

УДК. 539.3

**ВЛИЯНИЕ ИНЕРЦИИ ВРАЩЕНИЯ НА ПРОДОЛЬНЫЕ  
КОЛЕБАНИЯ КРУГЛОГО УПРУГОГО СТЕРЖНЯ**

*ДОИРАВИЙ ЭЛАСТИК СТЕРЖЕН БЎЙЛАМА ТЕБРАНИШЛАРИГА  
АЙЛАНИШ ИНЕРЦИЯСИНИНГ ТАЪСИРИ*

*Проф.Худойназаров Х.ТДТУ, к.ўқ. Абдикайимова Г.А.ТДТУ., магистр  
Холбутаева Н.*

*Доиравий эластик стерженнинг эркин учидан берилган зарба билан қўзгатилган деформациянинг ўтиши жараёнида, стержень нуқталарининг бўйлама кўчишларига айланиш инерциясининг таъсирини сонли баҳолаш ҳақидаги масала қаралган. Стержень нуқталари бўйлама кўчишларининг ўзгаришлари кўринишидаги элементар тўлқинлар эффектлар йигиндисининг асосий компонентлари ўрганилган. Масалани ечиш учун чекли айирмалар усули қўлланилган. Олинган сонли натижалар асосида қиёсий таҳлил қилинган.*

**ВЛИЯНИЕ ИНЕРЦИИ ВРАЩЕНИЯ НА ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ  
КРУГЛОГО УПРУГОГО СТЕРЖНЯ**

*проф Худойназаров Х. ТДТУ.,ст. пр.Абдикайимова Г.А.ТДТУ., магистр  
Холбутаева Н.*

*Рассматривается задача о численной оценки влияния инерции вращения на изменения продольных перемещений точек круглого упругого стержня при переходном процессе деформации, возбужденный продольным ударом по его свободному торцу. Исследованы основные компоненты суммарного эффекта элементарных волн в виде изменений продольного перемещения точек стержня. Для решения задачи применен метод конечных разностей. На основе полученных численных результатов проведен сравнительный анализ.*

**THE INFLUENCE OF ROTATION INERTIA TO LONGITUDINAL  
VIBRATION OF ROUND STUBBORB CORE**

*prof.Khudoynazarov Kh. TRTU, Abdikayimova G.A. TRTU ,  
Kholbutayeva Kh.*

*Examined exercise about numerical marking of the influence of rotation inertia to longitudinal vibration of round stubborn on the crossing process of deformation, irritated by longitudinal blow by its free side. Researched fundamental components of summary effect of elementary waves, which is exanimated in the type of changings in prolonged point of movements. For decision of exercise is used method of final differences. On the base of got numerical results were performed comparative analyses.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** колебания, вращение, продольное перемещение, сержень, упругость, переходный процесс, деформация, торец стержня, удар, воздействие

## **ВЛИЯНИЕ ИНЕРЦИИ ВРАЩЕНИЯ НА ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГЛОГО УПРУГОГО СТЕРЖНЯ**

Изучение переходных процессов деформации в стержне кругового поперечного сечения, возбужденных нагрузкой действующей на торце, имеет важное прикладное значение [1]. Как правило, решение задач о переходных процессах в пластинках, стержнях и оболочках проводится на основе приближенных уравнений колебания [2]. Анализ применимости приближенных теорий колебания при переходных процессах деформации круговых цилиндрических упругих тел, в частности оболочек и стержней приведен в работе [3], где по результатам численных расчетов сделан вывод о том, что приближенные теории имеют широкую область практической применимости. Кроме того, имеется ряд работ, в которых исследованы осесимметричная деформация стержня, вызванная торцевой нагрузкой [4].

