

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ
ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

Қўлёзма ҳуқуқида

УДК519. 21

Ботирова Дилнозахон Аҳмаджоновна

“Эҳтимоллар назариясида қолдиқ ҳаднинг баҳоси”

5A130102-Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика

магистр

академик даражасини олиш учун ёзилган

ДИССЕРТАЦИЯ

Илмий раҳбар: Физика-математика

фанлари номзоди, доцент И.Неъматов

ФАРҒОНА-2013

МУНДАРИЖА:

Кириш.....	3
I боб.	5
1.1. 2013- Обод турмуш йили.....	5
1.2. Эҳтимоллар назариясининг асосий тушунчалари.....	10
I боб бўйича хулоса.....	16
II боб. Эҳтимоллар назариясида қолдиқ ҳаднинг баҳоси.....	17
2.1. Қолдиқ ҳаднинг баҳосини аниқлашдаги ўзбек математик олимларнинг қўшган хиссалари.....	17
2.2. Элементар ва олий математикада қолдиқ ҳаднинг баҳоси.....	21
II боб бўйича хулоса.....	23
III боб. Тасодифий сондаги тасодифий қўшилувчилар учун лимит теоремалар.....	24
3.1. Локал ва интеграл лимит теоремаларда қолдиқ ҳаднинг баҳоси.....	24
3.2. Берри - Эссен тенгсизлиги ва унинг татбиқлари.....	45
3.3. Б. Розен теоремасининг қолдиқ ҳади баҳоси ҳақида.....	60
III боб бўйича хулоса.....	64
Хулоса.....	65
Тавсия этиладиган манбаалар ва адабиётлар.....	67

Кириш

Давлатимиз томонидан фуқароларнинг билим олиш ҳуқуқларини рўёбга чиқариш мақсадида етарлича шароитлар яратилган. Хусусан, давлат бюджетидан каттагина маблағларни таълим соҳасини ривожлантириши учун ажратилаётганлиги орқали соҳанинг моддий-техник базаси мустаҳкамланмоқда. Замонавий илмий-педагогик ўқитиш услублари таълимни сифат жиҳатдан бойитмоқда.

Юртбошимизнинг “Юксак маънавият – енгилмас куч” асарларида кўрсатиб ўтилгандек, биз учун энг катта, энг муҳим, энг асосий ижтимоий ҳимоя бу мустақиллик эканини англаймиз. Республикамиз Президенти “Таълим Ўзбекистон халқи маънавиятига яратувчанлик фаоллигини бахш этади”. “Ўсиб келаётган авлоднинг барча энг яхши имкониятлари унда намоён бўлади, касбкори, маҳорати узлуксиз такомиллашади, катта авлоднинг тажрибаси англаб олинади ва ёш авлодга ўтади”,- деган эди.

Бугунги кунда “Таълим тўғрисидаги қонун”, “Кадрлар тайёрлаш миллий дастури” ҳам мустақиллик туфайли қабул қилиниб юзага чиқмоқда. “Таълим тўғрисидаги қонун”, “Кадрлаш тайёрлаш миллий дастури” таълим соҳасида амалга ошириладиган ишларнинг мақсад, вазифалари ва йўналишларини белгилаб берди. Шу маънода таълим соҳасида янгиликлар ва ўзгаришлар ижтимоий тараққиётнинг омили саналади.

Мавзунинг долзарблиги: Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикада локал лимит теоремалар, интеграл лимитик теоремалар, бир хил тақсимланган ва ҳар хил тақсимланган тасодифий миқдорлар учун лимит теоремалар, бу теоремаларни қолдиқ ҳадларини баҳолашлар, А.Марков занжирлари учун лимит теоремалар ва бошқа бир неча турдош лимит теоремалар ўрганилган.

Тадқиқот объекти. Эҳтимоллар назариясида қолдиқ ҳаднинг баҳоси ҳамда қолдиқ ҳадни аниқлаш.

Тадқиқот предмети. Эҳтимоллар назариясида қолдиқ ҳаднинг баҳоси ҳар хил структураларда ўрганиб чиқилган.

Тадқиқот мақсади. Бир хил тақсимланган, ўзаро боғлиқ бўлмаган $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ тасодифий миқдордан тузилган тасодифий индексли $S_v = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_v$ йиғинди учун $v(\lambda) \quad (\lambda \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$ бир лимит теоремани ўрганишдир.

Тадқиқотнинг илмий ва амалий аҳамияти. Қолдиқ ҳаднинг баҳоси иккита қўшилувчидан иборат эканлиги, биринчи қўшилувчи ҳад асосий тасодифий миқдорнинг характеристикаси, иккинчи қўшилувчи ҳар хил тақсимланган тасодифий индекснинг математик кутулмаси ва дисперсиясига боғлиқ эканлиги кўрсатилган. Тасодифий қўшилувчилар ҳар хил тақсимланган ҳолдаги натижалардан, хусусий ҳол сифатида бир хил тақсимланган ҳолдаги маълумотлар келиб чиқади, келтирилган мисоллардан ҳам бир хил тақсимланган ҳолдаги натижалар олинган.

Тадқиқот вазифаси. Тасодифий сондаги тасодифий қўшилувчилар учун лимит теоремалар бир хил тақсимланган тасодифий миқдорлар учун берилган. Бу тасодифий миқдорлар ҳар хил ҳолатга ўтказилиб, теоремалар исботлаш, улардан олинган x ва t ўзгарувчига боғлиқ бўлган баҳоларни аниқлаш.

Аппробация. Аниқланган натижалар кафедраги методик семинарда, университетда бўлган илмий ва методик семинарда, илмий анжуманларда маъруза қилинган.

Чоп этишга берилган мақолалар.

1. Неъматов И., Ботирова Д. Эҳтимоллар назариясида қолдиқ ҳаднинг баҳоси ҳақида. ФарПИ, Илмий-техника журнали. 2013. № 1.

2. Д.Ботирова, И.Неъматов Тасодифий қўшилувчилар учун L_p фазодаги баъзи бир баҳолар ҳақида. ФарДУ.Илмий хабарлар, 2012. № 4

Ишнинг ҳажми ва структураси. Магистирлик диссертатсияси кириш қисми, уч боб, биргаликда 7 параграфдан, хулоса ва фойдаланилган адабиётларни ташкил этади.

Ишнинг мазмуни. Ушбу магистрлик диссертацияда эҳтимоллар назариясининг лимит теоремалари ва лимит теоремаларининг қолдиқ ҳадини ўрганилган. Маълумки, тасодифий миқдорлар йиғиндисидан тузилган тақсимот функцияни $n \rightarrow \infty$ да Нормал қонунга интилишини ўрганиш муҳим аҳамиятга эга ва буни марказий лимит теорема деб ҳам юритилади. Тақсимот функция билан нормал қонун ўртасидаги фарқни-қолдиқни ўрганиш, бу ерда асосий масала сифатида қаралган.

I боб. Эҳтимоллар назариясининг асосий тушунчалари

1.1 Обод турмуш йили

“Обод турмуш йили“ Давлат дастурида белгиланган вазифаларнинг бажарилиши давлатимиз ва жамиятимизнинг ижтимоий ва иқтисодий, маданий ҳамда маънавий ривожланишида янада юқори кўрсаткичларга эришишда ёрдам беради.

Президентимиз Ислом Каримов томонидан демократик ҳукукий давлат барпо этиш йўлида амалга оширилаётган ишлар, социал-иқтисодий ва ижтимоий-сиёсий соҳаларда юрутилган сиёсатни қўллаб қувватлайди. Мамлакатимиз фуқароларининг ватанпарварлик даражаси, ўз давлати ишларига дахлдорлик туйғусининг юқорилиги ҳам буни тасдиқлайди. Аксарият фуқароларнинг ўз мамлакати тақдири ва унинг муаммоларини ҳал этишга маънавий жиҳатдан маъсул эканлигига ишонч комил. Мамлакатимизда муносиб ва фаровон ҳаётни таъминлашга қаратилган туб ўзгаришларни амалга оширишга ўз хиссасини қўшишда фуқаролик маъсулиятини янада кучайтириш зарур, деб ҳисоблайдиганлар кўпаймоқда.

Ўзбекистон фуқаролари учун ўтган йиллардаги каби оиладаги анъанавий муносабатларга содиқлик муҳим жиҳат ҳисобланади. Инсон бахти, саломатлиги, меҳнатдан қаноат ҳосил қилиши, жамиятга ўзининг керакли ва фойда келтиришини ҳис қилиши тўғрисидаги тасаввурлар янада кенгаяди.

Ватан оиладан бошланади. Оила тинч ва ободлиги ватанни ривож топишига, юксалишига жуда катта хисса қўшади.

Бугун бизнинг ватанимиз Ўзбекистон нима учун тез сураатларда ривожланмоқда деган ҳақли савол туғилади? Бунинг боиси президентимиз томонидан оилаларга қаратилган эътибор, бу борада амалга оширилаётган қатор тадбир ва ислохотларнинг инсон унинг фаровон ҳаётига хизмат қилаётганидир.

Мухтарам президентимиз томонидан Янги – 2013 йилнинг “Обод турмуш йили” деб эълон қилингани мана шундай эътиборнинг бир кўринишидир. Обод ҳаёт қуриш истаги инсониятнинг азал - азалдан, қалбан, ақлан хоҳиш истагига айланган. Аммо, обод турмушни қуриш ўз-ўзидан бўлмайди. Бунинг ортида меҳнат ётади.

Бугунги кунда энг асосий вазифа – халқимиз турмуш даражасини янада оширишга қаратилмоқда. Президентимиз Ислом Каримов фармонига биноан, Фарғона вилоятини ободлаштириш, замонавий иншоотлар қуриш, йўлларни кенгайтириш, аҳолини замонавий уй-жой билан таъминлашни янада яхшилаш турмуш даражасини оширишда муҳим аҳамиятга эга эканлигини барча қалбан хис этиб турибди.

Маънавий юксаклик, фарзандларга тўғри тарбия бериш, таълим олишга иштиёқ туғдириш, эзгу, орзу ва ниятлар қилишга ўргатиш обод турмуш гаровидир.

Оилани фаровон ҳаётга олиб чиқадиган, ёшларни бахтиёр қиладиган, бутун умр давомида маърифат асосида яшашни таъминлайдиган самарали йўл уларга илм бериш, истеъдодни юзага чиқарадиган таълим тизимни яратишдир. Шунинг учун ҳам Ўзбекистон бу соҳани энг устувор йўналишлардан бири деб эълон қилди. Шунинг учун ҳам ҳар қанча қийинчиликларга қарамай бу соҳага катта маблағ сарфланмоқда.

Аслида ҳар қандай ижтимоий муҳофаза инсоннинг ҳуқуқий ҳимоя қилинадиган жамият қарор топгандагина тўлиқ амалга ошади. Шу маънода юртбошимизнинг мустақиллик нима деган саволга жавоб бериб, “Мустақиллик – бу ҳуқуқдир” деган сўзларини эслар эканмиз, биз учун энг катта, энг муҳим, энг асосий ижтимоий ҳимоя бу мустақиллик эканини ҳам англаймиз. Бу маънода Президентимизнинг “Юксак маънавият – енгилмас куч” асарида ҳам кенг ёритиб берилган [1]. Ўзбекистон Конституцияси “Таълим тўғрисида” ги қонун кадрлар тайёрлаш миллий дастури ҳам

мустақиллик туфайли қабул қилиниб, юзага чиқмоқда. Ҳар биримиз илмимиз, меҳнатимиз, заковатимиз, фидойилигимиз билан мустақилликни қанчалик кўп тараққий эттирсак, ҳаётимиз шунчалик фаравон бўлади. Мустақилликни асраш, Ўзбекистонни ривожлантириш, керак бўлса, ҳимоя қилиш, бу ўзлигимизни келажагимизни ҳимоя қилишдир. Мана шундай онг, мана шундай тафаккур фақат, таълим-тарбия орқали шаклланади.

Тўққизинчи – ўн бешинчи асрларда маърифатли дунё Бухорийлар, Фарғонийлар, Хоразмийлар, Берунийлар, Ибн Синолар, Улуғбекларни қанчалик иззат икром қилган бўлса, йигирма биринчи асрда биз халқимизни, миллатимизга нисбатан ана шундай эҳтиромни қайтадан қўлга киритишимиз керак.

Энг катта эҳтиром, эзгуликка чулғанган илм-маърифат натижасида келадиган эҳтиромдир. Айниқса, бу эҳтиром ўзга миллатларнинг зиёлилари томонидан кўрсатилса, унинг баҳоси бекиёсдир.

Ўз олдимизга қўйган юксак вазифа ва марраларга эришишда замонавий билим ва тажриба соҳиби бўлган, янгича фикрлайдиган ёшларимиз бизнинг асосий таянчимиз ва суянчимиздир, десак, айти ҳақиқат бўлади.

Бугунги кунда биз ёшларни билим олишимиз учун ҳамма шарт-шароитлар етарлидир. Шундай экан халқимиз, президентимизни ишончини оқлаш, муносиб фарзанд бўлиш бизнинг асосий бурчимиздир.

Бизнинг бугунги илм олишдаги ушбу ишимиз ҳам эл-юртимиз, тинч ва омонли, янги ҳаёт, янги жамият барпо этишдаги, ривожланган эркин бозор иқтисодиёти тамойилларига амал қиладиган, одамлар ҳаётини юксак даражага кўтариш имконини берадиган демократик тизимнинг умумэътироф этилган демократик халқаро мезонларга эришиш учун, мамлакатимиз дунё ривожига ўз хиссамизни қўшишимизни, муносиб давомчилар бўлишимиз учун илк қадамимиздир.

