicha hisoblaymiz. Natijalarni keltirib o'tishimiz mumkin:

k	x	y	k	x	y
0	3,5	2,2	4	3,48580	2,26084
1	3,47851	2,26544	5	3,48639	2,6113
2	3,48374	2,25891	6	3,48677	2,26131
3	3,48483	2,26050			

$$\text{Javob: } x = 3,4866 \pm 0,2 \cdot 10^{-4}, \quad y = 2,2612 \pm 0,1 \cdot 10^{-4}.$$

8-ma'ruza: Elektroenergetikada interpolatsiya. N'yuton 1,2 interpol yatsion ko'phadlari.

O'quv modul birliklari:

1. Interpolatsiya masalalari.
2. Elektroenergetikada interpolatsiya.
3. N'yuton-1 interpol yatsion ko'phadi.

Iqtisodiyot va texnikada, jumladan elektroenergetikada $y=f(x)$ funksiyani x ning berilgan nuqtalarida boshqa qiymatlarida xisoblashga to'g'ri keladi. Ayrim xollarda $y=f(x)$ analitik ko'rinishi ma'lum bo'ladi, ammo ko'rinishi murakkab bo'ladi. Bu xolda x ning ayrim qiymatlarida xisoblash ancha murakkab bo'ladi. Shuning uchun yuqoridagi masalalarning osonroq xal qilish yo'llari qidiriladi.

Faraz qilaylik, $[a,b]$ kesmadagi $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ nuqtalarda $y=f(x)$ funksiyaning $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ qiymatlari berilgan bo'lsin.

$$\text{Ya'ni } y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$$

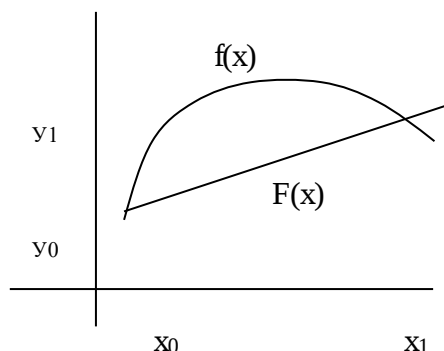
Shunday $F(x)$ funksiyani (ko'pxadni) topish kerakki uning darajasi n dan ortiq bo'lmasin va $y_0 = F(x_0), y_1 = F(x_1), \dots, y_n = F(x_n)$ shartni qanoatlantirsin. x ni $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ nuqtalarda boshqa qiymatlarda funksiya qiymatlarini xisoblash jarayoniga $f(x)$ funksiyani interpolatsiyalash deyiladi. $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ - nuqtalarga Lagranj interpolatsiya tugun nuqtalari deyiladi.

Agar $x \in [x_0, x_n]$ da $f(x)$ ni qiymatlarda xisoblansa tor manodagi interpolatsiya qilish deyiladi.

Chiziqli interpoliyasiya

Bizga ma'lumki interpoliyasiya masalasida jadval ko'rinishda berilgan yoki hisoblash murakkab bo'lgan funktsiyani hisoblash qulay bo'lgan funktsiyaga almashtiriladi.

Faraz qilaylik $[a,b]$ kesmaning x_0, x_1 , nuqtalarida $y = f(x)$ funktsiyaning y_0, y_1 qiymatlari berilgan bo'lsin.



Chiziqli interpoliyasiya masalasi deganda, (x_0, y_0) va (x_1, y_1) nuqtalardan o'tuvchi $f(x)$ funktsiyani, shu nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqdan iborat $F(x)$ funktsiya bilan almashtirish tushuniladi.

Ikki nuqtidan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi $((x_0, y_0)$ va $(x_1, y_1))$ quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$\frac{y - y_0}{y_0 - y_1} = \frac{x - x_0}{x_0 - x_1}$$

bu yerdan

$$y = y_0 + \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} (x - x_0)$$

ko'rinishdagi bog'lanishni olamiz.

Bu bog'lanish chizmadagi $F(x)$ ni bildiradi,

Ya'ni:

$$F(x) = y(x) = y_0 + \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \cdot (x - x_0)$$

U xolda qidirayotgan bog'lanish

$$F(x) = y_0 + \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \cdot (x - x_0) \quad (1)$$

ko'rinishda bo'lar ekan. Demak $[x_0, x_1]$ -kesmaning ixtiyoriy nuqtasidagi qiymatini hisoblash uchun qulay bo'lgan (1) formula orqali amalga oshiriladi.

Bu yerda $f(x)$ va $F(x)$ -larning farqi chizmada ko'rsatilgan Δy -masofa hisoblanadi. Demak, tugun nuqtalar orasidagi masofa qanchalik kichik bo'lsa xatolik shuncha kam bo'ladi.

(1) formula orqali hisoblanadigan $F(x)$ -funktsiya $F(x_0) = y_0$; $F(x_1) = y_1$ - interpoliyasiya shartlarini qanoatlantiradi.

$$F(x_0) = y_0 + \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \cdot (x_0 - x_0) = y_0 + 0 = y_0$$

$$F(x_1) = y_0 + \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \cdot (x_1 - x_0) = y_0 - y_0 + y_1 = y_1$$

Nyutonning I formulasi

Funksiya qiymatlarini x argumentning boshlang'ich qiymatlarida xisoblashga Nyutonning-1 formulasi qulaydir.

Faraz qilaylik, $y=f(x)$ funksiyani $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1)$, ..., $y_n=f(x_n)$ qiymatlari $x_0, x_1, \dots, x_n$ nuqtalarda berilgan bo'lsin. $x_i=x_0+ih$, $(i=1, n)$

$$P_n(x)=y_0, P_n(x_1)=y_1, \dots, P_n(x_n)=y_n$$

shartni qanoatlantiruvchi n -tartibli $P_n(x)$ ko'pxadni topish talab etiladi.

Ko'pxadni

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_1)+a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+\dots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) \quad (8.1)$$

$a_0, a_1, \dots, a_n$ -noma'lum koeffisientlar topilishi kerak.

a_0 ni topish uchun $x=x_0$ desak, $P_n(x)=a_0=y_0$. Demak, $a_0=y_0$.

a_1 topish uchun $P_n(x)$ ni x nuqtada 1-chekli ayimasini hisoblaymiz.

$$\Delta P_n(x)=P_n(x+h)-P_n(x)$$

Urinma qo'yib $\Delta P_n(x)$ ni $x=x_0$ hisoblasak

$$P_n(x_0)=a_1 \cdot h$$

2-tomonidan $\Delta P_n(x_0)=f(x_1)-f(x_0)=y_1-y_0=\Delta y_0$

U xolda

$$a_1 = \frac{\Delta y_0}{h}$$

a_2 ni topish uchun $\Delta^2 P_n(x)$ hisoblaymiz,

$$\Delta^2 P_n(x)=P_n(x+\Delta x)-P_n(x)$$

O'rniga qo'yib hisoblasak,

$$\Delta P_n(x)=2! \cdot h^2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3 \cdot h^3 \cdot a_3(x-x_0) + \dots + (n-1) \cdot n \cdot h^2 \cdot a_n(x-x_0) \dots (x-x_{n-3})$$

$$x=x_0, \text{ desak, } \Delta^2 P_n(x_0)=2! \cdot h^2 \cdot a_2$$

Bundan

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2! \cdot h^2}$$

Ms. Nyuton-1 da a_3 koeffisientni hisoblang.

Yuqori tartibli chekli almashtirishni hisoblash, $x=x_0$ desak,

$$a_i = \frac{\Delta^i y_0}{i! \cdot h^i} \quad (i=0, 1, 2, \dots, n) \quad \Delta y=y \text{ deymiz}$$

Topilgan $a_0, a_1, \dots, a_n$ larni (8.1) ga qo'yamiz

$$P_n(x)=y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h} (x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} (x-x_0)(x-x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} (x-x_0) \dots (x-x_{n-1}) \quad (8.2)$$

Agar

$$q = \frac{x - x_0}{h}$$

belgilash kiritsak.

Ms. $q, q-1, q-2, \dots$ –munosabatlarini xosil bo'lishini ko'rsating.

Nyutonning -1 interpolyasiyona formulasi quyidagicha bo'ladi.

$$P_n(x) = y_0 + q \frac{\Delta y_0}{1!} + \frac{q(q-1)\Delta^2 y_0}{2!} + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-(n-1))\Delta^n y_0}{n!} \quad (8.3)$$

(8.3) formulani Nyuton-1 interpolyasiyona ko'pxadi deyiladi.

Nazorat savollari.

1. Funktsiyani interpolyasiyalash deganda nimani tushunasiz?
2. Funktsiyani interpolyasiyalash masalasi qaysi amaliy jarayonlarda uchraydi?

9-ma'ruza: Lagranj interpolyasiyona ko'pxadi. Interpolyasiyona ko'phadlarni xatoliklarini baholash.

O'quv modul birliklari:

1. *Lagranj interpolyasiyona ko'pxadi.*
2. *Interpolyasiyona ko'phadlarni xatoliklarini baholash.*

Langranjning interpolyasiyona formulasi

Parabolik interpolyasiyani umumiy formulalaridan biri Langranjning interpolyasiyona formulasidir.

Faraz qilaylik $[a, b]$ da $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ larga mos ravishda $y = f(x)$ funksiyaning $y_0 = F(x_0), y_1 = F(x_1), \dots, y_n = F(x_n)$ $n+1$ ta qiymatlari berilgan bo'lsin.

Shunday $L_n(x)$ ko'pxadni topish talab etiladiki, u berilgan nuqtalarda $y_0 = L(x_0), y_1 = L(x_1), \dots, y_n = L(x_n)$ qiymatlari qabul qilsin.

Bu yerda $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ lar $[a, b]$ da bir biridan xar xil uzoqlikda yotishlari xam mumkin, ya'ni interpolyasiya tugun nuqtalari teng bo'lmagan oraliqlar bo'lishi mumkin, ya'ni

$$h = x_{i+1} - x_i \neq \text{const} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

h -interpolyasiya qadami deyiladi.

Masala, yechimga ega bo'ladi, agar $L_n(x)$ ko'pxadni darajasi n dan ortiq bo'lmasa.

$L_n(x)$ ko'pxadni quyidagi ko'rinishda qidiramiz:

$$L_n(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$$

Bu yerda $a_0, a_1, \dots, a_n$ lar xozircha noma'lum koeffitsientlardir.

Masalani shartidan quyidagi algebraik tenglamalar sistemasini xosil qilamiz,

$$a_0 + a_1 \cdot x_0 + a_2 \cdot x_0^2 + \dots + a_n \cdot x_0^n = y_0$$

$$a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_1^2 + \dots + a_n \cdot x_1^n = y_1$$

.....

$$a_0 + a_1 \cdot x_n + a_2 \cdot x_n^2 + \dots + a_n \cdot x_n^n = y_n$$

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ nomalumlarni Kramer formulasi yordamida aniqlaymiz.

$$a_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta}, a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \dots, a_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

Bu yerda Δ – asosiy determinant. $\Delta \neq 0$ da sistema yagona yechimga ega bo'ladi

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} \quad \Delta_0, \dots, \Delta_n \text{ ёрдамчи детерминантлар}$$

Izlanayotgan ko'pxadni quyidagicha yozib olamiz

$$L_n(x) = y_0 Q_0(x) + y_1 Q_1(x) + \dots + y_n Q_n(x) \quad (9.1)$$

$Q_i(x)$ ni ($i=0, n$) shunday tanlaymizki u quyidagi shartni bajarsin

$$Q_i(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{agar } i \neq j \\ 1, & \text{agar } i = j \end{cases}$$

$$Q_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_{i-1})(x_0-x_{i+1})\dots(x_0-x_n)} \quad (9.2)$$

Yuqoridagilarni hisobga olib (9.2) ni quyidagicha yozib olamiz

$$L_n(x) = y_0 \frac{(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)\dots(x_0-x_n)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} + \dots + y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}$$

Ushbu ko'pxad Lagranjning interpolasyon formulasi deyiladi. Uni qisqaroq qilib yozsak

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \quad (9.3)$$

Interpolasyon formulalar xatoliklari

Biz quyida interpolatsion ko'pxadlar xatoliklari formulalarini keltirib o'tamiz

Lagranj. $|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$

Agar $h = x_{i+1} - x_i$ desak

Nyuton-1 $|R_n(x)| = h^{n+1} \cdot \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in [x_0, x_n]$

Nyuton-2 $|R_n(x)| = h^{n+1} \cdot \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in [x_0, x_n]$

$$M_{n+1} = \max |f^{(n+1)}(x)| \quad x \in [a, b]$$

Amaliyotda funktsiyani analitik ko'rinishini xar doim xam ma'lum bo'lavermaydi.

Shuning uchun

$$f^{(n+1)}(\xi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^{n+1} y}{h^{n+1}}$$

dan

$$f^{(n+1)}(\xi) = \frac{\Delta^{n+1} y}{h^{n+1}}$$

dan qabul qilinadi.

U holda, Nyutonning 1 va 2 interpolasyon formulasi uchun xatolik

$$R_n(x) \approx \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{(n+1)!} \Delta^{n+1} y_0 \quad 1 \text{ uchun}$$

$$R_n(x) \approx \frac{q(q+1)\dots(q+n)}{(n+1)!} \Delta^{n+1} y_n \quad 2 \text{ uchun ko'rinishda bo'ladi.}$$

10-ma'ruza: Elektroenergetikada optimallashtirish masalalari. Chiziqli modellashtirish.

