

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIMI
VAZIRLIGI

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI XALQ TA'LIMI VAZIRLIGI

NAVOIY DAVLAT PEDAGOGIKA INSTITUTI

TOSHKENT DAVLAT PEDAGOGIKA UNIVERSITETI

“O'z oldimizga qo'ygan yuksak vazifa va
marralarga erishishda zamonaviy bilim va
tajriba sohibi bo'lgan, yangicha fikrlaydigan
yoshlarimiz bizning asosiy tayanchimiz va
suyanchimizdir, desak ayni haqiqat bo'ladi”.

I.A.Karimov

Matematika va uni zamonaviy pedagogik texnologiyalar yordamida o'qitish
muammolari

Respublika ilmiy-amaliy konferensiyasi materiallari

(2015 yil 25 aprel)

NAVOIY-2015

Natural son tushunchasini kiritish haqida

Bektoshev S.A., Mamatov J.A.

Samarqand davlat universiteti, magistrant,

Jizzax davlat pedagogika instituti, magistrant

Maqolada natural sonlarni aniqlashning (qurishning) bir usuli bayon etiladi. Maxsus belgilardan foydalanib ma'lum qoidalar va amallar asosida hosil qilingan yozuvlardan ifodalar deyiladi.

1-ta'rif: Quyidagi belgilarga raqamlar deyiladi:

$$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 \quad (1)$$

Har bir raqam o'zidan oldingisidan (chap tomondagisidan) katta deyiladi

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9$$

(1) raqamlarni quyidagicha nomlaymiz (o'zbekcha): 0 – nol, 1 – bir, 2 – ikki, 3 – uch, 4 – to'rt, 5 – besh, 6 – olti, 7 – yetti, 8 – sakkiz, 9 – to'qqiz.

Raqamlardan tuzilgan ixtiyoriy ifodaga natural sonlar deyiladi.

Ifodalar nol raqami bilan boshlanmaydi (istisno)

Masalan:

$$324,555,1960,2013, \dots \\ (01 \sim 1, 003 \sim 3)$$

4-tarifdan kelib chiqadiki raqamlarlar ham natural sonlar bo'ladi.

Ta'rif: 1 (bir) va 0 (nol) raqamlaridan tashkil topgan 10 (ifoda) natural son o'n deyiladi. 1 va 1 dan tashkil topgan 11 natural son o'n bir deyiladi.

Xuddi shunday 12, 13, ..., 19, lar ham aniqlanadi.

Ta'rif: 2 (ikki) va 0 (nol) tashkil topgan 20 ifoda (natural son) yigirma deyiladi.

Xuddi shunday 21. 22, 23, ... 29 lar ham aniqlanadi.

Ta'rif: 3 (uch) va 0 (nol) raqamlaridan tashkil topgan 30 ifoda (natural son) o'ttiz deyiladi. Xuddi shunday, 31,32,...,39, 40 – qirq, 50 – ellik, 60 – oltmish, 70 – yetmish, 80 – sakson, 90 – to'qson 91, 92, 93, ...,99 lar ham aniqlandi.

Ta'rif: 10 natural son va 0 raqamidan tashkil topgan 100 natural soniga "yuz" deyiladi. 101, 102, 103, ..., 109, 110, 111, ..., 199, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 901, 902, ..., 998, 999.

Ta'rif: 100 yuz natural soni va 0 raqamidan tashkil topgan 1000 natural soniga ming deyiladi.

1001,1002,...,1010,...1090,...,1999,2000,2001,...,9999,10000.

Ta'rif: 100000 yuz ming natural soni va 0 raqamidan tashkil topgan 1000000 natural songa million deyiladi. 1000001,...1000002,...

Shunday qilib, milliongacha bo'lgan natural sonlarni nomlab chiqish uchun quyidagi 22 ta o'zbekcha so'z ishlatilar ekan: nol, bir, ikki, uch, to'rt, besh, olti, yetti, sakkiz, to'qqiz, o'n, yigirma, o'ttiz, qirq, oltmish, yetmish, sakson. To'qson, yuz, ming, million.

