Очилов Салим

кан. физ.-мат. наук. доцент СамГУ,

г. Самарканд, E-mail: s-ochilov@samdu.uz

Нурмаматов Мехриддин, магистрант СамГУ

г.Самарканд, E-mail: mehriddin.nurmamatov@mail.ru

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В данной статье рассматривается линейная задача оптимального управления, связанная с экологией, когда требуется найти траекторию некоторой динамической системы, которая минимальное время находилась в зараженной области.

АННОТАЦИЯ

Рассматривается линейная задача оптимального управления связанных с экологией, когда требуется найти траекторию некоторой динамической системы, которая минимальное время находится в зараженной области. Формулируются и доказываются необходимые условия оптимальности когда область начальных и конечных состояний динамической системы пересекаются с областью. В случае не пересечения задача рассмотрено [1]. В основу положена редукция исходной задачи к общей задаче математического программирования и использования необходимы условия экстремума, обобщающие обычное правило множителей Лагранжа на произвольные линейные пространства [2, с. 66].

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:

Система, оптимальность, время, согласованность, регулярность, необходимость.

Постановка задача и необходимые сведения.

Пусть R^n −мерное пространство и траектория $x(t) \in R^n$ удовлетворят систем дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Ax(t-h) + Bu(t),$$

где $A,\ A_1 - nxn$ –матрицы, $B - nxm$ матрица, $h > 0$ - постоянное запаздывание, $u(t) - m$- мерная вектор функция управления из заданного класса кусочно-непрерывных вектор функций U при $t \in [0,1]$.

Заданы множества

$$M_1 = \{x \in R^n:\ \varphi_j(x) \le 0,\ j = 1, \dots, s\},$$

где $\varphi_j -$ непрерывно дифференцируемые функции,

$$M(t) = \{x \in R^n:\ \varphi_0(x,t) \le 0, \qquad t \in [0,1]\},$$

где $\varphi_0(x,t) -$ непрерывно дифференцируемая функция по обоим переменным и начальное условие

$$x(t) = x_0(t), \qquad t \in [-h, 0],$$

удовлетворяющие условиям

$$M_1 \cap M(1) \ne \emptyset,$$

$$M_0 \cap M(0) \ne \emptyset,$$

$$x(0) \in M_0 \cap M(0).$$

Требуется выбрать управление $u \in U$ так, чтобы $x(1) \in M_1$ а время, в течение которого выполнено включение $x(t) \in M(t)$ било бы минимальным.

Введением характеристической функции

$$\delta(x,t) = \begin{cases} 1, & x \in M(t), \\ 0, & x \notin M(t). \end{cases}$$

Тогда исходную задачу можно сформулировать в виде

$$T(X(\cdot)) = \int_0^1 \delta\,(f(x(t),t)dt \to min \tag{1}$$

при условиях

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + Bu(t) \tag{2}$$

$$x(t) = x_0(t), \quad t \in [-h, 0], \tag{3}$$

$$M_1 \cap M(1) \ne \emptyset,\ \ x(0) \in M_0 \cap M(0) \ne \emptyset, \tag{4}$$

$$x(1) \in M_1, \tag{5}$$

$$u(t) \in U,\ \ t \in [0,1]. \tag{6}$$

Наложим некоторые условия связывающее класс управлений U и множество $M(t)$ [3].

Условие согласованности: решение систем (2) соответствующее классу управлений U, обладают тем свойством, что они лежат в подпространстве L пространства абсолютно непрерывных функций, для которых производная

$$\frac{d}{dt}\varphi_0(x(t),t) = \varphi'_{0x}(x(t),t)\dot{x}(t) + \varphi'_{0t}(x(t),t)$$

существует для всех t ∈ $[0.1]$ и непрерывна по t

Предположим, что траектория $x(t), t \in [0,1]$ пересекает множество $M(t\ )$, один раз и t_*, t^* соответствующие момент входа траектории в $M(t)$ и входа из него, и

$$\varphi_0(x(t_*),t_*) = 0, \quad \varphi_0(x(t^*),t^* = 0.$$

Условие регулярности: Будем говорить, что момент t_* регулярен для траектории $x(\cdot)$, если

$$\frac{d}{dt}\varphi_0(x(t),t)|_{t=t_*} = \varphi'_{0x}(x(t_*),t_*)\dot{x}(t_*) + \varphi'_{0t}(x(t_*),t_*) = \gamma(x(\cdot),t_*) \neq 0.$$