O'quv modul birliklari:

1. Optimallashtirish.
2. Chiziqli modellashtirish masalasini qo'yilishi.
3. Kanonik forma.

Chiziqli programmashtirish - chiziqli funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatini o'zgaruvchilarga nisbatan chiziqli chegaraviy shartlar qo'yilgan holda aniqlash bilan shug'ullanadigan fan. Shuning uchun, chiziqli programmashtirish masalalari funksiyaning shartli ekstremum masalalari qatoriga kiradi. Lekin chiziqli programmashtirish masalalari maxsus xususiyatga ega bo'lgani uchun matematik analizdagi funksiya ekstremumini aniqlashning klassik usulini to'g'ridan-to'g'ri qo'llash mumkin emas.

Shuning uchun chiziqli programmashtirish masalalarini yechishning maxsus usullari ishlab chiqilgan. Ular yordamida ayniqsa, iqtisodiy masalalarni yechish maqsadga muvofiq..Chiziqli programmashtirish masalasi mavzusida Iqtisodiyotda miqdoriy usullarning klassifikatsiyasi, namunaviy iqtisodiy masalalarning matematik modellari hamda transport, optimal qirqish, qorishma tayyorlash, ishlab chiqarishni optimal rejalashtirish masalalarining qo'yilishi va matematik modellari berilgan

Ushbu, $x_1, x_2, \dots, x_n$ noma'lumlarga nisbatan chiziqli bo'lgan, ya'ni noma'lumlar faqat o'zining birinchi darajasi bilan qatnashgan $Z=C_1X_1+C_2X_2+\dots+C_nX_n$ ko'rinishdagi funksiya chiziqli funksiya deb ataladi. Bu yerda $c_1, c_2, \dots, c_n$ - berilgan o'zgarmas, haqiqiy sonlardir. Shuningdek, $c_1X_1+C_2X_2+\dots+C_nX_n$ munosabat chiziqli tenglik, $c_1X_1+C_2X_2+\dots+C_nX_n \leq k$ munosabat esa chiziqli tengsizlik deb ataladi. Bu yerda k -tayin o'zgarmas son.

quyidagi tenglamalar sistemasini qaraylik:

$$a_{11}X_1+a_{12}X_2+\dots+a_{1n}X_n=b_1,$$

$$a_{21}X_1+a_{22}X_2+\dots+a_{2n}X_n=b_2,$$

$$a_{m1}X_1+a_{m2}X_2+\dots+a_{mn}X_n=b_m.$$

bu yerda $a_{ij}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$ - o'zgarmas sonlar.

Algebra kursida bu sistema qisman o'rganilgan bo'lib, asosan, nqm bo'lgan holda sistemani yechishning turli usullari qaralgan. Gauss-Jordan usuli, determinantlar usuli shular jumlasidandir. Biroq $m < n$ bo'lganda, ya'ni tengliklar soni noma'lumlar sonidan kichik bo'lgan hol sistema yechimini izlash nuqtan nazaridan qiziqish uyg'otmagan. Xolbuki, bu holda sistemaning yechimi cheksiz ko'p bo'lib, ular orasidan ma'lum bir maqsadga muvofiq'ini tanlash imkoniyati tug'iladi. Sistemaning bunday xususiyatlari mazkur kursda yetarlicha o'rganiladi.

Umumiy holda matematik programmashtirish masalasining matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, \quad (i = \overline{1, m})$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyaning ekstremumi topilsin. Bu yerda: f, g_i - berilgan funksiyalar, b_i - ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

Agar f , g_i funksiyalarning hammasi chiziqli funksiyalardan iborat bo'lsa, berilgan masala *chiziqli programmashtirish masalasi* bo'ladi. f – funksiya masalaning maqsad funksiyasi deyiladi.

Chiziqli programmashtirish masalasining normal, simmetrik yoki standart ko'rinishi deb uning quyidagi ko'rinishiga aytiladi:

$$\begin{aligned} & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max \\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \end{aligned} \quad (10.1)$$

$$\begin{aligned} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ & \text{-----}, \end{aligned} \quad (10.2)$$

$$\begin{aligned} & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Bu yerda “ $\rightarrow \max$ ” belgisi mazkur chiziqli funksiyaning maksimum qiymati izlanayotganligini bildiradi.

Shuningdek, chiziqli programmashtirish masalasining ushbu

$$\begin{aligned} & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max \\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \end{aligned} \quad (10.4)$$

$$\begin{aligned} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \text{-----} \end{aligned} \quad (10.5)$$

$$\begin{aligned} & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned} \quad (10.6)$$

ko'rinishiga uning kanonik ko'rinishi deyiladi.

11,12-ma'ruza: Chiziqli modellashtirish masalasini grafik usulda yechish.

Elektroenergetika masalalarini potentsiallar usuli yordamida yechish.

O'quv modul birliklari:

1. Chiziqli modellashtirish masalasini $n=2$ holatda qo'yilishi.
2. Grafik usulni geometrik taxlili.
3. Chiziqli modellashtirish masalasini grafik usulda yechish.
4. Simpleks usuli.

Chiziqli programmashtirish masalasini grafik usulda yechish.

Misol. Ushbu chiziqli programmashtirish masalasini grafik usulda yeching.

$$\begin{cases} x_1 \leq 5 \\ x_2 \leq 7 \\ 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ 3x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$z = 3 + x_1 + x_2 \rightarrow \max(\min)$$

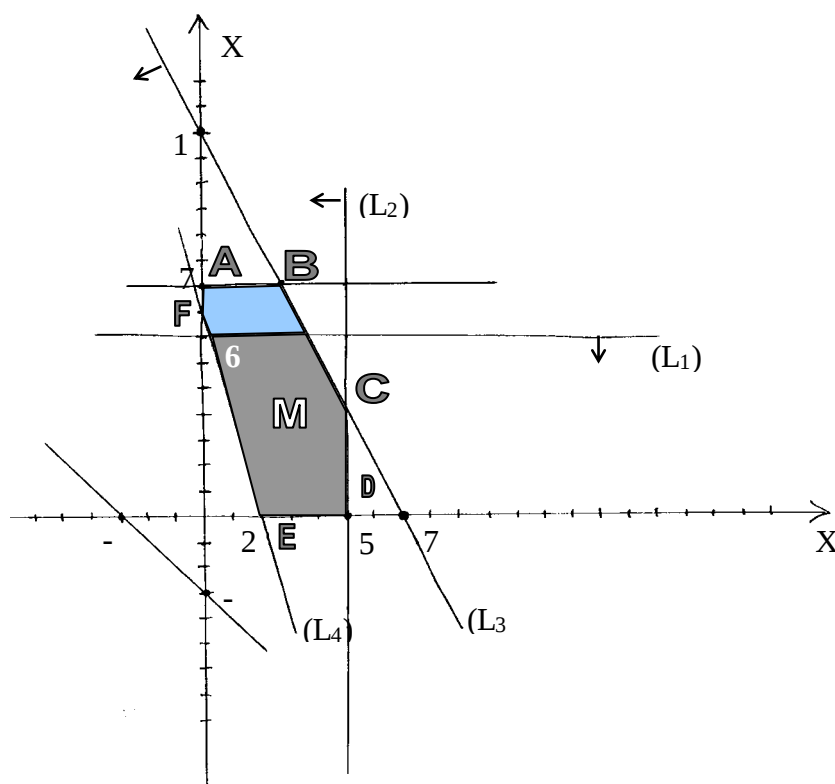
Yechish: Yechimlardan tashkil topgan qavariq ko'pburchak yasash uchun koordinatalar sistemasida

$$x_1 = 5 \quad (L_1), \quad 2x_1 + x_2 = 14 \quad (L_3)$$

$$x_2 = 7 \quad (L_2), \quad 3x_1 + x_2 = 6 \quad (L_4)$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0 \text{ to'g'ri chiziqlarni yasaymiz.}$$



Demak, $ABCDE$ yechimlar ko'pyoqlisidir.

Endi $Z = 3 + x_1 + x_2 = C$ to'g'ri chiziqni chizamiz. $C = 0$ bo'lsa, $x_1 + x_2 = -3$ bo'ladi. $A(0,7)$, $B(\frac{7}{2}, 7)$, $C(5,4)$, $D(5,0)$, $E(2,0)$, $F(0,6)$ uchlarda $Z(A)=10$; $Z(B)=13,5$; $Z(C)=12$; $Z(D)=8$; $Z(E)=5$; $Z(F)=9$ larni hisoblaymiz

$$Z_{\max} = 13,5 \quad x_1 = 3,5; \quad x_2 = 7 \quad Z_{\min} = 5 \quad x_1 = 2; \quad x_2 = 0$$

Simpleks usulida chiziqli programmalash masalasini yechish.

Misol. $Z=4x_1+2x_2$ maqsad funksiyaning maksimumini ushbu cheklanishlar sistemasi yordamida aniqlansin.

$$\begin{cases} x_1 \leq 5 \\ 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Yechish. Berilgan masalani kanonik shaklda yozamiz

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 14 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 10 \\ x_2 + x_6 = 8 \\ x_j \geq 0 \quad (j=1,2,3,4,5,6) \end{cases}$$

$$Z=4x_1+2x_2+0 \cdot x_3+0 \cdot x_4+0 \cdot x_5+0 \cdot x_6 \rightarrow \max$$

Cheklanishlar sistemasini vektor ko'rinishda quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \quad \vec{P}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{P}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{P}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{P}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bu erda masalaning maksimal qiymatini hisoblanar ekan, bunda optimal rejaga hamma $Z_j - C_j$ ayirmalar manfiy bo'lmaganda, ya'ni $Z_j - C_j \geq 0$ shartda erishiladi. Masalaning boshlang'ich rejasini tuzamiz.

$\vec{x}_1$ Boshlang'ich

reja

I	Bazis	C bazis	$\vec{P}_i$	4	2	0	0	0	0
				$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	$\vec{P}_3$	$\vec{P}_4$	$\vec{P}_5$	$\vec{P}_6$
1	$\vec{P}_3$	0	5	1	0	1	0	0	0
2	$\vec{P}_4$	0	14	2	1	0	1	0	0
3	$\vec{P}_5$	0	10	1	1	0	0	1	0
4	$\vec{P}_6$	0	8	0	1	0	0	0	1
5	$Z_j - C_j$	$Z_0 = 0$		-4	-2	0	0	0	0

Boshlang'ich bazis $\vec{P}_3, \vec{P}_4, \vec{P}_5, \vec{P}_6$ vektorlardan tashkil topgan bo'lib, unga $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 5, 14, 10, 8)$ reja mos keladi.

Chunki C_3, C_4, C_5, C_6 lar nolga teng bo'lib, Z chiziqli funktsiya qiymati nolga teng, ya'ni $Z_0 = 0$. $\min(Z_j - C_j)$ ga mos vektorni bazisga kiritamiz. Bu ayirma $Z_j - C_j = -4$ ga teng bo'lib, bu element yotgan ustun xal qiluvchi ustun deb ataymiz, unga mos $\vec{P}_1$ vektorni bazisga kiritamiz. endi qaysi vektorni bazisdan chiqarish kerakligini aniqlaymiz. Buning uchun $\theta_o = \min \left(\frac{x_i}{x_{ik}} \right) = x_{ik} > 0$

ni hisoblaymiz. Demak, $\theta_o = \min \left(\frac{5}{1}, \frac{14}{2}, \frac{10}{1} \right) = 5$ ga teng ekan. Shuning uchun

$\vec{P}_3$ vektorni bazisdan chiqaramiz. Bu vektor yotgan satr xal qiluvchi satrdir. Shunday qilib, xal qiluvchi satr va xal qiluvchi ustunlarning kesishgan elementini aniqlab oldik.

$\vec{x}_1$ rejani $X'_i = X_i - \frac{x_i}{x_{ik}} \cdot X_{ik}$ ($i=1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, m$)

$X'_i = \frac{x_i}{x_{ik}}$ formulalar yordamida almashtirib, $\vec{x}_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$

$= (5, 0, 0, 4, 5, 8)$ yangi rejaga ega bo'lamiz. Bu holda chiziqli funktsiyaning qiymati $Z_0(\vec{x}_2) = 20$ ga teng bo'ladi. $\vec{x}_2$ reja uchun optimallik sharti bajarilmaydi, Chunki $Z_j - C_j$ ayirmalar orasida manfiylari mavjud.