Эҳтимоллар назариясига алоқадор илмий изланишлар XVII асрнинг ўрталарига келиб вужудга кела бошлади. Айниқса, аср бошида машхур италиянлик физик Г.Галилейнинг (1564-1642) физикавий ўлчашлардаги йўл қўйиладиган хатоликларни рўй бериш қонуниятларини аниқлаш борасидаги илмий изланишларда, ҳамда вафотидан кейин 1655 йил эълон қилинган “соқа ташлаш ўйинда очколар чиқиши” асарига киритилган ишларида эҳтимоллар назариясига оид маълумотларни ўз ичига оладиган турли кўнгилочар ўйинлар назариясидаги қонуниятларни аниқлаш борасидаги француз математиклари Б.Паскаль (1623-1662), П.Ферма (1601-1665), Гюйгенс (1629-1695) ишлари бу фанни яратилишига замин тайёрлади. Швецариялик математик И.Бернулли (1667-1748) акаси Я.Бернулли (1654-1705) билан ҳамкорликда вариацион ҳисобга асос солди. Я.Бернулли эҳтимоллар назариясининг муҳим бўлимларидан – катта сонлар қонуниятига тегишли дастлабки тасдиқларни исботлади. Француз математиги Муавр (1667-1754) нормал қонунга бўйсунувчи ҳолларни алоҳида ўрганди. Бу қонун марказий лимитик теоремаларни асослашда, қўллашда зарур бўлиб, француз математиги П.С.Лаплас (1749-1827) томонидан биринчи марта эҳтимоллар назариясини марказий лимитик теоремаларни бирданига қўришга ҳаракат қилди. Немис математиги К.Ф.Гаусс (1777-1855) нормал қонунни такомиллаштириб, тажриба натижаларини қайта таҳлил қилишнинг “энг кичик квадратлар усули”ни ишлаб чиқиб, хатолар назариясини ўрганиш борасида ишлар олиб борди. Рус математиги В.Я.Буняковский (1804-1889) рус тилида биринчи марта ёзилган эҳтимоллар назарияси курсининг муаллифи бўлади. Унинг шогирди П.Л.Чебишев (1821-1894) эса катта сонлар қонунини умумлаштирди. Чебишев шогирди А.А.Марков (1856-1922) катта сонлар қонуни ва марказий лимитик теоремани умумлаштирди. А.М.Ляпунов (1857-1918) ҳам Чебишевнинг шогирди бўлиб, марказий лимитик теоремани умумий ҳолда исботлади. Рус математиклари ишларини янада ривожлантириб А.Я.Хинчин (1894-1959) кучайтирилган катта сонлар қонунини умумлаштирди. XX асрнинг 30-йилларида А.Н.Колмогоров (1903-

1987) эҳтимоллар назариясини аксиоматик курсини мукаммал ҳолга келтириб, уни фан сифатида тўлиқ асослаш билан бирга тасодифий функциялар соҳасида айниқса, кенг кўламдаги ишлар олиб борилди.

Ўзбекистондаги эҳтимоллар назарияси ва тадбиқларига оид ишларни ривожлантиришда Б.И.Романовскийнинг (1879-1954) хизматлари катта бўлиб, унинг шогирдлари С.Х.Сирожиддинов (1920-1988) ва Т.А.Саримсоқов (1915-1996) ларнинг илмий изланишлари эҳтимоллар назариясига ўзбекистонликларнинг қўшган жаҳоншумул ишлари бўлиб қолмоқда. Уларнинг шогирд издошлари эса янада бу соҳага ўзларининг муносиб улушларини қўшиб келмоқда.

1.2. Эҳтимоллар назариясининг асосий тушунчалари

Эҳтимоллар назариясининг элементлари билан шуғулланувчилар сони, уни ўрганувчилар сони, тадбиқ сони тобора ортиб бораётганлиги, шу соҳада китоб ва журналларни кўплаб чоп этилаётганлигини мазкур фанни ўрганишни нақадар, муҳимлигини кўрсатади. Иқтисодий фанларни ўрганишда физикада, биологияда, жамиятда ва бошқа кўп фанларда эҳтимоллар назарияси ва математик статистика элементларидан фойдаланилади.

Эҳтимоллар назариясида “Ҳодиса” тушунчаси бошланғич тушунча бўлиб таърифланмайди шундоқ қабул қилинади. Ҳодисаларни $A, B, C, \dots$ ҳарфлар билан белгиланади.

“ A ҳодисанинг эҳтимоллиги” деган гапни $P(A)$ каби ёзамиз бундаги P ҳарфи “Probabilite” ингилизча “Эҳтимоллик” сўзининг бош ҳарфидан олинган $P(A)$ - A га нисбатан ўлчовли функция бўлиб у $P(A) > 0$ мусбатдир.

A ҳодисанинг эҳтимоллигини

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

0 билан рўй бериши мумкин бўлмаган ҳодисанинг эҳтимоллигини белгилаймиз. $P(V)=0$ V - рўй бериши мумкин бўлмаган ҳодиса, 1 билан муқаррар ҳодисани эҳтимоллигини белгилаймиз.

$P(U) = 1$ U - муқаррар ҳодисадир. Қолган ҳамма ҳодисалар $\{0, 1\}$ орасидаги қиймат қабул қилади ва уларни тасодифий ҳодисалар деб атаймиз.

Ҳамма ҳодисалар, муқаррар ҳодиса ҳам, рўй бериши мумкин бўлмаган ҳодиса ҳам, тасодифий ҳодиса ҳам, маълум бир шарт- шароит натижасида рўй беради.

Мисоллар 1. t вақт давомида телефон станцияси ҳодисадир.

2. Симметрик ва бир жинсли кубикни ташлаганида 1,2,3,4,5,6 рақамлардан бирортасини тушиш ҳодисаси тасодифий ҳодисадир.

3. Симметрик бир жинсли тангани ташласак герб ёки рақам тушиш ҳодисаси ҳам тасодифий ҳодисадир.

Шунга ўхшаш жуда кўп мисолларни келтириш мумкин. Юқоридаги мисоллардан кўринадики, ҳар қандай тажриба натижасида рўй бериши мумкин бўлган элементар ҳодисалар ҳодисалар тўпламини яратади ва бу ҳодисалар тўплами чекли санокли ва чексиз қийматларни қабул қилади. Шу сабабли классик эҳтимолликда ҳодисалар чекли қийматни қабул қилади. Статистик эҳтимолликда асосан санокли қийматларни қабул қилади. Геометрик эҳтимолликда асосан чексиз қийматларни қабул қилади.

Тасодифий миқдорларнинг тақсимот функцияси.

Тасодифий миқдор таърифини беришдан аввал ўлчовли функциялар тушунчасини киритамиз. Бизга $\langle \Omega, F \rangle, \langle R, G \rangle$ ўлчовли фазолар ва $\xi: \Omega \rightarrow R$ функция берилган бўлиб, бу функция учун $A \in G$ эканидан $\xi^{-1}(A) = \{\omega | \xi(\omega) \in A\} \in F$ экани келиб чиқса, бундай функция ўлчовли функция дейилади. Агар $\langle \Omega, F, P \rangle$ ихтиёрий эҳтимоллик фазоси бўлса, ҳар қандай $\xi: \langle \Omega, F \rangle \rightarrow \langle R, G \rangle$ ўлчовли функция тасодифий миқдор дейилади.

1-мисол. Битта танга ташлаганимизда Ω иккита элементар ҳодиса герб ва рақамдан иборат бўлади. Агар танганинг герб томони тушса 0 ни, рақамли томони тушса 1 десак, у ҳолда 0 ёки 1 ни қабул қилувчи тасодифий миқдорни ҳосил қиламиз.

2-мисол. Агар иккита танга ташласак, ω элементар ҳодисалар ГГ, ГР, РГ, РР дан иборат бўлиб, “герб” тушишлар сонини $\xi = \xi(\omega)$ деб белгиласак, бу тасодифий миқдорни қуйидаги жадвал билан бериш мумкин:

ω	PP	GP	PG	GG
$\xi(\omega)$	0	1	1	2

3-мисол. $\{(x, y) | x \in [0, 1], y \in [0, 1]\}$ квадратга ташланган нуқтадан координаталар бошигача бўлган масофа тасодифий миқдорлар, чунки, $\{\xi(x, y) | x^2 + y^2 < t\}$ тўплам ўлчовли.

Тасодифий миқдорнинг таърифига кўра ихтиёрий $x \in R$ учун:

$$\{\omega | \xi(\omega) < x\} = \{\xi < x\} = \xi^{-1}(]-\infty, x[) \in F \text{ чунки,}$$

$]-\infty, x[\in G$. Бунда $F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$ функцияни R да аниқланганлиги келиб чиқади. Бу функция ξ тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси дейилади.

4-мисол. ξ тасодифий миқдор 1 ва 0 қийматларни мос равишда p ва q ($p+q=1$) эҳтимол билан қабул қилинсин, яъни

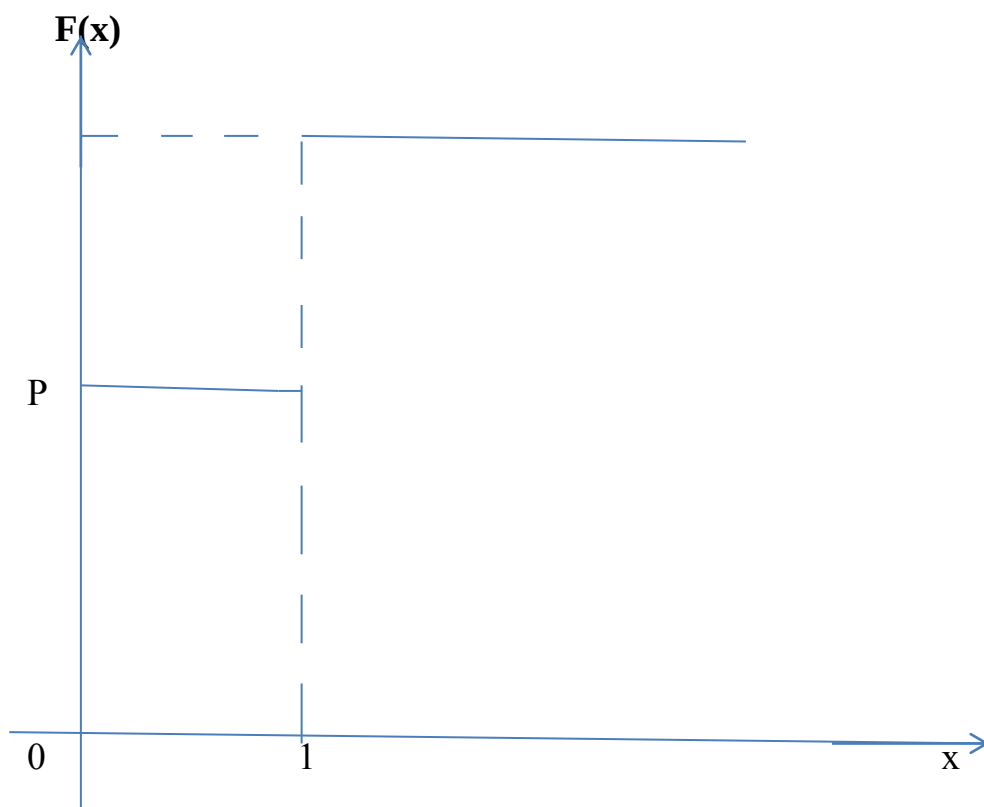
$$\xi: 0, 1 \quad p=P\{\xi = 1\}$$

$$P: q, p \quad q=P\{\xi = 0\}$$

Бу ҳолда

$$P\{\xi < x\} = F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ p, & \text{агар } 0 < x \leq 1, \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } 1 < x, \text{ бўлса} \end{cases}$$

Бу тақсимотнинг графиги қуйидагича бўлади,



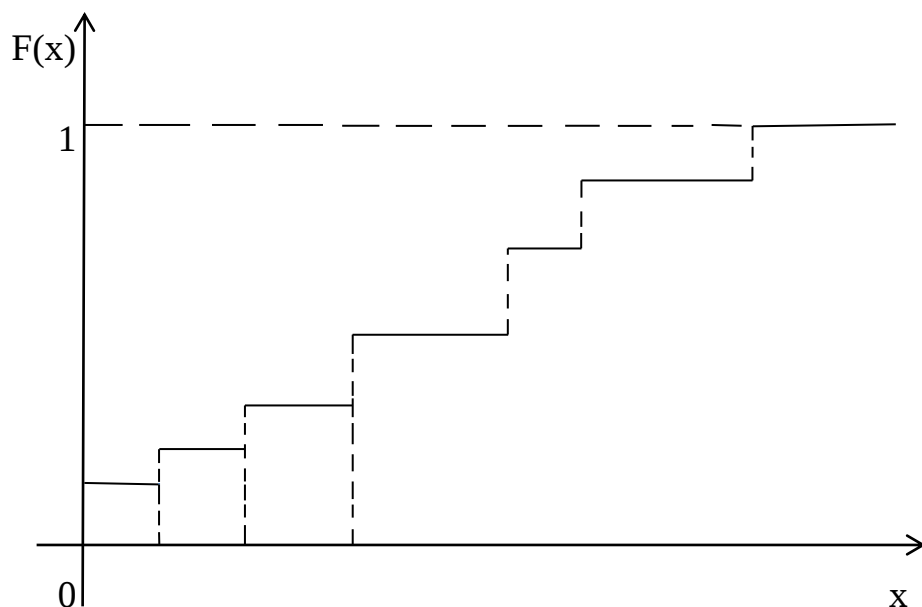
Агар ξ тасодифий микдор $0, 1, 2, \dots, n$ қийматларни

$$p\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k} \quad k = \overline{0, n}$$

эхтимол билан қабул қилса, бу тасодифий микдор биномиал қонун бўйича тақсимланган тасодифий микдор дейилади. Унинг тақсимот функцияси қуйидагича бўлади:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса,} \\ \sum_{k \leq x} C_n^k p^k q^{n-k} & \text{агар } 0 \leq x \leq n \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } n < x \text{ бўлса,} \end{cases}$$

графики қуйидагича бўлади.



