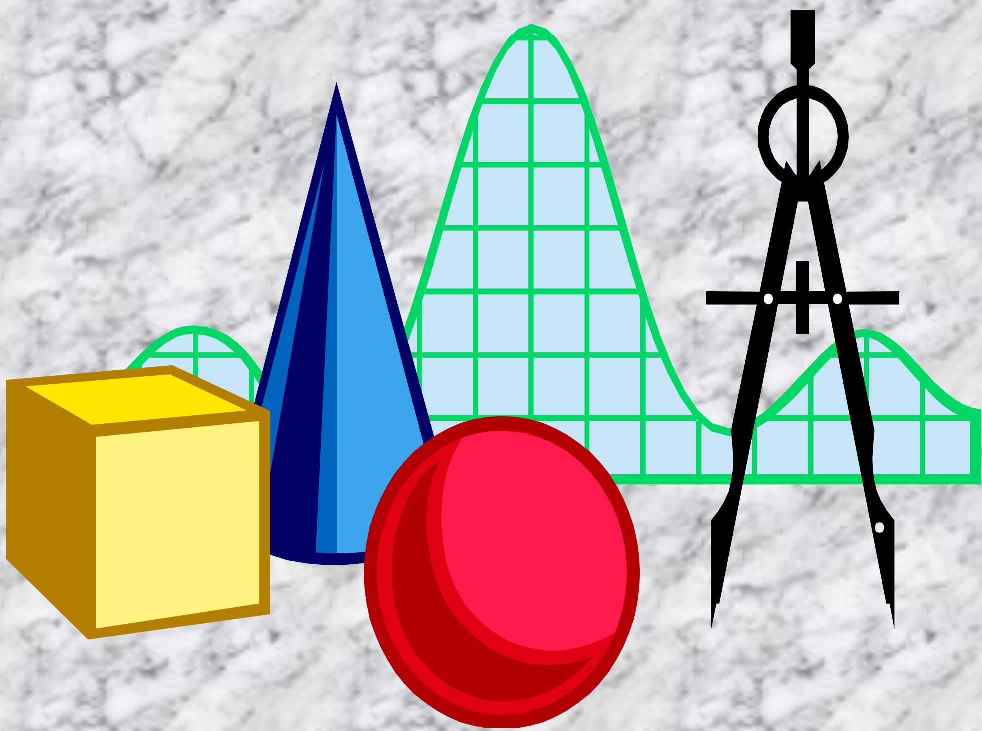
O'ZBEKISTON ALOQA VA AXBOROTLASHTIRISH AGENTLIGI

TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI
FARG'ONA FILIALI

"TABIIY FANLAR" KAFEDRASI



I-QISM

FARG'ONA 2014

TATU Farona Filiali «Tabiiy fanlar» kafedrasi uslubiy seminarida muhokama qilingan. 2014.08.27 sanadagi O'quv-uslubiy kengashi yiilishida tasdiqlangan (Bayonnoma №1.) va ko'paytirishga tavsiya etilgan.

Tuzuvchilar: katta o'qituvchi Yo. Yusupov
assistent Z. Tulakova
assistent O. Nasriddinov

Taqrizchi: dots. K. Akbarov

EHM ustasi: F. Karimov

Ma'ruzalar matni 5330200; 5311300; 5111018; 5610600; yo'nalishi uchun mo'ljallangan.

SO’Z BOSHI

Ushbu ma’ruzalar matni filialning 1-bosqich talabalariga mo’ljallab yozildi. Ushbu kitobda 18 ta ma’ruza keltirilgan bo’lib, har bir ma’ruza oxirida tayanch iboralar, takrorlash uchun savollar va tegishli ADABIYOTLAR ro’yxati keltirilgan.

Ma’ruza matnlari «Oliy matematika» bo’yicha davlat standartida berilgan mavzularning asosiy qismini o’z ichiga oladi, mavzularning qolgan qismi mustaqil ishlarga ajratilgan bo’lib, ularni talabalar o’qituvchi nazorati ostida mustaqil ravishda o’rganadilar.

«Informatika va axborot texnologiyalari», «Telekommunikatsiya», «Korxonalar servisi», «Kasb ta’limi» yo’nalishlarining «Oliy matematika»dan davlat standartlariga mosligi uchun bu yo’nalishlarda makzur ma’ruzalar matnidan foydalanish mumkin.

Mazkur kitobcha uch qismdan iborat:

I-qism 1-16 ma’ruzalarni, II-qism 17-27 ma’ruzalarni o’z ichiga oladi.

Mazkur ma’ruzalar matnlari haqidagi fikr va mulohazalarni «Tabiiy fanlar» kafedrasiga yuborishingizni so’raymiz.

Tuzuvchilar.

1-MA'RUZA

Mavzu. Determinantlar va ularning xossalari

Reja

1. **Algebra va uning rivojlanish tarixidan.**
2. **2, 3-tartibli determinantlar.**
3. **Determinantlarning xossalari.**
4. **Minor va algebraik to'ldiruvchilar.**
5. n **- tartibli determinantlar.**
6. **Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usuli bilan yechish**

Tayanch ibora va tushunchalar

Algebra, algoritm, 2,3 va n -tartibli determinantlar, bosh diagonal, yordamchi diagonal, minor, algebraik to'ldiruvchi, uchburchaklar qoidasi, diagonal qoidasi, determinantlarning xossalari, determinantni biror satri (ustuni) elementlari bo'yicha yoyish.

1.Algebra va uning rivojlanish tarixidan. ***Algebra*** matematikaning bir qismi va u turli miqdorlar ustida amallarni hamda shu amallar bilan bog'liq tenglamalarni yechishni o'rganadi. Kengroq mahnoda algebrada ixtiyoriy tabiatli to'plamning elementlari ustida sonlarni qo'shish va ko'paytirish kabi odatdagi amallarni umumlashtiruvchi amallarni o'rganuvchi fan tushuniladi.

Uch og'aynning yoshlari 30, 20, 6 da. Necha yildan keyin eng kattasining yoshi ikkala ukasi yoshining yig'indisiga teng bo'ladi. $30 + x = (20 + x) + (6 + x), \quad x = 4.$ Bunday tenglamalar eramizdan avval 2 minginchi yillarda qadimgi Misrda ma'lum edi. Lekin ular harflardan foydalanmagan. Eramizdan avvalgi 2 minginchi yil boshida qadimgi bobilliklar yanada murakkabroq masalalarni yechishgan.

III asrda yashagan Iskandariyalik olim Diofant geometrik bayonni rad etib harfiy ifodalardan foydalanadi. Unda manfiy ko'rsatkichli darajalar, manfiy sonlar, musbat va manfiy sonlarni ko'paytirish qoidalarini yozish uchun qisqacha belgilar bor edi.

Algebraning keyingi rivojiga Diofant o'rgangan algebraik tenglamalar kuchli tahsir ko'rsatgan.

VI asrdan boshlab matematik tadqiqotlar markazi Hindiston, Xitoy, Yaqin SHarq va O'rta Osiyo mamlakatlariga ko'chdi. Xitoylik olimlar chiziqli tenglamalar sistemasining yechimini topishda noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish usulini topishgandi. Ammo algebra, tenglamalarni yechish masalalariga bog'liq muammolarni bayon etuvchi matematikaning maxsus tarmog'i sifatida Yaqin Sharq va O'rta Osiyo olimlari ishlarida shakllandi. IX asrda o'zbek matematigi va astranomi Muhammad ibn Muso al Xorazmiy (783-850) «Al-jabr val muqobala» asarini yozdi. Bu asarda Xorazmiy chiziqli tenglamalarni yechishning umumiy qoidasini berdi va kvadrat tenglamalarni sinflarga ajratib, har bir sinf uchun yechish yo'llarini ko'rsatdi. Al-jabr (tiklash) so'zi tenglamadagi manfiy hadlarni uning ikkinchi qismiga ishorasini o'zgartirib o'tkazishni bildirgan. Yangi fan **«*Algebra*» ning** nomi o'sha «Al-jabr» so'zidan olingan.

Qisqacha, al-Xorazmiy to'g'risida ma'lumotlarni qaraganda Xorazmiy o'qish, yozish va sanashni mahalliy diniy maktab, madrasada oldi. U ilmiy masalalarni o'z o'qituvchilaridan yaxshiroq tushunar, juda ko'p o'qir, o'z ustida tinimsiz ishlar, madrasaning majburiy darsliklari bilan chegaralanib qolmas edi.

Xorazmiyning yoshlik davri Xorazmni arablar zabt etgan davrga to'g'ri keladi. Beruniyning yozishicha, arab istilochilari Xorazmning milliy madaniyatini yo'q qilib yuborgani, kitoblarning kuydirilganini, olimlarni o'zlari bilan olib ketganini, bo'ysunmaganlarini o'ldirganini yozadi. Shu sabab bo'lsa kerak, VIII asr oxirida Xorazmiy Bag'dodga keladi. Bu asr o'rtalarida davlat boshiga abbosiylar kelgan va Sharqiy arab xalifaligida hayot o'z iziga tusha boshlagan edi. Bag'dodda turli kasb egalari, olimlar to'plana boshlaydi. Fanning rivojlanishi Xorun ar-Rashid (786-809) va uning o'g'li Al-Mahmun xalifalik qilgan (813-833) davrga to'g'ri keladi. Al-Ma'mun Bag'dodda «Bayt al-hikmat» (Donishmandlar uyi)ni qurdiradi. Bunda yaxshi rasadxona, boy kutubxona bor edi. Uni o'z davrining Akademiyasi desa bo'lar edi. Xorazmiy Bag'dodga kelib ilmiy ishlar bilan shug'ullanadi. Tez orada Xorazmiy matematika, astronomiya, geografiya, tarix va tabobat ilmi bo'yicha butun O'rta Sharqda shuhrat qozondi. U «Donishmandlar uyi»da ilmiy ishlarga, kutubxonaga, rasadxonaga rahbarlik qildi. Uni Fanlar Akademiyasining birinchi prezidenti deyish mumkin.

Xorazmiyning matematikaga qo'shgan hissasi beqiyos. Uning «Hind hisobi» nomli asari o'nli sistema raqamlari 0, 1, 2, . . . , 9 ga bag'ishlangan. Ularni soddalashtiradi va birinchi marta arab tilida bayon etadi. Bu raqamlar Xorazmiy asari orqali arablarga, keyin Yevropaga o'tadi. Matematikadagi *algoritm* termini ham Xorazmiyning nomi bilan bog'liq, Al-Xorazmiy lotincha al-goritm deyilgan va shu so'zdan kelib chiqqan.

Xorazmiy o'rta asr SHarqida yaratilgan birinchi matematik-astronomik jadvallarning muallifi. Amerikalik sharqshunos olim Sorton Xorazmiyni «barcha zamonlarning eng buyuk matematiklaridan biridir» deb tahriflaydi.

2. 2, 3 - tartibli determinantlar. Determinantlarni hisoblashga keltiriladigan ushbu masalani qaraylik. Masala. A va B mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun 2 turdagi xom ashyodan foydalaniladi. Bitta A mahsulotni ishlab chiqarish uchun 5 birlik 1-tur va 4 birlik 2-tur xom ashyo sarflanadi,bitta B mahsulotni ishlab chiqarish uchun esa, 3 birlik 1-tur va 5 birlik 2-tur xom ashyo ishlatiladi. 1-tur xom ashyo 62 birlik, 2-tur xom ashyo 73 birlikda berilgan bo'lsa, eng katta foyda olinadigan ishlab chiqarishni rejalashtirish uchun xom ashyo sarfi modelini tuzing.

Bu masalaning matematik modelini tuzish maqsadida x_1 bilan ishlab chiqarilishi kerak bo'lgan A mahsulot miqdorini, x_2 bilan esa ishlab chiqarilishi kerak bo'lgan B mahsulot miqdorini belgilaylik. Bu holda $5x_1$ A mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarflangan 1-tur xom ashyo miqdorini, $3x_2$ esa B mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarflangan 1-tur xom ashyo miqdorini ifodalaydi. $5x_1 + 3x_2$ A va B mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun sarflanadigan 1-tur xom ashyo jami sarfi miqdorini ifodalaydi, bu xom ashyo chegaralangan bo'lib, 62 birlikda mavjud, demak $5x_1 + 3x_2 = 62$ tenglama kelib chiqadi. Xuddi shunday qilib, 2-tur xom ashyo sarfi uchun $4x_1 + 5x_2 = 73$ tenglamani hosil qilish mumkin. Shunday qilib,

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 62, \\ 4x_1 + 5x_2 = 73 \end{cases}$$

ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qildik. Bu tenglamalar sistemasi berilgan A va B mahsulotlarni ishlab chiqarishda, xom ashyo sarfining matematik modelini ifodalaydi.