I	Bazis	C bazis	$\bar{X}_i$	4	2	0	0	0	0
				$\bar{P}_1$	$\bar{P}_2$	$\bar{P}_3$	$\bar{P}_4$	$\bar{P}_5$	$\bar{P}_6$
1	$\bar{P}_1$	4	5	1	0	1	0	0	0
2	$\bar{P}_4$	0	4	0	1	-2	1	0	0
3	$\bar{P}_5$	0	5	0	1	-1	0	1	0
4	$\bar{P}_6$	0	8	0	1	0	0	0	1
5	$Z^1_j - C_j$	$Z^1_0 = 20$		0	-2	4	0	0	0

Bu ayirma $Z^1_2 - C_2 = -2 < 0$, Demak, $\bar{P}_2$ vektorni bazisga kiritish kerak. qaysi vektorni bazisdan chiqarish kerakligini aniqlaymiz. $\theta_0 = \min \left(\frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \frac{8}{1} \right) = 4$.
 gamas $\bar{P}_4$ vektorni bazisdan chiqarish lozim. Natijada ikkinchi xal qiluvchi satr va xal qiluvchi ustunga ega bo'ldik. $\bar{X}_2$ rejani almashtirib, $\bar{X}_3 = (5, 4, 0, 0, 1, 4)$ yangi rejaga ega bo'ldik.

i	Bazis	C bazis	$\bar{X}_i$	4	2	0	0	0	0
				$\bar{P}_1$	$\bar{P}_2$	$\bar{P}_3$	$\bar{P}_4$	$\bar{P}_5$	$\bar{P}_6$
1	$\bar{P}_1$	4	5	1	0	1	0	0	0
2	$\bar{P}_2$	2	4	0	1	-2	1	0	0
3	$\bar{P}_3$	0	1	0	0	1	-1	1	0
4	$\bar{P}_4$	0	4	0	0	2	-1	0	1
5	$Z_j - C_j$	$Z''_e = 28$		0	0	0	2	0	0

Oxirgi jadvaldan ko'rinib turibdiki, $\bar{X}_3$ reja uchun optimallik sharti bajarildi, ya'ni hamma $Z_j - C_j \geq 0$ ($j=1, \bar{6}$)

Bundan boshqa chiziqli tenglamalar sistemasining yangi mumkin bo'lgan rejasi mavjud emas. Demak, maqsad funktsiya maksimal qiymatga $\bar{X}_3 = (5, 4, 0, 0, 1, 4)$ rejada ega bo'ladi, ya'ni $Z_{\max} = 28$.

13,14-ma'ruza: Energetikada ehtimollar nazariyasi. Energetikada matematik statistikaning qo'llanilishi. Matematik kutilma. Dispersiya.
O'quv modul birliklari:

1. *Energetikada ehtimollar nazariyasi.*
2. *Ehtimollikni aniqlashning klassik va statistik usuli.*
3. *Energetikada matematik statistikaning qo'llanilishi.*
4. *Matematik kutilma. Dispersiya.*

Ishlab chiqarishning barcha soxalarida bo'lgani kabi, energetika soxasida ham tasodifiy xodisalar uchray turadi. Masalan, iste'molchi qurilmalardan birortasi (elektrodvigatel, elektr chirog'i, elektrisituvchi qurilma) tasodifan o'chirilgan yoki elektr tarmog'idan uzib qo'yilgan bo'lishi mumkin, qaysiki foydalanish darajasi turlicha bo'ladi. Buning natijasida xar xil tasodifiy xodisalarning o'zaro bog'lanishi, tasodifiy miqdorlarga bog'liq energetik sistemani yuzaga keltiradi. Energetik sistema aloxida elementlarining (qozon, turbina, generatorlar, transformatorlar, uzatish tarmoqlari) nosoz holga kelishi ham tasodifiy xodisa bo'lib, o'z navbatida bir qator muammolarni keltirib chiqaradi.

Tasodifiy miqdorlarni aniqlashning ikkita usuli bor: klassik va statistik. Klassik usulni, faqat birgalikda bo'lmagan va teng kuchli xodisalardan iborat tasodifiy xodisalarni aniqlashda qo'llash mumkin. Bunday xodisalarni – holatlar deyiladi. Bu shuni anglatadiki, xodisalar to'plamidagi tasodifiy xodisalardan biri albatta yuz beradi, ya'ni qaysidir bitta xodisani yuz berishi muqarrar bo'ladi. Bundan tashqari ikkita xodisa bir vaqtda yuz bermaydi va barcha xodisalar bir xil ehtimollikka ega. Bizga ma'lumki, xodisalar to'plamidagi u yoki bu xodisaning ehtimolligini, tengligini ko'rsatish inkoniyati xar doim xam bo'lavermaydi. Shuning uchun energetikada, ehtimolliklarni aniqlashning statistik usulidan foydalanish maqsadga muvofiq bo'ladi.

Birorta tasodifiy xodisani kuzatib yoki unga mos kelgan tajribani o'tkazib, shu tasodifiy xodisani yuz berishini nisbiy chastotasini aniqlash mumkin. Ko'p sonidagi kuzatishlar yoki tajribalar o'tkazilganda xodisani yuz berish chastotasi qandaydir aniq qiymat atrofida tebranadi, bu qiymatni xodisaning yuz berishini «Statistik ehtimolli» deyiladi. Ko'p sonidagi kuzatishlar va tajribalar yordamida «Statistik ehtimollik» qiymatini yetarli darajada aniqlash mumkin. SHunday qilib, tasodifiy xodisa ehtimolli statistik materiallar asosida yuzaga keladi.

Har xil tasodifiy miqdorlar simvolik tarzda A , B , C – va x.k katta xarflar bilan, yuz berishi muqarrar xodisa U – xarfi bilan, yuz bermaydigan xodisa V – xarfi bilan belgilanadi.

Har xil tasodifiy xodisalar va ularning simvolik belgilari orasida munosabatlarni keltiramiz (Ushbu simvollar Bul algebrasidan olingan):

1. $A \in B$. A - xodisa B - ning ichida, ya'ni A - xodisa yuz bersa B - xodisa ham albatta yuz beradi;
2. $A = B$. A - xodisa yuz beradi, agar B - xodisa yuz bersa va aksincha. Bu munosabat $A \in B$ va $B \in A$ – munosabatlarga ekvivalent hisoblanadi;
3. $A * B$. A va B - xodisalar bir vaqtda yuz beradi;
4. $A + B$. A - xodisa yuz beradi yoki B - xodisa, yoki ikkala xodisa bir vaqtda yuz beradi (A va B - xodisalarning xech bo'lmaganda bittasi yuz beradi);
5. $A - B$. A - xodisa yuz beradi, lekin B - xodisa yuz bermaydi;
6. $\bar{A}$. A - xodisaga qarama-qarshi xodisa. A - xodisa yuz bersa, u holda $\bar{A}$ - xodisa yuz bermaydi va aksincha.

M.S $\bar{A} + A = U$, $A * \bar{A} = V$ munosabatlarni qanday qiymatlar qabul qilishini aniqlang va izox bering.

Bu yerda $\bar{A} + A = U$, ya'ni $\bar{A}$ va A xodisalardan biri albatta yuz beradi. Bundan tashqari $\bar{A} * A = V$ – ya'ni $\bar{A}$ va A xodisalar bir vaqtda yuz bermaydi.

7. $\bar{A} * A = V$. A va B xodisalar birgalikda emas, ya'ni bir vaqtda yuz bermaydi. Birgalikdagi xodisalarni qarama-qarshi xodisalardan farqi, birgalikdagi xodisalar yuz bermasligi mumkin.

8. $A = B_1 + B_2 + B_3$ va $B_1 B_2 = B_1 B_3 = B_2 B_3 = V$. A - xodisa qiqlarga bo'linadi. B_1, B_2, B_3 - o'zaro birgalikda bo'lmagan xodisalar. A - xodisa umuman yuz bermasligi ham mumkin.

9. $B_1 + B_2 + B_3 = V$ va $B_1 B_2 = B_1 B_3 = B_2 B_3 = V$ o'zaro birgalikda bo'lmagan xodisalar to'plami. Qaysidir bittasi albatta yuz beradi. (8 - dan farqli ravishda)

Bundan keyin A - xodisani yuz berish ehtimolligini $P(A)$ deb belgilaymiz.

Eslatma: Ishchi holat ehtimolligini - p, nosoz holat ehtimolligini - q bilan belgilaymiz.

A va B xodisalar o'zaro bog'liq emas deyiladi, agarda birining yuz berishi ikkinchisining yuz berishiga ta'sir ko'rsatmasa va o'zaro bog'liq deyiladi, aksincha holat yuz bersa.

Odatda energetikada oddiy bo'lmagan xodisalarni o'rganishga to'g'ri keladi. Murakkab xodisalar bir qator oddiy xodisalarni yig'indisidan tashkil topgan bo'ladi. Oddiy xodisalar ehtimolliklari ma'lum bo'lganda ulardan tashkil topgan murakkab xodisa ehtimolligi murakkab xodisalar ehtimolliklari qonunlari yordamida aniqlanadi.

O'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy xodisalar uchun ushbu qonunlar quyidagicha aniqlanadi:

1. O'zaro bog'liq emas va birgalikda bo'lmagan A va B xodisalarning birortasi yuz berish ehtimolligi, shu xodisalar ehtimolliklari yig'indisiga teng. A va B xodisalar birortasi yuz berish ehtimolligi simvolik tarzda yig'indi $A + B$ ko'rinishida belgilanadi.

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

2. Birgalikda emas va o'zaro bog'liq A va B xodisalar birortasi yuz berish ehtimolligi esa quyidagicha aniqlanadi:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

3. O'zaro birgalikda emas A va B xodisalar bir vaqtda yuz berish ehtimolligi nolga teng:

$$P(AB) = 0$$

4. Birgalikda emas va o'zaro bog'liq A va B xodisalar bir vaqtda yuz berish ehtimolligi A va B xodisalar yuz berish ehtimolliklari ko'paytmasiga teng:

$$P(AB) = P(A) P(B)$$

5. Qarama-qarshi xodisalar ehtimolliklari yig'indisi birga teng:

$$P(\bar{A}) + P(A) = 1$$

Chunki A- xodisa yuz bersa $\bar{A}$ - xodisa umuman yuz bermaydi va

aksincha ($\bar{A}$ va A xodisalardan biri albatta yuz beradi).

Qarama-qarshi xodisani yuz berish ehtimolligi quyidagicha aniqlanadi:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Energetika sohasida ushbu qonuniyatlar quyidagi xolatlarida ishlatilishi mumkin. Qurilmani nosoz xolatga kelib qolishi (avariya xolati) tasodifiy xodisa xisoblanadi. Elektrostansiyaning katta sonidagi agregatlariva zanjir elementlaridan birining nosoz xolatiga kelishi boshqa qurilmalar buzilishiga olib kelishi mumkin. Ikki va undan ortiq qurilmaning bir vaqtda nosoz xolatga kelishi ehtimolligini aniqlash masalalarini yuzaga keltiradi. Shu bilan birga energetik sistemada nosoz xolat yuzaga kelmasligi ehtimolligini aniqlash masalasi ham uchrab turadiki, qaysiki bu qiymat barcha qurilmalarning ishonchli ishlashini xarakterlaydi. Bu masala energetikaning ishonchli ishlashini maqbul yechimini aniqlashda, energosistemaning turg'unligini ta'minlash (turg'unlikni optimal darajasini tanlash) masalalarida uchrab turadi.

Bunday holatlarda qurilmalarning xar birining nosoz xolatga kelish ehtimolliklari birgalikda va o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy xodisalar deb qaraladi.

Eslatma: Ishchi holat ehtimolligini - p, nosoz holat ehtimolligini -q bilan belgilaymiz.

Masalani yechish namunasi:

Masala: Par turbina va elektrik generator hamda parqozondan tashkil topgan energetik blokning nosoz holga kelishi ehtimolligini aniqlang. Par turbina hamma parni parqozondan oladi. Har bir alohida elementning nosoz xolga kelishi mos ravishda $q_T=0,01$; $q_G=0,001$; $q_K=0,02$ ga teng. (Turbinab, generator va qozon uchun mos ravishda).

Echish: Ma'lumki, barcha elementlarning ishdan chiqishi, ko'rsatilgan uch elementdan birining ishdan chiqishi bilan yuz berishi mumkin. Nosoz holatga kelmaslik eshtimoliy hodisa bo'lib, nosoz holatga kelishga qarama -qarshi bo'ladi, u holda blok elementlari nosoz holatga kelmaslik ehtimolliklari quyidagicha bo'ladi:

$$P_T=1-0,01=0,99; P_G=1-0,001=0,999; P_K=1-0,02=0,98;$$

Blok soz holatda ishlashi, ya'ni blok buzilmasdan ishlashi ehtimolligini aniqlaymiz. Har bir element buzilish ehtimolligini o'zaro bog'liq emas deb qarash mumkin, blok ishlash ehtimolligi:

$$P_{\sigma.t} = P_K \cdot P_T \cdot P_G = 0,98 \cdot 0,99 \cdot 0,999 = 0,9692298 \text{ ga teng.}$$

Ihtiyoriy sababga ko'ra blokni ishdan chiqishi, blokni ishlash ehtimolligiga qarama - qarshi bo'ladi. Shuning uchun blokni ishdan chiqish ehtimoligi:

$$q_{\sigma.t} = 1 - 0,9692298 = 0,0307702 \text{ ga teng.}$$

Ushbu qiymatlarni blok elementlarini nosoz holga kelishini hususiy hollarini ko'rib chiqib aniqlash ham mumkin:(ular faqat 7 ta holat bo'ladi). a)qozon; b) turbina; v) generator; g)qozon va turbina; d)qozon va generator; ye) turbina va generator; j)qozon, turbina va generator.

