О ЧИСЛЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДВУХЧАСТИЧНОГО ГАМИЛЬТОНИАНА НА РЕШЕТКЕ

И. Н. Бозоров, Ш. Б. Жуманиёзов

Самаркандский государственный университет

В настоящей статье приводятся выводы о числе собственных значений двухчастичного гамильтониана на решетке.

Пусть Z – множество целых чисел, $Z^2 = Z \times Z$ – декартова степень Z и $\ell_2(Z^2)$ – гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций, определенных на Z^2, $\ell_2^s(Z^2) \subset \ell_2(Z^2)$ – подпространство симметричных функций.

В координатном представлении гамильтониан системы двух бозонов действует в гильбертовом пространстве $\ell_2^s(Z^2)$ по формуле:

$$\hat{h} = \hat{h}_0 - \hat{v},$$

где $\hat{h}_0$ и $\hat{v}$ действуют по правилам:

$$(\hat{h}_0\hat{\psi})(n_1,n_2) = \sum_{s\in Z}\left[\frac{1}{m_1}\hat{\varepsilon}(s)\hat{\psi}(n_1+s,n_2) + \frac{1}{m_2}\hat{\varepsilon}(s)\hat{\psi}(n_1,n_2+s)\right], \quad \hat{\psi} \in \ell_2^s(Z^2),$$

$$(\hat{v}\hat{\psi})(n_1,n_2) = \hat{v}(n_1-n_2)(\hat{\psi})(n_1,n_2), \ \ \hat{\psi} \in \ell_2^s(Z^2).$$

Функции $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{v}$ определены на Z следующим образом:

$$\hat{\varepsilon}(s) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad s = 0, \\ -\dfrac{1}{2}, & \text{при} \quad s = \pm 2, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \hat{v}(s) = \begin{cases} 2\pi\mu_0, & \text{при} \quad s = 0, \\ \pi\mu_l, & \text{при} \quad s = \pm l, \quad l \in \{1,2,3\}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В последних соотношениях $m_i > 0$ – масса i-й частицы, $i = 1,2$ и постоянные $\mu_l > 0$, $l \in \{0,1,2,3\}$.

Отметим, что рассматриваемый оператор $\hat{h}$ является ограниченным, самосопряженным в $\ell_2^s(Z^2)$.

Пусть $T = (-\pi, \pi]$, $L_2(T)$ – гильбертово пространство всех квадратично-интегрируемых функций, определенных на T, $L_2^e(T) \subset L_2(T)$ – подпространство четных функций.

После преобразования Фурье $F:\ell_2^s(Z^2)\to L_2^e(T^2)$ и выделения полного квазиимпульса $k\in T$ системы двух частиц, а также используя унитарный оператор $(Uf)(p)=f(p-\frac{\theta(k)}{2}),$ $\theta(k)=\arccos\frac{\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\cos 2k}{\sqrt{\frac{1}{m_1^2}+\frac{2}{m_1m_2}\cos 2k+\frac{1}{m_2^2}}}$ изучение спектральных свойств оператора $\hat{h}$ сводится к изучению семейства двухчастичных дискретных операторов Шредингера $h(k),\ k\in T,$ действующих в гильбертовом пространстве $L_2^e(T^2)$ по формуле

$$h(k)=h_0(k)-\mathbf{v},$$

где $h_0(k)-$ оператор умножения на функцию $E_k(\cdot)$

$$E_k(p)=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}-a(k)\cos 2p,\quad a(k)=\sqrt{\frac{1}{m_1^2}+\frac{2}{m_1m_2}\cos 2k+\frac{1}{m_2^2}}$$

и $\mathbf{v}-$ интегральный оператор с ядром $v(p,s)=\sum_{n=0}^{3}\mu_n\cos np\cos ns,$ т.е.

$$(\mathbf{v}f)(p)=\sum_{n=0}^{3}\int_T\mu_n\cos np\cos nsf(s)ds,\quad f\in L_2(T).$$

Отметим, что из теоремы Вейля о существенном спектре [3] следует, что существенный спектр $\sigma_{ess}(h(k))$ оператора $h(k)$ не меняется при компактном возмущении $\mathbf{v}$ и совпадает со спектром невозмущенного оператора $h_0(k)$. При этом $\sigma_{ess}(h(k))$ состоит из области значения функции $\mathrm{E}_k(\cdot),$ т. е.

$$\sigma_{ess}(h(k))=\sigma(h_0(k))=[m(k),M(k)],$$

где $m(k)=\min_{p\in T}E_k(p)=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}-a(k),\quad M(k)=\max_{p\in \mathrm{T}}E_k(p)=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+a(k).$

Поскольку $\mathbf{v}\geq 0,$ то

$$\sup(h(k)f,f)\leq\sup(h_0(k)f,f)=M(k)(f,f),\qquad f\in L_2(T).$$

Поэтому оператор $h(k)$ не имеет собственного значения, лежащего правее существенного спектра, т.е.

$$\sigma(h(k)) \cap (M(k), \infty) = \varnothing.$$

Предположение 1. *Предположим, что* $m = m_1 = m_2$ *и* $k \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$.

Обозначим через $B_i^{(\gamma)}$, $i, \gamma \in \{1,2\}$ следующие не пересекающиеся множества

$$B_1^{(\gamma)} = \left\{ (\mu_{\gamma-1}, \mu_{\gamma+1}) \in R_+^2 : \mu_{\gamma-1} \le \frac{a(k)}{2\pi}, \quad \mu_{\gamma+1} \in R_+ \quad \text{или} \quad \mu_{\gamma-1} > \frac{a(k)}{2\pi}, \quad \mu_{\gamma+1} \le \frac{a(k)\mu_{\gamma-1}}{2\pi\mu_{\gamma-1} - a(k)} \right\},$$

$$B_2^{(\gamma)} = \left\{ (\mu_{\gamma-1}, \mu_{\gamma+1}) \in R_+^2 : \mu_{\gamma-1} > \frac{a(k)}{2\pi}, \quad \mu_{\gamma+1} > \frac{a(k)\mu_{\gamma-1}}{2\pi\mu_{\gamma-1} - a(k)} \right\}.$$

При этом $R_+^2 = B_1^{(\gamma)} \cup B_2^{(\gamma)}$.

Теорема. I. *Пусть не выполняется предположение 1. Тогда для каждого* $k \in T$, *если* $(\mu_0, \mu_2) \in B_i^{(1)}$, $(\mu_1, \mu_3) \in B_j^{(2)}$, $i, j \in \{1,2\}$, *то оператор* $h(k)$ *имеет ровно* $i + j$ *собственных значения, с учетом кратности, лежащих левее существенного спектра.*

II. *Пусть выполняется предположение 2.1. Тогда оператор* $h(k)$ *имеет ровно четыре собственных значения, с учетом кратности, лежащих левее существенного спектра.*

Литература

[1] М.Э.Муминов, А.М.Хуррамов, Спектральные свойства двухчастичного гамильтониана на решетке. Теор. Мат. Физика, 2013, Т. 177, N 3, стр. 480-493.

[2] С. Н. Лакаев, И. Н. Бозоров, О числе и местонахождении собственных значений одночастичного гамильтониана на одномерной решетке, Узбекский математический журнал. 2007. № 2. с. 64-74.

[3] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики. М.:

Мир.1982, **4**, Анализ операторов.