Ta'rif:

1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,...19,20,21,...29,30,31,32,...39,40,...50,...60,...70,...80,...90,...100,...110,...200,...

...900,...990,...999,...1000,...1001,...1002,...

....10000,.....999999,.....1000000,..... (2)

to'plamga natural sonlar to'plami deyiladi va N orqali belgilanadi.

Ta'rif. Natural sonlarning nomlarini chapdan boshlab ketma-ket o'qishga (aytilishiga) sanash deyiladi.

Masalan, raqamlar soni o'n (10) ta ikki xonali natural sonlar 90 ta.

Agar a,b,c,d,e,f,m,n,p,k, larning har birining qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari barcha raqamlardan iborat bo'lsa, u holda natural sonning umumiy o'nli ko'rinishini abed...mnpk kabi yozamiz. O'ngdan boshlab, chapga qarab har bir harf (belgi, raqam) mos ravishda birliklar, o'nliklar, yuzliklar, mingliklar, o'ng mingliklar, yuz mingliklar, millionliklar xonalari deb aytiladi. Katta natural sonlarni o'qish, yozish va aytish uchun o'ngdan boshlab sinflarga ajratish qabul qilingan a,b,c,d,....,m,n,p,k, larning soniga qarab, uning xonalari soni aniqlanadi.

Natural sonni xonalarga ajratib yozish:

$mn = m \cdot 100 * n \cdot 1$ - ikki xonali

$mnk = m \cdot 100 * n \cdot 10 * k \cdot 1$ - uch xonali

$$mnkp = m \cdot 1000 * n \cdot 100 * k \cdot 10 * p \cdot 1 - \text{to'rt xonali}$$

Natural sonlarni taqqoslash

1. Agar ikkita natural sonning xonalari soni bir xil bo'lib, mos xonalari bir xil raqamlardan tashkil topgan bo'lsa, ular teng deyiladi.

$$\begin{matrix} a = 30456 \\ b = 30456 \end{matrix} \quad a = b \quad \begin{cases} a = a_1 a_2 a_3 \dots a_n \\ b = b_1 b_2 b_3 \dots b_n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$$

2. Ikkita natural sondan xonalari ko'p bo'lgani katta deyiladi.
3. Xonalari bir xil bo'lgan ikkita natural sondan eng katta xona birligini ko'rsatuvchi raqamlardan qaysi biri katta bo'lsa, shunisi katta deyiladi. Agar chapdan boshlab xonalarni ko'rsatuvchi raqamlar bir xil bo'lib qolsa, keyingi xona birliklarini ko'rsatuvchi raqamlar solishtiriladi, ya'ni $a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_k = b_k$ bo'lib, $a_{k+1} > b_{k+1}$ bo'lsa, $a > b$ deyiladi.

Darslik va o'quv qo'llanmalarda natural sonlar aksiomatik usul orqali kiritiladi. Lekin, bu usul orqali, natural sonlarni kiritish o'quvchilarga (talabalarga) unchalik tushunarli bo'lmaydi. Keyingi o'n yilda chop etilgan adabiyotlarda haqiqiy sonlarni "ifoda" sifatida aniqlanmoqda. Biz xuddi shunga o'xshash qilib natural sonlarni ham raqamlardan tuzilgan ifodalar deb kiritishni maqsadga muvofiq deb hisoblaymiz.

MATEMATIKA VA UNI ZAMONAVIY PEDAGOGIK TEXNOLOGIYALAR
YORDAMIDA O'QITISH MUAMMOLARI

Respublika ilmiy-amaliy konferensiyasi materiallari

(2015 yil 25 aprel)

Texnik muharrir va korrektor:

T.U.O'tapov - p.f.n., dosent

G.R.Yodgorov - f.-m.f.n., dosent

Kompyuterda tayyorlovchilar:

S.T.Do'stov - o'qituvchi

Sh.Sh.Shodiyev - o'qituvchi

Ma'ruzalar tezisi mazmuniga tashkiliy qo'mita javobgar emas.