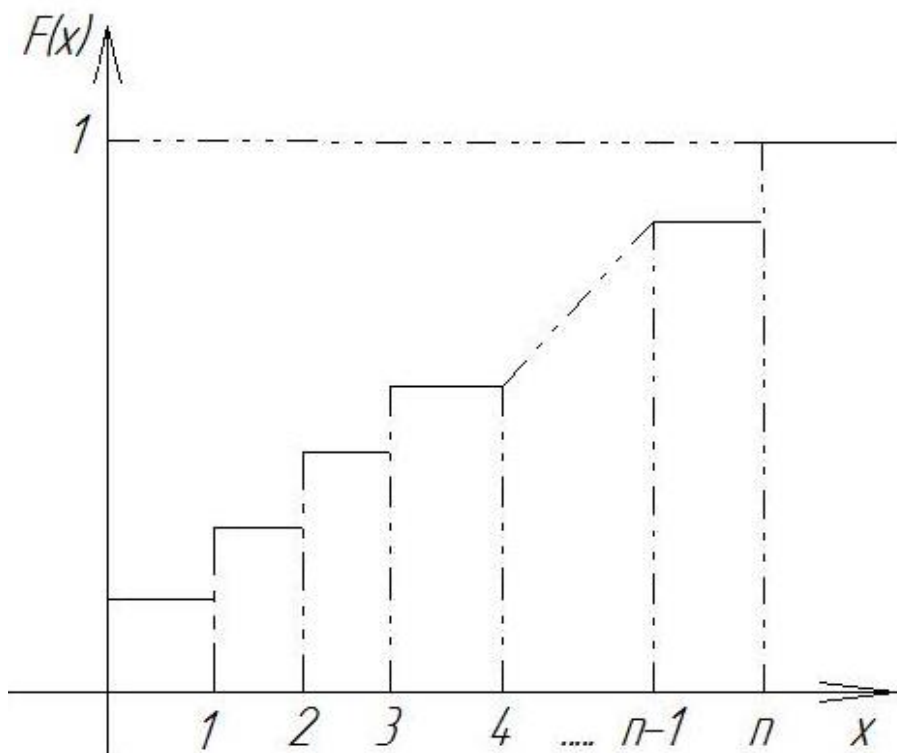
5-мисол. Агар ξ тасодикий миқдор $0, 1, 2, \dots$ қийматларни

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0$$

эҳтимоллар билан қабул қилса, уни Пуассон қонуни бўйича тақсимланган тасодикий миқдор дейилади. Унинг тақсимот функцияси қуйидагича аниқланади:

$$P(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } k < 0, \text{ бўлса} \\ \sum_{k \leq x} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, & \text{агар } 0 \leq k \leq x, \text{ бўлса} \end{cases}$$

графики қуйидагича бўлади.



6-мисол. ξ тасодифий миқдор $x_1, x_2, \dots, x_n$ қийматларни

$$P\{\xi = x_k\} = \frac{1}{N}, \quad k = \overline{1, N}$$

эҳтимоллар билан қабул қилинсин.

Бу тасодифий миқдор текис тақсимланган тасодифий миқдор дейилади.
Унинг тақсимот функцияси қуйидагича бўлади.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq x_1 \text{ бўлса,} \\ \frac{k}{N}, & \text{агар } x_k < x < x_{k+1} \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x_N < x \text{ бўлса.} \end{cases}$$

7-мисол. Агар тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси

$$\Phi(x) = C \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}} du$$

кўринишда бўлса, бундай тасодифий миқдор нормал тақсимланган тасодифий миқдор дейилади. Бу ерда $\sigma < 0$, $\sigma > 0$, $-\infty < a < \infty$ ўзгармас сонлар.

I боб бўйича хулоса.

Хулоса сифатида шуни айтиш мумкинки, юқоридаги 4, 5, 6-мисоллар дискрет тасодифий миқдорга мисол бўлади. Яъни, Дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси

$$F(x) = \sum_{\{k: x_k < x\}} p_k$$

формула билан аниқланади.

II боб. Эҳтимоллар назариясида қолдиқ ҳаднинг баҳоси

2.1 Қолдиқ ҳад баҳосини аниқлашда ўзбек математик

олимларининг қўшган хиссалари

Жаҳон эҳтимолчилари мактаби умумий проблемаларининг қўйилиши ва уларнинг ҳал этилиши, фундаментал илмий тадқиқот ишларининг сифати ва салмоғи бўйича жаҳонда олдинги ўринларининг бирида туради. Москва, Ленинград, Киев, Тошкент, Новосибирск, Вильнюс, ва бошқа шаҳарларда эҳтимоллар назарияси бўйича жаҳонга машҳур мактаблар мавжуд. Машҳур математиклардан С.Н.Бернштейн, А.Н.Колмогоров, В.И.Романовский, А.Я.Химчин, Ю.В.Линник, Ю.В.Прохоров, Н.В.Смирнов, Б.В.Гнеденко, А.А.Бороков, А.Б.Скороход, И.А.Ибрагимов, Т.А.Саримсоқов, С.Х.Сирожиддинов ва бошқалар ҳамда чет эллик олимлардан Г.Крамер, Д.Дуб, В.Феллер, Ю.Нейман ва бошқалар ҳозирги замон эҳтимоллар назариясини ривожланишида салмоқли хисса қўшдилар ва қўшмоқдалар.

Россияда биринчи бўлиб, эҳтимоллар назариясидан ёзилган дарсликлар эҳтимоллар назариясига бўлган эътиборнинг ортишида маълум бўлди. Эҳтимоллар назарияси математик статистиканинг асосий аппаратигина бўлиб қолмай, бундан ташқари унинг методлари оммавий хизмат кўрсатиш назариясида, ишончлилиқ назариясида, назарий физикада, биологияда, географияда, математик лингвистикада ишлаб чиқаришнинг планлаштириш ва оптимал бошқаришда технологик жараёнларни анализ қилишда, маҳсулотларнинг сифатини назорат қилишда ва бошқа мақсадларда қўлланилади.

Республикамизнинг математик олимлари, жумладан эҳтимоллар назарияси ва математик статистика учун ўз умрларини бағишлаган олимлар ўзларининг илмий ишлари билан жаҳон математика фани хазинасига муносиб хисса қўшдилар ва қўшмоқдалар. Тошкентда вужудга келган, Республикамизнинг турли шаҳарларида ривожланаётган эҳтимоллар

назарияси ва математик статистика фанининг илмий натижалари дунёда машҳурдир. Ҳозирда ҳам ўзларининг фундаментал ишлари билан халқ хўжалиги учун амалий масалаларни ечишга ёрдамлашмоқдалар: геология, ирригация автоматлаштириш иқтисод масалаларини математик асосларини тузишда бажарилган ишлар юксак самара бермоқда.

Ўзбекистон олий математик таълимнинг асосан эҳтимоллар назарияси ва математик статистиканинг вужудга келиши ва дунёнинг йирик илмий маркази даражасига кўтариши тошкентда яшаб, ижод қилган машҳур олим, меҳрибон мураббий, чин инсон профессор Всеволод Иванович Романовский (1879-1954) номи билан боғлиқдир. В.И.Романовский Ўрта Осиё давлат университети (ҳозирда миллий университет) ташкил топган кундан бошлаб 34 йил давомида эҳтимоллар назарияси ва математик статистика кафедрасига бошчилик қилди.

ЎзРФА нинг ҳақиқий аъзоси бўлган В.И.Романовский таниқли математик олимлар Т.Н.Қори-Ниёзий, Н.Н.Назаров, Т.А.Саримсақов, С.Ҳ.Сирожиiddинов шунингдек, М.К.Камолов, М.И.Ейдельнант каби 60 дан ортиқ фан дарғаларининг биринчи устози эди. В.И.Романовский ўзининг педагогик фаолиятини катта қамровли ва аҳамиятли илмий-тадқиқот ишлари билан бирга қўшиб олиб борди. У математиканинг ҳар хил соҳаларига доир 165 та илмий иш эълон қилган. Унинг кўпчилиги эҳтимоллар назарияси ва математик статистика фанига тегишлидир. Унинг “Математическая статистика” номли фундаментал китоби кўп йиллар давомида Собиқ иттифок университетлари учун асосий дарслик вазифасини ўтади, ҳозирги кунда ўз аҳамиятини йўқотган эмас.

В.И.Романовский эҳтимоллар назарияси ва математик статистика соҳасидаги илмий ишлари билан бутун жаҳонга танилди. Профессор В.И.Романовский қолдирган бебаҳо мерос эҳтимоллар назарияси ва математик статистика мактаби анъаналарини ЎзРФА академиклари

Т.А.Саримсақов, С.Х.Сирожиддинов ҳамда уларнинг шогирдлари мувоффақиятли давом эттирмакдалар.

Ўттизинчи йилларда Ўрта Осиё Давлат университети даргоҳида профессор В.И.Романовский раҳбарлигида тарбияланиб, ўсиб, унга машҳур ўзбек олими, давлат ва жамоат арбоби, физика-математика фанлари доктори, профессор, ЎзРФА академиги, Ўзбекистонда хизмат кўрсатган фан ва техника арбоби, Беруний номидаги ЎзР Давлат мукофотининг лауриати Тошмуҳаммад Алиевич Саримсақов (1915-1996)дир.

Т.А.Саримсақов мамлакатимиз ва чет эл математика жамоатчилиги орасида эҳтимоллар назарияси ва математик статистика, математик анализ, функционал анализ, умумий топология ва уларнинг тадбиқлари соҳасидаги чуқур тадқиқотлари муаллифи сифатида танилган.

Т.А.Саримсақов илмий кадрлар тайёрлашга катта аҳамият берди. Унинг раҳбарлигида 4 дан ортиқ физика-математика фанлари кондидатлар ва докторлар тайёрланган.

Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика фанини кенг ривожлантирган олим С.Х.Сирожиддинов (1920-1988)дир. У машҳур математик, жамоат арбоби, ЎзРФА академиги, физика-математика фанлари доктори, профессор Ўзбекистонда хизмат кўрсатган фан ва техника арбоби эди.

С.Х.Сирожиддиновнинг асосий тадқиқотлари эҳтимоллар назарияси ва математик статистика билан боғлиқ бўлган масалалардир. У А.А.Марковнинг бир жинсли занжирлари учун математик теоремалари устида тадқиқотлар олиб борди. Математик статистикага бағишланган илмий ишлари, ишлаб чиқариш маҳсулотини контрол қилиш методларига боғлиқ ишлари жаҳонга машҳурдир.

С.Х.Сирожиддинов 120 дан ортиқ илмий мақола, 5та монография, 2та дарслик муаллифидир. 6 дан ортиқ фан номзодлари ва 7 та фан докторларининг илмий устози бўлган.

Республикамиздаги шу соҳада ишлаётган олимлар орасида педагогик иш билан шуғулланмайдиган олимларни топиш қийин. Улар ўзлари олиб бораётган илмий тадқиқотларнинг натижаларни фақатгина монография ва илмий мақолаларда эълон қилибгина қолмай, бевосита аудиторияларга кириб ўз билимларини ёшларга ўргатадилар. Университет ёки олий ўқув юртларида маърузалар ўқийдилар, диплом иши, битирув малакавий иши бажарувчи талабаларга раҳбарлик қиладилар. Алоҳида иқтидорли ёшларга илмий раҳбарлик қилиш каби ишларда иштирок этадилар.

Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика назарияси билан шуғулланувчи ана шундай олимлардан ЎзРФА академиклари Т.А.Азларов, Ш.К.Фармонов, фан докторлари профессорлар М.Ғофуров, М.Маматов, И.Рахимовларни кўрсатиш мумкин. Жумладан, бизнинг факультетимизда эҳтимоллар назарияси ва математик статистика фани билан шуғулланувчи физика-математика фанлари номзодлари, доцентлардан И.Неъматов, М.Акбаров, А.Мадрахимов, А.Асимов, А.Юсупова, А.Шерматовларни келтириш мумкин.

2.2. Элементар ва олий математикада қолдиқ ҳаднинг баҳоси.

Эҳтимоллар назариясининг лимит теоремалари, локал ёки интеграл лимит теоремалари ва уларнинг қолдиқ ҳадларини баҳолаш кўп тармоқли бўлиши билан биргаликда, унинг бу соҳадаги тадбиқлари жуда кўп ва аҳамиятга моликдир.

Айниқса, лимит теоремаларидаги қолдиқ ҳаднинг баҳосини ўрганиш масалалари мактаб математикасида, олий мактаб математикасида кўп қўлланилади. Шу ҳақида қуйидаги иккита масалани келтириш kifоядир.

1-масала. Мактаб математикасида айлананинг узунлиги $C=2\pi R$, $\pi = 3,14$, R -радиус, эканини эслайлик. Буни исбот қилиш учун айлана ичига мунтазам олтибурчак чизилади, унинг томонларини иккилантириб борилади. Шу томонларнинг сони $n \rightarrow \infty$ даги лимитини шу айлананинг узунлиги $C=2\pi R$ сифатида олинади.

Аммо, ҳақиқий C айлана узунлиги билан иккилантириб борилади C_k ўртасидаги “фарқ-қолдиқ ҳад” қолади. Шунинг учун ҳам $\pi = 3,14$, тақрибий олинади. Бундаги

$$|C - C_k| \leq \frac{C}{\sqrt{k}}$$

каби ўрганиш “фарқ -қолдиқ ҳадни” ўрганиш муҳим аҳамиятга эгадир.

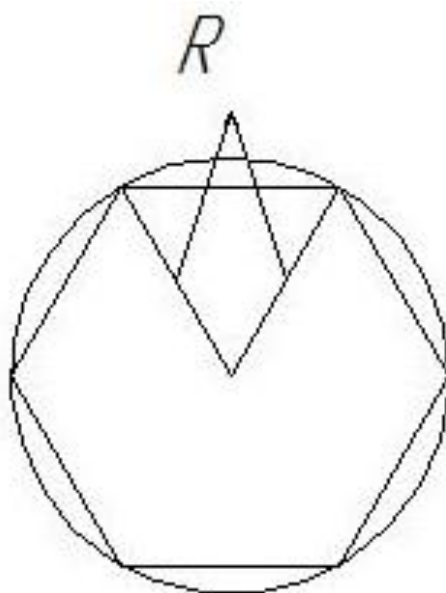
Бундаги C_k - дискрет, C -узлуксиз функция, яъни:

$$|F_n(x) - \Phi(x)| < C \frac{\rho_3}{\sqrt{n}}$$

кабидир, бу ерда

$$\rho_3 = M|\xi - M\xi|^3$$

учинчи тартибли момент.



2-масала. Аниқ интеграл тушунчасига олиб келадиган геометрик масалада S_{aABb} эгри чизиқли трапецияни юзини ҳисоблаш масаласи келтирилади.

Бунда S_{aABb} юза асоси $[a,b]$ кесма билан, ён томонлари $f(a)$ ва $f(b)$ ординаталар билан, юқоридан $y=f(x)$ - узлуксиз эгри чизик билан чегараланган юзадан иборатдир.

