МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ФЕРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

По предметам «Вычислительные методы» студентки группы 09.407р
направления
«Прикладная математика и информатика»

Азимовой Хаётхона Кодиралиевной

на тему

«В-сферические функции и применение их для решения граничных задач»

Фергана – 2013

ПЛАН

ВВЕДЕНИЕ

«Я, часто размышляю над строками известного узбекского поэта Абдулы Авлони «Воспитание – это для нас вопрос жизни, смерти, возможности, катастрофы, счастья и крушения».

Эти слова великого просвещенца, если в начале прошлого века были насколько важными для нашей нации, то они не потеряли эту значимость и сегодня. Либо воспитание – это продукт мышления, и в тоже время оно определяет степень развитости мышления. Именно по этому без изменения структуры воспитания не возможно достичь наши цели, – которые мы поставили перед собой» [1].

В настоящее время в нашей стране реализуется национальная программа по подготовке кадров. Основной целью этой программы является подготовка конкурентоспособных, высококвалифицированных специалистов. И немаловажное место в этом процессе занимает развитие компьютерных технологий в нашей республике.

Как отмечал в своей книге «Узбекистан на пороге *XXI* века: угрозы безопасности, условия и гарантии прогресса» Президент Республики Узбекистан И.А. Каримов: «Успех деятельности предприятий, да и в целом государства, в силу ограниченности естественных, природных ресурсов, в значительной мере сегодня определяется тем, насколько широко внедряются достижения научно-технического прогресса, наукоемкие технологии, уровнем профессиональной подготовленности кадров».

Основополагающие принципы государственной политики в области информационно-коммуникационных технологий (ИКТ), определенные Президентом Исламом Каримовым, подразумевают их широкое внедрение во все сферы жизни общества с тем, чтобы в нашей стране велась интенсивная работа по интеграции в мировое информационное пространство.

[1] “Баркамол авлод орзуси” Тошкент – 1999 йил 3-бет.

Для реализации поставленных задач при хокимиятах областей и городов создаются государственные унитарные предприятия «Центры компьютеризации». На них возложены разработка и реализация мероприятий по развитию компьютеризации и информационно-коммуникационных технологий на местах в соответствии с современными международными тенденциями и стратегией социально-экономического развития регионов.

В настоящее время ученые республики ведут фундаментальные и прикладные исследования по многим направлениям современной науки и по математике в частности.

В данной квалификационной работе вводятся общие сведения о линейных уравнениях в частных производных, элементы функционального анализа, понятия Бесселевых функций и в основном понятия B-сферических функций, изучаются их свойства и, в частности, ортогональность. Дается разложение функции, заданной на полусфере единичного радиуса с центром в начале координат, в ряд по B-сферическим функциям. Также рассматриваются вопросы о применении теории B-сферических функций к решению задач Дирихле для B-гармонических функций в полушаре.

ГЛАВА 1. ПОНЯТИЕ О B-СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ

1.1. Оператор Δ_B в сферических координатах

Пусть E_3^+ – полупространство $z>0$ трехмерного евклидова пространства E_3 точек $t=(x,y,z)$.

Рассмотрим B-эллиптическое уравнение вида в E_3^+:

$$\Delta_B u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+B_z u=0, \tag{79}$$

где $B_z \equiv \frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{k}{z}\frac{\partial}{\partial z}$ – оператор Бесселя, $k>0$.

Рассмотрим сферические координаты (r,θ,φ), связанные с декартовыми координатами (x,y,z) по формулам

$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi, \\ y=r\sin\theta\sin\varphi, \\ z=r\cos\theta, \end{cases} \tag{80}$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, θ – угол между вектором t и осью z, а φ – угол между вектором t и осью x.

