О числе собственных значений одной обобщенной модели Фридрихса

Латипова Д. А., Асадов Ж.И.

Самаркандский государственный университет , Самарканд, Узбекистан

sherdorlatipov@mail.ru

В настоящей статье рассматривается теорема о числе собственных значений одной обобщенной модели Фридрихса.

Пусть $\mathrm{H} = \mathrm{H}_0 \oplus \mathrm{H}_1$двухканальное гильбертово пространство, состоящее из одномерного гильбертова пространства$\mathrm{H}_0 = \mathbb{C}^1$(канал 1) и "ядерного" гильбертова пространства $\mathrm{H}_1 = \mathrm{L}^{2,e}(\mathbb{T}^d)$ чётных квадратично интегрируемых

Функций на d- мерном $(\mathrm{d} \geq 1)$ торе $\mathbb{T}^d$ (канал 2).

Пусть E(k), $k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{T}^d$- скалярный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H_0 по формуле

$$\mathrm{E}(\mathrm{k})\mathrm{f}_0 = \varepsilon(\mathrm{k})\mathrm{f}_0, \quad \mathrm{f}_0 \in \mathrm{H}_0$$

Где$\varepsilon(\mathrm{k}) = 4\sum_{i=1}^{d}(1 + \cos\frac{k_i}{2})$

Оператор$\mathrm{H}_\mu(k), k \in \mathbb{T}^d$, действует в гильбертовом пространстве H_1по формуле

$$\mathrm{H}_\mu(k) = \varepsilon_k(q)f_1(q) - \mu\int_{\mathbb{T}^d} f_1(s)d\eta,$$

Где$\varepsilon_k(q) = 2\sum_{i=1}^{d}(1 - \cos\frac{k_i}{2}\cos q_i), d\eta = d\eta(q)$ мераХаара, т.е.

$$d\eta = \frac{dq}{(2\pi)^d}$$

Оператор$\mathrm{H}_{\mu}(k), k \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}, \gamma, \mu \in R$ действует в гильбертовом пространстве H по формуле

$$\mathrm{H}_{\gamma\mu}(k)\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(k)f_0 + C_\gamma^* f_1 \\ C_\gamma f_0 + (\mathrm{H}_\mu(k)f_1)(q) \end{pmatrix},$$

Где$C_\gamma^* f_1 = \gamma(f_1, 1)_{H_1}$ (соотв $C_\gamma f_0 = \gamma(f_0, 1)_{H_0}$) оператор рождения(соотв. уничтожения).

Для существенного спектра оператора $\mathrm{H}_{\gamma\mu}(k), k \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ верно равенство

$$\sigma_{ess}\left(\mathrm{H}_{\gamma\mu}(k)\right) = [\varepsilon_{min}(k), \varepsilon_{max}(k)],$$

Где

$$\varepsilon_{min}(k) = \min_{q \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \varepsilon_k(q) = 2\sum_{i=1}^{d}(1 - \cos\frac{k^{(i)}}{2}),$$

$$\varepsilon_{max}(k) = \max_{q \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \varepsilon_k(q) = 2\sum_{i=1}^{d}(1 + \cos\frac{k_i}{2}),$$

В работах [1,2], в которых рассмотрены аналогичные модели, установлено, что областью значением функции$\varepsilon(\cdot)$ является отрезок $[\varepsilon_{min}(k), \varepsilon_{max}(k)]$, т.е. содержится в существенном спектре. Исследовано, число собственных значений лежащих ниже существенного спектра рассматриваемого оператора, в зависимости от параметров.

В настоящем работе рассматривается случай, в котором значения функции $\varepsilon(\cdot)$ лежат выше существенного спектра оператора $\mathrm{H}_{\gamma\mu}(k)$,т.е$\varepsilon_{max} < \varepsilon(k)$, $k \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$. Исследуется число собственных значений рассматриваемого оператора, лежащих вне существенном спектре.

Отметим, что число собственных значений оператора $\mathrm{H}_{\gamma\mu}(k)$, лежащих вне существенном спектре, зависит как от параметров γ, μ, kтак и от оператора умножения $E(k)$.

Теорема. *Предположим, чтоd=1,2и$\gamma \in R,\ \mu \geq 0$*

а)Пусть$\frac{\gamma^2}{\mu} < \varepsilon(k) - \varepsilon_{max}(k)$ и $k \in \mathbb{T}^d$*. Тогда оператор* $H_{\gamma\mu}(k)$ *имеет два*

собственных значений $E_{\gamma\mu}^{(1)}(k)$*и*$E_{\gamma\mu}^{(2)}(k)$*вне существенного спектра. При этом эти собственные значения удовлетворяют следующим условиям:*

$\varepsilon_{max}(k) < E_{\gamma\mu}^{(1)}(k) < \ \varepsilon(k) < E_{\gamma\mu}^{(2)}(k).$

б)Пусть$\varepsilon(k) - \varepsilon_{max}(k) \leq \frac{\gamma^2}{\mu} \leq \varepsilon(k) - \varepsilon_{min}(k)$ и $k \in \mathbb{T}^d$*.Тогда*

оператор$H_{\gamma\mu}(k)$ *имеет единственное собственное значение* $E_{\gamma\mu}^{(2)}(k)$*. При этом эти собственные значения удовлетворяют следующим условиям:*

$\varepsilon(k) < E_{\gamma\mu}^{(2)}(k)$

в) Пусть$\frac{\gamma^2}{\mu} > \varepsilon(k) - \varepsilon_{min}(k)$ и $k \in \mathbb{T}^d$*.Тогда оператор*$H_{\gamma\mu}(k)$ *имеет два*

собственных значений $E_{\gamma\mu}^{(1)}(k)$*и*$E_{\gamma\mu}^{(2)}(k)$ *вне существенного спектра. При этом эти собственные значения удовлетворяют следующим условиям:*

$$E_{\gamma\mu}^{(1)}(k) < \varepsilon_{min}(k) < \varepsilon(k) < E_{\gamma\mu}^{(2)}(k).$$

г)Пусть$\gamma = 0, \mu > 0$ и $k \in \mathbb{T}^d$*Тогда оператор* $H_{\gamma\mu}(k)$ *имеет два собственных значений*$E_{\gamma\mu}^{(1)}(k) = \varepsilon(k)$*и* $E_{\gamma\mu}^{(2)}(k)$*вне существенного спектра. При этом эти собственные значения удовлетворяют следующим условиям:*

$\varepsilon_{max}(k) < E_{\gamma\mu}^{(1)}(k) = \varepsilon(k) < E_{\gamma\mu}^{(2)}(k)$

Литература

1.С.Н.Лакаев, Ш.М.Латипов. О существование и аналитичности

Собственных значений двухканальной молекулярно-резонансной модели,

ТМФ 169(2011) №3 стр. 1657-1666.

2.С.Н.Лакаев, Ш.М.Латипов. Числа связанных состояний двухканальной

молекулярной-резонансной модели, УзМЖ 2011,№ 3 стр 98-113.

3. Рид М, Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.IV: Анализ операторов. М. Мир, 1982.