Асимптотика собственных значений двухчастичного решетчатого оператора Шредингера

А.М. Халхужаев, Х.Ш. Махмудов

В данной статье рассматриваются вопросы асимптотики собственных значений двухчастичного решетчатого оператора Шредингера.

Рассматривается гамильтониан $H_\mu, \mu > 0$ системы двух квантовых частиц, движущихся на $d \geq 3-$мерной решетке $\mathbb{Z}^3$ взаимодействующие с помощью парных короткодействующих потенциалов притяжения. Для соответствующего двухчастичного дискретного оператора Шредингера $h_\mu(k), k \in \mathbb{T}^3$ - двухчастичный квазиимпульс, $\mathbb{T}^3 -$ трехмерный тор, т.е. дуальная группа к $\mathbb{Z}^3$, доказано существование собственных значений $z^{(i)}(\mu, k), i = \overline{1, d}$ лежащих левее его существенного спектра и найдены асимптотики $z^{(i)}(\mu, k), i = \overline{1, d}$ при $k \longrightarrow k^*$, где $\mu_0^{(i)}(k)$- пороговое значение константы связи и $k^* \in \mathbb{T}^3$- пороговое значение квазиимпульса.

В замечательной работе [1] Б.Саймона и М.Клауса рассмотрено семейство операторов Шредингера $\mathrm{H} = -\Delta + \lambda V$ и в частности, случай, когда при $\lambda \downarrow \lambda_0$ некоторое собственное значение $e_i(\lambda) \uparrow 0$ т.е., при $\lambda \downarrow \lambda_0$ собственное значение поглощается непрерывным спектром и, обратно, при $\lambda \uparrow \lambda_0 + \varepsilon$ непрерывный спектр *порождает* новое собственное значение. Этот случай в [1] названо явлением *порога константы связи.*

Одним из различий между решетчатых и непрерывных операторов является то, что решетчатый оператор Шредингера строго зависит от квазиимпульса системы $k \in \mathbb{T}^3$. Для фиксированного $\mu > 0$ изучение $\mu_0(k)$ как функция, определенная на некотором открытом множестве $\mathfrak{E} \subset \mathbb{T}^3$ квазиимпульсов приводит к разбиению множества $\mathfrak{E}$:

$$\mathfrak{E} = S_<(\mu) \cup S_=(\mu) \cup S_>(\mu).$$

Отметим, что при некотором $\mu = \mu^*$ оператор $h_{\mu^*}(k), k \in S_>(\mu^*)$ не имеет собственного значения, а для любого $k \in S_<(\mu^*)$ оператор $h_{\mu^*}(k)$ имеет единственное собственное значение. Так как $h_{\mu^*}(k)$ аналитическое семейство в $S_<(\mu^*)$, собственное значение $z^{(i)}(\mu^*, k)$, также является

аналитической функцией в $S_<(\mu^*)$. В тоже время, если $k \in S_=(\mu^*)$ то мы не можем сказать даже существовании собственного значения. Поэтому мы интересуемся также асимптотикой собственного

значения $z^{(i)}(\mu^*, k)$, $k \in S_<(\mu^*)$ при $k \longrightarrow k^*$, где $k \in S_=(\mu^*)$. Отметим, что порядок этой асимптотики зависит не только от k^* но и от размерности dтора $\mathbb{T}^3$ и от дисперционного соотношения.

Пусть $\mathbb{Z}^3$ –трехмерная целочисленная решетка,

$\ell_2((\mathbb{Z}^3)^2)$- гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций,

а $\ell_2^{as}((\mathbb{Z}^3)^2) \subset \ell_2((\mathbb{Z}^3)^2)$ -подпространство антисимметричных функций.