Вычисляем следующее:

$u(x,y,z)=u(r,\theta,\varphi)$;

$u_x=\alpha_{11}u_r+\alpha_{12}u_\theta+\alpha_{13}u_\varphi$;

$u_y=\alpha_{21}u_r+\alpha_{22}u_\theta+\alpha_{23}u_\varphi$;

$u_z=\alpha_{31}u_r+\alpha_{32}u_\theta+\alpha_{33}u_\varphi$;

$$\begin{gathered} u_{xx}=\alpha_{11}^2u_{rr}+\alpha_{11}\alpha_{12}u_{r\theta}+\alpha_{11}\alpha_{13}u_{r\varphi}+\alpha_{12}\alpha_{11}u_{\theta r}+\alpha_{12}^2u_{\theta\theta}+\alpha_{12}\alpha_{13}u_{\theta\varphi}+ \\ +\alpha_{13}\alpha_{11}u_{r\varphi}+\alpha_{13}\alpha_{12}u_{\varphi\theta}+\alpha_{13}^2u_{\varphi\varphi}+u_r r_{xx}+u_\theta\theta_{xx}+u_\varphi\varphi_{xx}; \end{gathered} \tag{а}$$

$$\begin{gathered} u_{yy}=\alpha_{21}^2u_{rr}+\alpha_{21}\alpha_{22}u_{r\theta}+\alpha_{21}\alpha_{23}u_{r\varphi}+\alpha_{22}\alpha_{21}u_{\theta r}+\alpha_{22}^2u_{\theta\theta}+\alpha_{22}\alpha_{23}u_{\theta\varphi}+ \\ +\alpha_{23}\alpha_{21}u_{r\varphi}+\alpha_{23}\alpha_{22}u_{\varphi\theta}+\alpha_{23}^2u_{\varphi\varphi}+u_r r_{yy}+u_\theta\theta_{yy}+u_\varphi\varphi_{yy}; \end{gathered} \tag{б}$$

$$u_{zz} = \alpha_{31}^2 u_{rr} + \alpha_{31}\alpha_{32}u_{r\theta} + \alpha_{31}\alpha_{33}u_{r\varphi} + \alpha_{32}\alpha_{31}u_{\theta r} + \alpha_{32}^2 u_{\theta\theta} + \alpha_{32}\alpha_{33}u_{\theta\varphi} + \\ + \alpha_{33}\alpha_{31}u_{r\varphi} + \alpha_{33}\alpha_{32}u_{\varphi\theta} + \alpha_{33}^2 u_{\varphi\varphi} + u_r r_{zz} + u_\theta \theta_{zz} + u_\varphi \varphi_{zz}; \quad \text{(в)}$$

$$\alpha_{11} = r_x,\ \alpha_{12} = \theta_x,\ \alpha_{13} = \varphi_x,\ \alpha_{21} = r_y,\ \alpha_{22} = \theta_y,\ \alpha_{23} = \varphi_y,\ \alpha_{31} = r_z.$$

Вычисляем коэффициенты α_{ij}:

$$\alpha_{11} = r_x = \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)_x = \frac{x}{r};$$

$$\alpha_{12} = \theta_x = \left(\arccos\frac{z}{r}\right)_x = \frac{xz}{r^2\sqrt{r^2 - z^2}};$$

$$\alpha_{13} = \varphi_x = \left(arctg\,\frac{y}{x}\right)_x = -\frac{y}{x^2 + y^2};$$

$$\alpha_{21} = r_y = \frac{y}{r};$$

$$\alpha_{22} = \theta_y = \left(\arccos\frac{z}{r}\right)_y = \frac{zy}{r^2\sqrt{r^2 - z^2}};$$

$$\alpha_{23} = \varphi_y = \left(arctg\,\frac{y}{x}\right)_y = \frac{x}{x^2 + y^2};$$

$$\alpha_{31} = r_z = \frac{z}{r};$$

$$\alpha_{32} = \theta_z = \left(\arccos\frac{z}{r}\right)_z = -\frac{r^2 - z^2}{r^2\sqrt{r^2 - z^2}};$$

$$\alpha_{33} = \varphi_z = \left(arctg\,\frac{y}{x}\right)_z = 0.$$

$$r_{xx} = \frac{r^2 - x^2}{r^3}; \qquad r_{yy} = \frac{r^2 - y^2}{r^3}; \qquad r_{zz} = \frac{r^2 - z^2}{r^3};$$