Terishga berildi: 15.04.2015 y. Bosishga ruxsat berildi: 20.04.2015 y.

Hajmi 17.5 bosma taboq. Bichimi 60x90. Shartli bosma. T.4,8. Adadi 100 nusxa.

Bahosi kelishilgan narxda.

NDPI kichik bosmaxonasida chop etildi. Buyurtma №

АЙРИМ ТРИГОНОМЕТРИК МАСАЛАЛАРНИ ЕЧИШДА КОМПЛЕКС СОНЛАРДАН ФОЙДАЛАНИШ ҲАҚИДА

*Маматов Ж.А., **Бектошев С.А., ***Орзукулов Л.А.

Самарқанд давлат университети 2-босқич магистранти, 3-босқич талабаси

*Жиззах давлат педагогика институти 2-босқич магистранти

Комплекс сонларнинг хоссаларнинг фойдаланиб кўпгина геометрик масалаларни ечиш мумкин [1] - [3]. Биз комплекс соннинг тригонометрик шаклидан ва муавр формуласидан фойдаланиб ҳосил қилинадиган бир қанча формулаларни келтирамиз.

- 1) Тригонометрик шаклда берилган комплекс сон ва унинг қўшмасидан фойдаланиб, қуйидаги формулаларни чиқариш мумкин:
 $z = (\cos \varphi + i \sin \varphi), |z| = 1$ ва $\bar{z} = \cos \varphi - i \sin \varphi$ бўлса, у ҳолда $z \cdot \bar{z} = 1, z + \bar{z} = 2 \cos \varphi, z - \bar{z} = 2i \sin \varphi$. Агарда $z = \frac{1}{\bar{z}}$ ёки $\bar{z} = \frac{1}{z}$ бўлса, у ҳолда қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\cos \varphi = \frac{z^2 + 1}{2z}, \sin \varphi = \frac{z^2 - 1}{2iz}, \operatorname{tg} \varphi = \frac{z^2 - 1}{i(z^2 + 1)}, \operatorname{ctg} \varphi = \frac{i(z^2 + 1)}{z^2 - 1} \quad (1)$$

Комплекс соннинг n — даражаси учун Муавр формуласидан фойдаланиб, қуйидаги асосий боғланишларни ҳосил қиламиз, яъни

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos nx + i \sin nx = z^n$$

$$(\cos \varphi - i \sin \varphi)^n = \cos nx - i \sin nx = \frac{1}{z^n}$$

Тенгликлардан фойдаланиб,

$$\begin{aligned} \cos n \varphi &= \frac{z^{2n} + 1}{2z^n}; & \sin n \varphi &= \frac{z^{2n} - 1}{2iz^n}; \\ \operatorname{tg} n \varphi &= \frac{z^{2n} - 1}{i(z^{2n} + 1)}; & \operatorname{ctg} n \varphi &= \frac{i(z^{2n} + 1)}{z^{2n} - 1}; \end{aligned} \quad (2)$$

Асосий формулаларни ҳосил қиламиз. Агар $z_1 = \cos \varphi + i \sin \varphi$ ва $z_2 = \cos \psi + i \sin \psi$ бўлса, у ҳолда:

$$z_1 \cdot z_2 = \cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi), \quad \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \cos(\varphi + \psi) - i \sin(\varphi + \psi)$$

