

О ЧИСЛЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА, СООТВЕТСТВУЮЩЕГО СИСТЕМЕ ОДНОЙ ЧАСТИЦЫ ВО ВНЕШНОМ ПОЛЕ

Алладустова И.У.

Самаркандский Государственный Университет

В данной работе рассмотрено, что при определенных условиях на потенциал, одномерный оператор Шредингера имеет единственное связанное состояние в пределах слабой связи, а в других условиях не существует связанное состояние в этом пределе.

В работе [1] Б.Саймона исследовано существование собственных значений для семейства непрерывного оператора Шредингера $H = -\Delta + \lambda V$, $\lambda > 0$ в одномерном и двумерном случаях. Для всех $V(x)$ удовлетворяющих условию $\int (1 + |x|^2) |V(x)| dx < +\infty$ доказано, что H имеет связанное состояние при всех $\lambda > 0$ тогда и только тогда, когда $\int V(x) dx < 0$.

В работе [2] рассмотрено, что при определенных условиях на потенциал, одномерный оператор Шредингера имеет единственное связанное состояние в пределах слабой связи а в других условиях не существует связанное состояние в этом пределе. Этот вопрос изучались для потенциалов, удовлетворяющих условию $\int (1 + |x|) |V(x)| dx < +\infty$.

Эти вопросы дальнейшем обсуждался Р.Бланкенбеккером, М.Н.Голдбергером и Б.Саймоном [3]. Все эти результаты требуют использования модифицированного определителя.

Как известно, всюду в физике устойчивые сложные объекты образуются с помощью притягательных сил, которые позволяют составным частям

уменьшить их энергию, связывая их вместе. Отталкивающие силы отделяют частицы в свободном пространстве. Однако в [4] описано экспериментальное наблюдение, состоящее в том, что в упорядоченных средах, с периодическим потенциалом, а также в отсутствие рассеяния устойчивые сложные объекты могут существовать даже в случае отталкивающих взаимодействий.

Более того, в [4] для теоретического обоснования полученных экспериментальных результатов использована модель Бозе-Хаббарда, а именно гамильтониан системы двух частиц с отталкивающим взаимодействием [4].

Основная цель данного доклада является доказательство существования собственных значений и описание их местоположение для дискретного оператора Шредингера $H = \hat{H}_{\mu\lambda} := \hat{H}_0 + \hat{V}_{\mu\lambda}$ с контактным взаимодействием $\mu \neq 0$ и с взаимодействием $\lambda \neq 0$ на ближайших соседних точках. Мы установим что оператор H может иметь один или два собственных значения, лежащих ниже дно существенного спектра, а также выше его верхней части. Кроме того, оператор H может иметь два собственных значения за пределами существенного спектра, где один из них расположен ниже дно существенного спектра и другой выше его верхней части.

Пусть $L_2(\mathbb{T})$ гильбертово пространство квадратично интегрируемых функций, определенных на одномерном торе $\mathbb{T} = (-\pi; \pi]$ и пусть H - дискретный оператор Шредингера, действующий в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T})$ по формуле

$$(H_{\mu\lambda}f)(p) = \varepsilon(p)f(p) + \mu \sin p \int_{\mathbb{T}} \sin s f(s) ds + \lambda \sin 2p \int_{\mathbb{T}} \sin 2s f(s) ds$$

где $\varepsilon(p) = (1 - \cos p)$ и $f \in L_2(\mathbb{T})$.

Согласно теореме Вейля, существенный спектр $\sigma_{ess}(H_{\mu\lambda})$ оператора $H_{\mu\lambda}$ не зависит от $\mu, \lambda \geq 0$ и совпадает со спектром $\sigma_{ess}(H_0)$ оператора H_0 , т.е. имеет место равенство

$$\sigma_{ess}(H_{\mu\lambda}) = \sigma_{ess}(H_0) = [0; 2].$$

Введем следующие обозначения

$$a(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 s}{1 - \cos s - z} ds, \quad b(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 2s}{1 - \cos s - z} ds, \quad c(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\sin s \sin 2s}{1 - \cos s - z} ds.$$

Определитель Фредгольма ассоциированному оператору $H_{\mu\lambda}$ представляется в виде

$$\Delta(\mu, \lambda; z) = (1 + \mu a(z))(1 + \lambda b(z)) - \mu \lambda (c(z))^2.$$

Лемма. Число $z \in \mathbb{C} \setminus [0; 2]$ является собственным значением оператора $H_{\mu\lambda}$ тогда и только тогда когда $\Delta(\mu, \lambda; z) = 0$.

