

О числе собственных значений одной обобщенной модели Фридрикса

Асадов Жасур Иннатович

Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан

sherdorlatipov@mail.ru

В настоящей статье автором решено теорема о числе собственных значений одной обобщенной модели Фридрикса.

Пусть $H = H_0 + H_1$ двухканальное гильбертово пространство, состоящее из одномерного гильбертова пространства $H_0 = C^1$ (канал 1) и "ядерного" гильбертова пространства $H_1 = L^{2,e}(\mathbb{T}^d)$ чётных квадратично-интегрируемых функций на d - мерном ($d \geq 1$) торе \mathbb{T}^d (канал 2).

Пусть $E(k)$, $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{T}^d$ - скалярный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H_0 по формуле

$$E(k)f_0 = \varepsilon(k)f_0, \quad f_0 \in H_0$$

где $\varepsilon(k) = 4 \sum_{i=1}^d (1 + \cos \frac{k_i}{2})$

Оператор $H_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, действует в гильбертовом пространстве H_1 по формуле

$$H_\mu(k) = \varepsilon_k(q)f_1(q) - \mu \int_{\mathbb{T}^d} f_1(s) d\eta,$$

Где $\varepsilon_k(q) = 2 \sum_{i=1}^d (1 - \cos \frac{k_i}{2} \cos q_i)$, $d\eta = d\eta(q)$ мера Хаара, т.е.

$$d\eta = \frac{dq}{(2\pi)^d}$$

Оператор $H_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, $\gamma, \mu \in \mathbb{R}$ действует в гильбертовом пространстве

по формуле

$$H_{\gamma\mu}(k) \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(k)f_0 + C_\gamma^* f_1 \\ C_\gamma f_0 + (H_\mu(k)f_1)(q) \end{pmatrix},$$

где $C_\gamma^* f_1 = \gamma(f_1, 1)_{H_1}$ (соотв $C_\gamma f_0 = \gamma(f_0, 1)_{H_0}$) оператор рождения(соотв. уничтожения).

В работах [1,2], в которых рассмотрены аналогичные модели,

установлено, что областью значений функции $\varepsilon(\cdot)$ является отрезок $[\varepsilon_{min}(k), \varepsilon_{max}(k)]$, т.е. содержится в существенном спектре. Исследовано, число собственных значений лежащих ниже существенного спектра рассматриваемого оператора, в зависимости от параметров.

В настоящем работе рассматривается случай, в котором значения

функции $\varepsilon(\cdot)$ лежат выше существенного спектра оператора $H_{\gamma\mu}(k)$, т.е. $\varepsilon_{max} < \varepsilon(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$ Исследуется число собственных значений рассматриваемого оператора, лежащих вне существенном спектре.

Замечательность этой работы в том, что число собственных значений

оператора $H_{\gamma\mu}(k)$, лежащих вне существенном спектре, зависит как от параметров γ, μ , так и от оператора умножения $E(k)$.

Для существенного спектра оператора $H_{\gamma\mu}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$ верно равенство

$$\sigma_{ess} \left(H_{\gamma\mu}(k) \right) = [\varepsilon_{min}(k), \varepsilon_{max}(k)],$$

Где

$$\varepsilon_{min}(k) = \min_{q \in \mathbb{T}^d} \varepsilon_k(q) = 2 \sum_{i=1}^d \left(1 - \cos \frac{k^{(i)}}{2} \right),$$

$$\varepsilon_{max}(k) = \max_{q \in \mathbb{T}^d} \varepsilon_k(q) = 2 \sum_{i=1}^d \left(1 + \cos \frac{k_i}{2} \right),$$

Теорема. Предположим, что $\gamma = 1, 2$ и $\gamma \in R, \mu \geq 0$

а) Пусть $\frac{\gamma^2}{\mu} < \varepsilon(k) - \varepsilon_{max}(k)$ и $k \in \mathbb{T}^d$. Тогда оператор $H_{\gamma\mu}(k)$ имеет два

собственных значений $E_{\gamma\mu}^{(1)}(k)$ и $E_{\gamma\mu}^{(2)}(k)$ вне существенного спектра. При этом эти собственные значения удовлетворяют следующим условиям:

$$\varepsilon_{max}(k) < E_{\gamma\mu}^{(1)}(k) < \varepsilon(k) < E_{\gamma\mu}^{(2)}(k).$$

б) Пусть $\varepsilon(k) - \varepsilon_{max}(k) \leq \frac{\gamma^2}{\mu} \leq \varepsilon(k) - \varepsilon_{min}(k)$ и $k \in \mathbb{T}^d$. Тогда

оператор $H_{\gamma\mu}(k)$ имеет единственное собственное значение $E_{\gamma\mu}^{(2)}(k)$. При этом

эти собственные значения удовлетворяют следующим условиям:

$$\varepsilon(k) < E_{\gamma\mu}^{(2)}(k)$$

в) Пусть $\frac{\gamma^2}{\mu} > \varepsilon(k) - \varepsilon_{min}(k)$ и $k \in \mathbb{T}^d$. Тогда оператор $H_{\gamma\mu}(k)$ имеет два

собственных значений $E_{\gamma\mu}^{(1)}(k)$ и $E_{\gamma\mu}^{(2)}(k)$ вне существенного спектра. При этом эти собственные значения удовлетворяют следующим условиям:

$$E_{\gamma\mu}^{(1)}(k) < \varepsilon_{min}(k) < \varepsilon(k) < E_{\gamma\mu}^{(2)}(k).$$

г) Пусть $\gamma = 0, \mu > 0$ и $k \in \mathbb{T}^d$. Тогда оператор $H_{\gamma\mu}(k)$ имеет два собственных значений $E_{\gamma\mu}^{(1)}(k) = \varepsilon(k)$ и $E_{\gamma\mu}^{(2)}(k)$ вне существенного спектра. При этом эти собственные значения удовлетворяют следующим условиям:

$$\varepsilon_{max}(k) < E_{\gamma\mu}^{(1)}(k) = \varepsilon(k) < E_{\gamma\mu}^{(2)}(k)$$

Литература

1. С.Н.Лакаев, Ш.М.Латипов. О существование и аналитичности собственных значений двухканальной молекулярно-резонансной модели, ТМФ 169(2011) №3 стр. 1657-1666.
2. С.Н.Лакаев, Ш.М.Латипов. Числа связанных состояний двухканальной молекулярной-резонансной модели, УзМЖ 2011, № 3 стр 98-113.
3. Рид М, Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.IV: Анализ операторов. М. Мир, 1982.