$$\theta_{xx} = \frac{zr^2\sqrt{x^2 + y^2} - 2x^2 z\sqrt{x^2 + y^2} - x^2 zr^2\left(x^2 + y^2\right)^{-1/2}}{r^4\left(x^2 + y^2\right)};$$

$$\theta_{yy} = \frac{zr^2\sqrt{x^2 + y^2} - 2y^2 z\sqrt{x^2 + y^2} - y^2 zr^2\left(x^2 + y^2\right)^{-1/2}}{r^4\left(x^2 + y^2\right)};$$

$$\theta_{zz} = \frac{2z\left(x^2+y^2\right)}{r^4\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$\varphi_{xx} = \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2};\ \varphi_{yy} = -\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2};\ \varphi_{zz} = 0.$$

$$u_z = \frac{z}{r}u_r - \frac{r^2-z^2}{r^2\sqrt{x^2+y^2}}u_\theta;$$

$$u_{xx} = \frac{x^2}{r^2}u_{rr} + \frac{2x^2z}{r^3\sqrt{r^2-z^2}}u_{r\theta} - \frac{2xy}{r\left(x^2+y^2\right)}u_{r\varphi} + \frac{x^2z^2}{r^4\left(x^2+y^2\right)}u_{\theta\theta} -$$

$$-\frac{2xyz}{r^2\left(x^2+y^2\right)\sqrt{r^2-z^2}}u_{\theta\varphi} + \frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)}u_{\varphi\varphi} + \frac{r^2-x^2}{r^3}u_r +$$

$$+\frac{zr^2\sqrt{x^2+y^2} - 2x^2z\sqrt{x^2+y^2} - x^2zr^2\left(x^2+y^2\right)^{-1/2}}{r^4\left(x^2+y^2\right)}u_\theta + \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}u_\varphi;$$

$$u_{yy} = \frac{y^2}{r^2}u_{rr} + \frac{2y^2z}{r^3\sqrt{r^2-z^2}}u_{r\theta} + \frac{2xy}{r\left(x^2+y^2\right)}u_{r\varphi} + \frac{y^2z^2}{r^4\left(r^2-z^2\right)}u_{\theta\theta} +$$

$$+\frac{2xyz}{r^2\left(x^2+y^2\right)\sqrt{r^2-z^2}}u_{\theta\varphi} + \frac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)}u_{\varphi\varphi} + \frac{r^2-y^2}{r^3}u_r +$$

$$+\frac{zr^2\sqrt{x^2+y^2} - 2y^2z\sqrt{x^2+y^2} - y^2zr^2\left(x^2+y^2\right)^{-1/2}}{r^4\left(x^2+y^2\right)}u_\theta - \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}u_\varphi;$$

$$u_{zz} = \frac{z^2}{r^2}u_{rr} + \frac{2z^2\left(x^2+y^2\right)}{r^3\sqrt{x^2+y^2}}u_{r\theta} + \frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{r^4\left(x^2+y^2\right)}u_{\theta\theta} + \frac{r^2-z^2}{r^3}u_r + \frac{2z\left(x^2+y^2\right)}{r^4\sqrt{x^2+y^2}}u_\theta;$$

Поставляя последнее выражение в (а)-(в) и используя формул (80) а затем поставляя полученного выражения в (79) имеем

$$u_{rr}+\frac{k+2}{r}u_r+\frac{1}{r^2}\left[u_{\theta\theta}-ktg\theta u_\theta+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}u_\theta+\frac{1}{\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi}\right]=$$
$$=u_{rr}+\frac{k+2}{r}u_r+\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\left(\sin\theta u_\theta\right)_\theta-ktg\theta u_\theta+\frac{1}{\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi}\right]= \tag{81}$$
$$=u_{rr}+\frac{k+2}{r}u_r+\frac{1}{r^2}\Delta_{B\alpha}u=0,$$

где $\Delta_{B\alpha}$ – составляющая оператора Δ_B по угловым координатам, $\alpha=(\theta,\varphi)$.

Оператор $\Delta_{B\alpha}$ – самосопряженный.