Biz yuqorida eng oddiy iqtisodiy masalani qaradik, hamda uning modeli ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasiga keltirilishini ko'rsatdik. Fan va texnikaning juda ko'p masalalarining matematik modellari chiziqli tenglamalar sistemasi orqali ifodalanadi. Bu holatlar chiziqli tenglamalar nazariyasini umumiy holda qarashimiz lozimligini ko'rsatadi.

Ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \qquad (1)$$

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ bo'lsa, (1) tenglamalar sistemasi yagona

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \; x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad (2)$$

echimga ega bo'ladi. (2) formuladagi surhat va mahrajdagi ifodalar 2- tartibli determinant (aniklovchi)lar deyiladi. 2-tartibli determinantni $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ bilan belgilanadi. $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ larga determinantning elementlari deyiladi. Shunday qilib, (2) formulalarni determinantlar yordamida

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \; x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad (3)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

$$\Delta = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \qquad (4)$$

ifodaga ***3- tartibli determinant deyiladi*** va $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ bilan belgilanadi.

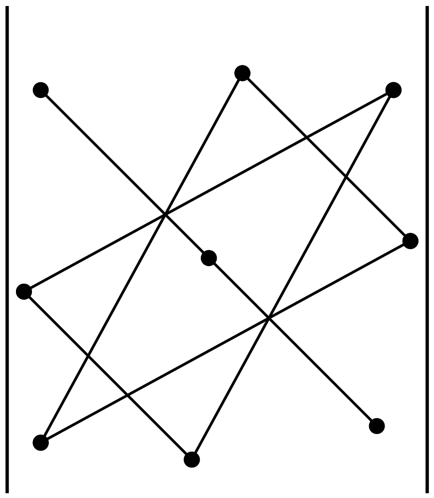
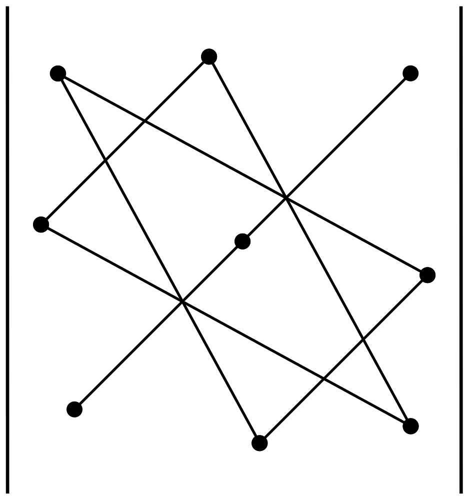
a_{11}, a_{22}, a_{33} elementlar **bosh diagonalni**, a_{13}, a_{22}, a_{31}

yordamchi diagonalni ifodalaydi. (4) tenglikda 2- tartibli determinantlarni kattaliklari bilan almashtirsak

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} -$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} \qquad (5)$$

bo'ladi. (5) formulani esda saqlash ***uchun uchburchak qoidasidan*** foydalanish mumkin. Elementlarni nuqtalar bilan belgilasak, ushbu sxema ḱosil bo'ladi :

	
+	–

(+) ishora bilan, (-) ishora bilan olinadi.

3. Minor va algebraik to'ldiruvchilar

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ determinantda i - satrni va j - ustunni o'chirishdan 2- tartibli determinant hosil bo'ladi, bunga a_{ij} elementga mos ***minor*** deyiladi va M_{ij} bilan belgilanadi. Masalan,

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \; M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

va boshqalar.

a_{ij} ***elementning algebraik to'ldiruvchisi*** deb unga mos minorning musbat yoki manfiy ishora bilan olingan kattaligiga aytiladi,bunda $i+j$ juft bo'lsa, musbat ishora bilan, $i+j$ toq bo'lsa manfiy ishora olinadi. a_{ij} elementning algebraik to'ldiruvchisini A_{ij} bilan belgilanadi. Demak,

$$A_{21}=-M_{21}=-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ A_{22}=M_{22}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

bo'ladi va boshqalar.

4. Determinantlarning xossalari. Determinantlar quyidagi xossalarga ega:
1. Determinantning barcha satridagi elementlarini mos ustunelementlari bilan almashtirilsa uning kattaligi o'zgarmaydi, yahni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

1-misol. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}=24-6-0-0+4-0=22$

bo'lib, bu determinantda barcha satrlarini mos ustunlar bilan almashtirsak,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}=24-6+0-0+4-0=22$$

bo'ladi. Bundan ko'rinadiki, ikkala holda ham bir xil kattalik hosil bo'ldi, bu birinchi xossaning to'g'riligini ko'rsatadi.
2. Ikkita satr (ustun)ni o'zaro almashtirilsa determinant kattaligining ishorasi teskarisiga o'zgaradi; haqiqatan ham 1- misoldagi determinantda 1-satrini 3-satri bilan o'zaro almashtirsak,

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0+0-4-24-0+6=-28+6=-22$$

bo'lib, bu 2-xossaning o'rinli ekanligini ko'rsatadi.
3. Ikkita bir xil satr (ustun)li determinant kattaligi no'lga teng;
ikkita satri bir xil bo'lgan determinantni hisoblasak,

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}=-36+0+0+36-0-0=0$$

bo'ladi, bu esa 3-xossaning to'g'riligini ko'rsatadi.

4. Determinantning biror satr (ustun) ning hamma elementlarini $m \neq 0$ songa ko'paytirilsa, uning kattaligi shu m songa ko'payadi.
Haqiqatan ham, 1-xossada keltirilgan determinantning 2-satri elementlarini 2 ga ko'paytirsak,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -4 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 48 - 12 + 0 - 0 + 8 - 0 = 44$$

bo'lib, bu xossaning ham to'g'riligi ko'rinadi.
5. Determinantning ikkita satri (ustuni) elementlari o'zaro proportsional (mutanosib) bo'lsa, uning kattaligi no'lga teng, misol uchun,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

determinant berilgan bo'lsin. Bu determinantning 1 va 2-satri elementlari o'zaro proportsional, uni hisoblasak

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 0 - 12 - 0 + 6 + 12 = 0$$

bo'lib, bu esa 5-xossaning to'g'riligini ko'rsatadi.
6. Determinantning kattaligi, biror satri (ustuni) elementlarini unga mos algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirib qo'shilganiga teng. 1-xossada keltirilgan misolni qaraymiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

bu determinantni 3-satr elementlari bo'yicha yoyib yozsak,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 0 + 28 = 22$$

kelib chiqadi, bu esa 6-xossaning ham o'rinli ekanligini ko'rsatadi.
7. Determinant biror satri (ustuni)ning har bir elementi ikkita qo'shiluvchidan iborat bo'lsa, u holda bu determinant ikkita determinant yig'indisiga teng bo'ladi, yahni

$$\begin{pmatrix} (a_{11} + b_1) & a_{12} & a_{13} \\ (a_{21} + b_2) & a_{22} & a_{23} \\ (a_{31} + b_3) & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Ushbu determinantni

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

quyidagicha almashtiramiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2+2 & -1-1 & 3+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

keyingi ikkita determinantni hisoblasak,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 18 + 0 - 3 - 18 + 3 - 0 = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 0 - 3 + 18 + 1 - 0 = 22;$$

1-xossadagi misoldan ma'lumki, u 22 ga teng edi, keyingi ikki determinant yig'indisi ham 22ga teng bo'ladi,bu esa 7-xossaning o'rinli ekanligini ko'rsatadi.

8. Determinantning biror ustini (satri) elementlariga boshqa ustini(satri)ning mos elementlarini istalgan umumiy ko'paytuvchiga ko'paytirib qo'shilsa, uning kattaligi o'zgarmaydi, yahni:

$$\begin{pmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11} + \lambda a_{12}) & a_{12} & a_{13} \\ (a_{21} + \lambda a_{22}) & a_{22} & a_{23} \\ (a_{31} + \lambda a_{32}) & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Misol uchun,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

determinantning 2-ustun elementlarini 2 ga ko'paytirib, 1-ustunning mos elementlariga qo'shib, hosil bo'lgan determinantni hisoblasak:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 7 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 28 - 6 = 22$$

bo'ladi. Bu determinantning kattaligi 1- misolda hisoblaganimizdek 22 ga teng edi, bu esa 8-xossaning ham to'g'riligini ko'satadi;

Determinantlarning xossalaridan foydalanish ko'p hollarda qulay hisoblashlarga olib keladi. Ushbu misolni qaraymiz.

2-misol. $\Delta = \begin{vmatrix} 12314 & 16536 & 20537 \\ 6157 & 8268 & 10268 \\ 513 & 689 & 126 \end{vmatrix}$ determinantning kattaligini hisoblang.

Echish. Bu determinantni uchburchak qoidasi bilan hisoblash ko'p xonali sonlar bo'lganligi uchun ancha noqulayliklarga olib keladi. SHuning uchun bu determinantni hisoblash uchun, uning xossalaridan foydalanishga urinamiz. Ikkinchi satr elementlarini -2 ga ko'paytirib 1-satr mos elementlariga qo'shamiz, bu holda ushbu determinant hosil bo'ladi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6157 & 8268 & 10268 \\ 513 & 689 & 126 \end{vmatrix};$$

hosil bo'lgan determinantni 1- satr elementlari bo'yicha yoyib,ushbuni

$$\Delta = 0 \cdot \begin{vmatrix} 8268 & 10268 \\ 689 & 126 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 6157 & 10268 \\ 513 & 126 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 6157 & 8268 \\ 513 & 689 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6157 & 8268 \\ 513 & 689 \end{vmatrix} (-12)$$

olamiz.Oxirgi determinant 2-satr elementlarini (-12) ga ko'paytirib 1-satr mos elementlariga qo'shib ushbu natijaga ega bo'lamiz:

$$\begin{vmatrix} 6157 & 8268 \\ 513 & 689 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 513 & 689 \end{vmatrix} = 1 \cdot 689 - 0 \cdot 513 = 689 .$$

Bu misoldan ko'rinadiki, determinantlarni hisoblashda uning xossalaridan foydalanish ancha qulayliklarga olib keladi.

3 –tartibli determinantni ***diagonallar usuli*** deb ataluvchi ushbu usul bilan ham hisoblash mumkin:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - .$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33} .$$

1-misoldagi determinantni diagonal usulidan foydalanib hisoblasak,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ -3 & 0 \end{matrix} = 24 - 6 + 0 + 0 + 0 + 4 = 22$$

bo'ladi.

5. n **- tartibli determinantlar haqida.** Ko'pgina masalalarni yechishda 2 va 3-tartibli determinantlardan tashqari yanada yuqori tartibli determinantlar ham uchraydi. Masalan, 4-tartibli determinant ushbu ko'rinishda bo'ladi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Umumiy holda n -tartibli determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1} a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \dots + a_{1n} A_{1n}$$

ko'rinishda bo'ladi. Bunda $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n}$ mos ravishda $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ elementlarning algebraik to'ldiruvchilaridir. Ma'lumki, algebraik to'ldiruvchilar $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n}$ ning tartiblari $(n-1)$ bo'ladi. Determinantlarning hamma xossalari n -tartibli determinant uchun ham o'rinlidir.

Yuqori tartibli determinantlarni hisoblashda determinantlarning 6-xossasidan foydalanib, uning tartibini pasaytirish bilan 3 yoki 2-tartibli determinantlarga keltirib hisoblanadi. Masalan, 4-tartibli determinantni 1-satr elemenlari bo'yicha yoysak ushbu ko'rinishda bo'ladi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Bundan yuqori tartibli determinantlarning ham kattaligi yuqoridagiga o'xshash hisoblanadi. Masalan, 6-tartibli determinantning kattaligini hisoblash kerak bo'lsa, uni biror satri yoki ustuni elementlari bo'yicha yoyib 5-tartibli determinantlarga, keyin o'z navbatida 5-tartibli determinanatlarni ham biror satri yoki ustuni elementlari bo'yicha yoyib, 4-tartibli determinantlarga keltiriladi va hokazo.