Ниже рассматривается задача о численной оценки влияния инерции вращения на изменения продольных перемещений точек круглого упругого стержня при переходном процессе деформации, возбужденный продольным ударом по его свободному торцу. При этом считается, что один конец стержня конечной длины жестко заделан, а другой свободен. Для решения задачи в качестве разрешающих уравнений колебаний примем частные случаи уравнений продольных колебаний вязкоупругого стержня [3,5]:

а) классический вариант

$$-q_1(1-q_1)\frac{1}{a^2}M^{-1}\left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2}\right) + [q_1(1-q_1) + (1+q_1)^2]\frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

б) уточненный вариант

$$\frac{r_0^3}{16}\left\{\frac{a_4}{\mu}\rho^2M^{-2}\left(\frac{\partial^4 U_z}{\partial t^4}\right) - (\rho - a_3\rho)M^{-1}\left(\frac{\partial^4 U_z}{\partial t^2\partial z^2}\right) + E\frac{\partial^4 U_z}{\partial z^4}\right\} - \frac{1}{a_3}\frac{r_0}{2}\left\{\rho M^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - E\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\} = 0, \quad (2)$$

где  $U_z$  - продольное перемещение точек оси стержня;  $z$  - продольная координата;  $t$  - время;  $r_0$  - радиус стержня;  $a = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  - скорость распространения продольных волн и  $b = \sqrt{\mu/\rho}$  - скорость распространения поперечных волн в материале стержня;  $\rho$  - плотность;  $\lambda, \mu$  - коэффициенты Ламе;  $\nu$  - коэффициент Пуассона;

$$a_3 = \frac{7q_1^2 - q_1 + 4}{2q_1(1+\nu)};$$

$$a_4 = \frac{a_1}{a_3}; \quad a_5 = \frac{-24\nu^4 + 4\nu^3 + 70\nu^2 - 27\nu + 23}{-16\nu^3 + 34\nu^2 - 30\nu + 12}.$$

Рассмотрим частный случай, когда вязкоупругий оператор равен единице, т.е.  $M(\xi) = \xi(t)$  и во втором уравнении, в дополнении к классическому уравнению (1), оставляем только слагаемое, учитывающее инерцию вращения. Кроме того учтем значение оператора  $q_1$  которое, в этом случае определяется просто по формуле для упругого случая

$$q_1 = \frac{b^2 - a^2}{b^2}.$$

Тогда

$$1 - q_1 = \frac{a^2}{b^2}; \quad 1 + q_1 = \frac{a^2 - 2b^2}{b^2}$$

и получим из уравнения (1)

$$\frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2} - \frac{3a^2 - 4b^2}{a^2 - b^2} b^2 \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} = 0, \quad (3)$$

здесь  $c^2 = \frac{3a^2 - 4b^2}{a^2 - b^2} b^2$  - стержневая скорость распространения волн.

Учитывая, что

$$\frac{3a^2 - 4b^2}{a^2 - b^2} = 2(1+\nu); \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

где  $E$  - модуль упругости материала стержня, получим

$$\rho\mu^{-1} \left( \frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2} \right) - E \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} = 0, \quad (4)$$

Аналогично, при вышеуказанных условиях из уравнения (2) следует уравнение

$$\frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} + \frac{a_3}{8} \frac{\partial^4 U_z}{\partial t^2 \partial z^2} = 0, \quad (5)$$

которое, учитывает инерцию вращения поперечного сечения стержня [2].

Таким образом, продольные колебания круглого упругого стержня будем описывать классическим - (4) и уточненным - (5) уравнениями. Сформулируем начальные и граничные условия поставленной задачи, исходя из условий закрепления концов стержня и условий приложения ударной нагрузки. Видно, что уравнение (5) имеет четвертый порядок по производным. При этом порядки отдельных производных, как по времени, так и по координате не превышают двух. Поэтому, граничные и начальные условия для уравнений (4) и (5) будут одни и те же.

Допустим, что динамическая нагрузка по торцу стержня описывается функцией  $\varphi(t)$  и приложена на свободный от

закрепления торца  $z = 0$  стержня. Тогда начальные условия задачи будут иметь вид

$$U_z = 0 \text{ и } \frac{\partial U_z}{\partial t} = 0 \text{ при } t = 0, \quad (6)$$

где  $0 \leq t < \tau$ ;  $\tau$  - последний момент процесса наблюдения.

Граничные условия задачи будут иметь вид

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(z, t) &= \varphi(t) \quad \text{при } z = 0 \text{ и } (7) \\ \sigma_{zz}(z, t) &= 0 \quad \text{при } z = l, \end{aligned}$$

здесь  $0 \leq z \leq l$ ,  $l$  - длина стержня.