Доказательство. Доказательство этого утверждения нетрудно получить из следующей формулы Грина:

$$\iiint\limits_{D^+}\left(v\Delta_B u-u\Delta_B v\right)x_3^k dx=\iint\limits_{\Gamma^+}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)x_3^k d\Gamma^+, \tag{82}$$

где D^+ – область в E_3^+, ограниченная частью Γ_0 плоскости $x_3=0$ и поверхностью Γ^+, n – внешняя нормаль к границе Γ^+. Применяя к функциям $\psi_1(\theta,\varphi)=\psi_1\left(\frac{x}{|x|}\right)$ и $\psi_2(\theta,\varphi)=\psi_2\left(\frac{x}{|x|}\right)$, заданным в полушаровом слое, $Q_{a,b}^+=\left\{x\in E_3^+ : a\le r\le b\right\}$, формулу Грина (37), получим

$$\iiint\limits_{Q_{a,b}^+}\left(\psi_1\Delta_B\psi_2-\psi_2\Delta_B\psi_1\right)x_3^k dx=$$

$$=\iint\limits_{S_b^+}\left(\psi_1\frac{\partial\psi_2}{\partial r}-\psi_2\frac{\partial\psi_1}{\partial r}\right)x_3^k dS_b^+-\iint\limits_{S_a^+}\left(\psi_1\frac{\partial\psi_2}{\partial r}-\psi_2\frac{\partial\psi_1}{\partial r}\right)x_3^k dS_a^+, \tag{83}$$

где $S_R^+=\left\{x\in E_3^+ : |x|=R\right\}$, поскольку $\frac{\partial\psi_j}{\partial r}=0,\ \ j=1,2.$

Пользуясь тем, что $\Delta_B\psi_j=\frac{1}{r^2}\Delta_{B\alpha}\psi_j$, и отбрасывая в интеграле множитель, зависящий только от r, получим из (83) формулу

$$\iint\limits_{S_1^+}\left(\psi_1\Delta_{B\alpha}\psi_2-\psi_2\Delta_{B\alpha}\psi_1\right)\theta^k d\theta d\varphi=0.$$

Отсюда следует самосопряженность оператора $\Delta_{B\alpha}$.

1.2. Понятие о В-сферических функциях

В-сферические функции тесно связаны с В-гармоническими функциями, то есть с четными по x_3 регулярными решениями уравнения (34).

Однородный многочлен $P(x)$, $x \in E_3^+ = \{x \in E_3,\ x_3 > 0\}$, четный по x_3 и удовлетворяющий уравнению

$$\Delta_B P(x) = 0 \tag{84}$$

называется В-шаровым многочленом. В-шаровые многочлены степени n образуют подпространство H_{mk} линейного пространства всех четных по x_3, однородных многочленов степени n. Размерность подпространства H_{mk} обозначим через $\sigma(m)$.

Известно, что имеет место

Теорема 1. Любой четный по x_3 однородный многочлен $P_m(x)$ степени m может быть представлен, и притом единственным образом, в виде

$$P_m(x) = \sum_{i=0}^{[m/2]} \left(\frac{|x|}{2}\right)^{2i} P_{m-2i}^k(x). \tag{85}$$

Из представления (84) следует, что $\sigma(m) = m + 1$.

Определение. В-сферической функцией порядка n называется В-шаровой многочлен степени n, рассматриваемый на единичной полусфере S_1^+.

Отсюда следует, что равенство

$$Y_n^k(s) = P_n^k\left(\frac{x}{|x|}\right) = \frac{1}{|x|^n} P_n^k(x),\ s = \frac{x}{|x|},$$

устанавливает взаимнооднозначное соответствие между В-сферическими функциями $Y_n^k(s),\ s \in S_1^+$, порядка n и В-шаровыми многочленами $P_n^k(x),\ x \in E_3^+$, степени n.