S_{aABb} ни юзаси қандай ҳисобланади? Бунда ҳам

$$a=x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$$

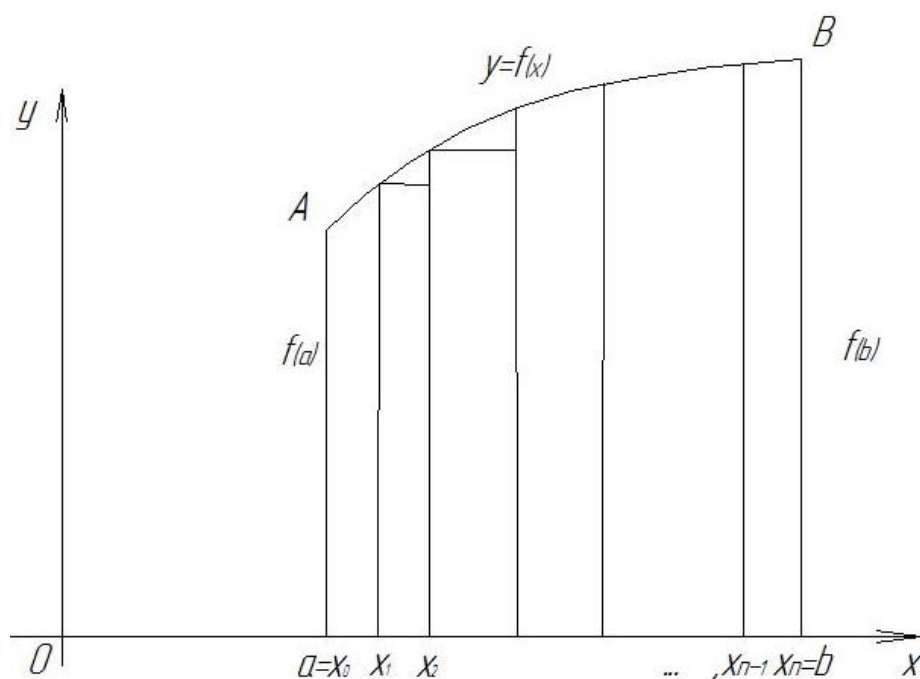
$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

нуқталардан абссисса ўқидан $y=f(x)$, билан кесишувига кадар перпендикуляр чиқарилади, кесишиш нуқталаридан абссисса ўқига параллел чизиклар ўтказилади. Ҳосил бўлган тўғри тўртбурчаклар юзалар йиғиндисини қаралади, шу юзачалар яна иккилантирилади, иккилантириш давом эттирилади, чунки тўғри тўртбурчаклар билан эгри чизиқли трапециячалар

орасида “қолдиқ ҳад-фарқ” қолади, у фарқ жуда кичик бўлгунча иккилантирилади. Иккилантиришлар сони $n \rightarrow \infty$ даги лимити S_{aABb} нинг юзини беради, бу эса аниқ интеграл тушунчасига олиб келади деймиз. Ҳақиқатан ҳам тўғри тўртбурчаклар йиғиндисини $F(x)$ десак, $y=f(x)$ узлуксиз функция $\Phi(x)$ –дан иборат.

$$\text{Яъни: } |F_n(x) - \Phi(x)| \leq X \frac{p_3}{\sqrt{n}}$$

каби масалалардир. Бу ерда ҳам “фарқ-қолдиқ ҳад”ни баҳолаш муҳим аҳамиятга эгадир.



II боб бўйича хулоса.

Юқоридагига ўхшаш мисолларни кўплаб келтириш мумкин. Бундай масалалар асосида Вейерштрасснинг машҳур теоремаси туради; Яъни кўпҳадларни-дискрет функцияни, узлуксиз функцияга интилиши, унинг қолдиқ ҳадини фарқини аниқлаш масаласи берилганлиги туради.

Мен юқорида баён этган илмий ишимда “фарқ-қолдиқ ҳад” нинг баҳосини эҳтимоллар назариясининг лимит теоремалари “тили”да баёнлашга ҳаракат қилдим.

III боб.Тасодифий сондаги тасодифий қўшилувчилар учун

лимит теоремалар

3.1. Локал ва интеграл лимит теоремаларда қолдик

ҳаднинг баҳоси.

Эҳтимоллар назариясининг лимит теоремалари катта ва умумий мавзу бўлиб, деярли жуда кўп катта олимлар бу соҳада ўз илмий изланишларини баён этганлар.

Эҳтимоллар назариясининг отаси машҳур академик А.Н.Колмогоровни бу соҳадаги асарлари ва илмий ишлари жаҳоншумул аҳамиятга эга. 1982 йили бўлиб ўтган “Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика” га бағишланган Фарғона I Бутуниттифоқ симпозиумида Академик Ю.В.Прохоровнинг фикрини келтираман “Предельные теоремы кормит нас беспредельно” – яъни: “ Эҳтимоллар назарияси лимит теоремалари бизни чексиз боқади” – деган. Бу машҳур ибораси ҳали ҳам ўз аҳамиятини йўқотган эмас.

Аслида эҳтимоллар назариясининг лимит теоремалари тарихи Я.Бернулли теоремаси ва схемасидан (XVII аср), Муавр-Лапласнинг локал теоремалари (1730-1731 й), Муавр – Лапласнинг интеграл теоремалари, Пуассон теоремаларидан бошланган.

Кейинчалик лимит теоремалар П.Л.Чебишев асарларида унинг ўқувчилари ва шогирдлари А.А.Марков, А.Ляпунов асарларида “катта сонлар қонуни” сифатида баёнлашган.

Эҳтимоллар назарияси лимит теоремалари бизни Ўзбекистонда Академик С.Х.Сирожиддинов ва Т.А.Саримсақов раҳбарлигидаги “Эҳтимоллар назарияси ва математик статистиканинг Тошкент мактаби” да

мукаммал ривожлантирилди. Бу ерда локал лимит теоремалар, интеграл лимитик теоремалар, зичлик функциялар учун лимит теоремалар, бир хил тақсимланган ва ҳар хил тақсимланган тасодифий миқдорлар учун лимит теоремалар, кўп ўлчовли функциялар учун лимит теоремалар, бу теоремаларни қолдиқ ҳадларини баҳолашлар, А. Марков занжирлари учун лимит теоремалар ва бошқа бир неча турдош лимит теорема ўрганилган. Юқорида баёнланган лимит теоремалар соҳасида ишлаган ўзбек олимларини ва уларнинг қолган ишларини келтирамиз.

Машҳур олим ЎзФА Академиги С.Х.Сирожиддинов (1920-1988), А.Марков занжирлари учун лимит теоремалар ҳамма тақсимотлар учун лимит теоремалар, ЎзФА Академиги Т.А.Азларов локал ва интеграл лимит теоремалар ва унинг қолдиқ ҳадини баҳолаш Ш.К.Фармонов, А. Марков занжирлари учун лимит теоремалар ва уларни қолдиқ ҳадини баҳолаш, кўп ўлчовли тақсимот функциялари учун лимит теоремалар, М.Ў.Ғофуров физика-математика фанлари доктори, профессор: локал ва интеграл лимит теоремалар, тармоқланувчи процесслар улар ҳақида лимит теоремалар. Яна жуда кўп мисоллар келтириш мумкин.

Бизни университетимизда ҳам шу лимит теоремалар уларнинг қолдиқ ҳадини баҳолаш ҳақида диссертация ёзган, илмий ишлар эълон қилган, ҳозир ҳам илмий изланишлар олиб бораётган домлаларимиз ўз иш фаолиятини олиб боришмоқда. И.Неъматов- физика-математика фанлари номзоди, доцент: Тасодифий сондаги тасодифий қўшилувчилар учун лимит теоремалар соҳасида, локал ва интеграл лимит теоремалар соҳасида, М.Акбаров- физика-математика фанлари номзоди, доцент: Тасодифий жараёнлар функциялар учун лимит теоремалар, А.Мадрахимов- физика-математика фанлари номзоди, доцент: Математик статистиканинг лимит теоремалари соҳасида диссертация ёқлаганлар ва ҳозирда илмий ишларини давом эттирмоқдалар.

Тасодифий сондаги тасодифий қўшилувчилар учун

лимит теоремаларнинг баёни.

“Тасодифий индексли “ қўшилувчилар учун лимит теоремалар ёки тасодифий сондаги тасодифий қўшилувчилар учун лимит теоремалар соҳаси эҳтимоллар назарияси лимит теоремаларнинг катта бир бўлимидир.

Бу соҳанинг биринчи асосчиси Америка математиги Г. Роббинс [1] ҳисобланади. У йиғиндиларнинг сони тайинланган $n \in \mathbb{N}$ учун берилган эҳтимоллар назариясининг лимит теоремаларини 1946 йилда $v=v(\lambda)$ тасодифий йиғиндилар учун ўтказган.

Бунда у бир хил тақсимланган ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий сондаги тасодифий қўшилувчиларни ўрганган.

Яъни: $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$

тасодифий миқдорлар кетма- кетлиги берилган бўлса ,

$$P(\xi_1 < x) = P(\xi_2 < x) = \dots = P(\xi_n < x) = F(x)$$

битта тақсимот функцияларини белгилаб олган.

Кейинчалик 1952- 1955 йилларда Венгер математиги А.Реньи [2] Г. Роббинс назариясини ўрганиб, давом эттириб, бу масалаларда қолдиқ ҳаднинг баҳосини ўрганиш масалалари билан шуғулланган.

А. Реньи текширишларида оддий лимит теоремалар билан тасодифий индексли қўшилувчилар учун берилган лимит теоремаларни таққослаган, биридан иккинчисига “ўтиш” механизмини келтириб чиқарган.

Бу масалалар 1961 йилдан бошлаб Ўзбекистон фанлар академиясининг академиги С.Х.Сирожиддинов ва унинг шогирдлари томонидан ўрганила бошланган.

1966 йилда С.Х.Сирожиддинов ва Г.Оразовлар [4] томонидан тасодифий сондаги тасодифий қўшилувчилар учун интеграл лимит теоремалар, локал лимит теоремалар, уларнинг қолдиқ ҳадлар баҳолари ўрганилди. С.Х.Сирожиддинов домланинг шогирдларидан С.В.Нагаев [5], Ш.К.Фармонов, М.Маматовлар [6] шу соҳада бир нечта мақолалар эълон қилдилар.

И.Неъматов [7] [8] бу масалаларни ҳар хил тақсимланган тасодифий сондаги тасодифий қўшилувчилар

$$P(\xi_1 < x_1) = P(\xi_2 < x_2) = \dots = P(\xi_j < x_j) = F_j(x)$$

учун ўтказган.

Академик В.Статилевигус бошчилигидаги Вильнюс (Литва) эҳтимоллар назарияси мактаби ҳам мазкур масалаларни ҳал қилишда катта ҳисса қўшдилар.

Жумладан, А.Бикялис, Паулаускас Вигантес [9] кўп ўлчовли тасодифий сондаги тасодифий қўшилувчилар учун лимит теоремаларни исботлаб, қолдиқ ҳадларнинг баҳосини ҳисоблаб берди.

Тасодифий сондаги тасодифий қўшилувчилар учун лимит теоремаларни ривожланишига Круглов ва Королёвлар [10] нинг монографияси катта ҳисса қўшди.

Бу китобда ҳамма масалалар кенг қамровли ўрганилди ва биринчи марта тасодифий сондаги тасодифий қўшилувчилар моментларининг ўзгариши, моментларнинг яқинлашиш принциплари ўрганилди.

Шу китоб асосида “Вальд тақсимоти” деган янги тушунча киритилди. Вальд тақсимоти деганда:

ўзаро боғлиқ бўлмаган бир хил тақсимланган

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$$

тасодифий миқдорлар кетма –кетлиги;

$v=v(\lambda)$ – бутун санокли қийматларни қабул қилувчи тасодифий миқдор;

$v=v(\lambda)$ ва $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ лар ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар мажмуаси тушунилади.

В.М.Круглов ва В.Ю.Королёвнинг мазкур монографиясида тасодифий сондаги тасодифий қўшилувчилар учун интеграл лимит теоремалар ва уларнинг қолдиқ ҳадларини баҳоси мукаммал ўрганилган.

Айтайлик:

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots \quad (1)$$

тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги бир хил тақсимланган бўлсин.

Яъни:

$$P(\xi_1 < x) = F(x)$$

бир хил тақсимланган функцияга эга бўлсин.

Бу тасодифий миқдорларнинг сонли характеристикалари қуйидагича бўлсин:

$$M\xi_1 = a = \int x dF(x) -$$

математик кутилмаси.

$$D\xi_1 = v^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 dF(x) -$$

Дисперсияси.

$$\beta_3 = M|\xi_1 - a|^3 -$$

учинчи тартибли моменти.

$v=v(\lambda); \lambda \geq 0$ мусбат қийматларни қабул қилувчи (1) тасодифий миқдорлар билан боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдор бўлсин.

Бу тасодифий миқдорнинг характеристикаларини қуйидагича киритамиз:

$$P(v=k)=P_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k = 1$$

$$k=1, 2, 3, \dots$$

Математик кутилмаси:

$$Mv(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} kP_k = \alpha$$

Дисперсияси:

$$Dv(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} (k - \alpha)^2 P_k = \gamma^2$$

Бу китобда тасодифий миқдорларга қўйиладиган талаблар атрофлича ўрганилган.

Масалан:

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)}{\sqrt{D(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)}}$$

стандарт нормаллаштиришларда математик кутилма ва дисперсия тасодифий миқдор ёки доимий сон сифатида олиниб, уларнинг комбинациялари алоҳида қаралган.

Тасодифий сондаги тасодифий миқдорлар учун лимит теоремаларни ўрганишнинг муҳим томони шундан иборатки

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$$

йиғиндилар учун олинган лимит теоремалар ва унинг қолдиқ ҳадини баҳолашда тенгсизликнинг ўнг томонидаги ифода қўшилувчиларнинг моментлари ва доимий сонлардан иборат бўлган битта баҳодан иборат.

$$S_v = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_v$$

йиғинди қаралса лимит теорема ва унинг қолдиқ ҳадининг баҳоси иккита йиғиндидан иборат бўлиб, биринчи йиғинди асосий

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$$

тасодифий миқдорлар моментлари билан боғлиқ, иккинчи йиғинди эса $v=v(\lambda)$ тасодифий миқдорнинг моментларига боғлиқдир.

Агар тасодифий миқдорлар ҳар хил тақсимланган бўлса, тенгсизликнинг ўнг томонидаги учта қўшилувчидан иборат, учинчи “ҳар хил тақсимот” нинг характеристикасидан иборатдир.