Для решения задачи применим метод конечных разностей.

Исследуемую область разделим прямоугольной сеткой  $\partial_k \partial_i$ . При этом шаг по координате обозначим через  $h$ , а по времени через  $\tau$ ,

$$D_k = \{z_k = k \cdot h, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, N, h > 0, t_i = i \cdot \tau, i = 0, 1, 2, \dots, M, \tau > 0\}$$

$$\begin{aligned} z_k &= z_0 + k \cdot h, \\ t_i &= t_0 + i \cdot \tau, \end{aligned} \quad h = \frac{l}{N}, \quad \tau = \bar{k} \frac{h}{a}, \quad 0 < \bar{k} < 1.$$

$k$  - коэффициент сходимости решения.

Уравнения продольных колебаний упругого стержня (3) представим через конечные разности по явной схеме [6]

$$\frac{U_k^{i+1} - 2U_k^i + U_k^{i-1}}{\tau^2} + c^2 \frac{U_{k+1}^i - 2U_k^i + U_{k-1}^i}{h^2} = 0 \quad (8)$$

Здесь  $U_k^i$  -сеточные значения искомой функции. Решив (8) относительно  $U_k^{i+1}$  приходим к следующей рекуррентной формуле

$$U_k^{i+1} = \alpha^2 U_{k+1}^i + (1 - \alpha^2) [2U_k^i - U_{k-1}^i], \quad (9)$$

где

$$\alpha^2 = \frac{c^2 \tau^2}{h^2}.$$

Выразим начальные и граничные условия (4) и (5) через сеточные значения искомой функции следующим образом:

а) начальные условия при  $t = 0$

$$U(z, 0) = 0; \quad U_k^0 = 0;$$

и

$$\frac{\partial U(z, 0)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{U_k^1 - U_k^0}{\tau} = 0 \Rightarrow U_k^1 = U_k^0 = 0; \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N); \quad (10)$$

б) граничные условия при  $z = 0$

$$\sigma_{zz} = \mu \frac{\partial U_z}{\partial t} = \mu \frac{U_1^i - U_0^i}{h} = \varphi^i \Rightarrow U_1^i = \frac{h}{\mu} \cdot \varphi^i + U_0^i \text{ или}$$

$$U_0^i = U_1^i - \frac{h}{\mu} \cdot \varphi^i \quad (11)$$

и при  $z = \ell$

$$\sigma_{zz} = 0.$$

Найдем значения искомой функции по формуле (9) с помощью начальных и граничных условий(10) и (11).

Для решения задачи составлена блок-схема, на основе которой выполнена программа решения задачи на языке «Паскаль». Для численной реализации функцию  $\varphi(t)$  примем в виде [1]

$$\varphi(t) = \mu A \sin \frac{\pi t}{t_1}$$

Считается, что стержень изготовлен из стали и необходимые параметры для проведения расчетов заимствованы из работы [3]. Полученные, на основе классического уравнения (4), результаты представлены на Рис.1 в виде кривых зависимостей продольных перемещений точек различных сечений стержня от времени, из которых следует что:

- 1) в процессе продольных колебаний кругового упругого стержня, возбужденных ударом по свободному его торцу, точки различных сечений стержня перемещаются по синусоидальному закону;
- 2) амплитуды продольных перемещений точек стержня во всех сечениях одинакова и остается постоянной по всей дине стержня;
- 3) по мере удаления от свободного торца период колебаний сокращается.