Determinantlarning yuqorida ko'rsatilgan xossalari hamma tartibli determinantlar uchun ham to'g'ri. Endi yuqori tartibli determinantlarni hisoblashga misol qaraymiz. Ushbu determinantning kattaligini hisoblang.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Echish. Berilgan determinantni 1-satr elementlari bo'yicha yoyib hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$2\left[3\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right] + 3\cdot\left[(-1)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\right] =$$

$$= 2(-9+4+16) + 3(2+6-16) = 22 - 24 = -2.$$

Determinantlarni hisoblashda uning biror satri yoki ustunlarida no'llar ko'proq bo'lsa, o'sha satr yoki ustun elementlari bo'yicha yoyib hisoblash ancha qulaylik keltiradi, masalan, yuqoridagi misolda 1-satr elementlari bo'yicha yoyganimiz uchun, yahni unda 2 ta no'l element bo'lgani uchun 2 ta 3- tartibli determinantlarni hisoblab chiqishga hojat qolmadi. Bunday satr yoki ustunlar bo'lmasa determinantlarning 8-xossasidan foydalanib, uni bunday satrga yoki ustunga ega bo'ladigan qilib o'zgartirish mumkin, misol uchun ushbu

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

determinantni hisoblaylik. Buning uchun 1-ustun elementlarini oldin 2 ga keyin mos ravishda 5 ga, -4 ga ko'paytirib, 2,3 va 4- ustunlarning mos elementlariga qo'shamiz, bu holda:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \\ 3 & 7 & 13 & -11 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 7 & 13 & -11 \end{vmatrix}$$

bo’lib, keyingi 3-tartibli determinantni 2-satr elementlari bo’yicha yoysak:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 7 & 13 & -11 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 7 & -11 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-33 + 21) = 7 \cdot (-12) = -84$$

bo’ladi.

6. Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usuli bilan yechish

Chiziqli tenglamalar sistemasining yechimini topishni oldin ikki noma’lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi uchun qaraymiz. Ushbu ikki noma’lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

dan, birinchi tenglamani a_{22} ga, ikkinchi tenglamani $-a_{12}$ ga hadma-had ko’paytiramiz va hosil bo’lgan tenglamalarni qo’shamiz, natijada

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = b_1a_{22} - b_2a_{12} \qquad (1)$$

tenglama hosil bo’ladi. Xuddi shunga o’xshash, 1-tenglamani $-a_{21}$ ga, 2-tenglamani a_{11} ga hadma-had ko’paytirib, hosil bo’lgan tenglamalarni qo’shib ushbuni hosil qilamiz:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = b_2a_{11} - b_1a_{21} \qquad (2)$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$b_2a_{11} - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

bo’lgani uchun, quyidagi belgilashlarni kiritib

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

(1) va (2) tengliklarni

$$\Delta x = \Delta_1, \qquad \Delta y = \Delta_2$$

ko’rinishda yozish mumkin. Bundan $\Delta \neq 0$ bo’lsa,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

bo’ladi, yoki determinantlar orqali yozsak

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Bu formulalarga Kramer formulalari deyiladi, bunda Δ_1 yordamchi determinant Δ determinantning birinchi ustunini ozod hadlar bilan, Δ_2 da esa ikkinchi ustun ozod hadlar bilan almashtiriladi. Δ determinantga tenglamalar sistemasining determinanti deyiladi.

SHunday qilib, berilgan chiziqli tenglamalar sistemasining determinanti 0 dan farqli bo'lsa, sistema yagona yechimga ega bo'ladi.

Endi sistemaning determinanti 0 ga teng, yahni

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0 \quad \text{ёки} \quad a_{11}a_{22} = a_{21}a_{12}$$

bo'lsin. Bu holda 1-tenglamaning noma'lumlari oldidagi koeffitsientlari 2-tenglamaning noma'lumlari oldidagi koeffitsientlariga proportsionaldir. Haqiqatan, koeffitsientlardan biri, masalan a_{11} noldan farqli bo'lsin deb $\frac{a_{22}}{a_{11}} = \lambda$ bilan belgilasak, bundan $a_{21} = \lambda a_{11}$ bo'ladi. U holda $a_{11}a_{22} = a_{21}a_{12}$ tenglikdan $a_{11}a_{22} = \lambda a_{11}a_{12}$ bo'lib, $a_{22} = \lambda a_{12}$ kelib chiqadi. Bularni hisobga olib, berilgan sistemani

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ \lambda(a_{11}x + a_{12}y) = b_2 \end{cases} \tag{3}$$

ko'rinishda yozish mumkin. bunda ikkita xususiy hol bo'lishi mumkin:

1) ikkala Δ_1 va Δ_2 determinantlar 0 ga teng, yahni $\Delta_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} = 0, \quad \Delta_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} = 0$ bundan $b_2 = \lambda b_1$, chunki $a_{22} = \lambda a_{12}$.

Bu holda $a_{21},\ a_{22},\ b_2$ sonlar $a_{11},\ a_{12},\ b_1$ sonlarga proportsional bo'lib, berilgan tenglamalar sistemasi ushbu ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ \lambda(a_{11}x + a_{12}y) = \lambda b_1 \end{cases}$$

SHunday qilib, sistemaning ikkinchi tenglamasi, birinchi tenglamasidan uning ikkala qismini λ ga ko'paytirish bilan hosil qilinadi, yahni u 1-tenglamaning natijasidir. Bu holda berilgan sistema cheksiz ko'p yechimlar to'plamiga ega bo'ladi. Masalan, y ga ixtiyoriy qiymatlar berib, x ning tegishli qiymatini $x = \frac{b_1 - a_{12}y}{a_{11}}$ tenglikdan topamiz.

2) Δ_1 va Δ_2 determinantlardan hech bo'lmaganda bittasi 0 dan farqli, masalan,

$\Delta_2 = b_2 a_{11} - b_1 a_{21} \neq 0$ bo'lsin. U holda $b_2 a_{11} \neq b_1 a_{21}$ bo'ladi, demak $b_2 \neq \lambda b_1$.

bu holda (3) sistemadan ma'lum bo'ladiki, $\lambda(a_{11}x + a_{12}y) = b_2$ tenglama birinchi $a_{11}x + a_{12}y = b_1$ tenglamaga qarama-qarshidir. Demak, berilgan sistema yechimga ega emas, yahni birgalikda emas.

Endi uch noma'lumli uchta tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin. Bu sistema noma'lumlari koeffitsientlaridan ushbu determinantni tuzamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

bunga (4) ***sistemaning determinanti*** yoki aniqlovchisi deyiladi. $\Delta \neq 0$ bo'lsa, (4) sistema yagona

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} \qquad (5)$$

echimga ega bo'ladi, bunda

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

(5) formulaga ham ikki noma'lumli ikkita tenglamalar sistemasidagidek ***Kramer formulalari*** *deyiladi*. Kramer formulalari n noma'lumli n ta tenglamalar sistemasi uchun ham umumlashtiriladi.

Endi misollar qaraymiz:

1-misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1, \\ 3x_1 + x_2 = 18 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining yechimini toping.

Echish. Bu sistemaning determinanti $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-3) \cdot 3 = 2 + 9 = 11 \neq 0$.

Demak, berilgan tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega.

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 18 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 18 \cdot 3 = 55, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 18 \end{vmatrix} = 36 - 3 = 33.$$

SHunday qilib, $x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta} = \dfrac{55}{11} = 5,\ x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta} = \dfrac{33}{11} = 3$.

2-misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3+2x_4=3, \\ x_1+2x_2+2x_3+x_4=2, \\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4=-1, \\ x_1+4x_2+3x_3+2x_4=5 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yeching.

Echish. Sistema determinantini tuzib, uning uchinchi satri elementlarini (-1)ga ko'paytirib, 1 satr mos elementlariga qo'shib, hosil bo'lgan determinantni 1-satr elementlari bo'yicha yoyib quyidagini hosil qilamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Oxirgi 3-tartibli determinantda 1- ustun elementlarini (-2)ga ko'paytirib 3- ustun mos elementlariga qo'shib, hamda 3- ustun elementlari bo'yicha yoyib

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(3-4) = 1$$

ni hosil qilamiz. $\Delta \neq 1$, demak, tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega. Endi boshqa determinantlarni hisoblaymiz:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad \Delta x_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \quad .$$

(Bu determinantlarni hisoblab ko'rishni o'quvchiga havola etamiz).

SHunday qilib, Kramer formulalariga asosan,

$$x_1=\frac{\Delta x_1}{\Delta}=\frac{2}{1}=2,\quad x_2=\frac{1}{1}=1,\quad x_3=\frac{-3}{1}=-3,\quad x_4=\frac{4}{1}=4$$

bo'ladi.

Topilgan yechimni tenglamalar sistemasiga bevosita qo'yib uning to'g'riligiga ishonamiz.

3-misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-3x_3=3,\\ 4x_1+6x_2-2x_3=6,\\ 3x_1-x_2+2x_3=-1 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining yechimini toping.

Echish. Oldin sistemaning determinantini hisoblaymiz:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1\\ 4 & 6 & -2\\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=24-18+4+18-24-4=0.$$

Sistema determinanti 0 ga teng, bunda ikki hol bo'lishi mumkin. Tenglamalar sistemasi yechimga ega bo'lmasligi yoki cheksiz ko'p yechimga ega bo'lishi mumkin. Buni aniqlash uchun $\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3$ yordamchi determinantlarni hisoblaymiz:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1\\ 6 & 6 & -2\\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1\\ 4 & 6 & -2\\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3\\ 4 & 6 & 6\\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0$$

Ikkinchi va birinchi tenglamalarni solishtirib, ikkinchi tenglama birinchi tenglamadan ikkiga ko'paytirish bilan hosil bo'lganligini payqaymiz. Demak, berilgan sistema

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-3x_3=3,\\ 3x_1-x_2+2x_3=-1 \end{cases}\tag{6}$$

tenglamalar sistemasiga teng kuchli bo'ladi. Bu sistemaning birorta noma'lumiga ixtiyoriy qiymatlar berish bilan cheksiz ko'p yechimlar to'plamiga ega bo'lamiz, masalan,

$x_3=1$ bo'lsin, uni oxirgi sistemaga qo'ysak,

$\begin{cases} 2x_1+3x_2=4\\ 3x_1-x_2=-3 \end{cases}$ sistema hosil bo'lib, $x_1=-\frac{5}{11},\quad x_2=\frac{18}{11}$ bo'ladi.

Bu holda $\left(\frac{-5}{11},\ \frac{18}{11},\ 1\right)$ yechim hosil bo'ladi. $x_3=-2$ bo'lsin, buni (6) sistemaga qo'yib, quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1, \\ 3x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$$

bundan, $x_1 = \dfrac{10}{11}$, $x_2 = -\dfrac{3}{11}$ bo'lib, $\left(\dfrac{10}{11}, -\dfrac{3}{11}, -2\right)$ yechimni olamiz.

Shunday qilib, noma'lumlarning biriga ixtiyoriy qiymatlar berib, cheksiz ko'p yechimlarni olamiz.

4-misol. Ushbu

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4, \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yeching.

Echish. Berilgan sistema determinantini hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

bo'lib, yordamchi determinantlar ham $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ bo'ladi. Bu tenglamalar sistemasi yechimga ega emas, chunki 1-tenglama bilan 3-tenglama o'zaro ziddir, yahni 1-tenglamani -3 ga ko'paytirib 3- tenglamaga hadma-had qo'shsak, 0=-3 tenglik hosil bo'lib, bu tenglamalar sistemasining birgalikda bo'lmasligini bildiradi.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Algebra va algoritm iborasi nima bilan bog'liq?
2. 2-tartibli determinant qanday belgilanadi va u nimaga teng?
3. 3-tartibli determinant qanday belgilanadi va u qanday hisoblanadi?
4. Determinantlarning xossalari nimalardan iborat.
5. 4-tartibli determinantlarning kattaligi qanday hisoblanadi?
6. $5,6,\dots,n$ -tartibli determinantlar qanday belgilanadi va hisoblanadi?

2- MA'RUZA. Matritsalar va ular ustida amallar

Reja

1. Matritsalar haqida umumiy tushunchalar.
2. Matritsalar ustida amallar.
3. Matritsaning rangi va uni hisoblash.
4. Teskari matritsa va uni topish.

Tayanch ibora va tushunchalar

Matritsa, matritsaning o'lchami, matritsaning determinanti, maxsus matritsa, maxsusmas matritsa, bosh diagonal, diagonal matritsa, birlik matritsa, transponirlangan matritsa, teng matritsalar, matritsalarning yig'indisi,matritsani songa ko'paytirish, matritsalar ko'paytmasi,matritsaning k-tartibli minori, matritsaning rangi, elementar almashtirishlar,teskari matritsa.