Агар тасодифий миқдорлар йиғиндиси тайинланган (фиксированный) бўлса, унинг интилган лимити асосий тасодифий миқдорларнинг айрим – айрим лимитига боғлиқ, масалан, тасодифий миқдорлар нормал қонун бўйича тақсимланган бўлса, лимит функция ҳам нормал қонунга бўйсунди.

Тасодифий индексли лимит теоремаларда бундай эмас. Чунки лимитик функция, ҳам

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$$

ларнинг тақсимот функциясига ҳам $v=v(\lambda)$ нинг тақсимот функциясига боғлиқ.

Шунинг учун

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$$

йиғиндининг тақсимот функцияси

$$\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1-\delta^2}}\right) * \theta\left(\frac{x}{\delta}\right)$$

Компазиция

$$\left(\delta = \alpha\gamma/\sigma\right)$$

кўринишда бўлади.

Бундаги $\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1-\delta^2}}\right)$ нормал қонуннинг тақсимот функциясидир.

$$\theta\left(\frac{x}{\delta}\right)$$

эса $v=v(\lambda)$ нинг тақсимот функциясидир.

Масалан (Пуассон тақсимоти). Бу иккита тақсимот функциянинг композицияси ёки боғлами узлуксиз тақсимот функциясини беради, яъни

$$\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1-\delta^2}}\right) * \theta\left(\frac{x}{\delta}\right) = H_\lambda(x)$$

десак, $H_\lambda(x)$ – узлуксиз тақсимот функцияни беради.

Агар ҳар хил тақсимланган ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодикий миқдорлардан бир хил тақсимланган ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодикий миқдорга ўтсак,

$$\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1-\delta^2}}\right) * \theta\left(\frac{x}{\delta}\right) = H_\lambda(x)$$

Функция композицияси битта $\Phi(x)$ нормал тақсимот функциясига айланади,

чунки, $\theta\left(\frac{x}{\delta}\right)$ даги $\left(\delta = \alpha\gamma/\sigma\right)$ миқдорда $\delta = 0$ бўлади.

$\frac{x}{\delta} \rightarrow \infty$ га интилади $\delta \rightarrow 0$ да $\theta(\infty) = 1$ бўлади, тақсимот функциянинг хоссасига асосан.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{x}{\delta} = \theta(\infty)$$

демак,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \theta\left(\frac{x}{\delta}\right) = \theta(\infty) = 1$$

Айтайлик :

$$S_v = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_v \quad (2)$$

йиғинди берилган бўлсин. (2) мураккаб тасодифий миқдор бўлиб, v - дискрет тақсимланган тасодифий миқдор

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ лар узлуксиз миқдор бўлиши мумкин.

Бу мураккаб S_v - тасодифий миқдорнинг $v(\lambda) \rightarrow \infty$ даги асимптотик кўриниш, иккита тақсимотнинг боғланишидан иборат бўлади.

Биринчиси дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси, иккинчиси эса узлуксиз тасодифий миқдорнинг тақсимот функциясидир.

Уларнинг боғлами узлуксиз типдаги тасодифий миқдорнинг тақсимот функциясини беради.

Бу илмий ишнинг мақсади: Бир хил тақсимланган, ўзаро боғлиқ бўлмаган (1) тасодифий миқдордан тузилган тасодифий индексли (2) йиғинди учун $v(\lambda) (\lambda \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$ лимит теоремани исботлашдир.

Бундай масалалар Г.Роббинс, С.Х.Сирожиддинов ва Г.Оразов, И.Неъматовлар томонидан ўрганилган.

Г.Роббинс (2) йиғинди учун чегараланган шартларда умумий лимит теоремаларни исботлаган С.Х.Сирожиддинов ва Г.Оразовлар тасодифий

сондаги тасодифий қўшилувчилар учун берилган Г.Роббинс теоремасининг қолдиқ ҳадини баҳосини ҳисоблашган.

И.Неъматов эса бу масалаларни ҳар хил тақсимланган тасодифий сондаги тасодифий қўшилувчиларга ўтказган.

Бу илмий тадқиқотда “Панжарасимон” тақсимот алоҳида теорема қилиб берилган.

Локал лимит теоремаларни иккита ҳолатдаги кўринишини берамиз панжарасимон ва узлуксиз бўлган ҳолатлар.

Таъриф 1. Агар тасодифий миқдор $a+kh$ кўринишдаги қийматларни қабул қилса, бундай дискрет тасодифий миқдорни панжарасимон тақсимланган тасодифий миқдор деб юритилади.

Яъни:

$$\xi = a + kh, -\infty < k < \infty$$

қийматларни қабул қилади. Бундай тақсимотга мисоллар,

Пуассон тақсимоми $P(\xi = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}; \lambda > 0, k=1, 2, 3, \dots$

Бернулли тақсимоми $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

$$(p+q=1); \quad \left(1 \leq k \leq n, C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \right)$$

Эҳтимоллик назарияси курсидан маълумки ξ тасодифий панжарасимон тақсимотга эга бўлиши учун унинг характеристик функцияси 1 га тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

Яъни : $|f(t)|=1$

Бу тақсимотда $h > 0$ миқдор тақсимотнинг қадами деб юритилади.

Фараз қилайлик,

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$$

тасодифий миқдорлар ўзаро боғлиқ эмас ва панжарасимон тақсимотга эга бир хил тақсимланган бўлсин.

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$$

йиғинди ҳам панжарасимон — дискрет тақсимланган тасодифий миқдор бўлади ва у $na + kh$ кўринишдаги қийматларни қабул қилади.

$$S_v = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_v$$

Мураккаб тасодифий миқдорни қараганимизда

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$$

лар панжарасимон тақсимланган v — эса дискрет тақсимланган.

Демак, S_v мураккаб дискрет тақсимланган тасодифий миқдор бўлади.

Бир хил тақсимланган тасодифий миқдорлар учун бундай теоремалар Г.Оразовларнинг [6] диссертациясида кўрилган.

Бунда бир хил тақсимланган тасодифий сондаги тасодифий миқдорлар учун локал лимит теоремалар исботланган.

Агар тасодифий миқдорларнинг тасодифий бўлмаган сонлар йиғиндисининг асимптотик ҳолати кўрилатган бўлса, у ҳолда йиғиндиларнинг ўзлари ёки баъзи қўшилувчилар ихтиёрсиз марказлашади.

Аммо агар тасодифий йиғиндилар кўрилатган бўлса, у ҳолда йиғиндиларни марказлаштириш ва қўшилувчиларни марказлаштириш умуман олганда ҳар хил асимптотик тақсимотларга олиб келади.

Ниҳоят, йиғиндиларни ўзгармаслар билан нормаллаш жуда ҳам мос ва умуман олганда тасодифий йиғиндиларнинг асимптотик ҳолатини жуда ҳам

жамлаган, ёритилишга келтириш баъзи бир ҳолларда тасодифий миқдорлар билан нормаллаш баъзан қулай бўлиши мумкин.

Ушбу ишда биз барча ҳолларни кўриб чиқамиз, яъни тасодифий йиғиндилар тасодифий миқдорлар билан нормалланган ҳолни кўриб чиқамиз.

Бизга $\{\xi_j\}_{j \geq 1}$ тасодифий миқдорлар кетма - кетлиги $\{a_n\}_{n \geq 1}$ ва $\{b_n\}_{n \geq 1}$ сонлар кетма - кетлиги берилган бўлсин.

$$\frac{\xi_n - a_n}{b_n} \Rightarrow \xi$$

Бу ерда ξ – тасодифий миқдор.

$M'(x) \ x > 0$ ва $N'(x) \ x > 0$ функциялар $x \ M'(x) \ x < 0$ ва $x \ N(x) \ x > 0$ да ўсмайди.

Айтайлик, тасодифий миқдор $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ кетма – кетликка боғлиқмас бўлсин.

Бизни ξ_v тасодифий миқдорларнинг асимптотик тақсимооти қизиқтиради, бунда $\theta \rightarrow \infty$.

Энди ушбу марказлашган функцияни кўриб чиқайлик .

$$A(\theta): (0, \infty) \rightarrow R \text{ ва } a(\theta): (0, \infty) \rightarrow R$$

Ушбу йиғиндиларни киритамиз .

$$f_1^\theta(t) = E \exp \left\{ it \frac{\xi_v - a(\theta)}{b_v} \right\}$$

$$f_2^\theta(t) = E \exp \left\{ it \left(\frac{\xi_v}{b_v} - A(\theta) \right) \right\}$$

$$f_3^\theta(t) = E \exp \left\{ it \frac{\xi_v - a_v}{b_v} \right\}$$

$$v_1^{(\theta)}(t) = E \exp \left\{ it \frac{\xi_v - a(\theta)}{b_v} \right\}$$

$$v_2^{(\theta)}(t) = E \exp \left\{ it \left(\frac{\xi_v}{b_v} - A(\theta) \right) \right\}$$

$$f_n(t) = E \exp \left\{ it \frac{\xi_v - a_n}{b_n} \right\}$$

Теорема 1. (1) ва(2) ўринли ва $\theta \rightarrow \infty$ га эҳтимоллик билан $v \rightarrow \infty$ у ҳолда ҳар қандай $t \in R$ учун:

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \left| f_1^{(\theta)}(t) - v_1^{(\theta)}(t)h(t) \right| = 0 \quad (3)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \left| f_2^{(\theta)}(t) - v_2^{(\theta)}(t)h(t) \right| = 0 \quad (4)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \left| f_3^{(\theta)}(t) - h(t) \right| = 0 \quad (5)$$

ўринли бўлади.

Исбот. Тўла эҳтимоллик формуласига асосан :

$$f_1^\theta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P(v = n) \exp \left\{ it \frac{a_n - a(\theta)}{b_n} \right\} f_n(t) \quad (6)$$

$$v_1^{(\theta)}(t)h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P(v = n) \exp \left\{ it \frac{a_n - a(\theta)}{b_n} \right\} h(t) \quad (7)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Ҳар қандай $n \geq n_0$ учун :

$$|f_n(t) - h(t)| < \varepsilon$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи $n_0 = n(\varepsilon)$ ларни (1) бўлганда $\varepsilon > 0$ дан қатъи назар танлаб олишимиз мумкин.

Шунинг учун (6) ларни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\begin{aligned}
& \left| f_1^{(\theta)}(t) - v_1^{(\theta)}(t)h(t) \right| = \\
& = \left| \sum_{n=1}^{\infty} P(v = n) \exp \left\{ it \frac{a_n - a(\theta)}{b_n} \right\} [f_n(t) - h(t)] \right| \leq \\
& \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(v = n) |f_n(t) - h(t)| \leq \\
& \leq P(v = n_0) + \varepsilon
\end{aligned} \tag{8}$$

(2) тенглик учун $\theta = \theta_0$ (n_0) бўлганда $\theta \geq \theta_0$

$$P(v = n_0) < \varepsilon \tag{9}$$

ўринли бўлади.

Шундай қилиб, (8) ва (9) дан қуйидаги тенгсизлик келиб чиқади, фақат $\theta \leq \theta_0$ бўлганда ушбу ўринлидир:

$$\left| f_n^{(\theta)}(t) - v_1^{(\theta)}h(t) \right| < 2\varepsilon \tag{10}$$

Кўпайтувчи ε (10) тенгсизликда (3) ни исботлаяпти.

$$\begin{aligned}
f_2^{(\theta)}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(v = n) \exp \left\{ \left(\frac{a_n}{b_n} - A(\theta) \right) \right\} f_n(t) \\
v_2^{(\theta)}(t)h(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(v = n) \exp \left\{ \left(\frac{a_n}{b_n} - A(\theta) \right) \right\} h(t)
\end{aligned}$$

Шуларни ҳам юқоридагидек исботлаймиз.

$$\left| f_2^{(\theta)}(t) - v_2^{(\theta)}h(t) \right| =$$

$$= \left| \sum_{n=1}^{\infty} P(v=n) \exp \left\{ \left(\frac{a_n}{b_n} - A(t) \right) \right\} [f_n(t) - h(t)] \right| \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} P(v=n) |f_n(t) - h(t)| \leq 2\varepsilon$$

Бундан (4) нинг тўғрилигига ишонч ҳосил қиламиз.

$$f_3^{(\theta)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P(v=n) \times$$

$$\times \exp \left\{ it \frac{\xi_n - a_n}{b_n} \right\} f_n(t)$$

$\frac{\xi_n - a_n}{b_n} \Rightarrow \xi$ га асосан ва Теплица леммасидан (5) тенгсизлик ҳам келиб чиқади.

Энди қуйидагича белгилашларни қабул қиламиз;

Яъни :

$$F_{\theta,1}(x) = P(S_v - a(\theta) < x b_v)$$

$$F_{\theta,2}(x) = P\left(\frac{S_v}{b_v} - A(\theta) < x\right)$$

$$F_{\theta,3}(x) = P(S_v - a_v < x b_v)$$

$$V_{\theta,1}(x) = P(a_v - a(\theta) < x b_v)$$

$$V_{\theta,2}(x) = P\left(\frac{a_v}{b_v} - A(\theta) < x\right)$$

Юқоридагидек $L(F, G)$ F ва G тақсимот функцияси орасидаги Леви масофасини ифодаласин.

Юқоридаги тенгламалардан ва (1) теоремадаги $\xi_v = S_v$ ни қўйиб қуйидаги натижани оламиз

Натижа. (1) ва (2) дан қуйидаги келиб чиқади, яъни :

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \infty} L(F_{\theta,1}, V_{\theta,1} * H) &= \\ &= \lim_{\theta \rightarrow \infty} L(F_{\theta,2}, V_{\theta,2} * H) = \\ &= \lim_{\theta \rightarrow \infty} L(F_{\theta,3}, H) = 0 \end{aligned}$$

Ушбу боғлиқмас тасодифий миқдорлар яъни :

$$\frac{a_v - a(\theta)}{d(\theta)} \quad \text{ва} \quad \frac{\xi b(\theta)}{d(\theta)} \quad \text{лар}$$

$$R_{\theta}(x) = v_{\theta}(x) * H\left(x \frac{d(\theta)}{b(\theta)}\right) \quad (11)$$

тенгсизликни қаноатлантиради. Тўла эҳтимоллик формуласидан :

$$\begin{aligned} R_{\theta}(x) &= P\left(\frac{a_v - a(\theta)}{d(\theta)} + \xi \frac{b(\theta)}{d(\theta)} < x\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(v = n) \cdot P\left(\frac{a_n - a(\theta)}{d(\theta)} + \xi \frac{b(\theta)}{d(\theta)} < x\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(v = n) \cdot P\left(\xi < \frac{xd(\theta) - a_n + a(\theta)}{b(\theta)}\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(v = n) \cdot H\left(\frac{xd(\theta) - a_n + a(\theta)}{b(\theta)}\right) \end{aligned}$$

Биз бу бўлимда ушбу $\frac{\xi_v - a(\theta)}{d(\theta)}$

тасодифий миқдорнинг ҳолатини ўрганамиз. Бу ҳолат функцияси $\frac{b(\theta)}{d(\theta)}$ га боғлиқдир.

