

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС
ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ
МИРЗО УЛУҒБЕК НОМИДАГИ ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ
УНИВЕРСИТЕТИ**

БИОЛОГИЯ-ТУПРОҚШУНОСЛИК ФАКУЛЬТЕТИ

ИЗОКЛИНАЛАР ВА КЕТМА-КЕТ ЯҚИНЛАШИШ МЕТОДЛАРИ

Реферат

Тайёрловчи: Файзиев Д.Д.

ТОШКЕНТ-2015

ИЗОКЛИНАЛАР ВА КЕТМА-КЕТ ЯҚИНЛАШИШ МЕТОДЛАРИ

1. Ҳосилага нисбатан ечилмаган биринчи тартибли тенгламанинг умумий кўриниши қуйидагича бўлади:

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

Бу тенгламани қуйидаги усуллар билан ечиш мумкин.

I. Агар (1) тенгламани y' га нисбатан ечишга имконият бўлса, $y' = f_i(x, y)$, $i = 1, 2, \dots$ кўринишдаги бир нечта тенгламани оламиз. Бу тенгламаларнинг ҳар бирини ечиб (1) тенгламанинг ечимларини топамиз.

2. (1) тенгламани параметрик кўринишга ўтказамиз:

$$x = \phi(u, v), \quad y = \phi(u, v), \quad y' = \chi(u, v).$$

$dy = y'dx$ боғланишни эътиборга олиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} du + \frac{\partial \phi}{\partial v} dv = \chi(u, v) \left[\frac{\partial \phi}{\partial u} du + \frac{\partial \phi}{\partial v} dv \right],$$

бу тенгламани dv/du га нисбатан ечиб оламиз:

$$\frac{dv}{du} = \frac{\chi(u, v) \frac{\partial \phi}{\partial u} - \frac{\partial \phi}{\partial u}}{\frac{\partial \phi}{\partial u} - \chi(u, v) \frac{\partial \phi}{\partial v}}. \quad (2)$$

Натижада, биз ҳосилага нисбатан ечилган тенгламага эга бўлдик, шу билан тенглама аввал кўрилган тенгламаларнинг бирига келди. Лекин (2) тенглама кўпинча квадратураларда интегралланмайди.

Қуйидаги хусусий ҳолларни алоҳида кўриб чиқайлик.

3. (1) тенглама

$$F(y') = 0 \quad (3)$$

кўринишда бўлиб, $F(y') = 0$ тенгламанинг камида битта $p = k_i$ хақиқий ечими мавжуд бўлсин.

(3) тенглама x ва y га боғлиқ бўлмагани учун k_i ўзгармас. $y' = k_i$ тенгламани интеграллаб, $y = k_i x + C$ ни, бундан эса $k_i = \frac{y-C}{x}$ оламиз.

$k_i \leftrightarrow F(p) = 0$ тенгламанинг ечими бўлгани учун $F\left(\frac{y-C}{x}\right) = 0$

берилган тенгламанинг интеграли бўлади.

4. (1) тенглама

$$F(x, y') = 0 \quad (4)$$

кўринишда бўлсин. Агар бу тенгламани y' га нисбатан ечиб олиш қийин бўлса, t параметр киритиш ва (4) тенгламани иккита тенгламага алмаштириш маъкул: $x = \varphi t$ ва $y' = \varphi' t$. $dy = y' dx$ бўлгани учун бизнинг ҳолимизда $dy = \varphi' t \varphi' t dt$ бу ердан $y = \int \varphi' t \varphi' t dt + C$ ва демак, ечим параметрик кўринишда қуйидагича бўлади:

$$x = \varphi t ,$$

$$y = \int \varphi' t \varphi' t dt + C.$$

Агар (4) тенгламани x га нисбатан ечиш мумкин бўлса, $x = \varphi y'$, t параметр сифатида доим y' ни олган маъкул: $y' = t$. У ҳолда

$$x = \varphi t , \quad dy = y' dx = t \varphi' t dt, \quad y = \int t \varphi' t dt + C$$

бўлиб, ечим

$$x = \varphi t , \quad y = \int t \varphi' t dt + C$$

кўринишда бўлади.