1 Matritsalar haqida umumiy tushunchalar. Sistemalarni modellashtirishda **m*atritsalar algebrasi*** degan tushuncha muhim ahamiyatga ega . Rejalashtirish muammolari, yalpi mahsulot, jami mehnat sarfi, narxni aniqlash va boshqa masalalar hamda ularda kompg'yuterlarni qo'llash matritsalar algebrasini qarashga olib keladi. Ishlab chiqarishni rejalashtirish, moddiy ishlab chiqarish orasidagi mavjud bog'lanishlarni ifodalashda va boshqalarda, ma'lum darajada tartiblangan axborotlar sistemasiga asoslangan bo'lishi lozim. Bu tartiblangan axborotlar sistemasi muayyan jadvallar ko'rinishida ifodalangan bo'ladi. Misol o'rnida moddiy ishlab chiqarish tarmoqlari orasidagi o'zaro bog'liqlik axborotlari sistemasini qaraylik. Ishlab chiqarish 5 ta (masalan, mashinasozlik, elektroenergiya, metal, ko'mir, rezina ishlab chiqarish sanoatlari) tarmoqdan iborat bo'lsin. Bunda ular orasidagi o'zaro bog'liqlik 1-jadval bilan ifodalansin.

1-jadval.

Tarmoq-lar	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}
5	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}

Bu jadvalda $a_{ij}\ (i,\ j = 1,2,3,4,5)$ lar bilan, i-tarmoqning j- tarmoqqa yetkazib beradigan (tahminlaydigan) mahsuloti miqdori belgilangan, chunonchi, a_{21}, a_{22}, ..., a_{25} lar 2-tarmoqning mos ravishda hamma tarmoqlarga; a_{31}, a_{32}, ..., a_{35} lar esa 3-tarmoqning mos ravishda hamma tarmoqlarga yetkazib beradigan mahsulotlari miqdorini bildiradi. a_{22}, a_{33} lar mos ravishda 2,3-tarmoqlarning o'z ehtiyojlariga sarfini ifodalaydi.

Yuqoridagiga o'xshash ishlab chiqarish mezoni (normasi) axborotlari sistemasiga sonli misol qaraylik. Korxona 3 turdagi xom ashyo ishlatib 4 xildagi mahsulot ishlab chiqaradigan bo'lsin, bunda xom ashyo sarfi normasi sistemasi 2-jadval bilan berilgan bo'lsin.

2-jadval.

Xom ashyolar	Mahsulotlar			
	1	**2**	**3**	**4**
1	**2**	**3**	**2**	**0**
2	**4**	**0**	**3**	**5**
3	**3**	**5**	**2**	**4**

2-jadvalda masalan, 1-turdagi xom ashyo sarfi normasi mos ravishda 1,2,3,4-xildagi mahsulotlar ishlab chiqarish uchun 2,3,2,0 bo'ladi.

1 va 2 jadvallar, matematikada o'rganiladigan matritsalar tushunchasining misollari bo'laoladi. Matritsalar iqtisodiy izlanishlarda keng qo'llanilmoqda, xususan, ulardan foydalanish ishlab chiqarishni rejalashtirishni

osonlashtirib, mehnat sarfini kamaytiradi, hamda rejaning har xil variantlarini tuzishni ixchamlashtiradi. Bundan tashqari har xil iqtisodiy ko'rsatkichlar orasidagi bog'liqlikni tekshirishni osonlashtiradi. Bu holatlar matritsalarni umumiy holda qarashga olib keladi.

1-tahrif. m ta satrli va n ta ustunli to'g'ri burchakli $m \cdot n$ ta elementdan tuzilgan jadval

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m \times n$ ***o'lchamli matritsa*** deyiladi. A matritsani qisqacha (a_{ij}) $(i = 1,\dots m, \ \ j = 1,\dots n)$ bilan ham belgilash mumkin. Matritsalarda satrlar soni ustunlar soniga teng bo'lsa, bunday matritsalar **kvadrat matritsa** deb ataladi.

Har bir n tartibli kvadrat matritsa uchun uning elementlaridan tuzilgan *determinantni* hisoblash mumkin, bu determinantga A matritsaning ***determinanti*** deyiladi va $\det A$ yoki $|A|$ bilan belgilanadi. $\det A = 0$ bo'lsa, A matritsaga ***maxsus matritsa***, $\det A \neq 0$ bo'lsa, ***maxsusmas matritsa*** deyiladi. Kvadrat matritsaning $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elementlar joylashgan diagonali ***bosh diagonal***, $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ elementlari joylashgan diagonali ***yordamchi diagonal*** deyiladi. Bosh diagonaldagi elementlar 0dan farqli boshqa barcha elementlari 0 ga teng kvadrat matritsa ***diagonal matritsa*** deyiladi.Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

matritsa diagonal matritsadir. Diagonaldagi barcha elementlari 1 ga teng diagonal matritsa ***birlik matritsa*** deyiladi va

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

bilan belgilanadi.

Faqat bitta satrdan iborat $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{pmatrix}$ matritsaga satr matritsa deyiladi. Faqat bitta ustunga ega

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix}$$

matritsaga ustun matritsa deb ataladi.

Barcha elementlari 0 lardan iborat bo'lgan matritsaga no'l matritsa deyiladi va O bilan belgilanadi.

A matritsaga quyidagi matritsani mos qo'yish mumkin:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{21} \cdots a_{m1} \\ a_{12}\, a_{22} \cdots a_{m2} \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ a_{1n}\, a_{2n} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Bu matritsaning har bir satri A matritsaning unga mos ustunidan iborat. A^T matritsani A matritsaga nisbatan <u>transponirlangan</u> deyiladi.

$A = (a_{ij})$ va $B = (b_{ij})$ $(i = \overline{1m},\ j = \overline{1n})$ matritsalarning mos elementlari $a_{ij} = b_{ij}$ teng bo'lsa, bunday <u>matritsalar teng</u> deyiladi.

2. Matritsalar ustida amallar. Matritsalarni qo'shish, songa ko'paytirish va bir-biriga ko'paytirish mumkin.

Bir xil o'lchamli $A = (a_{ij})$va $B = (b_{ij})$ $(i = \overline{1m},\ j = \overline{1n})$ <u>matritsalarning yig'indisi</u> deb, elementlari $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ravishda aniqlanadigan uchinchi $C = (c_{ij})$ matritsaga aytiladi. Ravshanki, C matritsaning o'lchami oldingi matritsalarning o'lchami bilan bir xil bo'ladi. Masalan:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad ва \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

matritsalar yig'indisi

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+1 & 0+3 \\ 3-2 & 1+4 & -1+2 \\ 0+5 & 4+0 & 5+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix} = C$$

bo'ladi. Matritsalarni qo'shish amali quyidagi o'rin almashtirish va guruhlash xossalariga ega, yahni

$$A + B = B + A, \qquad (A + B) + C = A + (B + C).$$

Matritsalarni qo'shishda biror matritsaga O matritsani qo'shish odatdagi sonlarni qo'shishdagi no'l soni rolini o'ynaydi, yahni

$$A + O = A.$$

masalan,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

A matritsani λ songa ko'paytirish deb uning hamma elementlarini shu songa ko'paytirishga aytiladi, yahni

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}$$

masalan,

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

matritsani $\lambda = 3$ ga ko'paytirsak,

$$\lambda A = 3 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 6 & 0 \\ 12 & 9 & 3 \\ 15 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

bo'ladi.

$m \cdot k$ o'lchamli $A = (a_{ij})$ matritsaning $k \cdot n$ o'lchamli $B = (b_{ij})$ matritsaga, ko'paytmasi deb $m \cdot n$ o'lchamli shunday $C = (c_{ij})$ matritsaga aytiladiki uning c_{ij} elementi A matritsa i-satri elementlarini B matritsa j-ustunining mos elementlariga ko'paytmalari yig'indisiga teng, yahni:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}$$

Matritsalar ko'paytmasi $C = AB$ bilan belgilanadi. Demak, matritsalarni ko'paytirish uchun birinchi ko'paytuvchining ustunlari soni, 2- ko'paytuvchining satrlari soniga teng bo'lishi talab qilinadi. SHu sababli, umuman $AB \neq BA$.

1-misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \\ 5 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ matritsalar berilgan. A va B matritsalarni ko'paytiring.

Echish. Birinchi matritsaning ustunlar soni, ikkinchi matritsaning satrlar soniga teng, shuning uchun bu matritsalarni ko'paytirish mumkin:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \\ 5 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 0\cdot 0 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6 & 1\cdot 7 + 0\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 0 \\ 4\cdot 2 + (-3)\cdot 0 + 1\cdot 5 + 0\cdot 6 & 4\cdot 7 + (-3)\cdot 2 + 1\cdot 4 + 0\cdot 0 \\ 2\cdot 2 + 5\cdot 0 + 3\cdot 5 + 1\cdot 6 & 2\cdot 7 + 5\cdot 2 + 3\cdot 4 + 1\cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 30 & 15 \\ 13 & 26 \\ 25 & 36 \end{pmatrix}.$$

Matritsalarni ko'paytirish ushbu

$$A \cdot (BC) = (AB) \cdot C$$

guruhlash hamda

$$(A+B)\cdot C = AC + BC$$

taqsimot xossasiga ega. Masalan,

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & -4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 4\\ 1 & -3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}$$

bo’lsin. Bu holda

$$A\cdot(BC)=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & -4\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 4\\ 1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\cdot(-1)+2\cdot 0 & 0\cdot 2+2\cdot(-3)\\ 3\cdot(-1)+4\cdot 0 & 3\cdot 2+4\cdot(-3)\\ 1\cdot(-1)+(-3)\cdot 0 & 1\cdot 2+(-3)\cdot(-3)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -6\\ -3 & -6\\ -1 & 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13 & 14\\ -14 & -110\end{pmatrix}.$$

Endi $(AB)\cdot C$ ko’paytirishni bajaramiz:

$$(AB)C=\left[\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 4\\ 1 & -3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 4\\ 14 & 46\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}13\cdot(-1)+4\cdot 0 & 13\cdot 2+4\cdot(-3)\\ 14\cdot(-1)+46\cdot 0 & 14\cdot 2+46\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13 & 14\\ -14 & -110\end{pmatrix}$$

SHunday qilib

$$A\cdot(BC)=(AB)\cdot C$$

xossa o’rinli bo’ladi. Endi taqsimot xossasini qaraymiz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & -3\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\ 3 & -2 & 0\\ & & \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

bo’lsin. Oldin taqsimot xossasining chap tomonini

$(A+B)\cdot C$

$$(A+B)\cdot C=\left[\begin{pmatrix}1 & 4 & -3\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}=$$

hisoblaymiz:

$$=\begin{pmatrix}0 & 6 & -5\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 34\\ 5 & -7\end{pmatrix}.$$

O’ng tomoni

$$AC + BC = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 19 \\ -1 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 15 \\ 6 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 34 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}.$$

bo’ladi.
Shunday qilib

$$(A + B) \cdot C = AC + BC$$

tenglik o’rinli bo’ladi.

Istalgan kvadrat matritsa A ni mos birlik E matritsaga ko’paytirganda

$$AE = EA = A$$

tenglik o’rinli bo’ladi

3.Matritsaning rangi va uni hisoblash. A $m \times n$ o’lchovli matritsada k satr va k ta ustunini ajratamiz, bunda, k, m va n sonlardan kichik yoki ularning kichigiga teng bo’lishi mumkin. Ajratilgan satr va ustunlarning kesishuvida hosil bo’lgan k -tartibli determinantga A ***matritsaning*** k ***-tartibli minori deyiladi.***

Tahrif. A matritsaning 0 dan farqli minorlarining eng yuqori tartibiga A ***matritsaning rangi*** deyiladi. A matritsaning rangi $rangA$ yoki $r(A)$ bilan belgilanadi.

Matritsa rangini bevosita hisoblashda ko’p sondagi determinantlarni hisoblashga to’g’ri keladi. Quyidagi amallardan foydalanib matritsa rangini hisoblash qulayroq. Matritsada: 1)faqat 0 lardan iborat satri (ustuni)ni o’chirishdan; 2) ikkita satr (ustun)ning o’rinlarini almashtirishdan; 3) biror satr (ustun)ning elementlarini biror $\lambda \neq 0$ songa ko’paytirib, boshqa satr (ustun) mos elementlariga qo’shish; 4) matritsani transponirlashdan, uning rangi o’zgarmaydi. Bu amallarga odatda ***elementar almashtirishlar*** deyiladi.

1-misol. $$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & -6 & -5 \\ 1 & -4 & -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

matritsaning rangini hisoblang.

Echish. A matritsaning rangini hisoblash uchun elementar almashtirishlardan foydalanamiz. Birinchi satr elementlarini ikkinchi satr elementlariga, birinchi satr elementlarini (–2)ga ko’paytirib, uchinchi satr elementlariga, hamda uchinchi satr elementlarini to’rtinchi satr elemntlariga qo’shib quyidagi matritsani hosil qilamiz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Keyingi matritsada 2-satrini (–1) ga ko'paytirib to'rtinchi satriga qo'shsak

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matritsa hosil bo'ladi. Bu matritsada

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 2 = 7 \neq 0$$

bo'lib, to'rtinchi tartibli minorlar 0 ga teng. SHunday qilib, berilgan matritsaning rangi 3 ga teng.