Теорема 2. (1) тенгсизлик ўринли бўлсин .

Агар $\theta \rightarrow \infty$ да $\frac{\xi_v - a(\theta)}{d(\theta)} \Rightarrow 0$ (12) ва

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{b(\theta)}{d(\theta)} = 0 \quad (13)$$

ўринли бўлса, у ҳолда ҳар қандай $t \in R$ учун ушбу тенглик ўринли бўлади:

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} |f^{(\theta)} - \tilde{\omega}^{(\theta)}(t)| = 0 \quad (14)$$

Исбот. $\theta \rightarrow \infty$ да (12) ва (13) дан келиб чиқади:

$$\frac{b_v}{d_v} \Rightarrow 0 \quad (15)$$

Баъзи бир $\delta > 0$ учун $N_1 = N_1(0, \delta) = \{n, b_n < \delta(\theta)\}$ ни белгилаймиз ва $t \in R$ ни фиксрлаймиз.

Бундан эса қуйидаги тенгсизликни ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned} & |f^{(\theta)} - \tilde{\omega}^{(\theta)}(t)| = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(v = n) \cdot \exp \left\{ it \frac{a_n - a(\theta)}{d(\theta)} \right\} \cdot \left[f_n \left(t \frac{b_n}{d(\theta)} \right) - 1 \right] \leq \\ &\leq \sum_{n=N_1} P(v = n) \left| f_n \left(t \frac{b_n}{d(\theta)} \right) - 1 \right| + P(v \in N_1) \end{aligned} \quad (16)$$

ва (1) ўринли бўлса, характеристик функциялар оиласи $\{f_n(t)\}_{n \geq 1}$ 0 да тенг даражали узлуксиз бўлади. Шунинг учун $\varepsilon > 0$ бўлганда $\delta = \delta(t, \varepsilon)$ қуйидаги шартларни қаноатлантирсин;

яъни, $n \in N_1(\theta, \delta)$ учун

$$\left| f_n \left(t \frac{b_n}{d(\theta)} \right) - 1 \right| \leq \frac{\sup_k}{k} \frac{\sup_{|\tau| < |t| \delta}}{|f_k(\tau) - 1| < \varepsilon} \quad (17)$$

кўпинча (15) танлаб олинган $\delta = \delta(t, \varepsilon)$ учун $\theta_1 = \theta_1(\delta)$ ни кўрсатиш керак, яъни:

$$P(dN_1) = P\left(\frac{b_n}{d(\theta)} > \delta\right) < \varepsilon \quad (18)$$

Барча $\theta \geq \theta_0$ лар учун ўринлидир. (16) ва (18) лардан $\theta \geq \theta_1$ дан

$$|f^{(\theta)}(t) - \tilde{\omega}^{(\theta)}(t)| < 2\varepsilon$$

келиб чиқади.

Фараз қилайлик,

$$S_v = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_v$$

$$P_k = P(v(\lambda) = k) = P_k(\lambda);$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k(\lambda) = 1$$

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\eta_\lambda = \frac{(S_v - MS_v)}{\sqrt{Dv}} \quad \text{ва} \quad \frac{(v - Mv)}{\sqrt{Dv}}$$

Тасодифий миқдорларнинг тақсимот функцияси $F_\lambda(x)$ ва $\theta_\lambda(x)$ характеристик функциялари $F_\lambda(t)$, $\theta_\lambda(t)$ бўлсин.

Теорема 3. Агар v тасодифий индекс бўлса, ва

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(v = k) a_k < \infty$$

$$a_k = M\xi_k$$

бўлса, у ҳолда

$$Ma_k = a \propto \text{тенгдир.}$$

Исбот: S_v нинг математик кутилмаси:

$$MS_v = M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_v)$$

тўла эҳтимоллик формуласига асосан,

$$\begin{aligned}
 MS_v &= \sum_{k=1}^{\infty} M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k) P_k = \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\sum_{i=1}^k \xi_i\right) P_k = \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^k (M\xi_i) P_k = \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^k a_i\right) P_k = \sum_{k=1}^{\infty} k a P_k = \\
 &= a \sum_{k=1}^{\infty} k P_k = a \propto
 \end{aligned}$$

бўлади.

S_v нинг дисперсияси қуйидагича

$$\begin{aligned}
 aS_v &= MS_v^2 - [MS_v]^2 = \\
 &= \propto v^2 + a^2 \gamma^2
 \end{aligned}$$

Айтайлик,

$$\{a_n\}_{n \geq 1}; \quad \{b_n\}_{n \geq 1} = \frac{S_n - a_n}{b_n} \quad (1) \text{ бўлсин.}$$

Унинг тақсимот функцияси $H(x)$ ва характеристик функцияси $h(t)$ бўлсин.

S_v нинг $v(\lambda) \rightarrow \infty$ даги асимптотик тақсимотни кўрайлик.

Маълумки,

$$f(t) = M \exp \left\{ it \frac{S_v - a(v)}{b_v} \right\}$$

$$v(t) = M \exp \left\{ it \frac{a_v - a(\theta)}{b_v} \right\}$$

Теорема 4. Агар

$$\lambda \rightarrow \infty, \quad v(\lambda) \rightarrow \infty$$

бўлса, у ҳолда :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} |f(t) - v(t)h(t)| = 0$$

Исбот. Тўла эҳтимоллик формуласига асосан

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} P(v = k) \exp \left\{ it \frac{a_k - a(\lambda)}{b_k} \right\} f_n(t)$$

$$f(t)h(t) = \sum_{k=1}^{\infty} P(v = k) \exp \left\{ it \frac{a_k - a(\theta)}{b_k} \right\} h(t)$$

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} = \eta$$

бўлгани учун :

Шундай мусбат $\varepsilon > 0$ сонни топиш мумкинки, $n_0 = n_0(\varepsilon)$ учун

$$|f(t) - v(t)h(t)| < \varepsilon$$

тенгсизликни $n \geq n_0$ учун, ёзиш мумкин.

Шунга асосан:

$$\begin{aligned} & |f(t) - v(t)h(t)| = \\ & = \left| \sum_{n=1}^{\infty} P(v = k) \exp \left\{ it \frac{a_k - a(\theta)}{b_n} \right\} \right| \cdot |f_n(t) - h(t)| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} P(v=k)|f_n(t)-h(t)| \leq \\ &\leq P(v \leq n_0) + \frac{\varepsilon}{2} \quad (*) \end{aligned}$$

Бундаги

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} P(v=k) \exp \left\{ it \frac{a_k - a(\theta)}{b_k} \right\} \leq \\ &\sum_{k=1}^{\infty} P(v=k) \left| \exp \left(it \frac{a_k - a(\theta)}{b_k} \right) \right| = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(v=k) = 1 \end{aligned}$$

(*) муносабатдан:

$$P(v \leq n_0) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ёки

$$|f(t) - v(t)h(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Демак:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} |f(t) - v(t)h(t)| = 0$$

ёки

$$f(t) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} v(t)h(t)$$

келиб чиқади.

3.2. Берри-Эсseen тенгсизлиги ва унинг татбиқлари.

Эсseen томонидан берилган қолдиқ ҳаднинг баҳосини кўрамиз ва шу қолдиқ ҳадга берилган текис ва текисмас баҳо ҳақида фикр юритамиз.

$$|F_n(x) - \Phi(x)| < c \frac{\beta_3}{\sqrt{n}}$$

Бунда қолдиқ ҳад $\beta_3 < \infty$, учинчи тартибли момент шакли бўлган ҳолда берилади.

2.Таъриф: Агар тенгсизликнинг ўнг томони x ўзгарувчига боғлиқ бўлмаган ҳолда баҳоланса, бундай баҳони “текис баҳо” деб юритилади.

3.Таъриф: Агар тенгсизликнинг ўнг томони x ўзгарувчига боғлиқ ҳолда баҳоланса, бундай баҳони “текисмас баҳо” деб юритилади.

С.Г.Эсseen томонидан берилган

$$|F_n(x) - \Phi(x)| < c \frac{\beta_3}{\sqrt{n}}$$

баҳо текис баҳо ва Ю. В. Прохоров томонидан берилган

$$|F_n(x) - \Phi(x)| < c \frac{\beta_3}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1 + |x|^3}$$

баҳо текисмас баҳо ҳисобланади.

$F_n(x)$ ва $\Phi(x)$ дан оғишнинг баҳоси И.А.Ибрагимов ва Ю.В.Линник [3] монографиясида қуйидаги теорема берилган.

Теорема 5. Агар $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги ўзаро боғлиқ бўлмасдан, бир хил тақсимланган ва учинчи тартибли моменти чекланган бўлса, у ҳолда x га нисбатан текис равишда

$$[F_n(x) - \Phi(x)] = \frac{1}{\sqrt{n}c\sigma^3\sqrt{2\pi}}(1 - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (1)$$

бўлади, яъни $F_n(x)$ дан $\Phi(x)$ нинг фарқи тенгликни ўнг томонидаги ёйилма кўринишда бўлади.

Теореманинг исботида

$$F_n(x) - \left[\Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{n}c\sigma^3\sqrt{2\pi}}(1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} \right] = F_n(x) - C(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

айирмани қиймати $n \rightarrow \infty$ да 0 га интилиши исботланган, бу ерда

$$C(x) = \Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{n}c\sigma^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)$$

Бу теорема x га нисбатан текис баҳо кўринишида олинган.

Бошқача қилиб айтганда

$$|F_n(x) - \Phi(x)| = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (2)$$

(2) кабидир, x га нисбатан текис бўлмаган (2) баҳони кейинчалик аниқлаштирилган варианты топилган,

$$F_n(x) - \Phi(x) \leq o\left(n^{-\frac{\delta}{2}}\right), \quad 0 < \delta < 1 \quad (3)$$

(3) агар $\delta = 1$ бўлса, (2) баҳо келиб чиқади.

(3) ни бажарилиши учун шарт зарур ва етарлидир.

$$\int_{|x|>Z} x^2 dF(x) = o(z^{-\delta}) \quad (4)$$

(4) шарт дисперсиянинг “думи” ҳисобланади, чунки

$$\int_{|x|>Z} x^2 df(x) = \int_{-\infty}^{-Z} x^2 dF(x) + \int_{+Z}^{+\infty} x^2 dF(x)$$

[3] ни монографиясида алоҳида қуйидагича текис баҳо ҳам олинган.

$$\max |F_n(x) - \Phi(x)| \leq C \frac{\beta_3}{\sigma_3^3} * \frac{1}{\sqrt{n}}$$

кўпинча

$$\frac{\beta_3}{\sigma_3^3} = \rho_3$$

каби белгилаш ҳам мавжуд.

$$c = \frac{\sqrt{10} + 3}{c\sqrt{2\pi}}$$

каби ўзгармас сон эканлиги исботланган.

Айтайлик,

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots \quad (1^*)$$

бир хил тақсимланган тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги берилган бўлсин.

Унинг характеристикалари қуйидагича бўлсин:

$$F(x) = P\{\xi < x\}, \quad M\xi = a, \quad D\xi = \sigma^2, \quad \beta_3 = M|\xi - a|^3$$

тасодифий миқдорлар кетма-кетлигидан қуйидагича бўлсин:

$$\eta_v = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_v \quad (2^*)$$

Унинг тақсимот функцияси

$$F_n(x) = P\{\eta_n < x\}$$

бўлади, $\Phi(x)$ -нормал қонун бўйича тақсимланган тасодифий миқдорнинг тақсимот функциясидир.

Маълумки, И.А.Ибрагимов ва Ю.В.Линникларнинг [1] монографиясида (1*) тасодифий миқдорнинг кетма-кетлиги чекли учинчи тартибли моментга эга бўлганда

$$\max_x |F_n(x)| \leq c \frac{\beta_3}{\sigma^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

каби баҳолар берилган эди.

Бундаги c ва кейин келтириладиган $c_1, c_2, \dots$ лар абсолют доимий сонлардир.

Бу олинган (3) натижада $F_n(x)$ нинг $\Phi(x)$ нормал қонундан оғиши x – ўзгарувчига боғлиқ эмас; x - ўзгарувчининг катта қийматларида бу “оғиш” мақсаддаги аниқликни бермайди. Шунинг учун ҳам

$$|F_n(x) - \Phi(x)| = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

каби баҳоларни аниқлаш ёки x -ўзгарувчига нисбатан боғлиқ баҳоларни аниқлаш муҳим аҳамиятга эгадир.

(3) каби баҳоларни, эҳтимоллар назариясида, x -ўзгарувчига нисбатан текис баҳолар, (4) каби баҳоларни x -ўзгарувчига нисбатан текисмас баҳолар деб юритилади.

(4) каби баҳолар А.Д.Мешалкин ва Б.А.Рогозинларнинг [1] илмий ишларида қисман ўрганилган. Ушбу мақолада тайинланган тасодифий миқдорлар учун берилган текисмас баҳоларни тасодифий сондаги тасодифий қўшилувчилар учун ўтказиш қаралади ва умумлаштирилади.

Тасодифий сондаги тасодифий қўшилувчилар назариясига ўтилганда (Вальд назарияси) (2*) йиғинди

$$\eta_v = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_v \quad (2^*)$$

кўринишда унга мос тақсимот функция

$$F_v(x) = P\{\eta_v < x\}$$

кўринишда бўлади, бундаги $v=v(\lambda)$ тасодифий миқдор $\lambda > 0$ - параметрга боғлиқ ва у (1*) тасодифий миқдорлар кетма-кетлигига боғлиқ эмас.