5. Агар (1) тенгламани y га нисбатан ечиш қулай бўлса, параметр сифатида x ва y' ларни олган маъкул. Ҳақиқатан ҳам (1) тенгламанинг кўриниши

$$y = f(x, y') \quad (5)$$

бўлсин. У ҳолда x ва y лар сифатида x ва y' ларни олиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$y = f(x, p) , \quad dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial p} dp$$

ёки

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx}, \\ p &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx}. \end{aligned} \quad (6)$$

(6) ни интеграллаб, $\Phi(x, p, C) = 0$, ни оламиз.

$$\Phi(x, p, C) = 0,$$

$$y = f(x, p)$$

биргаликда параметрик кўринишдаги интеграл чизиклар оиласини беради.

6. Агар (1) тенглама x га нисбатан осон ечилса, яъни $x = f(y, y')$ бўлса, параметр сифатида y ва $y' = p$ ларни олган маъкул. $dy = y' dx$ эканлигини эътиборга олсак,

$$dy = p \left[\frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial p} dp \right]$$

ёки

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dy} \quad (7)$$

тенгликни оламиз. (7) ни интеграллаб, $\Phi(x, p, C) = 0$ ни оламиз. $\Phi(x, p, C) = 0$ ва $x = f(y, p)$ биргаликда берилган тенгламанинг интеграл чизиқлари оиласини беради.

7. $y = x\varphi(y') + \phi(y')$ – Лагранж тенграмаси. Бу тенграмани x бўйича дифференциаллаб, $y' = p$ десак,

$$p = \varphi(p) + x\varphi'(p) \frac{dp}{dx} + \phi'(p) \frac{dp}{dx} \quad (8)$$

ёки

$$\left[p - \varphi(p) \right] \frac{dp}{dx} = x\varphi'(p) + \phi'(p). \quad (9)$$

Бу чизиқли дифференциал тенглама ва қийинчиликсиз интегралланади (3-§, 1 п. га қаранг). (9) нинг интеграли $\Phi(x, p, C) = 0$ ва $y = x\varphi(p) + \phi(p)$ биргаликда Лагранж тенграмасини беради.

$$\Phi(x, p, C) = 0, \quad (10)$$

$$y = x\varphi(p) + \phi(p).$$

Фақат биз (8) дан (9) га ўтаётганда тенгликни dp/dx га бўлиш чоғида $p = p_i$ ўзгармас ечимларни (агар улар мавжуд бўлса) йўқотаяпмиз, $dp/dx \equiv 0$. p ни ўзгармас десак, у (8) ни қаноатлантириши учун албатта $p - \varphi(p) = 0$ тенграмани қаноатлантириши керак, чунки $dp/dx \equiv 0$. Демак, агар $p - \varphi(p) = 0$ тенграманинг ҳақиқий $p = p_i$ ечимлари мавжуд бўлса, (10) га унинг тўлиқ бўлиши учун $y = x\varphi(p_i) + \phi(p_i)$ ни қўшиб қўйиш керак. Шундай қилиб, умуман интеграл чизиқлар

$$\Phi(x, p, C) = 0, \quad (11)$$

$$y = x\varphi(p) + \phi(p)$$

ёки

$$y = x\varphi(p_1) + \phi(p_1)$$

дан иборат бўлади.

8. $y = xu' + \phi(u')$ – Клеро тенграмаси. $y' = p$ деб олсак, $y = xp + \phi(p)$ ни оламиз. Дифференциаллаб,

$$p = p + x \frac{dp}{dx} + \phi' p \frac{dp}{dx}$$

ёки

$$x + \phi' p \frac{dp}{dx} = 0$$

тенгликни оламиз. Бундан $\frac{dp}{dx} = 0$ ёки $x + \phi' p = 0$ келиб чиқади.