Теперь эту же задачу решим с учетом инерции вращения поперечных сечений стержня. Для этого, в качестве разрешающего, применим уравнение (5). Для его решения также применяем МКР. После некоторых, несложных процедур, связанных с применением МКР, получим рекуррентную формулу

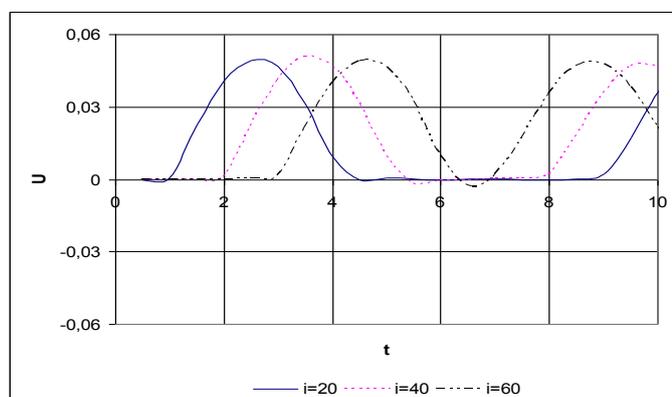


Рис.1. Зависимости продольных перемещений точек различных сечений стержня от времени

$$U_{i+1}^{n+1} + m_k U_i^{n+1} + n_k U_{i-1}^{n+1} = f_k, \quad (12)$$

где

$$m_k = \frac{\left[ \frac{1}{\tau^2} + \frac{2\gamma}{\Delta^2} - \frac{a_3(1-2\gamma)}{4\Delta^2\tau^2} \right]}{a_k}; \quad a_k = \left[ -\frac{\gamma}{\Delta^2} + \frac{a_3(1-2\gamma)}{8\Delta^2\tau^2} \right]; \quad n_k = 1$$

$$f_k = \left[ \frac{1}{\tau^2} (2U_i^n - U_i^{n-1}) + \frac{\eta}{\Delta^2} (U_{i+1}^{n-1} - 2U_i^{n-1} + U_{i-1}^{n-1}) - \frac{a_3(1-2\gamma)}{8\Delta^2\tau^2} (U_{i+1}^{n-1} - 2U_i^{n-1} + U_{i-1}^{n-1}) \right] / a_k$$

(13)

Полученные результаты приведены на Рис.2-Рис.4. На Рис.2 приведены зависимости продольных перемещений точек различных сечений стержня от времени с учетом инерции вращения, из которых следует что учет инерции вращения приводит к описанию процесса с затуханием колебаний.

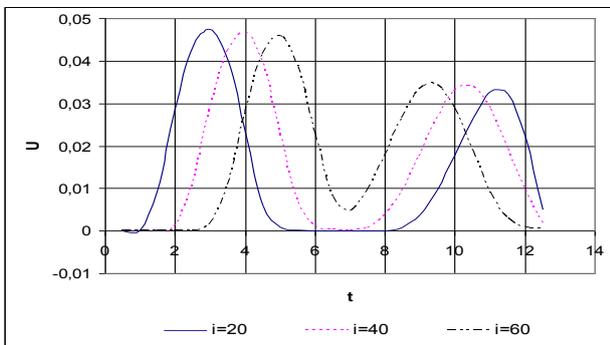


Рис.2. Зависимости продольных перемещений точек различных сечений стержня от времени с учетом инерции вращения

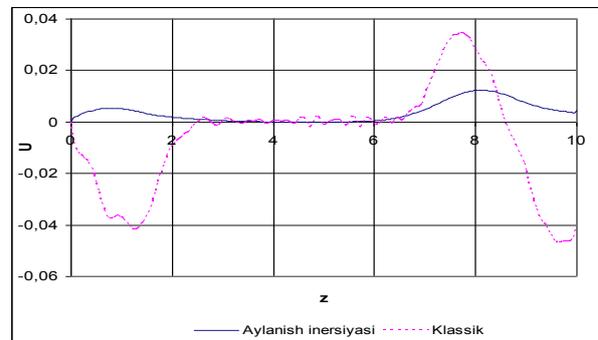


Рис. 3. Зависимости продольного перемещения точек стержня от координаты с учетом и без учета (классический случай) инерции вращения