$v=v(\lambda)$ – нинг характеристикалари қуйидагича:

$$P\{v = k\} = p_k$$

$$Mv = \alpha = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k$$

$$Dv = \gamma^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (k - \alpha)^2 p_k$$

Теорема 6. Агар $\beta_3 < \infty$ ва $\gamma^2 = 0$ бўлса, у ҳолда

$$|F_n - \Phi(x)| \leq c_1 \left[\frac{\beta_3}{\sqrt{\alpha}\sigma^3(1+x^2)} + \frac{\gamma}{\alpha} \right]$$

бўлади.

Исбот. Тўла эҳтимоллик формуласига асосан

$$\begin{aligned} |F_n(x) - \Phi(x)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} F_n(x) - \Phi(x) \right| p_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} |F_n(x) - \Phi(x)| p_k = \\ &= \sum_{|k-\alpha| > \frac{\alpha}{2}} |F_k(x) - \Phi(x)| p_k + \sum_{|k-\alpha| \leq \frac{\alpha}{2}} |F_n(x) - \Phi(x)| p_k = I_1 + I_2 \quad (5) \end{aligned}$$

бундаги

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sum_{|k-\alpha| \leq \frac{\alpha}{2}} |F_n(x) - \Phi(x)| p_k, \\ I_2 &= \sum_{|k-\alpha| > \frac{\alpha}{2}} |F_n(x) - \Phi(x)| p_k \end{aligned} \right\}$$

I_1 –ни исботлашда [1] даги усулдан фойдаланамиз,

$$I_1 = \sum_{|k-\alpha| \leq \frac{\alpha}{2}} |F_n(x) - \Phi(x)| p_k \leq \sum_{|k-\alpha| \leq \frac{\alpha}{2}} \frac{c_2 \beta_3}{\sigma^3 \sqrt{k} (1+x^2)} p_k \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{2} c_2 \beta_3}{\sqrt{\alpha} \sigma^3 (1+x^2)} \quad (6)$$

I_2 учун П. Л. Чебишев тенгсизлигидан ва [2] даги исботлаш йўлидан фойдаланамиз:

$$I_2 = \sum_{|k-\alpha| \leq \frac{\alpha}{2}} |F_n(x) - \Phi(x)| p_k \leq \frac{c_3 \gamma}{\alpha} \quad (7)$$

Бунда,

$$P \left\{ |k - \alpha| > \frac{\alpha}{2} \right\} \leq \frac{2D|k - \alpha|}{\alpha}$$

(6) ва (7) ларни (5) га қўйсак теорема исботланади.

Натижа. Агар $\nu(\lambda) = n$ – тайинланган сон бўлса, у ҳолда [1] даги олинган қолдиқ ҳаднинг баҳоси келиб чиқади, чунки $\gamma^2 = 0$ (α) шарт мавжуд.

Зичлик функциялари учун локал лимит теоремаларни исботлашда қуйидаги леммалар керак бўлади.

Лемма 1.

$$MS_\nu = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cdot k \cdot a = a \propto$$

Лемма 2.

$$\begin{aligned}
MS_v^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k)^2 \rho_k = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \{ka + k(k-1)a^2\} \rho_k = 2v^2 + \beta \\
DS_v &= \sigma^2 = \alpha v^2 + a^2 \gamma^2
\end{aligned}$$

1-леммани исботида тўла эҳтимоллик формуласидан фойдаланамиз.

$$\begin{aligned}
MS_v &= \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k) \rho_{\pi} = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n M(\xi_i) \rho_k = a \sum_{k=1}^{\infty} k \rho_k = a \propto
\end{aligned}$$

2-леммада эса

$$\begin{aligned}
MS_v^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k)^2 \rho_k \Rightarrow \\
M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k)^2 &= M \left[\sum_{i=1}^n \xi_i^2 + 2 \sum_{i \leq i < j \leq k} \xi_i \xi_j \right] = \\
M \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right) &+ 2M \left(\sum_{i \leq i < j \leq k} \xi_i \xi_j \right) \\
\sum_{i=1}^n M \xi_i^2 &+ 2 \sum_{i \leq i < j \leq k} M \xi_i \xi_j = \\
\sum_{i=1}^k \xi_i^2 &+ 2 \sum_{i \leq i < j \leq k} M(\xi_i) M(\xi_j) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a^2 \cdot \rho_k + \beta^2 a^2 = 2\nu + \beta^2 a^2$$

1- ва 2-леммалардан:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= DS_v = MS_v^2 - [MS_v]^2 = \\ &= av^2 + \beta^2 a^2 - a^2 \alpha^2 + a^2(\beta^2 - \alpha^2) = 2\nu^2 + a^2 \gamma^2\end{aligned}$$

Демак, $\sigma^2 = 2\nu^2 + a^2 \gamma^2$

Бизнинг асосий мақсадимиз тасодифий индексли лимит теоремаларни квантиллер учун баҳолаш экан, демак, аввало биз квантил – яъни, тескари функция ҳақидаги бизга олдиндан маълум бўлган тушунчаларни эслаб ўтамиз.

A ва B тўплам бўш бўлмасин, ҳамда $f:A \rightarrow B$ акслантириш берилган бўлсин. У ҳолда ҳар бир $a \in A$ учун тузилган $(a; f(a))$ жуфтликлар тўплами f акслантиришни тўла аниқлайди. Энди f акслантириш учун $(f(a); a)$ кўринишда тартибланган барча жуфтликлар тўпламини қарайлик.

Агар барча $(f(a); a)$, $a \in A$ жуфтликлар тўплами ичида ҳар бир $(f(a_0); a_0)$ элемент учун шу тўплам ичидан бошқа $(f(a_0); a)$, $(a_0 \neq a_1)$ жуфтлик мавжуд бўлмаса, f ни A тўпламда тескариланувчи акслантирилиш деб аталади.

Барча $(f(a); a)$, $a \in A$ жуфтликлар аниқланаётган акслантиришни f^{-1} деб белгиланади.

Таъриф 4. A ва B ҳақиқий сонлар тўплами ва $f:A \rightarrow B$ функция берилган бўлиб, $A=D(f)$, $B=E(f)$ бўлсин. Агар ҳар бир $a \in A$ учун тузилган тескари тартибдаги $(f(a); a)$ жуфтликлар тўплами ҳам бирор функцияни аниқласа, у ҳолда f ни A сонлар тўпламида тескариланувчи функция деб айтилади ва унинг тескари функцияси f^{-1} билан белгиланади. Ўзаро тескари функцияларнинг хоссалари:

1⁰ Ўзаро тескари f ва f^{-1} функциялар учун

$$D(f)=E(f^{-1}) \text{ ва } E(f) = D(f^{-1})$$

шарт ўринлидир.

2⁰ Агар f функция f^{-1} функцияга тескари бўлса, у ҳолда f функция ҳам f^{-1} га тескаридир.

3⁰ Агар f функция тескариланувчи бўлса, у ҳолда

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$$

тенглик ҳар бир $x \in A$ учун бажарилади. Яъни $f^0 \cdot f^{-2}$ ва $f^{-2} \cdot f^0$ акслантиришлар айний алмаштирилади.

4⁰ Ҳар қандай ўсувчи (камаювчи) функция тескариланувчидир.

5⁰ Ўсувчи (камаювчи) функцияга тескари функция ҳам ўсувчи (камаювчи) дир.

6⁰ Ўзаро тескари

$$y = f(x) \text{ ва } y = f^{-1}(x)$$

функциялар графиклари $y=x$ тўғри чизиққа нисбатан симметрикдир.

Теорема 7. Агар $y=f(x)$ функция ўзининг ҳар бир қийматини бирор A соҳада фақат бир мартагина қабул қилса, у шу соҳада тескариланувчидир.

Теорема 8. $F:A \rightarrow B$ функция тескариланувчи бўлсин, у ҳолда $x_1 \neq x_2$ эканлигида $f(x_1) \neq f(x_2)$ тенгсизликнинг бажарилиши келиб чиқади ва аксинча, $f(x_1) \neq f(x_2)$ шарт бажарилишидан $x_1 \neq x_2$ тенгсизлик албатта ўринлидир .

$$\forall x_1, x_2 \in A \text{ учун } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$\forall f(x_1), f(x_2) \in B \text{ учун } f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$$

Айтайлик, бизга бир хил тақсимланган, ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$$

ва математик кутилмаси $M_{\xi_i} = a$, дисперсияси $D_{\xi_i} = \sigma^2$ берилган бўлсин.

$$\eta_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n (\xi_j - a)$$

Нормаллашган йиғиндининг тақсимот функциясини $F_n(x)$ билан белгилаймиз.

$\Phi(x)$ -нормал тақсимот функция

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Тадқиқотнинг асл мақсади тасодифий сондаги ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар йиғиндиси учун баҳоларни умумлаштиришдан иборат.

Бунинг учун қуйидаги йиғиндини тузамиз.

$$S_v = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_v$$

ҳар қандай учун

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$$

кетма-кетликка боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдор, бу тасодифий миқдор бутун қийматларни қабул қилувчи миқдордир ва

$$P(v = k) = p_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$$

$$MV(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k = \alpha$$

$$DV(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} (k - \alpha)^2 p_k = \gamma^2$$

Айтайлик , $\eta_v = \frac{S_v - MS_v}{\sqrt{DS_v}}$ бўлсин.

У ҳолда бу мураккаб тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси ва дисперсияси қуйидагича бўлади.

$$\begin{aligned} MS_v &= M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_v) = \\ &= M\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^k \xi_j\right) p_k\right) = a \sum_{k=1}^{\infty} kp_k = a\alpha \\ DS_v &= M \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^k \xi_j\right)^2 p_k - (a\alpha)^2 = \\ &= \alpha v^2 + a^2 \gamma^2 = \sigma^2 \end{aligned}$$

У ҳолда

$$\eta_\lambda = \frac{S_v - a\alpha}{\sqrt{\alpha v^2 + a^2 \gamma^2}}$$

Г.Роббинс

$$P\{\eta_v < x\} = F_\lambda \overrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} Q_\lambda \left(\frac{x}{\sigma}\right) * \left(\frac{x}{\sqrt{1 - \sigma^2}}\right)$$

эканини исботлади.

Бу ерда

$$Q_{\lambda}(x) = P\left(\frac{\nu - \alpha}{\gamma} < x\right) \quad \delta = \frac{\alpha\gamma}{\sigma}$$

$$Q\left(\frac{x}{\delta}\right) * \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1-\delta^2}}\right) \quad \text{-- тақсимот}$$

Иккита тақсимотнинг ўрамадан иборат бўлган узлуксиз тақсимот функциядир.

$F_n(x)$ ва $\Phi(x)$ уларга мос тескари функциялар $F_n^{-1}(y)$ ва $\Phi^{-1}(y)$ ($0 < y < 1$) бўлади. Марказий лимит теоремага кўра ихтиёрий x учун

$$F_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x)$$

бу ерда ихтиёрий y учун

$$F_n^{-1}(y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi^{-1}(y)$$

эканлиги келиб чиқди.

Маълумки,

$$|F_n^{-1}(y) - \Phi^{-1}(y)|$$

га юқоридан баҳо берилган. Баҳонинг кўриниши:

$$|F_n^{-1}(y) - \Phi^{-1}(y)| \leq C_0 \frac{1 + [\Phi^{-1}(y)]^2}{\sqrt{n}}$$

C_0 -мусбат доимий сон.

Бу баҳо $0 < y < 1$ қийматли $[a_n, b_n]$ интервалда қаралади.

Чегаралари интервал охирига n ўсиши билан жуда тез яқинлашувчидир.

$$H_{\lambda}(y) = Q_{\lambda}\left(\frac{x}{\delta}\right) * \left(\frac{x}{\sqrt{1-\delta^2}}\right)$$

Теорема 9. Агар $\lambda \rightarrow \infty$ ва $\gamma^2 = 0$ (α) бўлса, y ҳолда

$$|F_{\lambda}^{-1}(y) - H_{\lambda}^{-1}(y)| \leq C \left[\frac{[1 + [H^{-1}(y)]]^2}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \right]$$

Исбот: Маълумки,

$$\begin{aligned} |F_{\lambda}^{-1}(y) - H_{\lambda}^{-1}(y)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} [F_{\lambda}^{-1}(y) - H_{\lambda}^{-1}(y)] p_k = \\ &= \sum_{k < [\alpha/2]} |F_k^{-1}(y) - H_k^{-1}(y)| p_k + \\ &+ \sum_{k \geq [\alpha/2]} |F_k^{-1}(y) - H_k^{-1}(y)| p_k \end{aligned}$$

П. Л. Чебишев тенгсизлигига асосан,

$$\begin{aligned} \sum_{k < [\alpha/2]} p_k p \left\{ |k - \alpha| \geq \frac{\alpha}{2} \right\} &\leq 4 \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \\ |F_{\lambda}^{-1}(y) - H_{\lambda}^{-1}(y)| &\leq 4 \frac{\gamma^2}{\alpha^2} + \\ + \sum_{k \geq [\alpha/2]} |F_k^{-1}(y) - H_k^{-1}(y)| p_k &\leq \\ \leq 4 \frac{\gamma^2}{\alpha^2} + C_0 \sum_{k \geq [\alpha/2]} \frac{1 + [H_k^{-1}(y)]^2}{\sqrt{k}} \cdot p_k & \\ \leq 4 \frac{\gamma^2}{\alpha^2} + C_0 \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \cdot \sum_{k \geq [\alpha/2]} [1 + [F_k^{-1}(y)]^2] p_k &\leq \end{aligned}$$

$$\leq 4 \frac{\gamma^2}{\alpha^2} + C_0 \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \left[1 + [F_\lambda^{-1}(y)]^2 \right] \sum_{k=1}^{\infty} p_k \leq$$

$$\leq C \left[\frac{1 + [H_\lambda^{-1}(y)]^2}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \right]$$

Теорема 10. Агар юқоридаги теоремада $\gamma^2 = 0$ (α) бўлса, у ҳолда

$$|F_\lambda^{-1}(y) - \Phi^{-1}(y)| \leq C_1 \left[\frac{1 + [\Phi^{-1}(y)]^2}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \right]$$

Исбот: Агар $\gamma^2 = 0$ (α) бўлса, у ҳолда $\delta = \frac{\alpha\gamma}{\sigma} \rightarrow 0$ ва $Q_\lambda\left(\frac{x}{\delta}\right) \rightarrow 1$ бўлиб, $\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1-\delta^2}}\right) \rightarrow \Phi(x)$

келиб чиқади.

