# О ЧИСЛЕ И МЕСТОПОЛОЖЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

Лакаев С.Н., Алладустова И.У.

Самаркандский Государственный Университет

E-mail: slakaev@mail.ru, alladustova.iroda@mail.ru

*В докладе сообщается о существовании собственных значений дискретного оператора Шредингера* $H_{\mu\lambda} := H_0 + V_{\mu\lambda}$ *с контактным взаимодействием* $\mu \neq 0$ *и с взаимодействием* $\lambda \neq 0$ *на ближайших соседных узлах решетки.*

В работе [1] и [2] исследованы существования собственных значений для семейства непрерывных операторов Шредингера $H = -\Delta + \lambda V,\ \ \lambda > 0$ в одномерном и двумерном случаях. Эти вопросы дальнейшем обсуждались Р.Бланкенбеккером, М.Н.Голдбергером и Б.Саймоном [3].

Как известно всюду в физике устойчивые сложные объекты образуются с помощью притягательных сил, которые позволяют составным частям уменшить их энергию, связывая их вместе. Отталкивающие силы отделяют частицы в свободном пространстве. Однако в [4] описано экспериментальное наблюдение, состоящее в том, что в упорядоченных средах с периодическим потенциалем, а также в отсутствие рассеяния устойчивые сложные объекты могут существовать даже в случае отталкивающих взаимодействий. Более того, в [4] для теоретического обоснования полученных экспериментальных результатов использована дискретный оператор Шредингера с отталкивающим взаимодействием.

В докладе сообщается о существовании собственных значений дискретного оператора Шредингера $H_{\mu\lambda} := H_0 + V_{\mu\lambda}$ с контактным взаимодействием $\mu \neq 0$ и с взаимодействием $\lambda \neq 0$ на ближайших соседных узлах решетки.

Пусть $L_2(\mathbb{T})$ −гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на одномерном торе $\mathbb{T} = (-\pi; \pi]$ с мерой Хаара $d\eta$ и

$$\left(H_{\mu\lambda}f\right)(p) = (1 - cosp)f(p) + \mu sinp \int\limits_{\mathbb{T}} sinsf(s)ds +$$

$$+ \lambda sin2p \int\limits_{\mathbb{T}} sin2sf(s)ds, \quad f\epsilon L_2(\mathbb{T}).$$

Согласно теореме Вейля, существенный спектр $\sigma_{ess}\left(H_{\mu\lambda}\right)$ оператора $H_{\mu\lambda}$ не зависит от $\mu, \lambda \geq 0$ и совпадает со спектром $\sigma(H_0)$ оператора $H_0$ : $\sigma_{ess}\left(H_{\mu\lambda}\right) = \sigma(H_0) = [0; 2]$.

Для определителя Фредгольма $\Delta(\mu, \lambda; z)$ ассоцированному оператору $H_{\mu\lambda}$ верна следующие асимптотические разложения

$$\Delta(\mu, \lambda; z) = 1 + \mu + 2\lambda + \mu\lambda + \sqrt{2}(\mu + 4\lambda + 2\mu\lambda)(-z)^{\frac{1}{2}} + O(-z), \qquad z \to 0-$$

$$\Delta(\mu, \lambda; z) = 1 - \mu - 2\lambda + \mu\lambda + \sqrt{2}(\mu + 4\lambda - 2\mu\lambda)(z - 2)^{\frac{1}{2}} + O(z - 2), z \to 2+$$

Введем следующие множества:

$$G_{2-} = \{(\mu, \lambda)\epsilon\mathbb{R}^2 : 1 + \mu + 2\lambda + \mu\lambda > 0, \mu < -2, \lambda < -1\};$$