Лемма. Имеют место асимптотическое разложение:

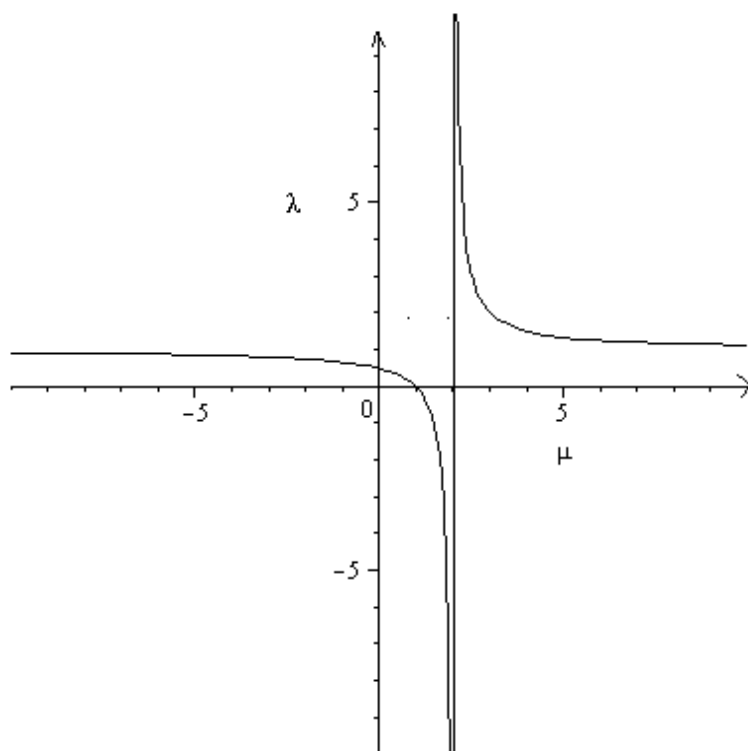
$$\Delta(\mu, \lambda; z) = 1 - \mu - 2\lambda + \mu\lambda + \sqrt{2}(\mu + 4\lambda - 2\mu\lambda)(z - 2)^{\frac{1}{2}} + O(z - 2), z \rightarrow 2 +$$

Введем следующие множества:

$$G_{2+} = \{(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : 1 - \mu - 2\lambda + \mu\lambda > 0, \mu > 2, \lambda > 1\};$$

$$G_{1+} = \{(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : 1 - \mu - 2\lambda + \mu\lambda < 0\};$$

$$G_{0+} = \{(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : 1 - \mu - 2\lambda + \mu\lambda > 0, \mu < 2, \lambda < 1\}$$



Теорема. Пусть $(\mu, \lambda) \in G_{0+}$. Тогда оператор $H_{\mu\lambda}$ не имеет собственных значений, лежащее правее существенного спектра оператора $H_{\mu\lambda}$ и имеет не более двух собственных значений лежащее левее существенного спектра оператора $H_{\mu\lambda}$;

Пусть $(\mu, \lambda) \in G_{1+}$. Тогда оператор $H_{\mu\lambda}$ имеет только одно собственное значение, лежащее правее существенного спектра оператора $H_{\mu\lambda}$ и не более одно собственное значение, лежащее левее существенного спектра оператора $H_{\mu\lambda}$;

Пусть $(\mu, \lambda) \in G_{2+}$. Тогда оператор $H_{\mu\lambda}$ имеет только двух собственных значений лежащее правее существенного спектра оператора $H_{\mu\lambda}$ и не имеет собственных значений лежащее левее существенного спектра оператора $H_{\mu\lambda}$.

Литературы

- [1] B.Simon: Ann. Phys. 97 (1976), 279-288.
- [2] M.Klaus: Annals of Physics 97(1976), 279-288
- [3] R.Blankenbecker, M.N.Goldberger and B.Simon: Ann.
Physics 108(1977), 69-78.
- [4] K.Winkler, et al.: Vol 441 15 June 2006 \ doi: 10.1038\ nature 04918.