Barcha hususiy hollarni nosoz holatga kelish ehtimolliklarini aniqlaymiz:

a)qozonni nosoz holatga kelish ehtimolligi:

$$q_K \cdot P_T \cdot P_G = 0,02 \cdot 0,99 \cdot 0,999 = 0,0197802 .$$

bu holda qozonni ishdan chiqishi, boshqa elementlar ishdan chiqmagan bo'lishi kerak. Shuning uchun 0,02 ni 0,99 ga ko'paytirildi.

b) Turbinani ishdan chiqish ehtimolligini aniqlaymiz:

$$P_K \cdot q_T \cdot P_G = 0,98 \cdot 0,01 \cdot 0,999 = 0,0097902 .$$

Xuddi shinigdek, boshqa xollarni ham ehtimolligini aniqlaymiz:

$$v) P_K \cdot P_T \cdot q_G = 0,98 \cdot 0,99 \cdot 0,001 = 0,0009702 ;$$

$$g) q_K \cdot q_T \cdot P_G = 0,02 \cdot 0,01 \cdot 0,999 = 0,0001998 ;$$

$$d) q_K \cdot P_T \cdot q_G = 0,02 \cdot 0,99 \cdot 0,001 = 0,0000198 ;$$

$$e) P_K \cdot q_T \cdot q_G = 0,98 \cdot 0,01 \cdot 0,001 = 0,0000098 ;$$

$$j) q_K \cdot q_T \cdot q_G = 0,02 \cdot 0,01 \cdot 0,001 = 0,0000002 .$$

Agar 7 ta xususiy xolat ehtimolliklarini qo'shsak, u xolda blokni nosoz xolatga kelish ehtimolligi kelib chiqadi.

$$+ \left\{ \begin{array}{l} 0,0197802 \text{ a)} \\ 0,0097902 \text{ b)} \\ 0,0009702 \text{ v)} \\ 0,0001998 \text{ g)} \\ 0,0000198 \text{ d)} \\ 0,0000098 \text{ e)} \\ 0,0000002 \text{ ж)} \end{array} \right.$$

0,0307702 ga teng.

Hisoblash natijalaridan ko'rinib turibdiki birinchi yo'l bilan hisoblash, ikkinchi yo'l bilan hisoblashdan ko'ra soddaroq va ozroq hisob- kitob talab etadi. Lekin ikkinchi usulda blokning umumiy nosoz xolatga kelishini hisoblabgina qolmasdan, blokni ishdan chiqishini turli sabablarini analiz qilish imkoni paydo bo'ladi.

Elektroenergetikada matematik statistikani qo'llanishi.

Ko'p yillar davomida energosistemaning maksimum yuklamasi R (MVt) va elektroenergiyaning yillik ishlab chiqarilishi W (mlrd. kVt soat) keyingi qiymatlarga ega edi.

ε	P	1000	1100	1220	1350
η	W	5,6	6,6	7,0	7,8

Eksperimental va statistik materiallarni qayta ishlaganda, masalan, korrelyatsiya koeffitsientini aniqlashda alohida kattaliklarni o'lchashda tasodifiy xatolarni iloji boricha chetlab o'tish kerak. Buning uchun bitta tasodifiy kattalikning boshqa tasodifiy kattalikka eksperimental bog'liqligi hisobiy tekislikka tortiladi. Hisobiy tekislash metodlaridan biri eng kichik kvadratlar metodi hisoblanadi.

Agar u ni x ga eksperimental bog'liqligi ma'lum bo'lsa, u holda bog'liqlik xarakter ihaqida fikrlash mumkin (chiziqli, parabolik va hokazo) va bu bog'liqlik formulasini qaysidir ko'rinishda tanlash mumkin:

$$y = ax + b,$$

$$\text{yoki} \quad y = ax^2 + bx + c,$$

$$\text{yoki} \quad y = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

$$\text{ya'ni} \quad y = \varphi(x, a, b, c, \dots),$$

bu yerda $a, b, c, \dots$ koeffitsientlar hisoblash yo'li bilan topiladi. Bu parametrlar shunday tanlanadiki, amaldagi kuzatilgan kattalik u va $y = \varphi(x, a, b, c, \dots)$, formula bo'yicha olingan o'sha kattalik farqlari kvadratlarining yig'indisi eng kichik bo'lishi kerak.

Shunday qilib, $a, b, c, \dots$ kattaliklarni tanlash kriteriyasi

$$L = \sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i, a, b, c, \dots)]^2 = \min$$

bu yerda y_i va x_i -eksperimental topilgan miqdorlar.

Ko'pchilik o'zgaruvchan funktsiya minimumini aniqlash qoidasidan minimum shartlarini olamiz:

$$\partial L / \partial a = 0; \quad \partial L / \partial b = 0; \quad \dots$$

$$\text{yoki} \quad \sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i, a, b, c, \dots)] \left(\frac{\partial \varphi}{\partial a} \right) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i, a, b, c, \dots)] \left(\frac{\partial \varphi}{\partial b} \right) = 0.$$

Misol uchun tanlangan bog'lanish chiziqli bo'lsin, ya'ni $y = ax + b$, U holda $\partial \varphi / \partial a = x$ va $\partial \varphi / \partial b = 1$. Minimum shart quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\sum (y_i - ax_i - b)x_i = 0; \quad \sum (y_i - ax_i - b) = 0;$$

Agar belgilashlarni kiritsak,

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i; \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i; \quad \bar{xy} = \frac{1}{n} \sum x_i y_i; \quad \bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum x_i^2; \quad \bar{y}^2 = \frac{1}{n} \sum y_i^2$$

u holda minimum shartlari qayta yoziladi.

$$\bar{x}\bar{y} - a\bar{x}^2 - b\bar{x} = 0; \quad \bar{y} - a\bar{x} - b = 0,$$

bu yerdan noaniq parametrlarni a va b aniqlash uchun ikkita tenglama olish mumkin:

$$\bar{x}^2 a + \bar{x}b = \bar{x}\bar{y}; \quad \bar{x}a + b = \bar{y}.$$

Agar tanlangan bog'lanish parabolik bo'lsa, ya'ni

$$y = \varphi(x) = ax^2 + bx + c,$$

u holda minimum shartlari uch xil tenglama bilan yoziladi:

$$\sum (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)x_i^2 = 0$$

$$\sum (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)x_i = 0$$

$$\sum (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) = 0$$

analogik belgilashlarni qo'llab, noaniq parametrlarni a, b va c aniqlash uchun 3 ta tenglama yozish mumkin:

$$\bar{x}^4 a + \bar{x}^3 b + \bar{x}^2 c = \bar{x}^2 \bar{y}$$

$$\bar{x}^3 a + \bar{x}^2 b + \bar{x} c = \bar{x} \bar{y}$$

$$\bar{x}^2 a + \bar{x} b + c = \bar{y}$$

Olingan energosistema maksimumining R elektroenergiyaning yillik ishlab chiqarilishiga W eksperimental bog'liqligini chiziqlik bog'liqlik ko'rinishida tekislaymiz $P = Wx + b$, bu yerda $R=u$.

a va b ni aniqlovchi tenglamalarni topish uchun quyidagi kattaliklarni topib olamiz:

$$\bar{x} = (5,6 + 6,6 + 7,0 + 7,8) / 4 = 6,75;$$

$$\bar{x}^2 = (5,6^2 + 6,6^2 + 7,0^2 + 7,8^2) / 4 = 46,2;$$

$$\bar{y} = (1000 + 1100 + 1220 + 1350) / 4 = 1167,5;$$

$$\bar{y}^2 = (5,6 \cdot 1000 + 6,6 \cdot 1100 + 7,0 \cdot 1220 + 7,8 \cdot 1350) / 4 = 7977.$$

Axtarilayotgan tenglamalarni yozib olamiz:

$$46,2a + 6,75b = 7977; \quad 6,75a + b = 1167,5.$$

ularni yechib $a=145,2$ va $b=201,5$ ni olamiz. Binobarin, tekislangan bog'liqlik.

$$P = 145,2W + 201,5.$$

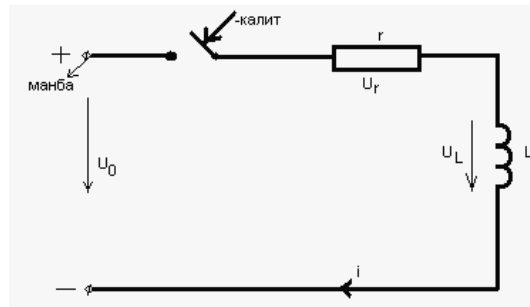
15,16-ma'ruza: Elektr sistemalarda o'tuvchi jarayonlarni o'rganishda matematik modellar. Oddiy differensial tenglamalar uchun Koshi masalasini sonli yechishni Eyler va Runge-Kutte usullari.

O'quv modul birliklari:

1. Elektr sistemalarda o'tuvchi jarayonlarni o'rganishda matematik modellar.
2. Oddiy differensial tenglamalarni yechishni Laplas almashtirish usuli.
2. Oddiy differensial tenglamalarni yechishni Eyler usuli.
3. Oddiy differensial tenglamalarni yechishni Runge-Kutte usuli.
4. Usul xatoliklarini baholash.

Elektrik zanjirlarning bitta turg'unlashgan rejimidagi bosh qayta o'tishni xarakterlovchi proses **o'tuvchi jarayon** deyiladi. Elektr zanjirning asosiy ish rejimi quyidagi faaktorlar tufayli o'zgarishi mumkin: manbaga ulanishi va undan ajratilishi, zanjir parametrlarining diskret o'zgarishi (nagruzkani keskin ortishi yoki kamayishi), ishlayotgan zanjirga qo'shimcha manbalarning ulanishi, zanjir elementlarning qisqa tutashuvi, alohida tarmoqlarning uzilishi va boshqalar. Elektrik zanjirning ish rejimini o'zgartirishga olib keluvchi barcha sabablar oddiy ravishda kommutasiya yoki **kommutasion proseslar** natijasida vujudga keladi.

Faraz qilaylik, t_0 vaqtda o'zgarish kuchlanish v_0 – ga ulanadigan r, L – elementlari ketma-ket ulangan zanjirning sxemasi berilgan bo'lsin (15.1-rasm)



15.1 – rasm.

G – qarshilik; L – induktiv g'altak; U_r , U_L – qarshilik, g'altak kuchlanishi i – tok yo'nalishi.

Ushbu zanjirni manbaga ulanishi natijasida hosil bo'ladigan o'tkinchi proses quyida differensial tenglama bilan ifodalanadi:

$$r \cdot i + L \frac{di}{dt} = v_0 \quad (15.1)$$

Ushbu olganda zanjirlar murakkab bo'lgan sari o'tkinchi proseslarni hisoblash yanada yuqori tartibdagi differensial tenglamalarni yechishga olib keladi.

Biz quyida differensial tenglamalarni yechish usullari umumiy holda:

1. Aniq usullar;
2. Taqribiy usullar;
3. Taqribiy – sonli usullardan tashkil topadi.

Aniq usullarni odatda **klassik usullar** deyiladi. O'tkinchi proseslarni klassik usull bilan hisoblashning asosiy qiyinchiligi shundaki, zanjir murakkablashgani sari, uning muvozanat xolatini anglatuvchi differensial tenglamaning darajasi orta boradi, bu esa integrallash doimiysi $S_1, S_2 \dots S_n$ larni aniqlash bilan bog'liq bo'lgan hisoblash ishlarining orta borishini bildiradi.

O'tgan asrning o'rtalarida rus matematigi M.E. Vashchenko – Zaxarachenko chizig'iy differensial tenglamalarni yechishning Laplas almashtirishiga asoslangan simvolik usulni tavsiya etdi. Buning mohiyati shundan birotki, vaqt funksiyasi $f(t)$ – ni integrallash va differensiallash shrniga **operator tasviri** deb ataladigan funksiyasi $F(p)$ bilan algebraik amallar bajariladi.

Shunday qilib, original deb ataluvchi har qanday vaqt funksiyasi $f(t)$ – ni unga ekvivalent bo'lgan kopleks o'zgaruvchan $P=a+i \cdot b$ argumentli $F(p)$ funksiya bilan almashtirish mumkin. $f(t)$ bilan $F(p)$ teng emas, balki moslik o'rnatilganini farqlash kerak. Bu xol matematika kursida quyidagicha ifodalanadi:

$$f(t)=F(p) \text{ yoki } F(p)=f(t).$$

Berilgan funksiya $f(t)$ ning tasviri $F(p)$ – Laplas almashtirish deb ataladigan formula

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (15.2)$$

bilan aniqlanadi.

Oddiy funksiyalarni Laplas formulasi bo'yicha almashtirish.

Berilgan oddiy funksiya $f(t)=v_0$ bo'lganda uning tasviri $F(p)$ ni topish talab etiladi, deb faraz qilaylik. Unda (15.2)-ga binoan

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} v_0 dt = v_0 \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{-v_0}{p} \cdot e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{-U_0}{p} (0 - 1) = \frac{U_0}{p}$$

$$\text{demak, } v_0 = \frac{U_0}{p}$$

yoki $f(t)qe^{bt}$ – uchun tasvir aniqlash kerak.

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{\alpha t} dt = v_0 \int_0^{\infty} e^{(\alpha-p)t} dt = \frac{1}{\alpha-p} \cdot e^{(\alpha-p)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha-p} (0 - 1) = \frac{1}{p-\alpha};$$

$$e^{\alpha t} = \frac{1}{p-\alpha}$$

quyidagi ayrim sodda funksiyalarni tasvirlarini keltirib o'tamiz.

$$A = \frac{A}{P}; \quad 1 - e^{-\alpha t} = \frac{\alpha}{P(P + \alpha)};$$

$$\sin \omega t = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}; \quad \cos \omega t = \frac{P}{\alpha^2 + \omega^2};$$

$$t - e^{\alpha t} = \frac{1}{(p + \alpha)^2}; \quad e^{-\alpha t} \cos \omega t = \frac{P + \alpha}{(P + \alpha)^2 + \omega^2}. \text{ va hokazo.}$$

Funksiya hosilasi tasviri:

$$\frac{d}{dt}(f(t)) = f'(t) - \text{tasvirini topish talab qilinishi}$$

$$f'(t) = \int_0^{\infty} f'(t) \cdot e^{-pt} dt$$

Bo'laklab integrallash qoidasiga ko'ra

$$f'(t) = p \cdot F(p) - f(0) \text{ ni hosil qilamiz.}$$

M.S. Ushbu munosabatni keltirib chiqaring.