Биринчи ҳолда $p = C$ бўлиб, $y = xp + \phi p$ дан

$$y = Cx + \phi C \quad (12)$$

интеграл чизиклар оиласини оламиз.

Иккинчи ҳолда ечим

$$y = xp + \phi p \quad \text{ва} \quad x + \phi' p = 0 \quad (13)$$

тенгламалар билан аниқланади.

Қийинчиликсиз шунга ишонч ҳосил қилиш мумкинки, (13) тенгликлар билан аниқланадиган интеграл чизик (12) интеграл чизиклар оиласининг ўрамаси бўлади.

Ҳақиқатдан ҳам, қандайдир $\Phi(x, p, C) = 0$ чизиклар оиласининг ўрамаси

$$\Phi(x, p, C) = 0, \quad \partial\Phi/\partial C = 0 \quad (14)$$

тенгламалар билан аниқланади. Шунинг учун (12) чизиклар оиласининг ўрамаси

$$y = xC + \phi C, \quad x + \phi' C = 0$$

тенгламалар билан аниқланади, булар (12) дан фақат параметри билан фарқ қилади, холос.

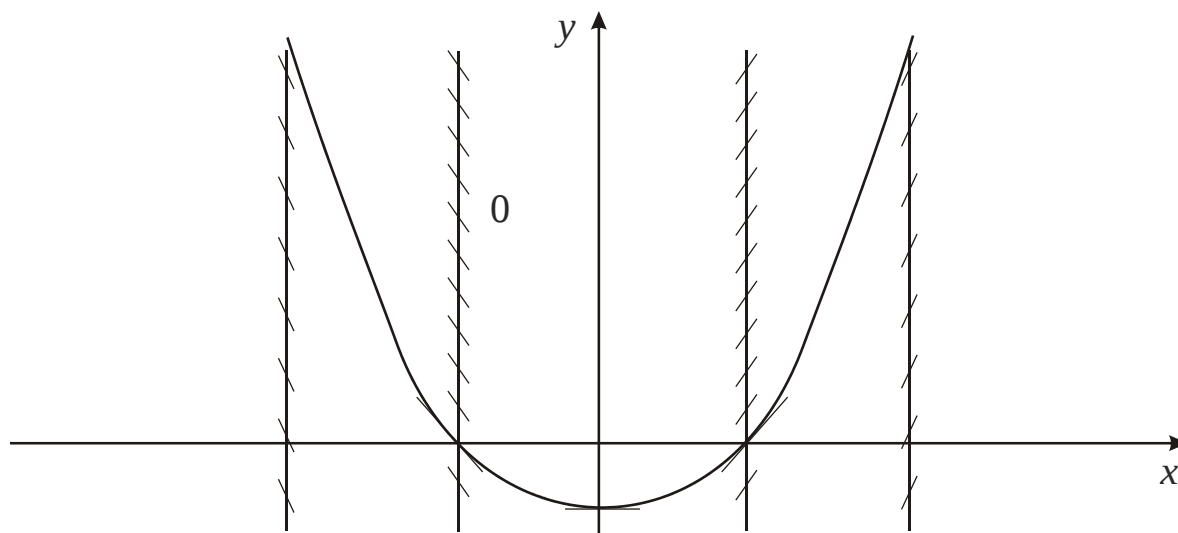
II. Изоклиналар. $y' = f(x, y)$ тенгламанинг x, y нуқтадан ўтган ечими шу нуқтада $f(x, y)$ га тенг бўлган y' ҳосилага эга бўлади, яъни ечим OX ўқи билан $\alpha = \arctg f(x, y)$ бурчак ташкил қилувчи тўғри чизикқа уриниб ўтиши керак. Агар тўғри чизик OX ўқи билан α бурчак ташкил қилса, α **тўғри чизикнинг оғмалиги** дейилади. $y' = f(x, y)$ тенглама ечимларига уринмаларнинг оғмалиги бир хил бўлган нуқталарнинг геометрик ўрни **изоклиналар** дейилади. Бундан келиб чиқадики, изоклиналар тенгламаси $f(x, y) = k$, бу ерда k – ўзгармас кўринишда бўлади.