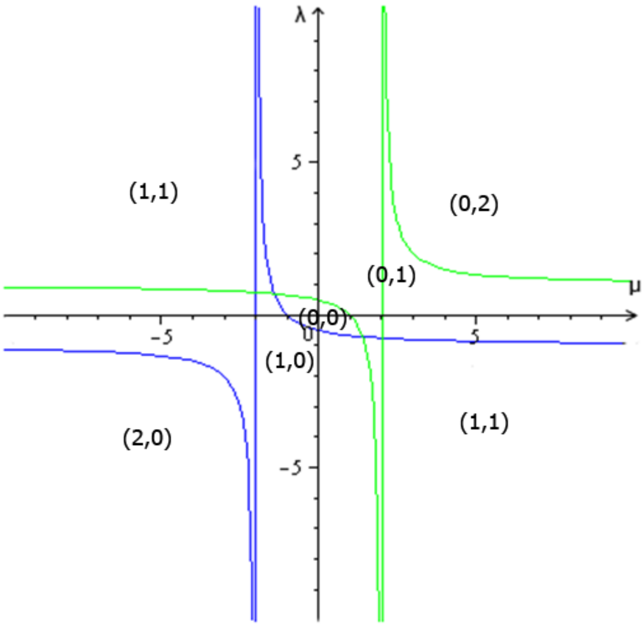
$$G_{1+} = \{(\mu, \lambda)\epsilon\mathbb{R}^2 : 1 + \mu + 2\lambda + \mu\lambda < 0\};$$

$$G_{0+} = \{(\mu, \lambda)\epsilon\mathbb{R}^2 : 1 + \mu + 2\lambda + \mu\lambda > 0, \mu > -2, \lambda > -1\};$$

$$G_{2+} = \{(\mu, \lambda)\epsilon\mathbb{R}^2 : 1 - \mu - 2\lambda + \mu\lambda > 0, \mu > 2, \lambda > 1\};$$

$$G_{1+} = \{(\mu, \lambda)\epsilon\mathbb{R}^2 : 1 - \mu - 2\lambda + \mu\lambda < 0\};$$

$$G_{0+} = \{(\mu, \lambda)\epsilon\mathbb{R}^2 : 1 - \mu - 2\lambda + \mu\lambda > 0, \mu < 2, \lambda < 1\}$$




**Теорема.**

(i) Пусть $(\mu, \lambda) \in G_{2-} \cap G_{0+}$. Тогда оператор $H_{\mu\lambda}$ имеет только двух собственных значений лежащих левее существенного спектра оператора $H_{\mu\lambda}$;

(ii) Пусть $(\mu, \lambda) \in G_{1-} \cap G_{0+}$. Тогда оператор $H_{\mu\lambda}$ имеет только одно собственное значение лежащее левее существенного спектра оператора $H_{\mu\lambda}$;

(iii) Пусть $(\mu, \lambda) \in G_{1-} \cap G_{1+}$. Тогда оператор $H_{\mu\lambda}$ имеет только двух собственных значений лежащих вне существенного спектра. При этом одно из них лежит левее а второе правее существенного спектра оператора $H_{\mu\lambda}$;

(iv) Пусть $(\mu, \lambda) \in G_{0-} \cap G_{0+}$. Тогда оператор $H_{\mu\lambda}$ не имеет собственного значения лежащего вне существенного спектра оператора $H_{\mu\lambda}$;

(v) Пусть $(\mu, \lambda) \in G_{0-} \cap G_{1+}$. Тогда оператор $H_{\mu\lambda}$ имеет только одно собственное значение лежащее правее существенного спектра оператора $H_{\mu\lambda}$;

(vi) Пусть $(\mu, \lambda) \in G_{0-} \cap G_{2+}$. Тогда оператор $H_{\mu\lambda}$ имеет только двух собственных значений лежащих правее существенного спектра оператора $H_{\mu\lambda}$;

ЛИТЕРАТУРЫ


1. B. Simon: Ann. Phys. 97 (1976), 279-288.
2. M. Klaus: Annals of Physics 97(1976), 279-288.
3. R. Blankenbecker, M.N.Goldberger, B. Simon: Ann.Phys. 108(1977), 69-78.
4. K. Winkler et al.: Vol 441\ 15 June 2006 \ doi: 10.1038\ Nature 04918.