Xuddi shunga o'xshash

$$f''(t) = p^2 F(p) - p \cdot f(0) - f'(0)$$

.....

$$f''(t) = p^n \left[F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2} - \dots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n} \right] \text{ munosabatlarni hosil qilish mumkin.}$$

Yuqoridagilardan kelib chiqib (1) – tenglamani, ya'ni r va L – zanjirni o'zgarmas kuchlanish U_0 – ga ulanish natijasida hosil bo'ladigan $i(t)$ – ni aniqlaymiz. Ta'kidlab o'tkanimizdek ushbu jarayonni ifodalovchi differensial tenglama

$$(15.3) \quad ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = U_0 - \text{ko'rinishda bo'ladi.}$$

Tasvir almashtirishlarni bajaramiz.

$$i(t) = I(p); \quad \frac{di}{dt} = pI(p) - i(0) = p \cdot I(p); U_0 = \frac{U_0}{p}$$

ushbu munosabatlarni (3) tenglamaga qo'ysak, tasvirga nisbatan algebratik tenglama hosil qilamiz.

$$rI(p) + L \cdot I(p) = \frac{U_0}{p}.$$

$I(p)$ – ga nisbatan yechamiz:

$$I(p)[r + L \cdot p] = \frac{U_0}{p} \Rightarrow I(p) = \frac{U_0}{p} \cdot \frac{1}{r + L} = \frac{U_0}{r} \cdot \frac{1}{p(1 + \frac{L}{r} \cdot p)};$$

munosabatni e'tiborga olib;

$$I(p) = \frac{U_0}{r} \cdot \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{1 + \frac{r}{L}} \right] - \text{munosabatni hosil qilamiz.}$$

U holda yuqoridagilarni e'tiborga olib;

$$i(t) = \frac{U_0}{r} \left[1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right] - \text{yechimini hosil qilamiz.}$$

(15.1)– tenglamani klassik usul bilan yeching va yechimlarni tahlil qiling.

Oddiy differensial tenglamalarda faqat bir o'zgaruvchiga bog'liq funksiya va uning hosilalari qatnashadi, ya'ni

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (15.4)$$

(15.4) tenglamada qatnashuvchi hosilalarning eng yuqori tartibi differensial tenglamalarning *tartibi* deyiladi. Agar tenglama izlanuvchi funksiya va uning hosilalariga nisbatan chiziqli bo'lsa, unga *chiziqli differensial* tenglama deyiladi.

Differensial tenglamaning *umumiy yechimi* deb, uni ayniyatga aylantiruvchi x va n ta $c_1, c_2, \dots, c_n$ o'zgarmaslarga bog'liq ixtiyoriy funksiyaga aytiladi. Masalan (15.4) tenglamaning umumiy yechimi $y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ ko'rinishdagi funksiyalardan iborat. Agar $c_1, c_2, \dots, c_n$ o'zgarmaslarga muayyan qiymatlar berilsa, umumiy yechimdan xususiy yechim hosil qilinadi. Xususiy yechimni topish uchun $c_1, c_2, \dots, c_n$ o'zgarmaslarning mos qiymatlarini aniqlash lozim. Buning uchun esa yechimni qanoatlantiruvchi qo'shimcha shartlarga ega bo'lishimiz kerak. Agar differensial tenglama n -tartibli bo'lsa, yagona xususiy yechimni topish uchun xuddi shuncha qo'shimcha shartlar kerak. Xususan, 1-tartibli tenglama $f(x, y, y') = 0$ ning umumiy yechimi $y = \varphi(x, c)$ dagi s o'zgarmasni topish uchun 1 ta qo'shimcha shartning berilishi kifoya.

Qo'shimcha shartlar berilishiga ko'ra differensial tenglamalar uchun 2 xil masala qo'yiladi:

- 1) *Koshi masalasi*
- 2) *Chegaraviy masala*.

Agar qo'shimcha shartlar bitta $x = x_0$ nuqtada berilsa, differensial tenglamani yechish uchun qo'yilgan masala *Koshi masalasi* deyiladi. Koshi masalasidagi qo'shimcha shartlar *boshlang'ich shartlar*, $x = x_0$ nuqta esa *boshlang'ich nuqta* deb ataladi. Oddiy differensial tenglamalarni yechishning chizma, analitik, taqribiy va sonli yechish usullari mavjud.

Analitik usullarda differensial tenglamaning yechimlari aniq formulalar orqali aniqlanadi.

Taqribiy usullarda differensial tenglama va qo'shimcha shartlar u yoki v darajada soddalashtirilib, masala osonroq masalaga keltiriladi.

Sonli usullarda esa yechim analitik shaklda emas, balki sonlar jadvali ko'rinishida olinadi. Albatta bunda differensial tenglamalar oldin diskret tenglamalar bilan almashtirib olinadi. Natijada sonli usullar vositasida olingan yechim ham taqribiy bo'ladi.

Umuman olganda, oddiy differensial tenglamalarning yechimlarini analitik usul yordamida topish inkoni juda kam bo'lganligi uchun, amalda ko'pincha ularni sonli usullar yordamida taqribiy hisoblanadi.

Quyida shunday usullardan Eyler va Runge-Kutta usullarini ko'rib chiqamiz.

***Eyler usuli*ning ishchi algoritmi.**

Bizga quyidagi birinchi tartibli differensial tenglama (Koshi masalasi)ni

$$y' = f(x, y) \quad (15.5)$$

$[a, b]$ oraliqdagi $y_0 = y(x_0)$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish lozim bo'lsin.

Koshi masalasini Eyler usuli yordamida yechish uchun, dastlab differensial tenglamaning yechimi qidiriladigan $[a, b]$ kesmani $x_1, x_2, \dots, x_n$ tugun nuqtalar bilan bo'laklarga bo'lamiz. Tugun nuqtalarning koordinatalari $x_{i+1} = a + (i+1)h$ ($i = 0..n-1$) formula orqali aniqlanadi. Har bir tugunda $y(x_i)$ yechimning qiymatlarini chekli ayirmalar yordamida taqribiy y_i qiymatlar bilan almashtiriladi.

Ma'lumki, $y = f(x)$ funksiyaning $x = x_0$ nuqta atrofidagi Teylor qatoriga yoyilmasini quyidagicha yozish mumkin:

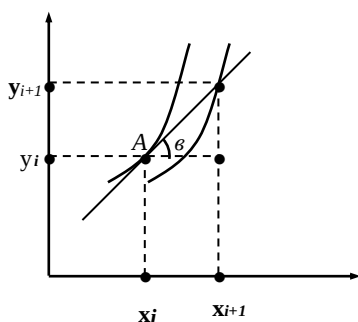
Ushbu cheksiz qatorning boshidagi ikkita had bilan chegaralanib, birinchi tartibli hosila qatnashgan hadni aniqlash natijasida quyidagi chekli ayirmali formulani hosil qilamiz:

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} \quad (15.6)$$

$$y'_{i+1} \approx y_{i+1} + h \cdot f(x_i, y_i) \quad (15.7)$$

Hosil qilingan (15.7) formula Eyler usulining asosiy ishchi formulasi bo'lib, uning yordamida tugun nuqtalarga mos bo'lgan differensial tenglamaning y_i xususiy yechimlarini topish mumkin. Yuqoridagi formuladan ko'rinib turibdiki, y_{i+1} yechimni topish uchun y_i yechimnigina bilish kifoya. Demak, Eyler usuli bir qadamli usullar jumlasiga kiradi.

Eyler usulining *geometrik ma'nosi* quyidagicha:



A nuqta $x=x_i$ nuqtaga mos keluvchi yechim bo'lsin. Bu nuqtadan integral chiziqqa o'tkazilgan urinma x_{i+1} nuqtada boshqa integral chizig'ida y_{i+1} yechimni aniqlaydi.

Urinmaning og'maligi $\beta \cdot y'_i = f(x_i, y_i)$ hosila bilan aniqlanadi. Demak, Eyler usulidagi yo'l qo'yilgan asosiy xatolik yechimni bir integral chizig'idan boshqasiga o'tkazib yuborishi bilan xarakterlanadi.

Bir qadamli oshkor usullarning boshqa bir necha xillari ham majud bo'lib, ularning ichida amalda eng ko'p ishlatiladigani Runge-Kutta usuli hisoblanadi. Usul shartiga ko'ra har bir yangi x_{i+1} tugun nuqtadagi y_{i+1} yechimni topish uchun $f(x,y)$ funksiyani 4 marta har xil argumentlar uchun hisoblash kerak. Bu jihatdan Runge-Kutta usuli hisoblash uchun nisbatan ko'p vaqt talab qiladi. Lekin Eyler usulidan ko'ra aniqligi yuqori bo'lganligi uchun, undan amalda keng foydalaniladi.

Usulning ishchi formulasi quyidagicha yoziladi:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3) \quad i = 0, 1, \dots$$

bu yerda $k_0 = f(x_i, y_i);$

$$k_1 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot k_0\right);$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot k_1\right);$$

$$k_3 = f(x_i + h, y_i + h \cdot k_2);$$

Demak, formulalardan ko'rinib turibdiki, Eyler usuli birinchi tartibli Runge-Kutta usuliga mos keladi.

Yuqorida ko'rib chiqilgan algoritmlarning to'g'riligini va usullarning aniqlik darajasini tekshirish uchun bitta ixtiyoriy tenglama olamiz. Aniqlik yechimni analitik usulda hisoblash qulay bo'lishi uchun quyidagi tenglamani ko'rib chiqamiz.

$Y' = \cos x$ tenglamani $[0, 1]$ oraliqda $h=0.1$ qadam bilan $y(0)=1$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimni topish kerak.

Yuqoridagi dasturlarga kerakli qiymatlarni kiritamiz. $x_0 = 0$; $y_0 = 1$; $f'(x) = \cos x$; $a = 0$; $b = 1$; $h = 0.1$

$Y' = \cos x$ uchun aniq yechim sifatida $y = \sin x + c$ ni olamiz. Boshlang'ich shartlarni qo'ysak, $1 = \sin 0 + c$ $c = 1$ Demak, $y = \sin x + 1$.

Olingan natijalarga mos qiymatlardan iborat jadval tuzamiz.

x_i	Eyler usuli uchun	Runge-Kutta usuli uchun	Aniq yechim
0			
0.1	1,1000	1,0998	1,0998
0.2	1,1995	1,1986	1,1986
0.3	1,2975	1,2955	1,2955
0.4	1,3930	1,3894	1,3894
0.5	1,4851	1,4794	1,4794
0.6	1,5729	1,5646	1,5466
0.7	1,6554	1,6442	1,6442
0.8	1,7319	1,7173	1,7173
0.9	1,8015	1,7833	1,7833
1	1,8637	1,8414	1,8414

Natijalardan ko'rinib turibdiki, Runge- Kutta usulidan olingan natijalar Eyler usulidan olingan natijalarga ko'ra aniq yechimga ancha yaqindir.



Nazorat savollari

1. Qanday tenglamalarni differensial tenglamalar deb ataymiz?
2. Oddiy differensial tenglamalarga ta'rif bering?
3. Xususiy xosilali differensial tenglamalarga ta'rif bering?
4. Umumiy yechim nima?
5. Xususiy yechim nima?
6. Differensial tenglamalarni taqribiy yechish zaruriyati qайдan kelib chiqadi?
7. Differensial tenglamalarni taqribiy yechishning qanday usullarini bilasiz?
8. Eyler usulining ishchi algoritmi?
9. Eyler usulining dastur ta'minoti?
10. Eyler usulining qanday kamchiligi va afzalligi bor?
11. Runge-Kutta usulining ishchi algoritmi?
12. Runge-Kutta usulining dastur ta'minoti?
13. Runge-Kutta usulining qanday kamchiligi va afzalligi bor?

Adabiyotlar

1. A.S. Karimov, M.M. Mirxaydarov Nazariy elektrotexnika. T-1999 y 169-175 b; 204-214)
2. V.A. Venikov i dr: Matematicheskaya zadachi elektrotexniki M-1981. 147-160 betlar.

17-ma'ruza: Oddiy differensial tenglamalar uchun Koshi masalasini sonli yechishda Mathcad amaliy dasturlar boglami imkoniyatlari.

O'quv modul birliklari:

1. *Mathcad amaliy dasturlar boglami imkoniyatlari.*
2. *Mathcad amaliy dasturlar boglami yordamida ChATS-ni yechish.*
3. *Mathcad amaliy dasturlar boglami yordamida ODT-ni yechish.*

Yaqin kungacha foydalanuvchi o'zining matematik masalasini yechish uchun nafaqat matematikani bilishi balki kompyuterda ishlashni, kamida bitta dasturlash tilini bilishi va murakkab hisoblash usullarini o'zlashtirgan bo'lishi kerak bo'lar edi. Hozirda esa dasturlashni bila olmaydigan yoki xohlamaydiganlar uchun tayyor ilmiy dasturlar majmualari, elektron qo'llanmalar va tipik hisob-kitoblarni bajarishga mo'ljallangan dasturiy vositalar bo'lgan – *amaliy vositalar paketlari (AVP)* mavjud.