Тенгликларни биргаликда ечиб, қуйидаги формулаларни ҳосил қиламиз

$$\begin{aligned}\cos(\varphi + \psi) &= \frac{z_1^2 \cdot z_2^2 + 1}{2z_1 \cdot z_2}, & \sin(\varphi + \psi) &= \frac{z_1^2 \cdot z_2^2 - 1}{2iz_1 \cdot z_2}; \\ \operatorname{tg}(\varphi + \psi) &= \frac{z_1^2 \cdot z_2^2 - 1}{i(z_1^2 \cdot z_2^2 + 1)}\end{aligned}\quad (3)$$

Худди шундай

$$\frac{z_1}{z_2} = \cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi + \psi), \quad \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \cos(\varphi - \psi) - i \sin(\varphi - \psi)$$

Агарда $\bar{z} = \frac{1}{z}$, эканлигини инобатга олсак, у ҳолда

$$\begin{aligned}\cos(\varphi - \psi) &= \frac{z_1^2 + z_2^2}{2z_1 \cdot z_2}, & \sin(\varphi - \psi) &= \frac{z_1^2 - z_2^2}{2iz_1 \cdot z_2}; \\ \operatorname{tg}(\varphi - \psi) &= \frac{z_1^2 - z_2^2}{i(z_1^2 + z_2^2)}\end{aligned}\quad (4)$$

Энди юқорида чиқарилган формулалардан фойдаланиб, тригонометрик масалаларни рационаллаштириб осонгина ечишга доир мисоллар келтирамиз.

Аввало кўп ишлатиладиган муносабатларни келтирамиз.

$z = \cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n}$, $|z| = 1$, у ҳолда $z^n = \cos \pi = -1$ ёки $z^{2n} = \cos \pi = 1$ тенгликлар ўринли бўлади.

1-мисол. Қуйидаги ифоданинг қийматини топинг.

$$A = \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = ?$$

Ечиш: Тригонометрик шаклдаги $z = \cos 20^\circ + i \sin 20^\circ$ комплекс сондан фойдаланмиз, у ҳолда $z^9 = \left(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9}\right)^9 = \cos \pi + i \sin \pi = -1$ $z^{18} = 1$ ва (2) формуладан қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\cos 20^\circ = \frac{z^2 + 1}{2z}, \quad \cos 40^\circ = \frac{z^4 + 1}{2z^4}, \quad \cos 80^\circ = \frac{z^8 + 1}{2z^4}$$

Булардан фойдаланиб A нинг қийматини ҳисоблаш учун рационал ифода ҳосил қиламиз.

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{(z^2 + 1)(z^4 + 1)(z^8 + 1)}{8z^7} = \frac{(z^2 + 1)(z^2 - 1)(z^4 + 1)(z^8 + 1)}{8(z^2 - 1)z^7} = \\
 &= \frac{(z^4 - 1)(z^4 + 1)(z^8 + 1)}{8(z^2 - 1)z^7} = \frac{(z^8 - 1)(z^8 + 1)}{8(z^2 - 1)z^7} = \frac{z^{16} - 1}{8(z^2 - 1)z^7} = \\
 &= \frac{z^2(z^{16} - 1)}{8(z^2 - 1)z^7} = \frac{z^{18} - z^2}{8z^9(z^2 - 1)} = \frac{1 - z^2}{8(-1)(z^2 - 1)} = \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

2-мисол. Қуйидаги ифоданинг қийматини топинг.

$$S = \sin \frac{3\pi}{10} - \sin \frac{\pi}{10} = ?$$

Ечиш. Тригонометрик шаклдаги $z = \cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10}$, комплекс сондан фойдаланамиз, у ҳолда (2) формуладан фойдаланиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$z^5 = \cos 5 \cdot \frac{\pi}{10} + i \sin 5 \cdot \frac{\pi}{10} = i, \quad z^{10} = -1;$$

$$\sin \frac{3\pi}{10} = \frac{z^6 - 1}{2iz^3}, \quad \sin \frac{\pi}{10} = \frac{z^2 - 1}{2iz}$$

Буларни инобатга олиб, S нинг қийматини ҳисоблаш учун рационал ифода ҳосил қиламиз