4. Teskari matritsa va uni topish. A kvadrat matritsa uchun $AB = BA = E$ birlik matritsa bo'lsa, B kvadrat matritsa A matritsaga ***teskari matritsa*** deyiladi. Odatda, A matritsaga teskari matritsa A^{-1} bilan belgilanadi.

Teorema: A kvadrat matritsa teskari matritsaga ega bo'lishi uchun A matritsaning determinanti 0 dan farqli bo'lishi zarur va yetarlidir. (Bu teoremani isbotsiz keltirdik, uning isbotini kengroq dasturli kurslardan topish mumkin, masalan, V.E.SHneyder va boshqalar. «Oliy matematika qisqa kursi» 1tom. T. O'qituvchi. 1985. 407 b.)

A kvadrat matritsa uchun $\det A \neq 0$ bo'lsa , unga teskari bo'lgan yagona matritsa A^{-1} mavjud.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsaga teskari A^{-1} matritsa $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ - & - & - & - \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$

formula bilan topiladi. Bunda A_{ij} mos ravishda a_{ij} elementlarning algebraik to’ldiruvchilari va $\Delta = \det A$.

Teskari matritsani topishga misol qaraymiz.

2-misol. Ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

matritsaga teskari matritsani toping.

Echish. Oldin A matritsaning determinantini hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 18 + 4 + 3 - 2 - 12 - 9 = 2 \neq 0.$$

Yuqoridagi teoremaga asosan teskari matritsa mavjud, chunki

$$\Delta = 2 \neq 0$$

yahni, berilgan matritsa maxsusmas matritsadir. A^{-1} ni topish uchun A matritsa hamma elementlarining algebraik to’ldiruvchilarini topamiz:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 8,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Teskari matritsani topish

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

formulasiga asosan

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2{,}5 & 4 & -1{,}5 \\ 0{,}5 & -1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

bo’ladi. A^{-1} teskari matritsaning to’g’ri topilganligini

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

tenglikning bajarilishi bilan tekshirib ko'rish mumkin, haqiqatan ham,

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2.5 & 4 & -1.5 \\ 0.5 & -1 & 0.5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 1\cdot(-2.5) + 1\cdot 0.5 & 1\cdot(-3) + 1\cdot 4 + 1\cdot(-1) & 1\cdot 1 + 1\cdot(-1.5) + 1\cdot 0.5 \\ 1\cdot 3 + 2\cdot(-2.5) + 4\cdot 0.5 & 1\cdot(-3) + 2\cdot 4 + 4\cdot(-1) & 1\cdot 1 + 2\cdot(-1.5) + 4\cdot 0.5 \\ 1\cdot 3 + 3\cdot(-2.5) + 9\cdot 0.5 & 1\cdot(-3) + 3\cdot 4 + 9\cdot(-1) & 1\cdot 1 + 3\cdot(-1.5) + 9\cdot 0.5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

yahni, $AA^{-1} = E$ birlik matritsa hosil bo'ladi, bu A^{-1} teskari matritsaning to'g'ri topilganligini isbotlaydi.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Matritsa deb nimaga aytiladi?
2. Matritsaning o'lchovi nima va u qanday yoziladi?
3. Kvadrat matritsa deb qanday matritsaga aytiladi?
4. Matritsaning determinanti nima?
5. Maxsus va maxsusmas matritsalar qanday matritsalar?
6. Diagonal matritsa deb nimaga aytiladi?
7. Birlik matritsa deb qanday matritsaga aytiladi?
8. Transponirlangan matritsa deb nimaga aytiladi?
9. Qanday matritsalar teng bo'ladi?
10. Matritsalar yig'indisi nima?
11. Matritsani songa ko'paytirish qanday bo'ladi?
12. Qanday matritsalarni ko'paytirish mumkin?
13. Matritsalar qanday ko'paytiriladi?
14. Matritsaning rangi nima?
15. Elementar almashtirishlar deb qanday amallarga aytiladi?
16. Teskari matritsa qanday topiladi?

3- MA'RUZA. Chiziqli tenglamalar sistemasi

Reja

1. **Chiziqli tenglamalar sistemasi haqida umumiy tushunchalar.**
2. **Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsalar yordamida yechish.**
3. **Kroneker-Kapelli teoremasi.**
4. **Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi.**
5. **CHiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechish.**

Tayanch ibora va tushunchalar

Chiziqli tenglamalar sistemasi(ChTS),tenglamalar sistemasining yechimi, yagona yechim, sistema birgalikda, aniq bo'lmagan sistema,ekvivalent sistema, birgalikda bo'lmagan sistema, sistema matritsasi, kengaytirilgan matritsa, Kroneker-Kapelli teoremasi, bir jinsli sistema, bosh o'zgaruvchilar, noma'lumlarni yo'qotish, teskari qadam, Gauss usulining xususiyati, sistema birgalikda va aniqmas, sistema birgalikda emas, Gauss usulining Jordan modifikatsiyasi usuli. Sistema matritsasi, kengaytirilgan matritsa, Kroneker-Kapelli teoremasi, bir jinsli sistema, bosh o'zgaruvchilar, noma'lumlarni yo'qotish, teskari qadam, Gauss usulining xususiyati, sistema birgalikda va aniqmas, sistema birgalikda emas, Gauss usulining Jardono modifikatsiyalashgan usuli.

1.ChTS haqida umumiy tushunchalar. Ma'lumki bir necha tenglamalar birgalikda qaralsa, ularga tenglamalar sistemasi deyiladi.

Tenglamalar sistemasidagi hamma tenglamalar chiziqli (1-darajali) bo'lsa, bunday tenglamalar sistemasiga chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi.

Tenglamalar sistemasidagi noma'lumlar o'rniga ma'lum sonlar majmuini qo'yganda, sistemaning hamma tenglamalari ayniyatga aylansa, bunday sonlar majmuiga tenglamalar sistemasining yechimi (ildizi) deyiladi. Bunday sonlar majmui bitta bo'lsa, tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo'lib, bu sistema aniqlangan (tayin, muayyan) deb ataladi va bu tenglamalar sistemasi birgalikda deyiladi. Birgalikda bo'lgan sistema bittadan ko'p yechimga ega bo'lsa, bunday sistema aniq bo'lmagan sistema deyiladi.

Birgalikda bo'lgan tenglamalar sistemasi bir xil yechimlar majmuiga ega bo'lsa, bunday sistemalar ekvivalent deyiladi.

Tenglamalar sistemasi birorta ham yechimga ega bo'lmasa, bunday sistemaga birgalikda bo'lmagan sistema deyiladi.

Berilgan tenglamalar sistemasining birorta tenglamasini 0dan farqli songa ko'paytirib, boshqa tenglamasiga hadma-had qo'shish bilan hosil bo'lgan sistema berilgan sistemaga ekvivalent bo'ladi (bu xossadan kelgusida ko'p foydalaniladi).

Fan va texnikaning ko'p sohalarida bo'lganidek, iqtisodiyotning ham ko'p masalalarining matematik modellari chiziqli tenglamalar sistemasi orqali ifodalanadi.

Chiziqli tenglamalar sistemasini tuzishga iqtisodiyotdan misol qaraymiz.

1-misol. Korxona uch xildagi xom ashyoni ishlatib uch turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarish xarakteristikalari 1-jadvalda berilgan.

1-jadval.

Xom-ashyo xillari	**Mahsulot turlari bo'yicha xom-ashyo sarflari**			**Xom-ashyo zahirasi**
	1	**2**	**3**	
1	**5**	**12**	**7**	**2000**
2	**10**	**6**	**8**	**1660**
3	**9**	**11**	**4**	**2070**

Berilgan xom ashyo zahirasini ishlatib, mahsulot turlari bo'yicha ishlab chiqarish hajmini aniqlang.

Echish: Ishlab chiqarilishi kerak bo'lgan mahsulotlar hajmini mos ravishda x_1, x_2, x_3 lar bilan belgilaymiz. 1-tur mahsulotga, 1-xil xom ashyo, bittasi uchun sarfi 5 birlik bo'lganligi uchun $5x_1$ 1-tur mahsulot ishlab chiqarish uchun ketgan 1-xil xom ashyoning sarfini bildiradi. Xuddi shunday 2,3-tur mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun ketgan 1-xil xom ashyo sarflari mos ravishda $12x_2$, $7x_3$ bo'lib, uning uchun quyidagi tenglama o'rinli bo'ladi: $5x_1 + 12x_2 + 7x_3 = 2000$. Yuqoridagiga o'xshash 2,3-xil xom ashyolar uchun

$$10x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 1660,$$
$$9x_1 + 11x_2 + 4x_3 = 2070$$

tenglamalar hosil bo'ladi. Demak, masala shartlarida quyidagi uch nomag'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 7x_3 = 2000, \\ 10x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 1660, \\ 9x_1 + 11x_2 + 4x_3 = 2070. \end{cases}$$

Bu masalaning matematik modeli uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasidan iborat bo'ldi. Bu masala tenglamalar sistemasining yechimini topish bilan yechiladi. Bunday tenglamalar sistemasini yechishni umumiy holda qaraymiz.

2. **Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsalar yordamida yechish** Endi matritsalar yordamida chiziqli tenglamalar sistemasini yechishga o'tamiz.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \qquad (7)$$

n noma'lumli, n ta tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

belgilashlarni kiritamiz. Endi (7) sistemani matritsalarni ko'paytirish qoidasidan foydalanib,

$$AX = B \qquad (8)$$

ko'rinishda yozish mumkin. $\det A \neq 0$ bo'lsa, teskari matritsa A^{-1} mavjud va $A^{-1}AX = A^{-1}B$ hosil bo'ladi. SHunday qilib, noma'lum X matritsa $A^{-1}B$ matritsaga teng bo'ladi, yahni

$$X = A^{-1}B.$$

Bu (7) tenglamalar sistemasini yechishning ***matritsaviy yozuvini*** bildiradi.

1-misol. Matritsalar yordamida ushbu tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 2 \end{cases}.$$

Echish. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bu matritsalar yordamida berilgan tenglamalar sistemasini

$$AX = B \qquad (9)$$

ko'rinishda yozamiz. Endi A matritsaning determinantini hisoblaymiz.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 9 + 1\cdot 4\cdot 1 + 1\cdot 3\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 9 - 1\cdot 4\cdot 3 = 2\,.$$

A matritsaning determinanti 0 dan farqli bo'lganligi uchun, unga teskari yagona A^{-1} matritsa mavjud va tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo'ladi. Endi A^{-1} teskari matritsani topish uchun Δ determinant elementlarining hamma algebraik to'ldiruvchilarini hisoblaymiz:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 12 = 6, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 8, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\,.$$

Teskari A^{-1} matritsani topish formulasiga asosan,

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2{,}5 & 4 & -1{,}5 \\ 0{,}5 & -1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

(9) tenglikning ikki tomonini chapdan A^{-1} ga ko'paytirsak, $A^{-1}AX = A^{-1}B$ yoki $X = A^{-1}B$ bo'lib, yahni

$$X=\begin{pmatrix}3 & -3 & 1\\ -2{,}5 & 4 & -1{,}5\\ 0{,}5 & -1 & 0{,}5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot4+(-3)\cdot4+1\cdot2\\ -2{,}5\cdot4+4\cdot4+(-1{,}5)\cdot2\\ 0{,}5\cdot4-1\cdot4+0{,}5\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$$

tenglik hosil bo'ladi.

SHunday kilib, $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ yoki $x_1=2,\ x_2=3,\ x_3=-1.$

(Topilgan yechimlarni tenglamalar sistemasiga bevosita qo'yib, yechimning to'g'riligini tekshirib ko'rish mumkin).

3 .Kroneker-Kapelli teoremasi.Ushbu

$$\left.\begin{matrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m\end{matrix}\right\} \qquad (1)$$

umumiy ko'rinishdagi, yag'ni n ta nomag'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin.

Berilgan sistema noma'lumlari koeffitsientlaridan A matritsani hamda bu matritsaga ozod hadlardan tuzilgan ustunni birlashtirib, ikkinchi V matritsani tuzamiz, yahni bular ushbu ko'rinishshda bo'ladi.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ - & - & - & -\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix} \quad \text{va} \quad B=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ - & - & - & - & -\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m\end{pmatrix}$$

A matritsaga (1) sistemaning matritsasi, B matritsaga sistemaning kengaytirilgan matritsasi deyiladi. Quyidagi teorema o'rinli.