ГЛАВА 2. В-СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ПРИМЕНЕНИЕ ИХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ

2.1. Дифференциальное уравнение для В-сферических функций

Рассмотрим уравнение (0.1) в сферических координатах

$$u_{rr}+\frac{k+2}{r}u_r+\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\left(\sin\theta u_\theta\right)_\theta-k tg\theta u_\theta+\frac{1}{\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi}\right]=0. \qquad (86)$$

Ищем решение этого уравнения в виде

$$u\left(r,\theta,\varphi\right)=r^n Y_n^k\left(\theta,\varphi\right). \qquad (87)$$

Подставляя функцию (87) в уравнение (86), получим

$$r^n\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_n^k}{\partial\theta}\right)-k tg\theta\frac{\partial Y_n^k}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_n^k}{\partial\varphi^2}\right]+$$
$$+n\left(n+k+1\right)r^n Y_n^k=0.$$

Сокращая на r^n, имеем

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_n^k}{\partial\theta}\right)-k tg\theta\frac{\partial Y_n^k}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_n^k}{\partial\varphi^2}+$$
$$+n\left(n+k+1\right)Y_n^k=0. \qquad (88)$$

Это уравнение есть дифференциальное уравнение для В-сферических функций. Таким образом, В-сферические функции $Y_n^k\left(\theta,\varphi\right)$ являются собственными функциями дифференциального уравнения вида

$$\Delta_{B\alpha}y+\lambda y=0, \qquad (89)$$

где

$$\Delta_{B\alpha}=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)-k tg\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},$$

$$\alpha=\left(\theta,\varphi\right),\ \lambda=n\left(n+k+1\right).$$

Через $L_{2,k}\left(S_1^+\right)$ обозначим гильбертово пространство функций, заданных на полусфере S_1^+, четных по θ, со скалярным произведением

$$(u,v)=\int\limits_{S_1^+} u(\theta,\varphi)v(\theta,\varphi)\theta^k d\theta d\varphi .$$

В-сферические функции Y_n^k и Y_m^k различных порядков ортогональны в $L_{2,k}\left(S_1^+\right)$,

$$\left(Y_n^k,Y_m^k\right)=\int\limits_{S_1^+} Y_n(s)Y_m(s)s_3 ds=0,\ n\neq m. \tag{90}$$

Действительно, применяя формулу Грина для полушара Q_1^+ к В-гармоническим полиномам

$$P_n^k(x)=|x|^n Y_n^k\left(\frac{x}{|x|}\right),\quad P_m^k(x)=|x|^m Y_m^k\left(\frac{x}{|x|}\right) \tag{91}$$

получаем

$$0=\int\limits_{S_1^+}\left[|x|^m Y_m^k\frac{\partial\left(|x|^n Y_n^k\right)}{\partial n}-|x|^n Y_n^k\frac{\partial\left(r^m Y_m^k\right)}{\partial n}\right]s_3^k d\mathrm{S}=$$

$$=\int\limits_{S_1^+}\left[Y_m^k\frac{\partial\left(r^n Y_n^k\right)}{\partial r}-Y_n^k\frac{\partial\left(r^m Y_m^k\right)}{\partial r}\right]s_3^k d\mathrm{S}=$$

$$=(\mathrm{n}\text{-}\mathrm{m})\int\limits_{S_1^+} Y_n^k(s)Y_m^k(s)s_3^k ds$$

что и требовалось установить.

2.2. Разложение функции, заданной на по-лусфере единичного радиуса с центром в нача-ле координат, в ряд Фурье по В-сферическим функциям

Среди В-сферических функций данного порядка n существует $\sigma(n)$ линейно независимых, которые можно считать ортонормальными в $L_{2,k}\left(S_1^+\right)$. Тем самым в $L_{2,k}\left(S_1^+\right)$ имеем ортонормированную систему В-сферических функций

$$\left\{Y_{n,m}^{k}(\theta,\varphi)\right\},\ n=0,1,2,...;$$

$$m=1,2,...,\sigma(n). \tag{92}$$

Теорема 1. Система (92) B-сферических функций образуют полную ортонормированную систему в $L_{2,k}\left(S_1^+\right)$.