$y' = f(x, y)$ тенгламанинг тақрибий ечимини қуриш учун етарли сондаги изоклиналар чизиб олиб, кейин булар ёрдамида ечимни ўтказиш керак, улар $f(x, y) = k_1, f(x, y) = k_2, \dots$ изоклиналар билан

кесишиш нуктасида бурчак коэффициентлари $\kappa_1, \kappa_2, \dots$ бўлган уринмаларга эга бўлади.

Мисоллар. а) Изоклиналар ёрдамида $y' = x/2$ дифференциал тенгламанинг интеграл чизиқлари курилади

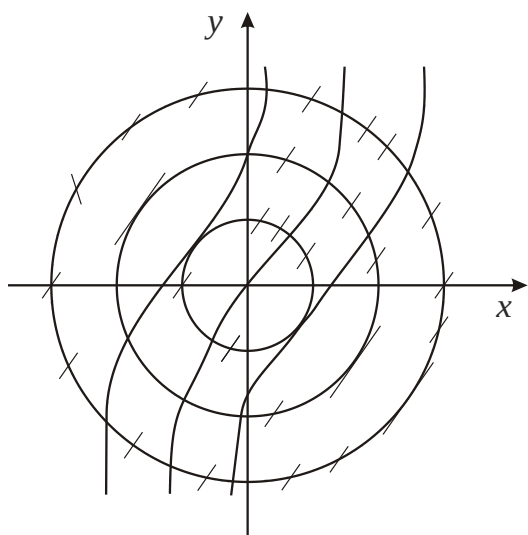
Ечими. Берилган тенгламанинг изоклиналар тенгламаси $x/2 = k$ ёки $x = 2k$ кўринишда бўлиб, ОУ ўққа параллел бўлган тўғри чизиқлардан иборат (12-расмга қаранг).



12-расм

$k = 0$ деб $x = 0$ изоклинани ҳосил қиламиз, унинг барча нукталарида майдон йўналиши ОХ ўққа параллел. $k = 1$ да $x = 2$ изоклинани оламиз, унинг барча нукталарида майдон ОХ ўқ билан 45° ли бурчак ташкил этади; $k = -1$ деб, $x = -2$ изоклинани оламиз, унинг барча нукталарида майдон йўналиш ОХ ўқ билан -45° ли бурчак ташкил этишини кўрамиз ва ҳ.к. Агар бирорта нукта, масалан, $M(-1, 2)$ нуктани олсак, у ҳолда бу нукта орқали ўтувчи ечимни тақрибан яшаш мумкин, бунинг учун эгри чизиққа ҳар бир нуктада ўтказилган уринма майдонининг бу нуктадаги йўналиши бир хилда бўлишидан фойдаланиш керак. Чизмадан кўриниб турибдики, интеграл эгри чизиқлар параболани эслатади. Ҳақиқатан ҳам $y' = x/2$ тенгламанинг умумий ечими $y = x^2/4 + C$ параболалар оиласидан иборат, $y - 1 = 2$ бошланғич шарт эса бу параболалардан бирини аниқлайди.

б) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + y^2}$ дифференциал тенгламанинг интеграл чизиқларини изоклиналар ёрдамида куринг.



13-расм

Ечими. Бу тенглама учун $\frac{dy}{dx} = k$, $\sqrt{x^2 + y^2} = k$ ёки $x^2 + y^2 = k^2$ айланалар изоклиналар бўлади. Уларнинг марказлари координата боши бўлиб, изланаётган интеграл чизиқнинг уринмаси бурчак коэффиценти айланалар радиусига тенг. Энди k га маълум қийматлар бериб йўналишлар майдонини чизамиз (13-расмга қаранг) ва изланаётган интеграл чизиқни тахминан ўтказишимиз мумкин.