О ЧИСЛЕ И МЕСТОПОЛОЖЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДВУХЧАСТИЧНОГО ГАМИЛЬТОНИАНА НА РЕШЕТКЕ

Бозоров И. Н., Жуманиёзов Ш. Б.

Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан;
e-mail: islomnb@mail.ru

В настоящей статье приводятся выводы о числе и местоположении собственных значений двухчастичного гамильтониана на решетке.

Пусть $Z-$ одномерная целочисленная решетка, $Z^2 = Z \times Z-$ декартова степень Z и $\ell_2(Z^2)-$ гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций на Z^2, $\ell_2^{as}(Z^2) \subset \ell_2(Z^2)-$ подпространство антисимметричных функций.

В координатном представлении гамильтониан системы двух фермионов действует в гильбертовом пространстве $\ell_2^{as}(Z^2)$ по формуле:

$$\hat{h} = \hat{h}_0 - \hat{v},$$

где $\hat{h}_0$ и $\hat{v}$ действуют по правилам:

$$(\hat{h}_0\hat{\psi})(n_1,n_2) = \sum_{s\in Z}[\frac{1}{m_1}\hat{\varepsilon}(s)\hat{\psi}(n_1+s,n_2) + \frac{1}{m_2}\hat{\varepsilon}(s)\hat{\psi}(n_1,n_2+s)], \quad \hat{\varphi} \in \ell_2^{as}(Z^2)$$

$$(\hat{v}\hat{\psi})(n_1,n_2) = \hat{v}(n_1-n_2)(\hat{\psi})(n_1,n_2), \quad \hat{\varphi} \in \ell_2^{as}(Z^2).$$

Функции $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{v}$ определены на Z следующим образом:

$$\hat{\varepsilon}(s) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad s = 0, \\ -\frac{1}{2}, & \text{при} \quad s = \pm 2, \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \hat{v}(s) = \begin{cases} 2\pi\mu_0, & \text{при} \quad s = 0, \\ \pi\mu_l, & \text{при} \quad s = \pm l, l \in \{1,2,3,4\}, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В последних соотношениях $m_i > 0-$ масса i-й частицы, $i = 1,2$ и постоянные $\mu_l > 0$, $l \in \{1,2,3,4\}$.

Отметим, что рассматриваемый оператор $\hat{h}$ является ограниченным, самосопряженным в $\ell_2(Z^2)$.

Пусть $T = (-\pi, \pi]$, $L_2(T)-$ гильбертово пространство всех квадратично-интегрируемых функций, определенных на T, $L_2^o(T^1) \subset L_2(T^1)-$ подпространство нечетных функций.

После преобразования Фурье $F : \ell_2^{as}(Z^2) \to L_2^o(T^2)$ и выделения полного квазиимпульса $k \in T$ системы двух частиц, а также используя унитарный оператор $(Uf)(p) = f(p - \frac{\theta(k)}{2})$,

$\theta(k) = \arccos \dfrac{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\cos 2k}{\sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2}\cos 2k + \frac{1}{m_2^2}}}$ изучение спектральных свойств оператора $\hat{h}$ сводится к изучению семейства двухчастичных дискретных операторов Шредингера $h(k)$, $k \in T$, действующих в гильбертовом пространстве $L_2^o(T)$ по формуле

$$h(k) = h_0(k) - \mathbf{v},$$

где $h_0(k)-$ оператор умножения на функцию $\mathrm{E}_k(\cdot)$:

$$\mathrm{E}_k(p) = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - a(k)\cos 2p, \quad a(k) = \sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2}\cos 2k + \frac{1}{m_2^2}}$$

и $\mathbf{v}-$ интегральный оператор с ядром $v(p,s) = v(p-s) = \sum_{n=1}^{4}\mu_n \sin np \sin ns,$ т.е.

$$(\mathbf{v}f)(p) = \sum_{n=1}^{4}\int_T \mu_n \sin np \sin ns f(s)ds, \quad f \in L_2^o(T).$$

Отметим, что из теоремы Вейля о существенном спектре [1] следует, что существенный спектр $\sigma_{ess}(h(k))$ оператора $h(k)$ не меняется при компактном возмущении $\mathbf{v}$ и совпадает со спектром невозмущенного оператора $h_0(k)$. При этом $\sigma_{ess}(h(k))$ состоит из области значения функции $\mathrm{E}_k(\cdot)$, т. е.

$$\sigma_{ess}(h(k)) = \sigma(h_0(k)) = [m(k), M(k)],$$

где $\quad m(k) = \min_{p\in \mathrm{T}} \mathrm{E}_k(p) = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - a(k), \quad M(k) = \max_{p\in \mathrm{T}} \mathrm{E}_k(p) = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + a(k).$

Предположение 1. Предположим, что $m = m_1 = m_2$ и $k \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$.

Обозначим через $S_i^{(\alpha)}$, $\alpha \in \{1,2\}$, $i = 0,1,2$ следующие не пересекающиеся множества

$$S_0^{(\alpha)} = \left\{ (\mu_\alpha, \mu_{\alpha+2}) \in \mathrm{R}_+^2 : \mu_\alpha < \frac{(\alpha+2)a(k)}{2\alpha\pi}, \mu_{\alpha+2} \le \frac{a(k)}{2\pi} + \frac{(\frac{a(k)}{2\pi})^2}{\mu_\alpha - \frac{3a(k)}{(\alpha+1)\pi}} \right\},$$

$$S_2^{(\alpha)} = \left\{ (\mu_\alpha, \mu_{\alpha+2}) \in \mathrm{R}_+^2 : \mu_\alpha > \frac{(\alpha+2)a(k)}{2\alpha\pi}, \mu_{\alpha+2} > \frac{a(k)}{2\pi} + \frac{(\frac{a(k)}{2\pi})^2}{\mu_\alpha - \frac{3a(k)}{(\alpha+1)\pi}} \right\},$$

$$S_1^{(\alpha)} = \mathrm{R}_+^2 \setminus (S_0^{(\alpha)} \cup S_2^{(\alpha)}).$$

При этом $\mathrm{R}_+^2 = S_0^{(\alpha)} \cup S_1^{(\alpha)} \cup S_2^{(\alpha)}$.

Теорема. *I. Пусть не выполняется предположение 1. Тогда для каждого* $k \in T$, *если* $(\mu_1, \mu_3) \in S_i^{(1)}$, $(\mu_2, \mu_4) \in S_j^{(2)}$, $i, j \in \{0,1,2\}$, *то оператор* $h(k)$ *имеет ровно* $i + j$ *собственных значения, с учетом кратности, лежащих левее существенного спектра.*

II. Пусть выполняется предположение 1. Тогда оператор $h(k)$ *имеет ровно четыре собственных значения, с учетом кратности, лежащих левее существенного спектра.*

Работа поддержана грантом ЁФ4-КХ-0-18589 ЁФ4-17 МинВУЗ РУз.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.IV: Анализ операторов. М. Мир,1982.

2. S.N.Lakaev and I.N.Bozorov: The number of bound states of a one particle Hamiltonian on a three-demensional lattice // Theoretical and Mathematical Physics, 158 (3), (2009), 360-376.