1- teorema. (Kroneker-Kapelli teoremasi). CHiziqli tenglamalar sistemasining birgalikda bo'lishi uchun sistema matritsasi A ning rangi sistema kengaytirilgan B matritsasining rangiga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Zarurligi. (1) sistema birgalikda bo'lsin. $k_1, k_2, \ldots, k_s$ uning yechimlaridan biri bo'lsin. Bu sonlarni sistemadagi noma'lumlar o'rniga qo'yib, s ta ayniyat hosil qilamiz. Bu ayniyatlar B matritsaning oxirgi ustuni qolgan barcha ustunlarining mos ravishda koeffitsietlar bilan ko'paytmasidan olingan yig'indisi ekanligini ko'rsatadi. B matritsaning har qanday boshqa ustuni A matritsaga ham kiradi va shuning uchun u matritsaning barcha ustunlari orqali chiziqli ifodalanadi. Aksincha, A matritsaning har qanday ustuni B matritsani ham ustuni bo'ladi, yahni bu matritsaning ustunlari orqali chiziqli ifodalanadi. Bundan A va B matritsalarning ustunlari sistemasi o'zaro ekvivalent ekanligi kelib chiqadi, shuning uchun bu matritsalarning rangi bir xil bo'ladi, yahni $r(A)=r(B)$ kelib chiqadi.

Etarliligi. A va B matritsalar bir xil rangga ega bo'lsin. Bundan A matritsa ustunlarining istalgan maksimal chiziqli erkli sistemasi B matritsada ham maksimal chiziqli erkli sistema bo'lib qolishligi kelib chiqadi. SHunda qilib A matritsa ustunlari sistemasi orqali B matritsaning oxirgi ustuni chiziqli ifodalanadi. Demak, shunday $k_1, k_2, \ldots, k_s$ sonlar majmui mavjud bo'ladiki, A matritsaning bu sonlar bilan ko'paytirishdan olingan ustunlari yig'indisi ozod hadlardan iborat ustunga teng, yahni $k_1, k_2, \ldots, k_s$ sonlar (1) sistemaning yechimi bo'ladi, shunday qilib, A va B matritsalar ranglarining bir xilda bo'lishidan (1) sistemaning birgalikda bo'lishi kelib chiqadi. Teorema to'liq isbotlandi.

Kroneker-Kapelli teoremasi yechim mavjud ekanligini tasdiqlaydi, lekin bu sistemaning barcha yechimlarini amalda topish uchun usulni bermaydi. Endi, ixtiyoriy chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning quyidagi qoidasini keltiramiz.

A matritsaning rangi B matritsaning rangiga teng bo'lib, $r(A) = r(B) = k$ bo'lsin. Bunda k son A matritsaning chiziqli erkli satrlarining maksimal soniga teng bo'lib, k noma'lumlar soniga teng bo'lsa, u holda sistema tenglamalari soni noma'lumlari soniga teng va uning determinanti noldan farqli bo'ladi, bunday sistemaning yechimi yagona bo'lib uni Kramer qoidasi bo'yicha topish mumkin bo'ladi.

Endi matritsalarning rangi k noma'lumlar sonidan kichik, yahni $k < n$ bo'lsin. Bu holda k - tartibli minor noldan farqli bo'ladi. Sistema tenglamalarining har qaysisida $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ noma'lumli hadlarini tenglamalarning o'ng tomoniga o'tkazamiz va bu noma'lumlar uchun biror $c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_n$ qiymatlari majmuini tanlab olib k noma'lumli k ta tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Hosil bo'lgan sistemaga Kramer qoidasini qo'llash mumkin va yagona $c_1, c_2, \ldots, c_k$ yechim majmui mavjud bo'ladi. Sistema tenglamalarining o'ng tomoniga o'tkazilgan noma'lumlarni ***ozod*** **noma'lumlar** deb ataymiz. CHap tomondagi nomag'lumlar **bosh(bazis) o'zgaruvchilar,** Ozod noma'lumlar uchun $c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_n$ sonlarni ixtiyoriy tanlab olishig'iz mumkin bo'lganligi uchun hosil bo'lgan sistemaning cheksiz ko'p turlicha yechimlari shu yo'l bilan hosil qilinadi. SHunday qilib, bu holda cheksiz ko'p yechimlar to'plamiga ega bo'lamiz.

$x_1, x_2, \ldots, x_k$ noma'lumlarning $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ ozod noma'lumlar qatnashgan yechimiga ***umumiy yechim*** deb ataladi, chunki boshqa cheksiz ko'p yechimlar $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ ozod noma'lumlarga ixtiyoriy qiymatlar majmuini berish bilan olinadi.

Tenglamalar sistemasini yechishga bir necha misollar qaraymiz.

1-misol. Ushbu tenglamalar sistemasini yeching.

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 1. \end{cases}$$

Echish. Sistema koeffitsientlaridan matritsa tuzamiz.

$$A=\begin{pmatrix}10 & -1 & 2 & 1\\ 4 & 1 & 4 & -2\\ 2 & -3 & -6 & 5\end{pmatrix}$$

Bu matritsaning rangi 2 ga teng, chunki

$$\begin{vmatrix}10 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix}=10+4=14\neq 0$$

bo'lib,

$$\begin{vmatrix}10 & -1 & 2\\ 4 & 1 & 4\\ 2 & -3 & -6\end{vmatrix}=0,\qquad \begin{vmatrix}10 & -1 & 1\\ 4 & 1 & -2\\ 2 & -3 & 5\end{vmatrix}=0$$

bo'ladi. Kengaytirilgan matritsa

$$B=\begin{pmatrix}10 & -1 & 2 & 1 & 12\\ 4 & 1 & 4 & -2 & 2\\ 2 & -3 & -6 & 5 & 2\end{pmatrix}$$

ning rangi 3 ga teng, chunki

$$\begin{vmatrix}10 & -1 & 6\\ 4 & 1 & 2\\ 2 & -3 & 1\end{vmatrix}=-14\neq 0$$

$r(A)=2,\ r(B)=3$ bo'lib, $r(A)\neq r(B)$ bo'ladi, demak isbotlangan teoremaga asosan sistema birgalikda emas.

2-misol. Ushbu tenglamalar sistemasini yeching.

$$\begin{cases}3x_1+2x_2=4,\\ x_1-4x_2=-1,\\ 7x_1+10x_2=12.\end{cases}$$

Echish. Sistema koeffitsientlaridan tuzilgan matritsa

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -4\\ 7 & 10\end{pmatrix}$$

bo'lib, $r(A)=2$, chunki $\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -4\end{vmatrix}=-14\neq 0$, lekin

3-tartibli minori yo'q. Kengaytirilgan matritsaning rangi ham 2 ga teng, chunki

$$\begin{vmatrix}3 & 2 & 4\\ 1 & -4 & -1\\ 7 & 10 & 12\end{vmatrix}=-144+40-14+112-24+30=0.$$

Birinchi ikkita tenglamaning chap qismlari chiziqli erkli, bu ikkita tenglamalar sistemasini yechib, noma'lumlar uchun ushbu qiymatlarni hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ x_1 - 4x_2 = -1. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -14 \neq 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -14, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

Bu yechim 3-tenglamani ham qanoatlantiradi.

3-misol. Ushbu tenglamalar sistemasini yeching.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Echish. Sistema matritsasining rangi $r(A) = 2$, chunki

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 5 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

bo'lganligini, yahni kengaytirilgan matritsaning barcha 3-tartibli minorlari 0 ga teng bo'lganligi uchun, uning ham rangi $r(B) = 2$. SHunday qilib, sistema birgalikda va $r(A) = r(B) = k = 2 < 4$ noma'lumlar sonidan kichik, bu holda birinchi va uchinchi tenglamalar sistemasini olaylik, chunki

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 10 = -7 \neq 0;$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

bundan

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 1 - 4x_3 - 3x_4, \\ 5x_1 + 3x_2 = 1 - 8x_3 - x_4 \end{cases}$$

bo'lib, tenglamalar sistemasini $x_{1\,,}x_2$ asosiy noma'lumlarga nisbatan yechsak:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 - 4x_3 - 3x_4 & 5 \\ 1 - 8x_3 - x_4 & 3 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{2}{7} - 4x_3 + \frac{4}{7}x_4,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-4x_3-3x_4 \\ 5 & 1-8x_3-x_4 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{4}{7} - \frac{12}{7}x_3 - 2x_4$$

bo'ladi. Ozod noma'lumlarni $x_3 = C_1,\ x_4 = C_2$ deb

$$x_1 = \frac{2}{7} - 4C_1 + \frac{4}{7}C_2,$$

$$x_2 = \frac{4}{7} - \frac{12}{7}C_1 + 2C_2$$

umumiy yechimni olamiz. C_1 va C_2 larga xar xil qiymatlar berib, masalan, $C_1 = 2,\ C_2 = 3$ bo'lganda $x_1 = -6,\ x_2 = \frac{22}{7},\ x_3 = 2,\ x_4 = 3,$ yahni $\left(-6, \frac{22}{7}, 2, 3\right)$ yechimni, $C_1 = 0, C_2 = -3$ bo'lganda $x_1 = -\frac{10}{7},\ x_2 = -\frac{38}{7},\ x_3 = 0,\ x_4 = -3,$ yahni $\left(-\frac{10}{7}, -\frac{38}{7}, 0, -3\right)$ va hokazo cheksiz ko'p yechimlarni olish mumkin.

4. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi. (1) tenglamalar sistemasida ozod hadlar 0 lardan iborat bo'lsa, bunday sistemaga <u>***bir jinsli sistema***</u> deyiladi, yag'ni

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\}$$

bo'lib, birjinsli sistema doimo birgalikda.

Bir jinsli sistema 0 dan farqli yechimga egaligini aniqlash muhimdir.

2-teorema. Bir jinsli sistema noldan farqli yechimga ega bo'lishi uchun sistema matritsasining rangi noma'lumlar sonidan kichik bo'lishi zarur va yetarlidir.

1-natija. Bir jinsli sistemada noma'lumlar soni tenglamalar sonidan katta bo'lsa, sistema 0 dan farqli yechimlarga ham ega bo'lishi mumkin.

2-natija. n noma'lumli n ta bir jinsli tenglamalar sistemasi 0 dan farqli yechimlarga ega bo'lishi uchun sistemaning determinanti 0 ga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

4-misol. Ushbu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yeching.

Echish. Sistema matritsasini va uning kengaytirilgan matritsasini tuzamiz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix} \text{ va } B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

B matritsada oxirgi ustunni saqlab elementar almashtirishlar bajaramiz:

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

0 lardan iborat satrni tashlab

$B_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ matritsani hosil qilamiz. Bunday almashtirishlarda B matritsa rangini aniqlash bilan A matritsaning ham rangini aniqlash imkoniyati tug'iladi. SHunday qilib, B matritsaning rangi 2 ga teng, A matritsaning rangi ham 2 ga teng. Demak, berilgan sistema birgalikda bo'ladi. Ma'lum bo'ldiki, uchinchi tenglama birinchi ikkita tenglamalarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat. SHuning uchun uchinchi tenglamani chiqarib

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1,\\ x_1+x_2+2x_3+x_4=0\end{cases}$$

to'rt noma'lumli ikkita tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz. Ikkita noma'lumni qolganlari orqali ifodalaymiz. Ma'lumki, x_1, x_2 noma'lumlarga nisbatan yechish mumkin emas, chunki ularning koeffitsientlaridan tuzilgan determinant 0 ga teng. Sistemani x_2, x_3 larga nisbatan yechish mumkin, yahni

$$\begin{cases} x_2+x_3=1-x_1-x_4,\\ x_2+2x_3=-x_1-x_4\end{cases}$$

x_2, x_3 larni ***<u>bosh (bazis) o'zgaruvchilar</u>,*** x_1, x_4 lar esa ozod(erkin) o'zgaruvchilar bo'ladi. Bu sistemani yechib $x_3=-1,\ x_2=2-x_1-x_4$ ni aniqlaymiz. x_1, x_4 o'zgaruvchilarga ketma-ket qiymatlar berib, cheksiz ko'p yechimlar to'plamiga ega bo'lamiz. Masalan, $x_1=0,\ x_4=1$ bo'lganda $x_1=0,\ x_2=1$, $x_3=-1,\ x_4=1$ yechim hosil bo'ladi va hokazo. Tekshirib ko'rish mumkinki, bu yechim berilgan sistemani qanoatlantiradi.

5-misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3+x_4=0,\\ x_1+3x_2+2x_3-2x_4=0,\\ 3x_1+2x_2+2x_3+3x_4=0,\\ 6x_1+4x_2+x_3+2x_4=0\end{cases}$$

bir jinsli tenglamalar sistemasini yeching.
Echish. Sistema matritsasining rangini topamiz.