Шунинг учун $Q_\lambda\left(\frac{x}{\delta}\right) * \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1-\delta^2}}\right) \rightarrow \Phi(x)$

Теорема 11. Агар $M\xi_1 = a = 0$ бўлса, у ҳолда

$$|F_\lambda^{-1}(y) - \Phi^{-1}(y)| \leq C_1 \left[\frac{1 + [\Phi^{-1}(y)]^2}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \right]$$

муносабат ўринли бўлади.

Исбот: Агар $a=0$ бўлса, у ҳолда $\sigma = 0$

$$Q_\lambda\left(\frac{x}{\delta}\right) * \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1-\delta^2}}\right) = \Phi(x)$$

Бу теоремани исботи ҳам 9 теореманинг хулосаси сифатида келиб чиқади.

Натижа 1. Агар 9 теоремада $P(v=k) = 1$ бўлса, у ҳолда

$$|F_n^{-1}(y) - H_n^{-1}(y)| \leq C_2 \left[\frac{1 + [H^{-1}(y)]^2}{\sqrt{n}} \right]$$

Натижа 2. Агар 10 теоремада $P(v=k)=1$ бўлса, у ҳолда

$$|F_n^{-1}(y) - \Phi^{-1}(y)| \leq C_3 \left[\frac{1 + [\Phi^{-1}(y)]^2}{\sqrt{n}} \right]$$

$C, C_1, C_2, \dots$ лар турлича доимий сонлар.

3.3. Б.Розен теоремасининг қолдиқ ҳади баҳоси ҳақида.

Айтайлик, “ $\perp_n$ ”-ҳақиқий сонлар ўқидаги интервал, $L_n(\perp_n)$ –унинг узунлиги бўлсин.

$C_1, C_2, \dots$ - доимий сонлар бўлиб, n ва $\perp_n$ уларга боғлиқ эмас.

ξ_j ($j=1,2,\dots$)-ўзаро боғлиқ бўлмаган, ҳар хил тақсимланган, $F_j(x)$ -тақсимот функциясига эга бўлган тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги бўлсин, ҳамда

$$M_{\xi_j} = a_j, \quad D\xi_j = v_j^2, \quad A_k = \sum_{j=1}^k a_j, \quad V_k^2 = \sum_{j=1}^k v_j^2$$

Қуйидаги йиғиндини қараймиз:

$$\zeta_v = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_v \quad (1)$$

Бундаги $v=v(\lambda)$ ҳар бир $\lambda>0$ учун $\xi_1, \xi_2, \dots$ тасодифий миқдорларга боғлиқ бўлмаган ва мусбат қийматларни қабул қилувчи тасодифий миқдордир, унинг сонли ҳарактеристикалари қуйидагича:

$$P(v = k) = p_k, \quad Mv = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k = \alpha,$$

$$Dv = Mv^2 - [Mv]^2 = \gamma^2$$

Қуйидаги белгиларни киритамиз:

$$N = \sum_{j=1}^v a_j, \quad MN = \rho; \quad DN = \bar{\gamma}^2$$

$$V_v^2 = \sum_{j=1}^v v_j^2; \quad MV_v^2 = w^2; \quad DV_v^2 = \sigma_1^2$$

[1] да қуйидаги леммаларни исботи берилган, шулардан фойдаланамиз:

Лемма 3.

$$M\zeta_v = M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_v) = \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k) p_k = \rho$$

Лемма 4.

$$D\zeta_v = \sigma^2 = \sigma_1^2 + \bar{\gamma}^2;$$

Тасодифий миқдорлар бир хил тақсимланган бўлса, белгилашлар қуйидагича бўлади:

$$M\xi_1 = a_1 ; \quad D\xi_1 = v^2$$

ва

$$M\zeta_v = a \propto; \quad D\zeta_v = \sigma_0^2 = av^2 + a^2\gamma^2$$

эканлиги осон келиб чиқади.

Б.Розеннинг [2] илмий ишида $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги бир хил тақсимланган бўлиб,

$$\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n \quad (2)$$

йиғинди учун

$$P\{\zeta_n \in \perp_n\}$$

эҳтимоллик баҳоланади. Бунда қуйидагича баҳолар олинган:

1. Агар $L_n(\perp_n) \leq n^p, \quad 0 < p < \frac{1}{2}$ бўлса, у ҳолда

$$P\{\zeta_n \in \perp_n\} \leq \frac{C_1}{n^{\frac{1}{2}-p}},$$

2. Агар $L_n(\perp_n) \leq C_2$ бўлса, у ҳолда

$$P\{\zeta_n \in \perp_n\} \leq \frac{C_3}{\sqrt{n}}$$

бўлади.

Б.Розеннинг [2] натижасини С.Х.Сирожиддинов, Г.Оразовлар [3] бир хил тақсимланган тасодифий индексли қўшилувчилар учун исбот этишган.

Ушбу илмий ишда ҳар хил тақсимланган тасодифий индексли қўшилувчи қаралади, (1) учун баҳолар олинган, бу билан [2] ва [3] даги натижалар умумлаштирилган.

Юқоридаги каби интервални $\perp_\alpha$, унинг узунлигини

$$L_\lambda \left(T_{\sigma^2/2} \right)$$

каби белгилаймиз.

Маълумки, ихтиёрий λ - параметр учун

$$\gamma = 0(\alpha)$$

бажарилади, ҳусусан $\gamma = C_4 2^{\frac{3}{4} + \frac{p}{2}}$ (3)

тенглик бажарилади, бунда, $0 < p < \frac{1}{2}$.

Масалан, v – тақсимот Пуассон ёки Биномиал қонун бўйича тақсимланган тасодифий миқдор бўлса, (3) муносабат бажарилади.

Теорема12. Агар $\lambda \rightarrow \infty, \sigma^2 \rightarrow \infty$ ва

$$L_\lambda \left(T_{\sigma^2/2} \right) \leq \left(\frac{\sigma^2}{2} \right)^p, \quad 0 < p < \frac{1}{2}$$

бўлса, у ҳолда

$$P \left\{ \zeta_v \in T_{\sigma^2/2} \right\} \leq \frac{c_5}{\sigma^{1-2p}} \text{ бўлади.}$$

Теорема 13. Агар $L_\lambda \left(T_{\sigma^2/2} \right) \leq c_6$ бўлса, у ҳолда

$$P \left\{ \zeta_v \in T_{\sigma^2/2} \right\} \leq \frac{c_7}{\sigma} \text{ бўлади.}$$

12 – теореманинг исботи. Тўла эҳтимоллик формуласига асосан:

$$\begin{aligned} P \left\{ \zeta_v \in T_{\sigma^2/2} \right\} &= \sum_{k=1}^{\infty} P \left\{ \zeta_k \in T_{\sigma^2/2} \right\} p_k = \\ &= \sum_{|V_k^2 - \sigma^2| > \frac{\sigma^2}{2}} P \left\{ \zeta_k \in T_{\sigma^2/2} \right\} p_k + \\ &+ \sum_{|V_k^2 - \sigma^2| \leq \frac{\sigma^2}{2}} P \left\{ \zeta_k \in T_{\sigma^2/2} \right\} p_k = J_1 + J_2 \quad (4) \end{aligned}$$

П.Л.Чебишев теоремасига асосан,

$$\begin{aligned} J_1 &= \sum_{|V_k^2 - \sigma^2| > \frac{\sigma^2}{2}} P \left\{ \zeta_k \in T_{\sigma^2/2} \right\} p_k \leq \\ &\leq P \left\{ |V_k^2 - \sigma^2| > \frac{\sigma^2}{2} \right\} \leq \frac{4\sigma_1}{\sigma^2} < \frac{c_5}{\sigma^{1-2p}} \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_1 &= \sum_{|V_k^2 - \sigma^2| \leq \frac{\sigma^2}{2}} P \left\{ \zeta_k \in T_{\sigma^2/2} \right\} p_k = \\ &= \sum_{\frac{1}{2}\sigma^2 \leq V_k^2 \leq \frac{3}{2}\sigma^2} P \left\{ \zeta_k \in T_{\sigma^2/2} \right\} p_k \leq \\ &\leq \max_{\frac{1}{2}\sigma^2 \leq V_k^2 \leq \frac{3}{2}\sigma^2} P \left\{ \zeta_k \in T_{\sigma^2/2} \right\} \sum_{\frac{1}{2}\sigma^2 \leq V_k^2 \leq \frac{3}{2}\sigma^2} p_k ; \end{aligned}$$

Б.Розен теоремасини ҳисобга олиб, қуйидаги натижага эга бўламиз:

$$\begin{aligned}
& \max_{\frac{1}{2}\sigma^2 \leq V_k^2 \leq \frac{3}{2}\sigma^2} P\left\{\zeta_k \in T_{\sigma^2/2}\right\} \leq \\
& \leq \max_{\frac{1}{2}\sigma^2 \leq V_k^2 \leq \frac{3}{2}\sigma^2} \frac{c' \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^p}{V_k} \leq \\
& \leq \frac{c'}{\left(\frac{\sigma}{2}\right) \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^{-p}} = \frac{c_7}{\sigma^{1-2p}} \quad (6)
\end{aligned}$$

(5) ва (6) ларни (4) га қўйсак, 12- теорема исботланади.

13- теоремани исботи қийин эмас, исботлашда соҳани иккитага

$$E = \left\{|V_k^2 - \sigma^2| > \frac{\sigma^2}{2}\right\},$$

$$\bar{E} = \left\{|V_k^2 - \sigma^2| \leq \frac{\sigma^2}{2}\right\}$$

ажратамиз ҳамда ҳар бири алоҳида-алоҳида баҳоланади.

III боб бўйича хулоса

Агар тасодифий миқдорлар бир хил тақсимланган бўлса, 12 ва 13 теоремалардан С.Х.Сирожиддинов, Г.Оразовларнинг [3] теоремаларга хусусий ҳол сифатида келиб чиқади.

Агар v – тасодифий миқдор учун $P\{v = k\} = 1$ десак, яъни “тасодифий қўшилувчи” эмас, “тайинланган қўшилувчи” бўлса, Б.Розенни [2] иши хусусий ҳол сифатида келиб чиқади.

Хулоса

Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикада тасодифий миқдорлардан тузилган қўшилувчилар учун лимит теоремалари муҳим аҳамиятга эгадир. Бу соҳадаги лимит теоремалари тақсимот функциялар тилида ҳам, характеристик функциялари тилида ҳам анча мукаммал берилган. Шу теоремаларда $F_n(x)$ тақсимот функцияси $\Phi(x)$ нормал тақсимотга, $n \rightarrow \infty$ да, интилиши ёки $f_n(t)$ характеристик функцияни $n \rightarrow \infty$ дан лимити $\varphi(t)$ нормал зичлик функцияга интилиши ўрганилиб

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leq T_1 \quad (A)$$

ёки

$$|f_n(t) - \varphi(t)| \leq T_2 \quad (B)$$

баҳолар олинган. Муҳими шундан иборатки, (A) ва (B) баҳоларни аниқлашдаги баҳо x ёки t ўзгарувчига боғлиқ бўлган ва уларга боғлиқ бўлмаган баҳолар кам ўрганилган. Айниқса, x ва y ўзгарувчиларга боғлиқ бўлган баҳолар жуда кам ўрганилган.

Шу маънода ушбу магистрлик диссертацияда қолдиқ ҳад учун баҳолар, асосан, тасодифий сондаги тасодифий қўшилувчилар учун берилган. Бу теоремаларни исботлаш аввало, бир хил тақсимланган тасодифий миқдорлар учун берилган. Кейинчалик тасодифий миқдорлар ҳар хил тақсимланган ҳолатга ўтказилиб, теоремалар исботланган. Шунга мос мисоллар ҳам келтирилган. Тасодифий қўшилувчилар ҳар хил тақсимланган ҳолдаги натижалардан, хусусий ҳол сифатида бир хил тақсимланган ҳолдаги маълумотлар келиб чиқади, келтирилган мисоллардан ҳам бир хил тақсимланган ҳолдаги натижалар олинади.

Қолдиқ ҳадни баҳолашда тенгсизликнинг ўнг томонида иккита қўшилувчи йиғиндиси келтирилади. Бундаги қўшилувчи берилган бошланғич тасодифий миқдорлар характеристикасидан - математик кутилмаси ва дисперциясидан иборатдир.

Ижтимоий ва иқтисодий масалаларни ечишда ана шу қолдиқ ҳаддаги иккита йиғиндини характеристикасидан фойданилади. Олий математикадаги “Энг кичик квадратлар усули”, эмпирик функциянинг ҳолатини ўрганиш ҳам эҳтимоллар назарияси ва математик статистиканинг лимит теоремалари, текис ва текис бўлмаган ҳатоликлар тушунчасининг татбиқидан иборатдир.

Тафсия этиладиган манбаалар ва адабиётлар.

- [1]. И.А.Каримов “Юксак маънавият - енгилмас куч” Тошкент 2009 й.
- [2]. И.А.Каримов “Ўзбекистон мустақилликка эришиш остонасида” Тошкент 2011й.
- [3]. С.Х.Сирожиддинов, М.Маматов “Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика” Тошкент 1980 й.
- [4]. А.Н.Колмогоров. Основные понятия теории вероятностей. Москва 1974г.
- [5]. И.А.Ибрагимов, Ю.В.Линник “Независимые и стационарно связанные величины” Москва 1965 г.
- [6]. Б.В.Гнеденко Курс теории вероятностей. Москва “Наука” 1982г.
- [7]. А.А.Бороков Курс теории вероятностей. Москва “Наука” 1976г.
- [8]. М.Лоев Теории вероятностей. И.Л.М.1962г.
- [9]. Л.Д.Мешалкин Сборник задач по теории вероятностей. Москва. 1963г.
- [10]. Н.Robbins. Asymptotic distribution of the sum of a random number of random variables Bull. of Amer. Math. Soc. 54.N12. 1948 y.
- [11]. В.Rosen. On the asymptotic distribution of sums of independent identically distributed random variables. Arkiv for matematik .IV.4.1962 y.
- [12]. И.Неъматов. Кондидацкая диссертация. Тошкент. 1975 г.
- [13]. В.Феллер. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т.1,Т.2 Мир 1967 г.