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{z^6 - 1}{2iz^3} - \frac{z^2 - 1}{2iz} = \frac{(z^6 - 1)z^2(z^2 - 1)}{2iz^3} = \frac{z^6 - z^4 + z^2 - 1}{2iz^3} = \\
 &= \frac{z^4(z^2 - 1) + z^2 - 1}{2iz^3} = \frac{(z^2 - 1)(z^4 + 1)}{2iz^3} \cdot \frac{z^2 + 1}{z^2 + 1} = \\
 &= \frac{(z^4 - 1)(z^4 + 1)}{2iz^3(z^2 + 1)} = \frac{z^8 - 1}{2iz^3(z^2 + 1)} = \frac{z^2(z^8 - 1)}{2iz^3z^2(z^2 + 1)} = \\
 &= \frac{z^{10} - z^2}{2iz^5(z^2 + 1)} = \frac{-(z^2 + 1)}{2iz^5(z^2 + 1)} = \frac{-1}{2i \cdot i} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

3-мисол. Айниятни исбот қилинг: $tg \frac{\alpha}{2} = ctg \frac{\alpha}{2} - 2 ctg \alpha$

Исбот: Комплекс соннинг қуйидаги тригонометрик кўринишидан фойдаланамиз $z = \cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2}$, у ҳолда (2) формулага кўра айниятнинг ўнг томонини z га нисбатан рационал ифодага келтирамиз.

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - 2 \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{i(z^2 + 1)}{z^2 - 1} - \frac{2i(z^4 + 1)}{z^4 - 1} = \frac{i(z^4 + 2z^2 + 1 - 2z^4 - 2)}{z^4 - 1} = \\ &= \frac{i(-z^4 + 2z^2 - 1)}{z^4 - 1} = \frac{-i(z^2 - 1)^2}{(z^2 + 1)(z^2 - 1)} = \frac{i(z^2 - 1)}{z^2 + 1} = \frac{z^2 - 1}{i(z^2 + 1)} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

4-мисол. Тенгламани ечинг: $\sin 3x = 8 \sin^3 x$

Ечиш: Комплекс соннинг қуйидаги тригонометрик кўринишидан фойдаланамиз $z = \cos x + i \sin x$, $z^2 = \cos 2x + i \sin 2x$ у ҳолда (2) формулага кўра қуйидаги рационал тенгламани ҳосил қиламиз

$$\frac{z^6 - 1}{2iz^3} = 8 \left(\frac{z^2 - 1}{2iz} \right)^3 = 8 \frac{z^6 - 3z^4 + 3z^2 - 1}{8i^3 z^3}$$

Ва уни соддалаштириб, алгебраик тенглама ҳосил қиламиз:

$$(z^2 - 1)(3z^4 - 3z^2 + 1) = 0$$

$$1) z^2 - 1 = 0 \quad 2) z^4 - z^2 + 1 = 0 \quad z_{1,2}^2 = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Белгилашга ва комплекс сонларнинг тенглигининг таърифига кўра қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$1) \cos 2x + i \sin 2x = 1 + i \cdot 0, \cos 2x = 1, 2x = 2n\pi, x = n\pi$$

$$2) \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 2x + i \sin 2x, \cos 2x = \frac{1}{2}, x = \pm \frac{\pi}{6} + n\pi$$

Юқорида келтирилган усулдан фойдаланишда масаланинг қуйилишига қараб комплекс соннинг тригонометрик шакли танланади. Танлаш учун ўқувчилардан маҳорат талаб қилинади.

Адабиётлар.

1. Яглом И.М. Комплексные числа и их применения в геометрии – М.1963.

2. Шарова О.П. Применение комплексных чисел к изучению геометрических преобразований. М. В Ш. 1967 № 1.
3. Скопец З.А. Приложение комплексных чисел к задачам элементарной геометрии М. в Ш. 1962 № 1.