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -3 & 1\\ 1 & 3 & 2 & -2\\ 3 & 2 & 2 & 3\\ 6 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Birinchi uchta satrini qo'shib, to'rtinchi satridan ayiramiz:

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & -3 & 1\\ 1 & 3 & 2 & -2\\ 3 & 2 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

hosil bo'lgan matritsaning ranggi 3 ga teng, chunki

$$\begin{vmatrix}2 & -1 & -3\\ 1 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix}=21\neq 0.$$

SHunday kilib, A matritsaning rangi 3 ga teng, noma'lumlar soni to'rtta, 2-teoremaga asosan sistema 0 dan farqli yechimga ega. Berilgan sistema

$$\begin{cases}2x_1-x_2-3x_3+x_4=0,\\ x_1+3x_2+2x_3-2x_4=0,\\ 3x_1+2x_2+2x_3+3x_4=0\end{cases}$$

sistemaga teng kuchli. x_1, x_2, x_3 noma'lumlar koeffitsientidan tuzilgan determinant 0 dan farqli bo'lgani uchun x_4 ni o'ng tomonga o'tkazib tenglamalar sistemasini yechamiz.

$$\Delta=21,\quad \Delta x_1=\begin{vmatrix}-x_4 & -1 & -3\\ 2x_4 & 3 & 2\\ -3x_4 & 2 & 2\end{vmatrix}=-31x_4,\quad \Delta x_2=\begin{vmatrix}2 & -x_4 & -3\\ 1 & 2x_4 & 2\\ 3 & -3x_4 & 2\end{vmatrix}=43x_4,$$

$$\Delta x_3=\begin{vmatrix}2 & -1 & -x_4\\ 1 & 3 & 2x_4\\ 3 & 2 & -3x_4\end{vmatrix}=-28x_4.$$

Kramer formulalariga asosan:

$$x_1=-\frac{31}{21}x_4,\ x_2=\frac{43}{21}x_4,\ x_3=-\frac{28}{21}x_4=-\frac{4}{3}x_4.$$

Bu yechimni berilgan sistemaga bevosita qo'yib yechimning to'g'riligiga ishonish mumkin.

5. Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechish. CHiziqli tenglamalar sistemasini yechishning eng ko'p ishlatiladigan usullaridan biri Gauss usulidir. Uning mohiyatini uch noma'lumli uchta chiziqli tenglama uchun ko'rsatamiz.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \qquad (1)$$

Bunda $a_{11} \neq 0$ bo'lsin. Birinchi tenglamaning hamma hadlarini a_{11} ga bo'lamiz va uni $-a_{21}$, $-a_{31}$ ga ko'paytirib mos ravishda ikkinchi va uchinchi tenglamalarga qo'shamiz. Bu holda quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \dfrac{b_1}{a_{11}}, \\ \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 = \beta_2, \\ \alpha_{23}x_1 + \alpha_{33}x_3 = \beta_3 \end{cases}$$

bu yerda $\alpha_{22} = a_{22} - a_{21}\dfrac{a_{12}}{11}$, $\alpha_{23} = a_{23} - a_{21}\dfrac{a_{13}}{a_{21}}$ va h.k.

$a_{11} = 0$ bo'lib, boshqa tenglamalarda nomag'lumlar oldidagi koeffitsientlari orasida no'ldan farqlilari bo'lsa, u holda bu tenglamalardan birini birinchi tenglamaning o'rni bilan almashtiramiz, keyin yuqoridagi amallarni bajaramiz. Bu birinchi qadam bo'ladi. Demak, birinchi qadamda birinchi tenglamada x_1 - noma'lum qolib, qolgan tenglamalardan ketma-ket x_1 - ***noma'lumni yo'qotamiz***. Ikkinchi qadamda birinchi tenglama o'z o'rnida qolib, ikkinchi va uchinchi tenglama uchun yuqoridagi amallarni bajaramiz, yahni ikkinchi tenglamada x_2 noma'lumni qoldirib, uchinchi tenglamadan uni yo'qotamiz. SHunday qilib, bu amallar natijasida (1) tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} x_1 + \alpha'_{12}x_2 + \alpha'_{13}x_3 = \beta'_1, \\ \alpha'_{22}x_2 + \alpha'_{23}x_3 = \beta'_2, \\ \alpha'_{33}x_3 = \beta_3 \end{cases} \qquad (2)$$

ko'rinishga keladi. Endi hamma noma'lumlarni so'nggi tenglamadan boshlab ***teskari qadam*** bilan topish qoldi.

6-misol.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 9, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 10 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching.

Yechish. Birinchi tenglamani (-4) va (-3) ga ko'paytirib mos ravishda ikkinchi va uchinchi tenglamalarga qo'shamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ (4-4)x_1 + (1-8)x_2 + (4-12)x_3 = 9 - 4\cdot 6, \\ (3-3)x_1 + (5-6)x_2 + (2-9)x_3 = 10 - 3\cdot 6 \end{cases}$$

yahni

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6, \\ 7x_2 - 8x_3 &= -15 \\ -x_2 - 7x_3 &= -8 \end{aligned}\right\}$$

bo'ladi.

SHu bilan birinchi qadam tugadi.

Ikkinchi qadamda, birinchi tenglamani o'z o'rnida qoldirib, ikkinchi tenglamani (-7) ga bo'lib yozamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ x_2 + \frac{8}{7}x_3 = \frac{15}{7}, \\ x_2 + 7x_3 = 8. \end{cases}$$

Uchinchi tenglamadan x_2 noma'lumni yo'qotamiz, buning uchun ikkinchi tenglamani (-1) ga ko'paytirib uchinchi tenglamaga qo'shamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ x_2 + \frac{8}{7}x_3 = \frac{15}{7}, \\ \frac{41}{7}x_3 = \frac{41}{7}. \end{cases}$$

Oxirgi tenglamadan $x_3 = 1$ ni topamiz. $x_3 = 1$ ni ikkinchi tenglamaga qo'ysak, $x_2 + \frac{8}{7} = \frac{15}{7}$ yoki $x_2 = \frac{15}{7} - \frac{8}{7} = 1,\quad x_2 = 1$ bo'ladi. $x_2 = 1,\quad x_3 = 1$ larni birinchi tenglamaga quysak x_1=1 bo'ladi. SHunday qilib, $x_1 = 1,\quad x_2 = 1,\quad x_3 = 1$.

<u>Gauss usulining xususiyati</u> shundan iboratki, unda sistemaning birgalikda masalasini oldindan aniqlab olish talab etilmaydi va:

1) sistema birgalikda va aniq bo'lsa, u holda usul yagona yechimga olib keladi;

2) sistema ***<u>birgalikda va aniqmas bo'lsa</u>*,** bu holda biror qadamda ikkita aynan teng tenglama hosil bo'ladi va shunday qilib, tenglamalar soni noma'lumlar sonidan bitta kam bo'lib qoladi;

3) sistema ***<u>birgalikda bo'lmasa</u>*,** u holda biror qadamda chiqarilayotgan (yo'qotilayotgan) noma'lum bilan birgalikda qolgan barcha noma'lumlar ham yo'qotiladi, o'ng tomonda esa noldan farqli ozod had qoladi.

Jardono-Gauss modifikatsiyalashgan usuli. Ma'lumki, Gauss usuli bilan chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda tenglamalar sistemasi uchburchak ko'rinishdagi sistemaga keltiriladi. Noma'lumlarning qiymati bevosita topiladigan, yahni teskari qadam bilan noma'lumlar qiymatini ketma-ket topishga hojat qolmaydigan usulni

qaraymiz. Bu usulni ushbu chiziqli tenglamalar sistemasining yechimini topish bilan ifodalaymiz.
7-misol.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 23 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi yechimini toping.
Echish. 1-tenglamani o'zgarishsiz qoldirib sistemaning qolgan tenglamalaridan x_1 noma'lumni yo'qotamiz, buning uchun 1- tenglamani ketma-ket (-4), (-1) ga ko'paytirib mos ravishda 3,4-tenglamalarga hadma-had qo'shib ushbu sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 0 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 0 - 8x_2 - 3x_3 + x_4 = 21, \\ 0 - x_2 - x_3 + 5x_4 = 15. \end{cases}$$

Endi 2–tenglamani o'zgarishsiz qoldirib, boshqa tenglamalardan x_2 noma'lumni yo'qotamiz, buning uchun 2 tenglamani (-2), 8,1 larga ketma-ket ko'paytirib, mos ravishda 1,3,4 – tenglamalarga hadma –had qo'shamiz va ushbuni hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 0 - 5x_2 - 2x_3 = -22, \\ 0 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 0 + 0 + 21x_3 + 9x_4 = 99, \\ 0 + 0 + 2x_3 + 6x_4 = 30. \end{cases}$$

Endigi qadamda 3-tenglamani o'zgarishsiz qoldirib boshqa tenglamalardan x_3 noma'lumni yo'qotamiz, buning uchun 3- tenglamani ketma-ket (5/21), (-3/21) (-2/21) larga ko'paytirib mos ravishda 1,2,4 – tenglamalarga hadma-had qo'shsak, ushbu tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} x_1 + 0 + 0 + \frac{3}{21}x_4 = \frac{33}{21}, \\ 0 + x_2 + 0 - \frac{6}{21}x_4 = \frac{18}{21}, \\ 0 + 0 + 21x_3 + 9x_4 = 99, \\ 0 + 0 + 0 + x_4 = 4. \end{cases}$$

Oxirgi qadamda 4-tenglamani o'zgarishsiz qoldirib boshqa tenglamalardan, x_4 noma'lumni yo'qotamiz, buning uchun 4 – tenglamani ketma-ket $(-\frac{21}{3}),\ (\frac{21}{6}),\ (-9)$

larga ko'paytirib, mos ravishda 1,2,3- tenglamalarga hadma-had qo'shamiz natijada, ushbuga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 0 - 0 + 0 = 1, \\ 0 + x_2 + 0 + 0 = 2, \\ 0 + 0 + 21x_3 + 0 = 63, \\ 0 + 0 + 0 + x_4 = 4. \end{cases}$$

Oxirgi sistemadan $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$ yagona yechimni olamiz. Yuqoridagi tenglamalar sistemasini yechishda x_1, x_2,x_3, x_4 noma'lumlarni ketma-ket yo'qotdik, hisoblashlarni ixchamlashtirish uchun har safar koeffitsienti 1 ga teng bo'lgan noma'lumni chiqarish ham mumkin edi.

U usulda ham Gauss usulining xususiyatlari o'z kuchida qoladi, yahni tenglamalar sistemasi aniq bo'lsa, bu usul yagona yechimga, tenglamalar sistemasi birgilikda lekin aniq bo'lmasa biror qadamda 0=0 tenglik hosil bo'lib cheksiz ko'p yechimga olib keladi. Tenglamalar sistemasi birgalikda bo'lmasa, biror qadamda tengliklarning birining chap tomonida 0 o'ng tomonida 0 dan farqli son bo'lib, sistema yechimga ega bo'lmaydi.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Chiziqli tenglamalar sistemasining determinanti deb nimaga aytiladi?
2. Chiziqli tenglamalar sistemasi qachon yagona yechimga ega bo'ladi?
3. Chiziqli tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo'lsa, u qanday topiladi?
4. Tenglamalar sistemasining matritsali yozuvi qanday bo'ladi?
5. Tenglamalar sistemasi matritsalar yordamida qanday yechiladi?
6. Teskari matritsa qanday topiladi?
7. Qanday tenglamalar sistemasiga birgalikda deyiladi?
8. Kroneker-Kapelli teoremasining sharti nimadan iborat?
9. Qanday matritsaga kengaytirilgan matritsa deyiladi?
10. Bir jinsli sistema deb qanday sistemaga aytiladi?
11. Bir jinsli sistema qanday holda birgalikda?
12. Bir jinsli sistema no'ldan farqli yechimga ega bo'lishi uchun qanday shart bajarilishi kerak?
13. Bosh (bazis) o'zgaruvchilar nima?
14. Gauss usulining mohiyati nima?
15. Noma'lumlarni ketma-ket yo'qotishning 1-qadami nimadan iborat?
16. Ikkinchi qadam qanday?
17. Teskari qadam nima?
18. Sistema birgalikda va aniq degani nima?
19. Sistema birgalikda va aniqmas deganda nima tushuniladi?
20. Gauss usulining Jordan modifikatsiyasi nimadan iborat?

4- MA’RUZA.

MAVZU: Vektorlar. Asosiy tushunchalar. Vektor ustida chiziqli amallar. Chiziqli bog’liq va chiziqli erkli vektorlar tizimi. Bazis. Vektorni chiziqli ortogonal vektorlar sistemasi bo’yicha yoyilmasi.