Bu paketlar foydalanuvchi uchun kerakli bo'lgan barcha ishni yoki ishning asosiy kerakli qismini bajarish imkonini beradi: muammoni tadqiq qilish (analitik shaklida ham); ma'lumotlarning tahlili; yechim mavjudligini tekshirish; modelashtirish; optimallashtirish; grafiklarni qurish; natijalarni hujjatlashtirish va shakllantirish; taqdimotlarni yaratish.

Mashina matematikasini AVP yordamida o'rganish foydalanuvchida matematikaning o'zini o'rganish illyuziyasini yaratadi. Ammo shuni aytish joizki mazkur paketlarda yaratilgan har qanday chiroyli menyu foydalanuvchini oddiy matematik tushunchalardan va usullardan uni ozod qila olmaydi. Xususan, agar foydalanuvchi matrisa nimaligini bilmasa, u holda matrisa algebrasi dasturiy paketi unga hech qanday yordam bera olmaydi, yoki foydalanuvchi noaniq bo'lmagan integralni sonli usullar yordamida hisoblashga uringanda, u haqiqatdan ancha yiroq bo'lgan javobni olishi yoki javobni umuman oloymasligi ham mumkin. Ixtiyoriy keng imkoniyatlarga ega paket universal yondashishga bog'lik. Matematik paketlarni ishlatishda mutaxassis undan ongli foydalanib chegirmalar qilishi mumkin: paketni uning muammosiga rostdashi, dasturni modifikasiyalash, yangilash, hisoblash vaqtini tejash va h.k.

Hozirgi kunda kompyuter algebrasining nisbatan imkoniyatli paketlari bu - *Mathematica*, *Maple*, *Matlab*, *MathCAD*, *Derive* va *Scientific WorkPlace*. Bularidan birinchi ikkitasi professional matematiklar uchun mo'ljallangan bo'lib imkoniyatlarning boyligi, ishlatishda murakkabligi bilan ajralib turadi.

MatLab matrisalar bilan ishlashga va signallarni avtomatik boshqarish hamda qayta ishlashga mo'ljallangan.

MathCAD va Derive qo'llanilishi juda oson bo'lib talabalarning tipik talablarini qondirishni ta'minlaydi. Bular katoriga Eureka paketini ham qo'shish mumkin.

Scientific WorkPlace matematik qo'lyozmalarni LATEX tizimidan foydalangan holda tayyorlashga muljallangan bo'lib bir payda analitik va sonli amallarni bajarishi mumkin.

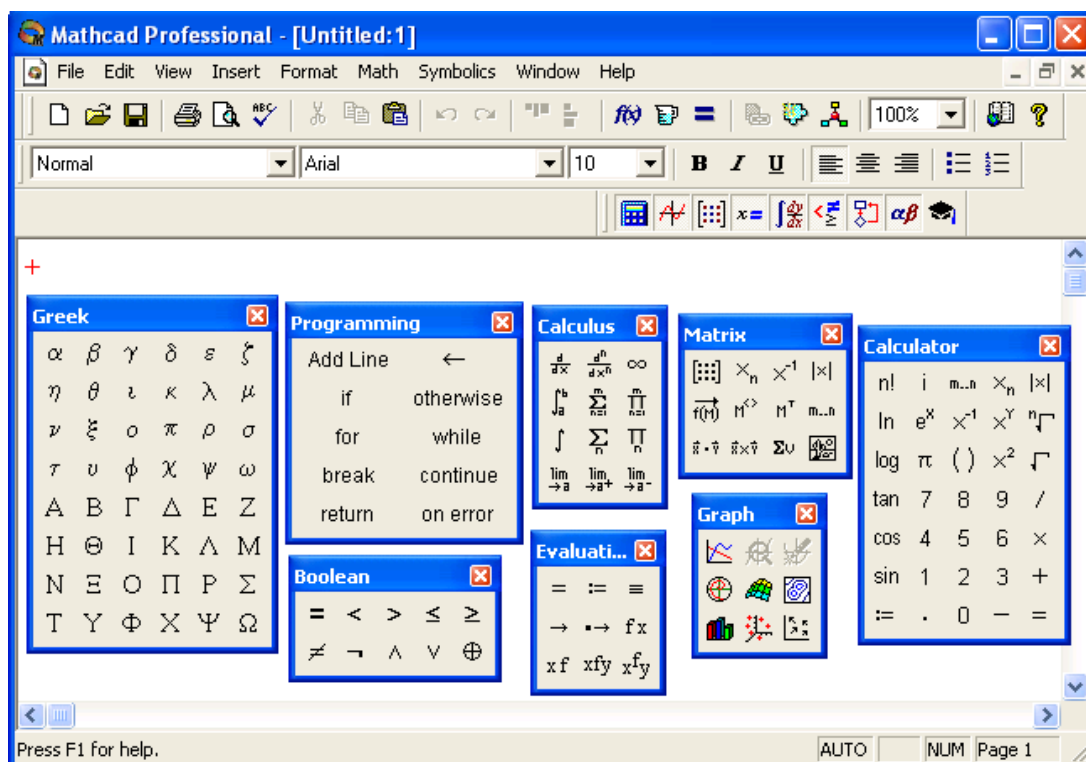
Mathcad imkoniyatlari va uning interfeysi

Zamonaviy kompyuter matematikasi matematik hisoblarni avtomatlashtirish uchun butun bir birlashtirilgan dasturiy tizimlar va paketlarni taqdim etadi. Bu tizimlar ichida Mathcad oddiy, yetarlicha qayta ishlangan va tekshirilgan matematik hisoblashlar tizimidir.

Umuman olganda Mathcad – bu kompyuter matematikasining zamonaviy sonli usullarini qo'llashning unikal kolleksiyasidir. U o'z ichiga yillar ichidagi matematikaning rivojlanishi natijasida yig'ilgan tajribalar, qoidalar va matematik hisoblash usullarini olgan.

Mathcad paketi muxandislik hisob ishlarini bajarish uchun dasturiy vosita bo'lib, u professional matematiklar uchun mo'ljallangan. Uning yordamida o'zgaruvchi va o'zgarmas parametrli algebraik va differensial tenglamalarni yechish, funksiyalarni tahlil qilish va ularning ekstremumini izlash, topilgan yechimlarni tahlil qilish uchun jadvallar va grafiklar qurish mumkin. Mathcad murakkab masalalarni yechish uchun o'z dasturlash tiliga ham ega.

Mathcad interfeysi Windowsning barcha dasturlari interfeysiga o'xshash. Mathcad ishga tushirilgandan so'ng uning oynasida bosh menyu va uchta panel vositasi chiqadi: Standart (Standart), Formatting (Formatlash) va Math (Matematika). Mathcad ishga tushganda avtomatik ravishda uning ishchi hujjat fayli Untitled 1 nom bilan ochiladi va unga Workshet (Ish varag'i) deyiladi. Standart (Standart) vositalar paneli bir necha fayllar bilan ishlash uchun buyruqlar to'plamini o'z ichiga oladi. Formatting (Formatlash) formula va matnlarni formatlash bo'yicha bir necha buyruqlarni o'z ichiga oladi. Math (Matematika) matematik vositalarini o'z ichiga olgan bo'lib, ular yordamida simvollar va operatorlarni hujjat fayli oynasiga joylashtirish uchun qo'llaniladi. Quydagi rasmda Mathcadning oynasi va uning matematik panel vositalari ko'rsatilgan (17.1-rasm):



17.1-rasm. Mathcad paketi oynasi va uning matematik panel vositalari.

Colculator (Kalkulyator) – asosiy matematik operatsiyalar shabloni; Graph (Grafik) – grafiklar shabloni; Matrix (Matrisa) – matrisa va matrisa operatsiyalarini bajarish shabloni; Evluation (Baholash) – qiymatlarni yuborish operatori va natijalarni chiqarish operatori; Colculus (Hisoblash) – differensiallash, integrallash, summani hisoblash shabloni; Boolean (Mantiqiy operatorlar) – mantiqiy operatorlar; Programming (Dasturlashirish) – dastur tuzish uchun kerakli modullar yaratish opreatorlari; Greek (Grek harflari) - Symbolik belgililar ustida ishlash uchun operatorlar.

Matematik ifodalarni qurish va hisoblash

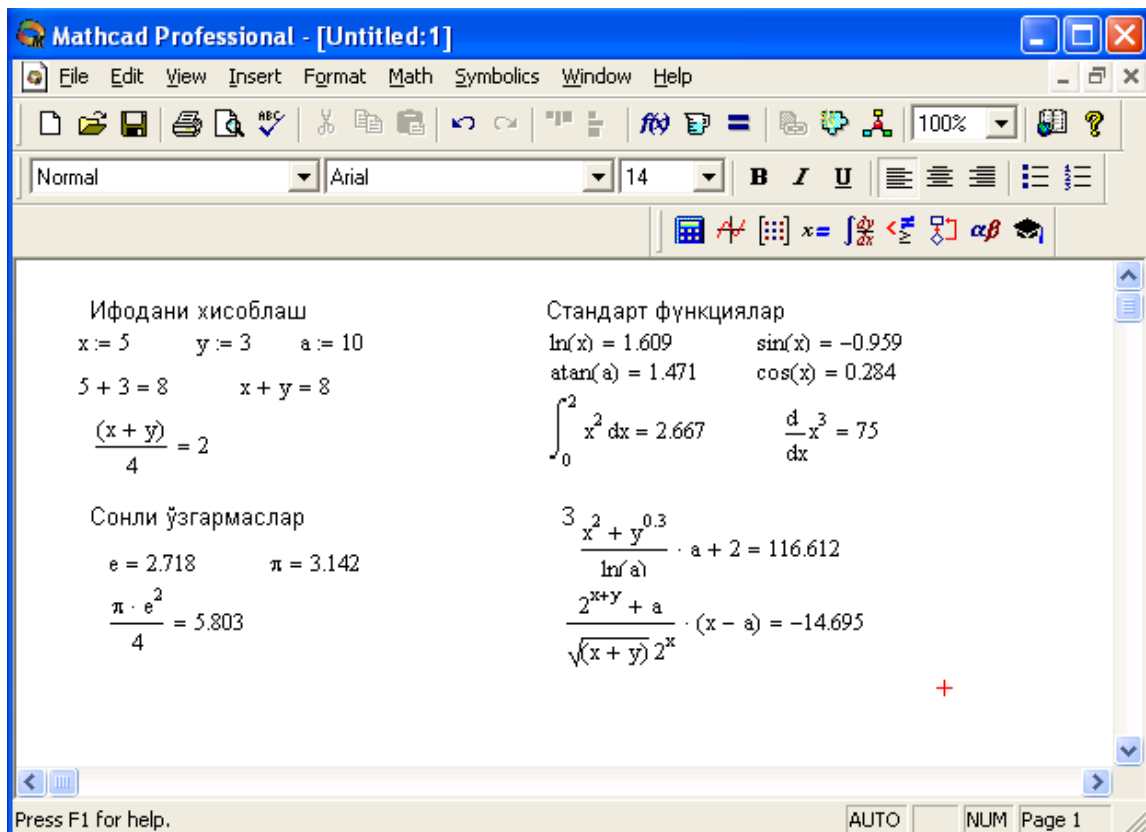
Boshlang'ich holatda ekranda kursor krestik ko'rinishda bo'ladi. Ifodani kiritishda u kiritilayotgan ifodani egallab olgan ko'k burchakli holatga o'tadi. Mathcadning har qanday operatorini kiritishni uchta usulda bajarish mumkin:

- menyu buyrug'idan foydalanib;
- klaviatura tugmalaridan foydalanib;
- matematik paneldan foydalanib.

O'zgaruvchilarga qiymat berish uchun yuborish operatori "⋮=" ishlatiladi. Hisoblashlarni amalga oshirish uchun oldin formuladagi o'zgaruvchi qiymatlari kiritiladi, keyin matematik ifoda yozilib tenglik "⋮" belgisi kiritiladi, natijada ifoda qiymati hosil bo'ladi (17.2-rasm).

Oddiy va matematik ifodalarni tahrirlashda menyu standart buyruqlaridan foydalaniladi. Tahrirlashda klaviaturadan ham foydalanish mumkin, masalan

- kesib olish – CtrlQx;
- nusxa olish – CtrlQc;
- qo'yish – CtrlQv;
- bajarishni bekor qilish – CtrlQz.

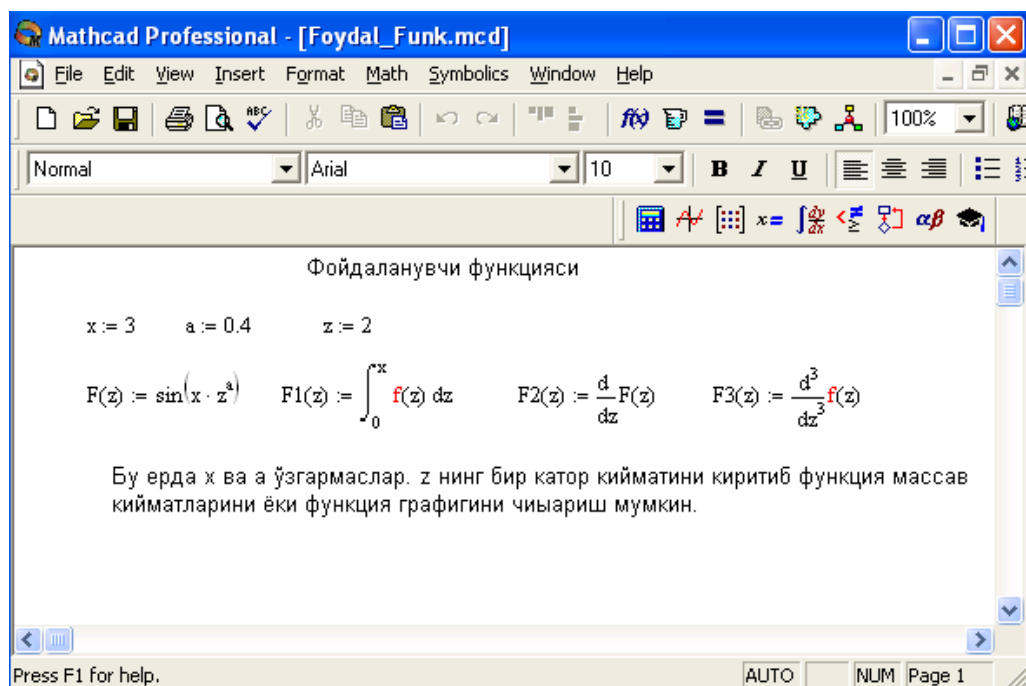


17.2-rasm. Oddiy matematik ifodalarni hisoblash.