В координатном представлении гамильтониан системы двух фермионов с массой m=1 действует в гильбертовом пространстве $\ell_2^{as}((\mathbb{Z}^3)^2)$ по формуле

$$\hat{h}_\mu = \hat{h}^0 - \mu\hat{v},$$

$$\left(\hat{h}^0\hat{\psi}\right)(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\sum_{|s|=1}\left[2\hat{\psi}(x_1, x_2) - \hat{\psi}(x_1 + s, x_2) - \hat{\psi}(x_1, x_2 + s)\right],$$

$$\hat{\psi} \in \ell_2^{as}((\mathbb{Z}^3)^2)$$

$$\left(\hat{v}\hat{\psi}\right)(x_1, x_2) = \hat{v}(x_1 - x_2)\hat{\psi}(x_1, x_2),\ \hat{\psi} \in \ell_2^{as}((\mathbb{Z}^3)^2),$$

где

$$\hat{v}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{при } |x| = 1, \\ 0, & \text{в остальрых случиях}. \end{cases}$$

Здесь $|x| = |x^{(1)}| + |x^{(2)}| + |x^{(3)}|$, $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) \in \mathbb{Z}^3$ и $\mu > 0$ энергия

взаимодействия двух частиц на ближайших соседних узлах.

Отметим, что двухчастичный гамильтониан $\hat{h}_\mu$ является ограниченным самосопряженным оператором в $\ell_2^{as}((\mathbb{Z}^3)^2)$.

Пусть $\mathbb{T}^3$-трехмерный тор, $\ell_2(\mathbb{T}^3)$-гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на $\mathbb{T}^3$ и $L_2^0(\mathbb{T}^3) \subset L_2(\mathbb{T}^3)$ – подпространство нечетных функций.

После преобразования Фурье и выделения полного квазиимпульса $k \in \mathbb{T}^3$

системы (см $[2]-[3]$), изучение спектральных свойств оператора $\hat{h}_\mu$ сводится к изучению семейства двухчастичных дискретных операторов Шредингера $h_\mu(k)$, $k\in\mathbb{T}^3$, действующих в $L_2^0(\mathbb{T}^3)$ по формуле

$$h_\mu(k)=h^0(k)-\mu v.$$

Здесь невозмущенный оператор $h^0(k)$ есть оператор умножения на функцию

$$(h^0(k)f)(q)=E_k(q)f(q),\ \ f\in L_2^0(\mathbb{T}^3),$$

где

$$E_k(q)=2\sum_{o=1}^{3}(1-\cos\frac{k^{(j)}}{2}\cos q^{(j)}).$$

Оператор взаимодействия (возмущения) v является оператором ранга $d\geq 1$ и действует в гильбертовом пространстве $L_2^0(\mathbb{T}^3)$ по формуле

$$(vf)(q)=(2\pi)^{-d}\sum_{i=1}^{3}\sin q^{(i)}\int\limits_{\mathbb{T}^3}\sin t^{(i)}f(t)dt.$$

Возмущение v оператора $h^0(k)$ является оператором ранга 3, и следовательно, из теоремы Вейля о сохранении существенного спектра при компактном возмущении (см. [4]) существенный спектр $\sigma_{ess}(h_\mu(k))$ оператора $h_\mu(k)$ совпадает со спектром оператора $h^0(k)$. Так как $h^0(k)$ есть оператор умножения на функцию $E_k(q)$, то

$$\sigma_{ess}\left(h_\mu(k)\right)=[E_{min}(k),E_{max}(k)],$$

где

$$E_{min}(k)=\min_{q\in\mathbb{T}^3}E_k(q)=2\sum_{o=1}^{3}\left(1-\cos\frac{k^{(j)}}{2}\right)\geq 0,$$

$$E_{max}(k)=\max_{q\in\mathbb{T}^3}E_k(q)=2\sum_{o=1}^{3}\left(1+\cos\frac{k^{(j)}}{2}\right)\leq 4d.$$

При $k\in(-\pi,\pi)$ интеграл

$$d^{(i)}(k) = d^{(i)}\big(k, E_{min}(k)\big) = \int\limits_{\mathbb{T}^3} \frac{sin^2 q^{(i)} dq}{E_k(q) - E_{min}(k)}$$

существует и как функция, определенная на

$(-\pi,\pi)^3$ является аналитической.