Доказательство. Множество всех линейных комбинаций функций (92) плотно в $L_{2,k}\left(S_1^+\right)$. В самом деле, любую функцию $\psi(\theta,\varphi)$, непрерывную на единичной полусфере S_1^+, можно приблизить сколь угодно точно с помощью многочлена от x достаточно большой степени n. Согласно формуле (86) значения такого многочлена на полусфере S_1^+ представляют собой линейную комбинацию B-сферических функций. Из возможности равномерного приближения любой непрерывной функции линейными комбинациями B-сферических функций следует возможность приближения ее в метрике $L_{2,k}\left(S_1^+\right)$.

Поскольку любой элемент из $L_{2,k}\left(S_1^+\right)$ может быть приближен в метрике $L_{2,k}\left(S_1^+\right)$ непрерывными функциями, то линейная оболочка B-сферических функций плотно в $L_{2,k}\left(S_1^+\right)$.

Отсюда следует полнота системы B-сферических функций и любая функция $\psi(\theta,\varphi)\in L_{2,k}\left(S_1^+\right)$ может быть разложена в ряд Фурье по B-сферическим функциям, сходящийся в $L_{2,k}\left(S_1^+\right)$ к $\psi(\theta,\varphi)$.

$$\psi(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\sigma(n)}a_{n,j}Y_{n,j}^{k}(\theta,\varphi), \tag{93}$$

где

$$a_{n,j}=\iint\limits_{S_1^+}\psi(\theta,\varphi)Y_{n,j}^{k}(\theta,\varphi)\theta^{k}d\theta d\varphi. \tag{94}$$

Так как в разложении (93) внутренняя сумма также является В-сферической функции порядка $n,\ n=0,1,2,...,$ то обозначая ее через $Y_n^k(\theta,\varphi)$, разложение (93) запишем в виде

$$\psi(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}Y_n^k(\theta,\varphi). \tag{95}$$

2.3. Задача Дирихле

Постановка внутренней задачи Дирихле. Требуется найти четную по θ функцию $u(r,\theta,\varphi)$, удовлетворяющую условиям

$$u\in C^2\left(Q_R^+\right)\cap C\left(\bar{Q}_R^+\right); \tag{96}$$

$$\Delta_B u=u_{rr}+\frac{k+2}{r}u_r+\frac{1}{r^2}\Delta_{B\alpha}u=0,\quad (r,\theta,\varphi)\in Q_R^+; \tag{97}$$

$$u\big|_{r=R}=f(\theta,\varphi). \tag{98}$$

Предполагается, что функция $f(\theta,\varphi)$ разлагается в ряд по В-сферическим функциям

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}Y_n^k(\theta,\varphi). \tag{99}$$

Единственность решения задачи Дирихле (96)-(98) следует из принципа максимума для В-гармонических функций.

Решение внутренней задачи Дирихле методом разделения переменных. Решение задачи (96)-(98) ищем в виде

$$u=T(r)Y(\theta,\varphi), \tag{100}$$

где $T(r)$ и $Y(\theta,\varphi)$ – пока неопределенные функции. Их найдем из требования, чтобы функция (100) удовлетворяла уравнению (97).

Подставляя ее в уравнение (97), получим

$$\left(T''+\frac{k+2}{r}T'\right)Y+\frac{1}{r^2}T\Delta_{B\alpha}Y=0.$$

Умножая это уравнение на $\frac{r^2}{TY}$, имеем

$$\frac{r^2T'' + (k+2)rT'}{T} + \frac{\Delta_{B\alpha}Y}{Y} = 0.$$

Откуда

$$\frac{r^2T'' + (k+2)rT'}{T} = -\frac{\Delta_{B\alpha}Y}{Y}.$$

Левая часть этого равенства зависит только от r, правая часть – от θ и φ. Так как эти переменные независимые, то такое равенство возможно только тогда, когда обе части равны одной и той же постоянной. Эту постоянную обозначим через λ.

В результате имеем

$$\frac{r^2T'' + (k+2)rT'}{T} = -\frac{\Delta_{B\alpha}Y}{Y} = \lambda,$$

откуда

$$\Delta_{B\alpha}Y + \lambda Y = 0, \tag{101}$$

$$r^2T'' + (k+2)rT' - \lambda T = 0. \tag{102}$$

В силу вышеизложенного при $\lambda = n(n+k+1)$ уравнение (101) имеет ненулевые решения – В-сферические функции $Y_n^k(\theta,\varphi)$ порядка n.