Mathcad 200 dan ortiq o'zida qurilgan funksiyalariga ega bo'lib, ularni matematik ifodalarda ishlatish uchun standart panel vositasidagi Insert Function (Funksiyani qo'yish) tugmasiga bog'langan muloqot oynasidan foydalaniladi.

Mathcad hujjatiga matn kiritish uchun bosh menyudan Insert→Text Region (Qo'yish→Matn maydoni) buyrug'ini berish yoki yaxshisi klaviaturadan ikkitali kavichka ("") belgisini kiritish kerak. Bunda matn ma'lumotini kiritish uchun ekranda matn kiritish maydoni paydo bo'ladi. Matn kiritish maydoniga matematik ifodani yozish uchun matematik maydonni ham qo'yish mumkin. Buning uchun shu matn maydonida turib Insert→Math Region (Qo'yish→Matematik maydoni) buyrug'ini berish kifoya. Bu maydondagi kiritilgan matematik ifodalar ham oddiy kiritilgan matematik maydon kabi hisoblashni bajaradi.

Mathcadda foydalanuvchi funksiyasini tuzish hisoblashlarda qulaylikni va uning effektivligini oshiradi. Funksiya chap tomonda ko'rsatilib, undan keyin yuborish operatori (⋮=) va hisoblanadigan ifoda yoziladi. Ifodada ishlatiladigan o'zgaruvchi kattaliklari funksiya parametri qilib funksiya nomidan keyin qavs ichida yoziladi (17.3-rasm).



17.3-rasm. Hisoblashlarda foydalanuvchi funksiyasini tuzish.

Matrisalar ustida amallar

Matematik masalalarni yechishda Matchadning xizmati matrisalar ustida amallar bajarishda yaqqol ko'rinadi. Matrisalar katta bo'lganda bu amallarni bajarish ancha murakkab bo'lib, kompyuterda Matchadda dastur tuzishni talab etadi. Matchad tizimida bunday ishlarni tez va yaqqol ko'rinishda amalga oshirsa bo'ladi.

Matrisani tuzish. Matrisa yoki vektorni quyidagi prosedura yordamida aniqlash mumkin:

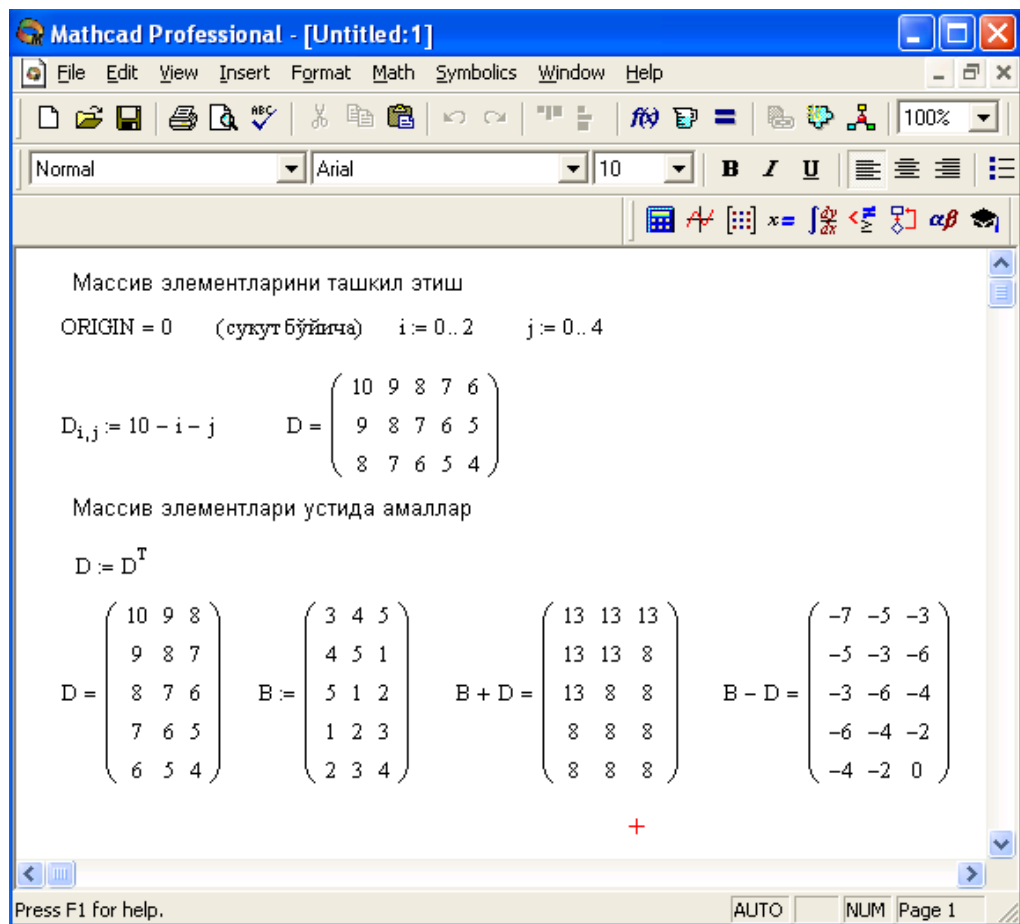
1. Matrisa nomini va (:=) yuborish operatorini kiritish.

2. Matematika panelidan Vector and Matrix Toolbar (Matrisa va vektor paneli) tugmachasi bosiladi. Keyin Matrix or Vector (Matrisa va vektor) tugmasi bosiladi, natijada Matrix (Matrisa) paneli ochiladi. Ochilgan muloqot oynasidan ustun va satr sonlari kiritilib Ok tugmasi bosiladi. Bu holda ekranda matrisa shabloni paydo bo'ladi.

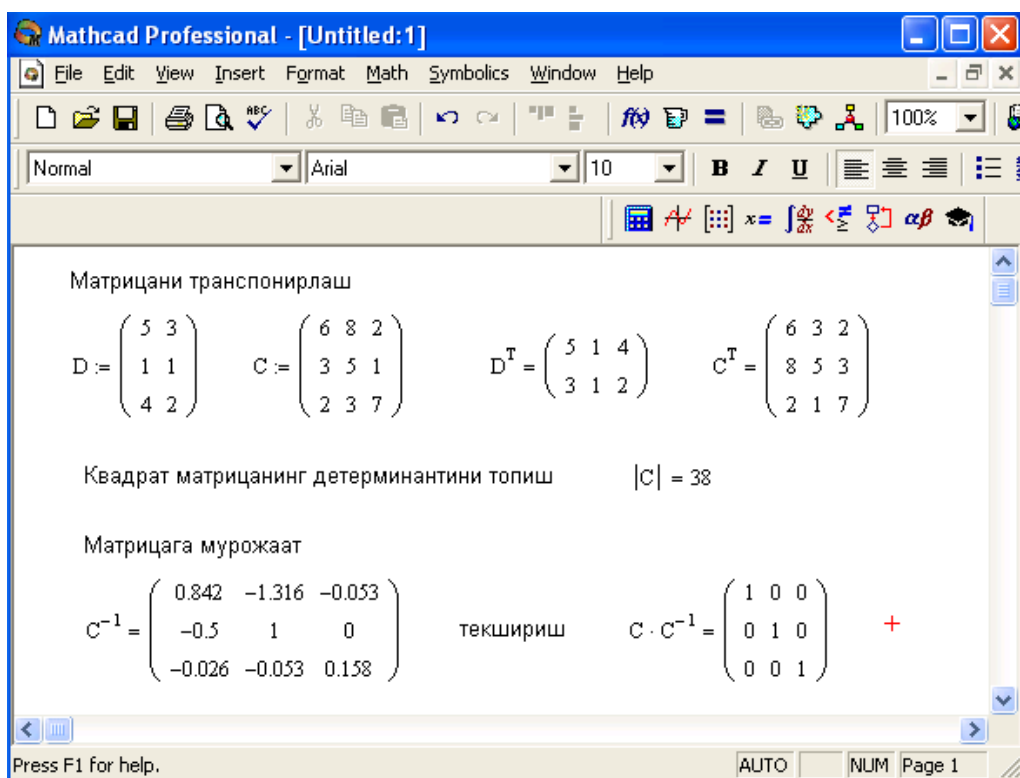
3. Har bir joy sonlar bilan to'ldiriladi, ya'ni matrisa elementlari kiritiladi. Shablon yordamida 100 dan ortiq elementga ega bo'lgan matrisani kiritish mumkin. Vektor – bu bir ustunli matrisa deb qabul qilinadi. Har qanday matrisa elementi matrisa nomi bilan uning ikki indeksi orqali aniqlanadi. Birinchi indeks qator nomerini, ikkinchi indeks – ustun nomerini bildiradi. Indeksni kiritish uchun matematika vositalar panelidan Matrix panelini ochib, u yerdan Vector and Matrix Toolbar, keyin Subscript (Pastki indeks) bosiladi. Klaviaturadan buni [(ochuvchi kvadrat qavs) yordamida bajarsa ham bo'ladi. Massiv elementi numeri 0, 1 yoki istalgan sonidan boshlanishi mumkin (musbat yoki manfiy). Massiv elementi numeri boshqarish uchun maxsus ORIGIN nomli o'zgaruvchi ishlatiladi. Avtomatik 0 uchun ORIGIN=0 deb yoziladi. Bunda massiv elementlari nomeri noldan boshlanadi. Agar noldan boshqa sonidan boshlansa unda ORIGIN dan keyin ikki nuqta qo'yiladi, masalan ORIGIN:=1.

17.4-rasmda D matrisaning pastki indekslardan foydalanib elementlarini topish ko'rsatilgan. ORIGIN=0 bo'lgani uchun avtomatik ravishda birinchi element 10 ga teng.

Matrisalar ustida asosiy amallar. Matchad matrisalar bilan quyidagi arifmetik operatsiyalarni bajaradi: matrisani matrisaga qo'shish, ayirish va ko'paytirish, bundan tashqari transponirlash operatsiyasini, murojaat qilish, matrisa determinantini hisoblash, maxsus son va maxsus vektorni topish va boshqa. Bu operatsiyalarning bajarilishi 17.4, 17.5 -rasmlarda keltirilgan.



17.4-rasm. Matrisa ustida amallar bajarish.



17.5-rasm. Matrisa ustida amallar bajarish.

Oddiy differensial tenglama va oddiy differensial tenglamalar sistemasini yechishga mo'ljallangan Mathcad dasturi tarkibidagi standart funksiyalar

Ko'plab differensial tenglamalar va differensial tenglamalar sistemasining yechimlarini analitik (aniq, ya'ni funksiya ko'rinishda) topish mumkin. Qaralayotgan fizik jarayonni tahlil qilish, shular asosida ma'lum xulosalarga kelish uchun berilgan boshlang'ich ma'lumotlarning turli qiymatlarida, olingan analitik yechimning sonli qiymatlarini topish, ular asosida grafiklar qurish ehtiyoji tug'iladi.

Bulardan tashqari shunday differensial tenglamalar va differensial tenglamalar sistemalari mavjudki, ularning yechimini analitik ko'rinishda topib bo'lmaydi. Shuning uchun ham differensial tenglamalarni integrallashning taqribiy usullari keng tarqalgan.

Mathcad dasturi tarkibida birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar, yuqori tartibli oddiy differensial tenglamalar va birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini hamda chegaraviy masalalarni sonli yechishga mo'ljallangan o'ndan ortiq standart funksiyalar mavjud bo'lib, ularning asosiylari quyida keltirilgan.

- **rkfixed** (*y*, *x1*, *x2*, *m*, *D*) – bu funksiya birinchi tartibli oddiy differensial tenglama yoki birinchi tartibli *n* ta oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini berilgan kesmada to'rtinchi tartibli Runge-Kutta usulini qo'llab, integrallash qadami o'zgarmas bo'lgan hol uchun yechadi.

Bu yerda shuni ta'kidlash lozimki, **rkfixed** funksiyasi yordamida olingan sonli yechim (*m+1*) satr va (*n+1*) ta ustunga ega bo'lgan matrisaning elementlari ko'rinishda beriladi. Matrisaning birinchi ustuni argument *x* ning integrallash oralig'iga tegishli qiymatlari, ya'ni *x0*, *x1*, *x2*, ..., *xn* larni (boshlang'ich va integrallash nuqtalarini) o'z ichiga oladi. Ikkinchi ustunda ***u1(x)*** funksiyaning (ya'ni ***u(x)*** funksiyaning), uchinchi ustunda ***u2(x)*** funksiyaning (ya'ni *y'(x)* funksiyaning), to'rtinchi ustunda ***u3(x)*** funksiyaning (ya'ni *y''(x)* funksiyaning) va hokazo oxirgi ustunda *un(x)* funksiyaning (ya'ni ***u⁽ⁿ⁻¹⁾(x)*** funksiyaning) *x* ning yuqoridagi qiymatlariga mos qiymatlari joylashgan bo'ladi.