Будем предполагать , что существуют такие моменты $t_1 < t_2 < \cdots . < t_{2m+1}$, что

$$\varphi(x^0(t_i),t_i) = 0, \quad i = 1,\dots,2m+1;$$

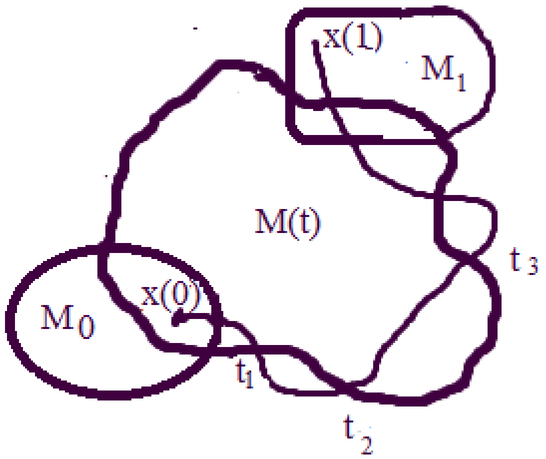
$$\gamma\big(x^0(\cdot),t_{2j+1}\big) > 0, \quad j = 0,\dots,m;$$

$$\gamma\big(x^0(\cdot),t_{2j+1}\big) < 0, \quad j = 1,\dots,m;$$

$$\varphi_0(x^0(t),t) < 0, \quad t \in \big(t_{2j},t_{2j+1}\big), \qquad j = 1\dots,m;$$

$$\varphi_0(x^0(t),t) < 0, \quad t \in (0,t_1)$$

Описанными соотношениями ситуация наглядно изображена на рисунке



Моменты времени t, с нечетными индексами время выхода из $M(t)$, с четными индексами время входа в $M(t)$. Общее время нахождения траектории в множестве $M(t)$, равно

$$T\big(x^{\circ}(\cdot)\big) = t_1 + \sum_{i=1}^{m} (t_{2i+1} - t_{2i})$$

Задача (1) - (6), с учетом вида множеств $M(t)$ и M_1 редуцируется к общей задаче математического программирования

$$T\big(x(\cdot)\big) \to min,$$

$$\varphi_j\big(x(1)\big) \le 0,\ j = 1,2,\dots,s, \tag{7}$$

$$x \in K,$$

где K подпространство пространство L

Теорема (Необходимые условия оптимальности)

Пусть $(x^0(\cdot),u^0(\cdot))$-оптимальный процесс задачи (7). Если выполнены условия согласованности и в точках $t_{2q}, q = 1,2,\dots m$, входа в множество M(t) и в точках $t_{2q+1}, q = 1,2,\dots m$, оптимальная траектория регулярна, то существуют такие не все равные нулю числа $\lambda_j > 0$, j=0,1,2,…,m и функция $\psi(\tau)$, что имеет место соотношения

$$\psi'(\tau) = -A'\psi(\tau), \qquad \tau \in (t_{2q,}t_{2q+1}), \qquad \tau \in (0,t_1),$$

$$\psi(t_q+0) - \psi(t_q-0) = (-1)^q n(x^0(\cdot),t_q), q = 1,2,\dots,2m.$$

$$\psi(1) = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \varphi'_{jx}(x^0(1)),$$

$$\psi'(1)x^0(1,u^0)=\min_{u(\cdot)\in U}\psi'(1)(e^{SA\bar{h}}x(0)+\sum_{i=1}^{s}e^{iA\bar{h}}\int_{1-i\bar{h}}^{1-(i-1)\bar{h}}e^{-A\tau}(A_1x(\tau-h)+Bu(\tau))d\tau) \quad ,$$

где $\bar{h}$ $(\bar{h}<h)$ соизмеримо с произвольной точкой $k\bar{h}$ (k целое положительное число) интервала [0,t).

Список использованной литературы:

1. Шахидзе А.Н., Очилов С. Необходимые условия оптимальности в задачи оптимизации времени прохождения через область. Деп.в.ГФНТИ. г.Ташкент. 07.11.96.2606.-Уз.96.
2. Пшеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума. 2-е изд. –М: 1982.
3. Пшеничный Б.Н., Очилов С. Оптимизация времени прохождения через область//Кибернетика и системный анализ.- 1993. - № 3. с. 167 – 171.