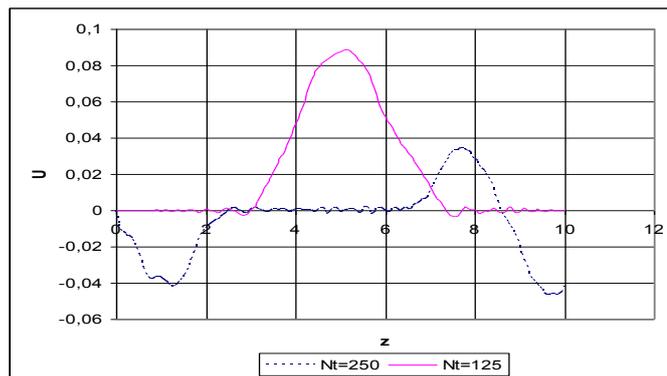


Рис. 4. Зависимости продольных перемещений точек различных сечений стержня от координаты учетом инерции вращения

Сравнительный анализ полученных на основе классического (4) и уточненного (5) уравнений результатов зависимостей продольного перемещения точек стержня от координаты и времени с учетом и без учета

(классический случай) инерции вращения ( Рис.3-Рис.4) показывает, что:

- 1) результаты, полученные на основе классического уравнения колебания являются несколько завышенными по сравнению с результатами, полученными на основе уточненного уравнения;
- 2) в сечениях стержня, достаточно близких к свободному, подвергнутого воздействию удара, торцу  $0 \leq z < 2,5$  классическое уравнение дает неверные результаты;
- 3) результаты полученные на основе классического и уточненного уравнений близки друг к другу в сечениях  $2,5 \leq z \leq 6,6$ .

### Литература

1. Филиппов И. Г. Чебан В. Г. Математическая теория колебаний упругих и вязкоупругих пластин и стержней. – Кишинев: Штиинца, 1988. – 190 с.
2. Петрашень Г.И. Проблемы инженерной теории колебаний вырожденных систем // Исследования по упругости и пластичности. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1966 - №5. – С. 3-33.
3. Худойназаров Х.Х. Нестационарное взаимодействие цилиндрических оболочек и стержней с деформируемой средой. – Ташкент. Изд-во мед. Литер., 2003 г., 325с.
4. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек //Итоги науки и техники. Сер. Механика тверд. деформир. тел. – Т.5 – М.: ВИНТИ, 2013 – 272 с.
5. Филиппов И.Г., Худойназаров Х.Х. Уточнение уравнений продольно-радиальных колебаний круговой цилиндрической вязкоупругой оболочки //Прикл. Механика.- 1990. – 26, №2. с.63-71.
6. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики.-М.: «Наука», 1980.- 534 с.
7. Худойназаров Х.Х., Амиркулова Ф.А. Взаимодействие цилиндрических слоев и оболочек со связанными полями.-Ташкент. Издательство «Навруз».-2011г. 336 с.

## ОТЗЫВ

На статьи проф.Х.Худойназарова, ст.пр.Г.Абдикайимовой и Н.Холбутаевой «Влияние инерции вращения на продольные колебания круглого упругого стержня»:

В работе изучено влияние инерции вращения на переходный процесс продольной деформации круглого упругого стержня на основе уточненных уравнений колебания, предложенных одним из авторов статьи. Если переходный процесс деформации возбужден нагрузкой ,действующей на торце рассматриваемой системы, как в представленной работе ,то место приложена нагрузки выступает в качестве источника первичных волн. В дальнейшем в процессе отражение этих волн от боковых поверхностей стержня появляются новые элементарные волны, количество которых возрастает весьма быстро.

В предложенной статье не вдаваясь на поведении отдельного анализа(который практический невозможен) увеличивающегося числа волн, исследованы основные компонента суммарного эффекта элементарных волн в виде изменений продольного перемещение точек стержня. Полученные при этом результаты представляет основной интерес при расчете инженерных конструкций и их элементов.

Для решения задачи применен численный метод, а именно разностей. Для сравнительного анализа решение задачи осуществлено на основе классического и уточненного уравнений колебания. В обоих случаях результаты получены применением МКР. Полученные результаты представлена в виде графиков изменения продольного перемещения точек различных сечений стержня. На основе полученных результатов сделала выводы о влияния инерции вращения на продольные колебания рассматриваемого стержня.

В заключении отмечу что результаты полученные в работе являются новыми и их следует опубликовать в печати.

ТДТУ Авиационный факультет  
Каф. «Амалий математика»

доц. Шодмонов Г.