ВЫЧИСЛЕНИЕ МИНИМУМОВ РАЗЛОЖИМЫХ ФОРМ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ МЕТОДАМИ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

Х.Х. Рузимурадов, М. Журакулов
Самаркандский государственный университет

Настоящая работа посвящена вычислению минимумов разложимых форм четвертой степени над полем рациональных чисел.

Наилучшие рациональные приближения p/q к числу α суть подходящие дроби p_k/q_k цепной дроби числа α. Клейн [1] предложил следующую геометрическую интерпретацию цепных дробей. Пусть на плоскости координат p,q проведены прямые $L_1 = \{p,q : p = \alpha q\}$ и $L_2 = \{p,q : q = 0\}$. Они образуют смежные углы $O_1 = \{p,q : p \geq \alpha q\}$ и $O_2 = \{p,q : p \leq \alpha q, q \geq 0\}$. Обозначим через K_i выпуклую оболочку целочисленных точек (отличных от (0,0)) p,q, попавших в O_i. Границы ∂K_i множества K_i суть выпуклые ломаные линии. Вершинам (p,q) этих ломаных отвечают подходящие дроби p/q цепной дроби числа α. Число целочисленных точек на ребре минус один равно неполному частному цепной дроби и т.д. Там же Клейн [1] предложил трехмерный аналог этой конструкции для изучения наилучших приближений. А именно, пусть в R^3 заданы три непересекающиеся в нуле плоскости $L_i = \{X : (l_i, X) = 0, i = 1,2,3\}$. Здесь $X, l \in R^3$ и $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение. Каждому набору $\Sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, где $\sigma_i = \pm 1$, соответствует свой октант $O_\Sigma = \{X : \sigma_i (l_i, X) \geq 0, i = 1,2,3\}$, ограниченный этими плоскостями. В каждом октанте Ω_Σ рассматривается выпуклая оболочка K_Σ всех целочисленных точек $X \in O_\Sigma, X \neq 0$. Ее граница ∂K_i является выпуклой двумерной многогранной поверхностью, состоящей из вершин ребер и граней. Ее вершины дают наилучшие рациональные приближения для линейных форм (l_i, X).

Рассмотрим теперь кубическую однородную форму $g(X)$, являющуюся произведением трех вещественных линейных форм:

$$g(X) = (l_1, X)(l_2, X)(l_3, X)$$

Пусть $\Delta = det(l_1 l_l l_3)$ и $\mu(g)$ - наименьшее значение величины $| g\Delta^1 |$ на целочисленных точках $X, X \neq 0$:

В работах Парусникова [2,3] для первых пяти форм Свиннертона-Дайера были вычислены их наименьшие значения и соответствующие этим формам некоторые вершины и автоморфизмы многогранников Клейна.

В настоящей работе рассматривается аналогичная задача в четырехмерном пространстве. Пусть $Q(v)$ вполне вещественное поле четвертой степени, где v один из корней многочлена $f(v)$. Рассмотрим модуль M с образующими v_i (корень $f(v)$) в поле $Q(v)$:

$$M = \{\sum_{j=1}^{4} z_j v_j, Z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in Z^4\} \ . \qquad (1)$$

Пусть $F(x)$ однородная форма четвертой степени соответствующая этому модулю

$$F(X) = (l_1, X)(l_2, X)(l_3, X)(l_4, X), \qquad (2)$$

где $l_i = (1, v_i, v_i^2, v_i^3)$ и $X \in Z^n$, (l_i, x) - есть скалярное произведение.

Пусть $\Delta = \det(l_1 l_2 l_3 l_4)$ и $\mu(F)$- наименьшее значение величины $| F\Delta^{-1} |$- в целочисленных точках $X, X \neq 0$:

$$\mu(F) = \frac{1}{|\Delta|} \min_{X \in Z^n \backslash 0} | F(X) |$$

В данной работе методами компьютерной алгебры изучаются значения $\mu(F)$ для разложимой формы $F(X)$ и найдены некоторые вершины и гиперграни соответствующего многогранника Клейна.

На примере многочлена $f := v^4 + v^3 - v^2 + v + 1 = 0$ построено вполне вещественное поле *Q(v)*. По корням вычисленным при помощи системы Maple:

$$v_1 := -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{13}}{4} + \frac{\sqrt{-2-2\sqrt{13}}}{4},\ v_2 := -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{13}}{4} + \frac{\sqrt{-2+2\sqrt{13}}}{4},$$

$$v_3 := -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{13}}{4} - \frac{\sqrt{-2+2\sqrt{13}}}{4}, \quad v_4 := -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{13}}{4} - \frac{\sqrt{-2-2\sqrt{13}}}{4},$$

составлены модули (1) этого поля и построена четырехмерная решетка этих модулей и соответствующая ей разложимая форма (2):

$$\begin{aligned} F(X) := {} & z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 + z_4^4 + 4z_1^2 z_2 z_3 - 5z_1^2 z_3 z_4 - 3z_1 z_2^2 z_3 + 4z_1 z_2 z_3^2 - 2z_1 z_3^2 z_4 + \\ & + 4z_2^2 z_3 z_4 - 2z_1 z_2^2 z_4 - 5z_1 z_2 z_4^2 - 3z_2 z_3^2 z_4 + 4z_2 z_3 z_4^2 - 11z_1 z_2 z_3 z_4 - z_1^2 z_2^2 + \\ & + z_1^2 z_3^2 + 11z_1^2 z_4^2 - z_2^3 z_3 - z_2^2 z_3^2 + 3z_2^3 z_4 + z_2^2 z_4^2 - z_1^3 z_2 + 3z_1^3 z_3 - 7z_1^3 z_4 - z_2^3 z_1 + \\ & + 3z_3^3 z_1 - z_3^3 z_2 - z_3^3 z_4 - 7z_4^3 z_1 + 3z_4^3 z_2 - z_4^3 z_3 - z_3^2 z_4^2 \end{aligned}$$

Найдены некоторые целочисленные точки (с положительными координатами) решетки, являющиеся вершинами многогранника Клейна:

$$\begin{array}{l} (1,1,2,1),\ (1,2,1,1),\ (1,5,6,2),\ (2,5,5,4),\ (2,6,5,1),\ (2,10,20,15), \\ (3,15,21,7),\ (4,5,5,2),\ (4,16,20,7),\ (7,20,16,4), (7,21,15,3), (15,20,10,2) \end{array} \qquad (3)$$

Получена следующая

Теорема. *Многогранник Клейна, соответствующий форме F(X) в интервале* $1 < x_i < 50$, *состоит из выпуклой оболочки множества точек (3). Последние точки (вершины) являются относительными минимумами решетки модуля (1). В этих точках соответствующая разложимая форма F(X) достигает своего минимума равного единице.*

Использованная литература

1. Klein, F.: Sur une representation geometrique du developpement en fraction continue ordinaire. *Nouv. Ann. Math (3)* **15** (1896) 321--331.
2. Parusnikov, V.I.: Klein polyhedra for complete decomposable forms. *Number theory. Dyophantine, Computational and Algebraic Aspects*. Berlin, New York (1998) 453--463.

3. В.И. Парусников. Четырехмерное обобщение цепных дробей. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2011.