МНОГОГРАННИК КЛЕЙНА ОДНОЙ РАЗЛОЖИМОЙ ФОРМЫ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ ИЕЕ МИНИМУМЫ

Рузимурадов Х.Х., Журакулов М.
Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан
rxx05@mail.ru

В данной работе методами компьютерной алгебры изучаются значения для разложимой формы $F(X)$ и найдены некоторые вершины и гиперграни соответствующего многогранника Клейна.

Наилучшие рациональные приближения p/q к числу α суть подходящие дроби p_k/q_k цепной дроби числа α. Клейн [1] предложил следующую геометрическую интерпретацию цепных дробей. Пусть на плоскости координат p,q проведены прямые $L_1 = \{p,q : p = \alpha q\}$ и $L_2 = \{p,q : q = 0\}$. Они образуют смежные углы $O_1 = \{p,q : p \ge \alpha q\}$ и $O_2 = \{p,q : p \le \alpha q, q \ge 0\}$. Обозначим через K_i выпуклую оболочку целочисленных точек (отличных от (0,0)) p,q, попавших в O_i. Границы ∂K_i множества K_i суть выпуклые ломаные линии. Вершинам (p,q) этих ломаных отвечают подходящие дроби p/q цепной дроби числа α. Число целочисленных точек на ребре минус один равно неполному частному цепной дроби и т.д. Там же Клейн [1] предложил трехмерный аналог этой конструкции для изучения наилучших приближений. А именно, пусть в R^3 заданы три непересекающиеся в нуле плоскости $L_i = \{X : (l_i, X) = 0, i = 1,2,3\}$. Здесь $X, l \in R^3$ и $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение. Каждому набору $\Sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, где $\sigma_i = \pm 1$, соответствует свой октант $O_\Sigma = \{X : \sigma_i (l_i, X) \ge 0, i = 1,2,3\}$, ограниченный этими плоскостями. В каждом октанте Ω_Σ рассматривается выпуклая оболочка K_Σ всех целочисленных точек $X \in O_\Sigma, X \ne 0$. Ее граница ∂K_i является выпуклой двумерной многогранной поверхностью, состоящей из вершин ребер и граней. Ее вершины дают наилучшие рациональные приближения для линейных форм (l_i, X).

Рассмотрим теперь кубическую однородную форму $g(X)$, являющуюся произведением трех вещественных линейных форм:

$$g(X) = (l_1, X)(l_2, X)(l_3, X)$$

Пусть $\Delta = det(l_1 l_l l_3)$ и $\mu(g)$- наименьшее значение величины $|g\Delta^1|$ на целочисленных точках $X, X \neq 0$:

В работах Парусникова [2,3] для первых пяти форм Свиннертона-Дайера были вычислены их наименьшие значения и соответствующие этим формам некоторые вершины и автоморфизмы многогранников Клейна.

Пусть $Q(v)$ вполне вещественное поле четвертой степени, где v один из корней многочлена $f(v)$. Рассмотрим модуль M с образующими v_i (корень $f(v)$) в поле $Q(v)$:

$$M = \{\sum_{j=1}^{4} z_j v_j, Z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in Z^4\} . \qquad (1)$$

Пусть $F(x)$ однородная форма четвертой степени соответствующая этому модулю

$$F(X) = (l_1, X)(l_2, X)(l_3, X)(l_4, X), \qquad (2)$$

где $l_i = (1, v_i, v_i^2, v_i^3)$ и $X \in Z^n$, (l_i, x) - есть скалярное произведение.

Пусть $\Delta = \det(l_1 l_2 l_3 l_4)$ и $\mu(F)$- наименьшее значение величины $|F\Delta^{-1}|$- в целочисленных точках $X, X \neq 0$:

$$\mu(F) = \frac{1}{|\Delta|} \min_{X \in Z^n \backslash 0} |F(X)|$$

В данной работе методами компьютерной алгебры изучаются значения $\mu(F)$ для разложимой формы $F(X)$ и найдены некоторые вершины и гиперграни соответствующего многогранника Клейна.

На примере многочлена $f := v^4 + v^3 - v^2 + v + 1 = 0$ построено вполне вещественное поле *Q(v)*. По корням вычисленным при помощи системы Maple:

$$v_1 := -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{13}}{4} + \frac{\sqrt{-2-2\sqrt{13}}}{4},\ v_2 := -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{13}}{4} + \frac{\sqrt{-2+2\sqrt{13}}}{4},$$

$$v_3 := -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{13}}{4} - \frac{\sqrt{-2+2\sqrt{13}}}{4},\quad v_4 := -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{13}}{4} - \frac{\sqrt{-2-2\sqrt{13}}}{4},$$

составлены модули (1) этого поля и построена четырехмерная решетка этих модулей и соответствующая ей разложимая форма (2):

$$\begin{aligned}F(X) &:= z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 + z_4^4 + 4z_1^2 z_2 z_3 - 5z_1^2 z_3 z_4 - 3z_1 z_2^2 z_3 + 4z_1 z_2 z_3^2 - 2z_1 z_3^2 z_4 + \\ &+ 4z_2^2 z_3 z_4 - 2z_1 z_2^2 z_4 - 5z_1 z_2 z_4^2 - 3z_2 z_3^2 z_4 + 4z_2 z_3 z_4^2 - 11z_1 z_2 z_3 z_4 - z_1^2 z_2^2 + \\ &+ z_1^2 z_3^2 + 11z_1^2 z_4^2 - z_2^3 z_3 - z_2^2 z_3^2 + 3z_2^3 z_4 + z_2^2 z_4^2 - z_1^3 z_2 + 3z_1^3 z_3 - 7z_1^3 z_4 - z_2^3 z_1 + \\ &+ 3z_3^3 z_1 - z_3^3 z_2 - z_3^3 z_4 - 7z_4^3 z_1 + 3z_4^3 z_2 - z_4^3 z_3 - z_3^2 z_4^2\end{aligned}$$

Найдены некоторые целочисленные точки (с положительными координатами) решетки, являющиеся вершинами многогранника Клейна:

$$\begin{aligned}&(1,1,2,1),\ (1,2,1,1),\ (1,5,6,2),\ (2,5,5,4),\ (2,6,5,1),\ (2,10,20,15),\\ &(3,15,21,7),\ (4,5,5,2),\ (4,16,20,7),\ (7,20,16,4),\ (7,21,15,3),\ (15,20,10,2),\\ &(17,62,61,8),\ (23,66,53,13),\ (25,68,50,11),\ (32,75,36,3),\ (45,62,25,89),\\ &(89,251,62,45)\end{aligned} \tag{3}$$

Получена следующая

Теорема. *Многогранник Клейна, соответствующий форме F(X) в интервале* $1 < x_i < 100$, *состоит из выпуклой оболочки множества точек (3). Последние точки (вершины) являются относительными минимумами решетки модуля (1). В этих точках соответствующая разложимая форма F(X) достигает своего минимума равного единице.*

Использованная литература

1. Klein, F.: Sur une representation geometrique du developpement en fraction continue ordinaire. *Nouv. Ann. Math (3)* **15** (1896) 321--331.
2. Parusnikov, V.I.: Klein polyhedra for complete decomposable forms. *Number theory. Dyophantine, Computational and Algebraic Aspects*. Berlin, New York

(1998) 453--463.

3. В.И. Парусников. Четырехмерное обобщение цепных дробей. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2011.