Пусть $k \in (-\pi,\pi)^3$ и

$$\mu^{(i)}(k) == (d^{(i)}(k))^{-1} = \left(\int\limits_{\mathbb{T}^3} \frac{sin^2 q^{(i)} dq}{E_k(q) - E_{min}(k)} \right)^{-1} > 0.$$

Определим следующие множества для изучения асимптотику собственного значения $z^{(i)}(\mu, k)$ по значениям квазиимпульса $k \in \mathbb{T}^3$:

$$S_<^{(i)}(\mu) = \{k \in (-\pi,\pi)^3 \colon \mu^{(i)}(k) < \mu\},$$

$$S_=^{(i)}(\mu) = \{k \in (-\pi,\pi)^3 \colon \mu^{(i)}(k) = \mu\},$$

$$S_>^{(i)}(\mu) = \{k \in (-\pi,\pi)^3 \colon \mu^{(i)}(k) > \mu\}.$$

В силу аналитичности и положительности функции $\mu^{(i)}(k)$ в $(-\pi,\pi)^3$ заключаем, что $S_<^{(i)}(\mu)$ и $S_>^{(i)}(\mu)$ -открытые связанные множества, а $S_=^{(i)}(\mu)$ - замкнутое многообразие коразмерности 1 Так как функция $\mu^{(i)}(k)$ не является постоянной, существует $\mu_i^* \in \mathbb{R}$ такое, что

$inf_{(-\pi,\pi)^3}\, \mu^{(i)}(k) < \mu_i^* < sup_{(-\pi,\pi)^3} \mu^{(i)}(k)$ и все вышеопределенные

множества непустые.

Теорема 1.При $k \in S_>^{(i)}(\mu_i^*)$, $i = 1,2,3,$ оператор не имеет собственного значения, лежащего левее существенного спектра. Для любого $k \in S_>^{(i)}(\mu_i^*)$ $h_{\mu_i^*}(k)$ оператор имеет собственные значения $z^{(i)}(\mu_i^*, k), i = \overline{1,3}.$ При этом $z^{(i)}(\mu_i^*, k)$ лежат левее существенного спектра и являются аналитическими в $S_<^{(i)}(\mu_i^*)$. Более того, для любого $k \in S_=^{(i)}(\mu_i^*)$ имеют места следующие

асимптотики при $k \longrightarrow k^*, k \in S_<^{(i)}(\mu_i^*)$:

$$z^{(i)}(\mu_i^*, k) = \varepsilon_{min}(k^*) + \sum_{j=1}^{3}\left[\frac{\partial\varepsilon_{min}(k^*)}{\partial k_j} - \left(\frac{\partial d^{(i)}}{\partial z^{(i)}}\left(k^*, \varepsilon_{min}(k^*)\right)\right)^{-1}\frac{\partial d^{(i)}(k^*)}{\partial k_j}\right]\left(k_j - k_j^*\right) + O(|k-k^*|^2).$$

Список литературы

[1] M.Klaus and B.Simon: Coupling Constant Theresholds in Nonrelativistic Quantum Mechanics.I.Short-Range Two-Body Case. Annals of Physics **130,**251-281, New Jersey, 1980.

[2] S.Albeverio, S.N.Lakaev, K.A.Makarov, Z.I.muminov: The Threshold Effects for the Two-particle Hamiltonians on Lattices, Comm.Math.Phys. **262**(2006), 91-115.

[3] S.N.Lakaev: Bound stats and resonances of N particle discete Scho'dinger operators. Theor.and Math.phys. **91**(1992), No.1,51-65.

[4]M.Reed and B.Simon: Methods of modern mathematical physics.IV: Analysis of operators. Academic Press, N,Y., 1978.

[5] R.Courant d.Hilbert: Methods of Mathematicsl physics. Vol. 2, Partial Differential Equations. Wiley Classic Eddition Published in 1989.