Найдем частные решения уравнения (102) при $\lambda = n(n+k+1)$, т.е. уравнения

$$r^2T'' + (k+2)rT' - n(n+k+1)T = 0. \tag{103}$$

Это есть уравнение Эйлера. Ищем решение этого уравнения в виде

$$T = r^{\mu}. \tag{104}$$

Здесь μ – неопределенная постоянная. Найдем ее из требования, что функция (104) удовлетворяет уравнению (103). Подставив (104) в уравнение (103) и сократив на r^{μ}, получим

$$\mu^2 + (k+1)\mu - n(n+k+1) = 0.$$

Решениями этого уравнения являются числа: $\mu_1 = n,\ \mu_2 = -(n+k+1)$. Тогда частными решениями уравнения (103) являются функции:

$$r^n,\ r^{-(n+k+1)}. \tag{105}$$

Таким образом, частные решения уравнения (97) имеют вид

$$\overline{u}_n = r^n Y_n^k(\theta,\varphi),\quad \overline{u}_n = \frac{Y_n^k(\theta,\varphi)}{r^{n+k+1}}.$$

Частными решениями уравнения (97) также являются функции:

$$u_n = \frac{1}{R^n} r^n Y_n^k(\theta,\varphi) = \left(\frac{r}{R}\right)^n Y_n^k(\theta,\varphi); \tag{106}$$

$$u_n = R^{n+k+1}\frac{Y_n^k(\theta,\varphi)}{r^{n+k+1}} = \left(\frac{R}{r}\right)^{n+k+1} Y_n^k(\theta,\varphi); \tag{107}$$

Решение внутренней задачи Дирихле (96)-(98) ищем в виде

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n Y_n^k(\theta,\varphi). \tag{108}$$

Нетрудно видеть, что функция u, определяемая рядом (108) удовлетворяет всем условиям задачи (96)-(98) и, следовательно, является решением задачи Дирихле.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой дипломной работе приведены лишь немногие примеры того, как В-сферических функции позволяют решить важные задачи математической физики. Например, задача Дирихле на полусфере. Приведены нахождения периодических решений линейных дифференциальных уравнений с помощью методом Фурье. На небольшом количестве страниц изложен материал, содержащий основные факты теории функционального анализа, Бесселевы функции и понятие о В-сферических функциях.

Работа начинается с представления функции в виде тригонометрического ряда, который и является при подставлении в него соответствующих коэффициентов (коэффициентов Фурье) рядом Фурье. Далее рассматриваются некоторые признаки сходимости рядов Фурье, вывод коэффициентов Фурье и их оценка. Представлена комплексная форма рядов Фурье. Рассмотрены примеры применений преобразований Фурье и метода Фурье (метода разделения переменных).

ЛИТЕРАТУРА

1. Каримов И.А. «Модернизация страны и построение сильного гражданского общества наш главный «приоритет». Доклад на совместном заседании Законодательной палаты и Сената Олий Мажлиса Республики Узбекистан. «Правда, Востока» 28 января 2010 г.
2. Каримов И.А. Высокая духовность – непобедимая сила. Ташкент 2008 г.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.I., М.: Наука- 1965, 295 с.
4. Галимова А.Р. B-сферические функции и применение их для решения граничных задач. ВЕСТНИК ТГГПУ. 2008. №4(15).
5. Киприянов И.А., Кононенко В.И. Фундаментальные решения B-эллиптических уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1967. – Т.3. – №1. – С.114-129.
6. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. Издательство «Наука» главная редакция физико-математической литературы. москва 1973.
7. Ляхов Л.Н. Весовые сферические функции и син-гулярные псевдодифференциальные операторы // Дифференциальные уравнения. – Минск. – 1985. – Т.XXI. – №6. – С.1020-1032.
8. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001.
9. Самко С. К., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и тех., 1987.
10. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
11. Шилов Г.Е. «Математический анализ функции одного переменного», Москва, „Наука”, 1970 г.