Agar differensial tenglama birinchi tartibli bo'lsa, olingan sonli yechim ikkita ustunli matrisa elementlari shaklida ifodalanadi. Birinchi ustunda argument *x* ning qiymatlari (*x_i = x₀ + i · h*, *h = (x2 – x1) / m*), ikkinchi ustunda esa ana shu qiymatlarga mos yechimning qiymatlari *y_i = y(x_i)* joy oladi (*i = 0,1,...,m*).

- **Rkadapt** (*u*, *x1*, *x2*, *m*, *D*) - bu funksiya birinchi tartibli oddiy differensial tenglama yoki birinchi tartibli *n* ta oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini berilgan kesmada to'rtinchi tartibli Runge-Kutta usulini qo'llab, integrallash qadamini avtomatik tanlash yo'li bilan yechadi.
- **Bulstoer** (*u*, *x1*, *x2*, *m*, *D*) - bu funksiya birinchi tartibli oddiy differensial tenglama yoki birinchi tartibli *n* ta oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini berilgan kesmada Bulirish-shter usulini qo'llab, integrallash qadami o'zgarmas bo'lgan hol uchun yechadi.

Ushbu **rkfixed**, **Rkadapt** va **Bulstoer** funksiyalarining argumentlari bir xil ma'noni anglatadi va masalaning matematik qo'yilishi bo'yicha quyida-gicha aniqlanadi:
 $y = (y_{0,1}, y_{0,2}, \dots, y_{0,n})^T$ - komponentlari berilgan boshlang'ich shartlardan tashkil topgan vektor funksiya; *x1*, *x2* - mos ravishda integrallash oralig'ining boshlang'ich va oxirgi qiymati; *m* - integrallash nuqtalari soni, ya'ni integrallash oralig'i [*x1*; *x2*] ning o'zgarmas qadam bilan bo'linish nuqtalari soni;

$$D(x, y) = (f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \dots, f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n))^T \quad (17.1)$$

komponentlari (tashkil etuvchilari) differensial tenglamalar sistemasi-ning o'ng tomonida turgan funksiyalardan iborat bo'lgan *n* ta satr va 1 ta ustundan iborat vektor funksiya; *x* - skalyar miqdor; *u = u(x)* – izlanayotgan vektor funksiya.

Birinchi tartibli $y' = f(x, y)$ tenglama uchun *D(x, u)* funksiya

$$D(x, y) = f(x, y) \quad (17.2)$$

ko'rinishda yoziladi.

Odesolve funksiyasi yordamida ixtiyoriy tartibli oddiy differensial tenglama va birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini yechish texnologiyasi

Mathcad dasturi tarkibida n –tartibli ($n = 1, 2, \dots$) oddiy differensial tenglamalar va birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasini sonli yechish uchun mo'ljallangan **Odesolve** funksiyasi mavjud bo'lib, u umumiy holda quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\text{Odesolve}([y], x, b, [m])$$

Bu yerda u – berilishi shart bo'lmagan va nomi qidirilayotgan funksiya nomidan, koordinatalari berilgan boshlang'ich shartlardan iborat vektor (oddiy differensial tenglamalar sistemasini yechishda uning berilishi shart); x – erkli o'zgaruvchi; b - integrallash oralig'ining oxirgi qiymati; t – berilishi shart bo'lmagan, qiymati esa integrallash qadamlari sonini bildiruvchi butun son (integrallash oralig'i $[a; b]$ ni bo'linishlar soni) bo'lib, sonli yechimni yuqori aniqlik bilan olish uchun xizmat qiladi. (t ning qiymati ortishi bilan aniqlik ham ortadi, lekin shu bilan birga, integrallash uchun sarflanadigan kompyuter vaqti ham ortib boradi).

Odesolve funksiyasi **Given** kalit so'z bilan birgalikda ishlatiladi (**Given** –berilgan, berilgan ma'lumotlar ma'nolarini bildiradi). Amaliyotda **Given** va **Odesolve** juftlik oralig'iga berilgan differensial tenglama yoki ularni sistemasi va berilgan boshlang'ich shartlar yoziladi (tenglik belgisini yozishda mantiqiy amal belgilari panelidagi tenglik belgisidan yoki **[Ctrl ++]** buyruqdan foydalaniladi). Tenglama va boshlang'ich shartlar tarkibiga kiruvchi kattaliklarning qiymatlari **Given** kalit so'zdan avval sonli tenglik belgisi ($:$ $=$) yordamida kiritiladi.

Odesolve va rkfixed funksiyalarni qo'llashga doir misollar

1-misol. **Odesolve** va **rkfixed** funksiyalari yordamida berilgan birinchi tartibli differensial tenglama uchun Koshi masalasini yeching. Topilgan sonli yechimni berilgan analitik (aniq) yechim bilan solishtiring.

$$(y \cdot \cos(y/x) - x) \cdot dx - x \cdot \cos(y/x) \cdot dy = 0,$$

$$y_{\text{aniq}}(x) = x \cdot \arcsin \left(\ln \left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} / x \right) \right), \quad y = \frac{\pi}{3}, \quad x \in [1; 6]$$

Echish. **1. Given-Odesolve juftligi yordamida yechish**

Avval berilgan tenglamani quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$x \cdot \cos(y/x) \cdot y' + x - y \cdot \cos(y/x) = 0$$

Algoritm:

$$a := 1 \quad b := 6$$

$$\text{Given} \quad x \cdot \cos(y(x)/x) \cdot y'(x) + x - y(x) \cdot \cos(y(x)/x) = 0 \quad y(a) = \frac{\pi}{3}$$

$$y := \text{Odesolve}(x, b)$$

$y(x) =$	$y_{\text{aniq}}(x) =$	$\frac{d}{dx}y(x) =$	$\frac{d}{dx}y_{\text{aniq}}(x) =$
1.047	1.047	-0.885	-0.953
1.004	1.004	-0.796	-0.779
0.968	0.968	-0.685	-0.689
0.935	0.935	-0.643	-0.642
0.903	0.903	-0.617	-0.617
0.873	0.873	-0.607	-0.607
0.843	0.843	-0.606	-0.606
0.812	0.812	-0.611	-0.611
0.781	0.781	-0.621	-0.621
0.75	0.75	-0.633	-0.633
0.718	0.718	-0.648	-0.648
0.685	0.685	-0.664	-0.664
0.651	0.651	-0.682	-0.682
0.617	0.617	-0.7	-0.7
0.581	0.581	-0.719	-0.719
0.545	0.545	-0.739	-0.739
0.508	0.508	-0.759	-0.759
0.469	0.469	-0.779	-0.779

17.6-rasm. Taqribiy va aniq yechimlarning son qiymatlari

Keltirilgan natijalarni solishtirib, **Odesolve** funksiyasi yordamida sonli yechim yuqori aniqlik bilan topilganiga ishonch hosil qilish mumkin.

18-ma'ruza: Elektr yuklamalari grafigini ehtimollik xarakteristikalari. O'quv modul birliklari:

1. Elektr yuklamalari grafigini ehtimollik xarakteristikalari.
2. Energetika sistemasi elementlarini mustahkamlik ko'rsatkichlari.

Tizim va qurilmalarni tahlil qilishda mutahassis tizim parametrlari, tashqi shartlar o'zgaruvchan, vaqt birligi davomida o'zgaruvchanligini e'tiborga olishiga to'g'ri keladi. Ularni vaqt davomida o'zgarishi tizim va qurilmalarda o'tuvchi jarayonlarni yuzaga keltiradi. Real sharoitlarda tizimni ishlash qobiliyatini aniqlash va ishlash sifatini o'rnatish uchun, mutahassis o'tuvchi jarayonlar hususiyatlarini o'rganishi va buning yordamida o'tuvchi jarayonlarda bo'ladigan turli nohushliklarni oldini olish chora-tadbirlarini ko'ra olishi kerak.

Xar qanday texnik tizimni yaratish yoki tarraqiy etishi birinchi navbatda tizimni ishlash qobiliyati orqali aniqlanadi, yaniki kichik qo'zg'olishlardan so'ng o'zining muvozanant turg'un holatiga qayta olishi. Tizimni kichik qo'zg'olishlardan (parametrlarni boshlang'ich og'ishi) so'ng o'zining oldingi yoki unga yaqinroq holatiga qayta olishi muvozanant holati turg'unligi yoki static turg'unligi deyiladi.

Avtomatik boshqariluvchi elektr tizimlarga tegishli texnik qurilmalarda kichik qo'zg'olishlardan so'ng yuz beradigan o'tuvchi jarayonlar o'zgarmas ko'effitsiyentli oddiy differensial tenglamalar tizimi bilan ifodalanadi:

$$\sum_{i=1}^n (a_{ij} \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} + b_{ij} \frac{d \xi_i}{dt} + c_{ij} \xi_i) = F_j(t), \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (18.1)$$

bu yerda a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} – tizim parametrlariga bogliq o'zgarmas ko'effitsiyentlar,
 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – vaqt davomida tizim holatini aniqlovchi parametrlar, $F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t)$ – tizim tashqi shartlarini ifodalovchi, tashqi kuchlar, vaqt bo'yicha o'zgaruvchi.

Texnik tizimni kichik qo'zg'olishlardan so'ng o'zining muvozanant turg'un holatiga qayta olishini matematik baholash uchun, quyidagi holatni o'rganish kerak. $t(-\infty, t_0)$ oraliqda (ayrim hollarda t_0 –sifatida $t=0$ olinadi) $f_j(t)$ – tizimni tinch holatidan qo'zg'otuvchi kuch:

$$x_i(t_0) \neq 0, \quad x'_i(t_0) \neq 0.$$

$t=t_0$ vaqtda qo'zg'otuvchi kuchlar ta'siri to'xtaydi $[f_j(t)=0(t>t_0)]$ va o'tuvchi jarayon yuz bera boshlaydi, boshlang'ich qo'zg'olish deyish mumkin. O'tuvchi jarayon qo'zg'otuvchi kuchlar ta'siri $t<t_0$ gacha natijasida paydo bo'lgan boshlang'ich shart bilan yechiladigan quyidagi tenglamalar tizimi yechimi bilan aniqlanadi:

$$\sum_{i=1}^n (a_{ij} \frac{d^2 x_i}{dt^2} + b_{ij} \frac{dx_i}{dt} + c_{ij} x_i) = 0 \quad (18.2)$$

(18.2)- tizim Lyapunov kriteriysi bo'yicha muvozanant holatda turgun deyiladi, agar ihtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ topilsaki, $|x_{i0}| < \delta, |x'_{i0}| < \delta$ boshlang'ich shartlar ostidagi tizimni barcha yechimlari $t > t_0$ uchun $|x_i(t)| < \varepsilon$ shartni qanoatlantirsa.

Elektr sistemalarda o'tuvchi jarayonlar tahlilining o'ziga xos jihatlari.

Elektr sistemalarda o'tuvchi jarayonlarni o'rganishda differensial tenglamalarni yechish ga to'g'ri keladi. Ko'p hollarda bu tenglamalar chiziqsiz ko'rinishda bo'ladi va ularni umumiy usullar yordamida yechib bo'lmaydi.

Elektr sistemalarda o'tuvchi jarayonlar tahlilining o'ziga xos jihatlarini masalalar yechish nuqtai nazaridan o'rganamiz:

- differensial tenglamalarni sonli integrallash sistemani elektr uzatish liniyasidagi qisqa tutashuv yoki yuklamani generatorga tashlash natijasida bo'ladigan dinamik turg'unlikni tahlil qilishda qo'llaniladi;
- murakkab elektr sistemalarni tasvirlovchi tenglamalar tizimi tartibi yuqoriligi, mashina hisoblash vaqtini ortishi va hisoblash mashinasi operativ xotirasidan ko'p joy egallashiga olib keladi;
- elektr sistemani elementlarida o'tuvchi jarayonlar o'tish vaqti bo'yicha farq qiladi, shuningdek rejim parametrlari o'zgarishida qaysiki sistemani generatori yoki generatorlari to'plami qisqa tutashuv nuqtasiga yaqinligiga bogliq.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yati

1. I.H. Siddiqov. «Energetikaning matematik masalalari» fanidan o'quv qo'llanma. ToshDTU, 2004y.
2. В.А.Веников и др. «Математические задачи электроэнергетики». М:Высшая школа, 1981г, 288 стр.
3. A.U.Abdulhamidov, S.H.Hudoynazarov. «Hisoblash usullaridan mashqlar va laboratoriya ishlari». Toshkent-«O'zbekiston»-1995y.
4. A.S.Karimov va boshqalar. «Elektrotehnika va elektronika asoslari». Toshkent, O'qituvchi. 1995y
5. Н.Но'jayorov. «Qurilish masalalarini sonli echish usullari» Toshkent. 1995y.
6. Г.А.Гмурман. «Теория вероятности и математическая статистика» М.Статистика, 1988 г.
7. Farberman.B.L va boshqalar «Oliy maktabda o'qitishning zamonaviy usullari» T, OO`MMMI, 2002y.
8. internet saytlari.