Reja

1. **Vektor haqida tushuncha.**
2. **Vektorlar ustida chiziqli amallar.**
3. **Vektorlarning chiziqli bog’liqligi.**
4. **Bazis.**

Tayanch so’z va iboralar

vektor, vektor moduli, birlik vektor, kollinear, komplanar vektor, teng vektorlar, qarama-qarshi vektorlar, vektorlar ustida chiziqli amallar, qo’shish xossalari, vektorni songa ko’paytirish xassalari, vektor fazo, chiziqli bog’liq va chiziqli bog’liq bo’lmagan vektorlar.

Analitik geometriya oliy matematikaning asosiy bo’limlaridan biri bo’lib, bu bo’limda geometriya shakllar algebraik taxlil yordamida tekshiriladi. Analitik geometriyaning vazifasi: birinchidan geometrik obrazlari nuqtalarining geometrik o’rni deb qarab, shu obrazning xossalariga asosan ularning tenglamalarini tuzish va ikkinchidan, tenglamalarning geometrik ma’nosini aniqlab, bu tenglamalar bilan ifodalangan geometrik obrazlarning shaklini, xossalarini, ham tekislikda, ham fazoda joylashishni o’rganishdan iborat.

Analitik geomtriyada nuqtaning chiziqdagi, tekislikdagi va fazodagi o’rni sonlar yordamida aniqlanadi. Nuqtaning o’rnini aniqlovchi sonlar uning koordinatalari deyiladi. Geometrik shakllarning o’rnini aniqlash usuli yoki metodi deyiladi.

1. Vektor haqida tushuncha.

Matematika, fizika, mexanika, astronomiya kabi tatbikiy fanlarni o’rganishda ikki xil miqdor bilan ishlashga to’g’ri keladi: 1) o’zining son qiymati bilangina aniqlanuvchi miqdorlar, bunday miqdorlarni odatda skalyar miqdorlar deb ataladi: 2) son qiymatidan tashqari yana o’zining fazodagi joylanishi hamda yo’nalishi bilan aniqlanadigan miqdorlar – vektor miqdorlar.

Vektor miqdorlar vektorlar yordamida tasvirlanadi.

1-ta’rif: Vektor fazodagi tayin uzunlikka va yo’nalishiga ega bo’lgan kesmaga aytiladi.

Vektorlar ko’pincha uning boshi va oxirini bildiruvchi ikkita xarf yordamida (masalan AB, CD,...) yoki birgina (masalan *a, b,...*) xarflar orqali belgilanadi.

Vektorning uzunligiga uning moduli deyiladi va $|AB|$ ko’rinishida belgilanadi.

Agar vektorning uzunligi bir birlikka teng bo’lsa, u **birlik vektor yoki ort** deyiladi.

Moduli nolga teng $|a|=0$ bo’lgan vektor **nol vektor** deb yuritiladi.

2-ta’rif: Noldan farqli ikkita vektor bir to’g’ri chiziqda yoki parallel to’g’ri chiziqlarda yotsa, bunday vektorlar *kollinear vektorlar*, bitta tekislikda yotuvchi yoki shu tekislikka parallel bo’lgan vektorlar esa *komplanar vektorlar* deb ataladi.

Kollinear so’zi lotincha «com» ya’ni birgalikda yoki umumiy ma’nosidagi va «linia» ya’ni chiziq ma’nosidagi so’zlardan tuzilgan bo’lib, «chiziqdosh» degan ma’noni bildiradi.

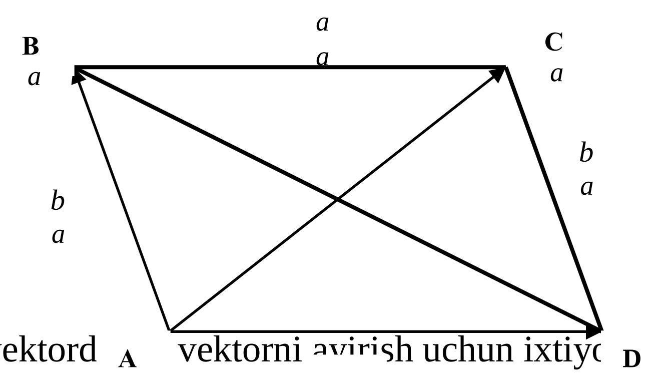
3-ta’rif: Uzunliklari teng bo’lagan va bir xil yo’nalishga ega bo’lgan vektorlar *teng vektorlar* deyiladi.
4-ta’rif: Uzunliklari teng bo’lib yo’nalishlari qarama-qarshi bo’lgan ikki vektorni *qarama-qarshi vektorlar* deb ataladi.

2. Vektorlar ustida amallar.

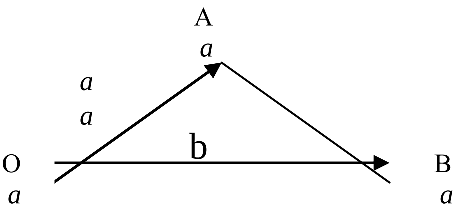
Vektorlarni qo’shish, ayirish amallari o’rta maktab dasturidan ma’lum bo’lgan uchburchak va parallelogramm qoidalariga asosan amalga oshiriladi.

5-ta’rif: boshlari biror A nuqtada yotgan ikki AB va AD vektorning yig’indisi deb shu ikki vektordan yasalgan ABCD parallelogramning A uchidan S uchiga yo’nalgan va uzunligi AC dioganalning uzunligiga teng bo’lgan AC vektorga aytiladi, ya’ni

AB+AD=AC



Berilgan a vektord[illegible] vektorni ayirish uchun ixtiy[illegible] nuqtadan boshlab OA=a va OB = b vektorlar yasala[illegible] ’ngra OB vektorning vektor uchidan OA vektorning A uchiga yo’nalgan BA vektor yasaladi. Keyingi vektor izlangan ayirma vektor bo’ladi.



6-ta’rif: a vektor va skalyar $\lambda \neq 0$ son berilgan bo’lsa, a vektorning λ songa ko’paytmasi deb quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan b vektorga aytiladi.
a) Agar $\lambda > 0$ bo’lsa, b vektor a vektor bir xil yo’nalishda ($a \neq$ 0) aks holda $\lambda < 0$ bo’lsa, b va a vektorlar qarama-qarshi yo’nalishda bo’ladi.
b) b vektorning uzunligi (moduli) |b|=|λ| |a| formula asosida topiladi.

Vektorlarni qo’shish xossalari.

1. *a+(b+c) = (a+b)+c* (assotsiativlik).
2. *a+b=b+a* (kommutativlik).
3. Har qanday ***a*** vektorga nol vektor qo’shilsa, ***a*** vektor ‘osil bo’ladi, ya’ni ***a+0= a***.
4. Har qanday ***a*** vektor uchun shunday ***a*** vektor mavjudki, uning uchun: ***a*** + ***a*** =***0*** bo’ladi.

Vektorlarni songa ko’paytirishni xossalari.

1. $\forall$ a vektor uchun *0* ***a*** =***0***; 2. $\forall$ $\in$ R uchun ***a*** 0=***0***.
3. $\forall$ a vektor uchn 1· ***a*** = ***a*** (-1) ***a*** =- ***a***.
4. $\forall$ a vektor va xar qanday a $\beta \in$ R sonlar uchun α (β a)=(α β)a
5. $\forall a$ va $\alpha, \beta \in R$ uchun $(\alpha + \beta)\bar{a} = \alpha \bar{a} + \beta \bar{a}$.
6. $\forall a, b$ lar va $\alpha, \beta \in R$ uchun $(a + b)\alpha = \alpha a + \alpha b$.

4. Vektorlarning chiziqli bog’liqligi.

$\bar{a}_1, \bar{a}_2,\dots \bar{a}_n$ vektorlar hamda $\lambda_1, \lambda_2,\dots \lambda_n$, haqiqiy sonlar berilgan bo'lsin. Ular hosil qilingan $\lambda_1\bar{a}_1, \lambda_2\bar{a}_2,\dots\lambda_n\bar{a}_n$, ifoda $\bar{a}_1, \bar{a}_2,\dots \bar{a}_n$ vektorlarning $\lambda_1, \lambda_2,\dots \lambda_n$, koeffitsientli chiziqli kombinatsiyasi deyiladi. Agar biror a vektor $a_1, a_2,\dots a_n$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi shaklida ifodalangan bo'lsa, a vektor shu vektorlar bo'yicha yoyilgan deyiladi, ya'ni quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi.

$$a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_n a_n \qquad (1)$$

7-ta'rif: Agar kamida bittasi noldan farqli $\lambda_1, \lambda_2,\dots\lambda_n$ sonlar tanlab olinganda

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0 \qquad (2)$$

tenglik bajarilsa, u holda $a_1, a_2,\dots a_n$ vektorlar chiziqli bog'liq deyiladi.

8-ta'rif: Agar (2) munosabat faqat $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=0$ bo'lgandagina o'rinli bo'lsa, u holda $a_1, a_2,\dots a_n$ vektorlar chiziqli bo'lmagan yoki chiziqli erkli deb ataladi.

Tekislikdagi xar qanday ikkita vektorning chiziqli bog'liq bo'lishi uchun ularning kollinear vektorlar bo'lishi zarur va kifoya. Fazodagi har qanday uchta vektorning chiziqli bog'liq bo'lishi uchun, ularning komplanar vektorlar bo'lishi shart.

Tekislikdagi har qanday ikkita vektorning va fazodagi har qanday uchta vektorning chiziqli bog'liqsiz vektorlar bo'lishi uchun ularning mos ravishda kollinear va komplanar vektorlar bo'lmasliklari zarur va kifoya.

Chiziqli bog'liq vektorlar uchun quyidagi teoremalar o'rinli bo'ladi.

1-TEOREMA. Agar $a_1, a_2,\dots a_n$ vektorlar sistemasining bir vektori nol vektor bo'lsa, u holda bu vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq bo'ladi.

ISBOT. $a_k=0$ bo'lsin, u holda $\lambda_k \neq 0$, $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_{k-1}=\lambda_{k+1}=\lambda_n$ sonlar uchun (2) munosabat o'rinli bo'ladi. Demak, $a_1, a_2,\dots a_n$ vektorlar chiziqli bog'liq bo'ladi.

2-TEOREMA. Ikkita vektor chiziqli bog'liq bo'lishi uchun ularning kollinear bo'lishi zarur va yetarli.

3-TEOREMA. Uch vektor chiziqli bog'liq bo'lishi uchun ularning komplanar bo'lishi zarur va yetarli.

Vektorni bazislar bo'yicha yoyish.

9-ta'rif:. *Tekislikdagi bazis* deb ikkita kollinear bo'lmagan, ya'ni chiziqli bog'liqsiz $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ vektorlarga aytiladi.

1-teorema:. Tekislikdagi biror $\vec{a}$ vektorning $\vec{a}_1$ va $\vec{a}_2$ bazislar orqali yoyilmasi yagona va u quyidagi ko'rinishda bo'ladi: $\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$

10-ta'rif:. *Fazodagi bazis* deb, undagi xar qanday uchta komplanar bo'lmagan, ya'ni chiziqli bog'liqsiz bo'lgan $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ vektorlarga aytiladi.

2-teorema:. Fazodagi biror $\vec{a}$ vektorning $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ bazislar orqali yoyilmasi yagona va u quyidagi ko'rinishda bo'ladi: $\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3$ (2)

Endi dekart koordinata sistemasidagi bazis va ular bo'yicha vektorlarni yoyishni ko'raylik. Dekart koordinata sistemasida Ox, Oy, Oz o'qlar yo'nalishida mos ravishda uzunliklari birga teng bo'lgan $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ *vektorlarni* $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$ *olaylik. Uzunliklari birga teng bo'lgan vektorlarga* ***birlik vektor yoki ort*** *deyiladi. Bu* *vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'lib komplanar bo'lmagani uchun, ya'ni chiziqli bog'liqsiz vektorlar bo'lgani uchun bazislarni tashkil qiladi. Shuning uchun ularga dekart* ***ortogonal bazislar*** *deyiladi.*

Mustahkamlash uchun savollar

1. Vektor haqida tushuncha.
2. Vektorlar ustida chiziqli amallar.
3. Vektorlarning chiziqli bog'liqligi.
4. Bazis
5. Birlik vektor.
6. Vektor moduli.
7. Kolinear vektor, komplanar vektor.

10. Teng, qarama – qarshi vektorlar.

5-MA'RUZA.
Vektorlar koordinatasi. Vektorning uzunligi yo'naltiruvchi kosinuslar. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish.

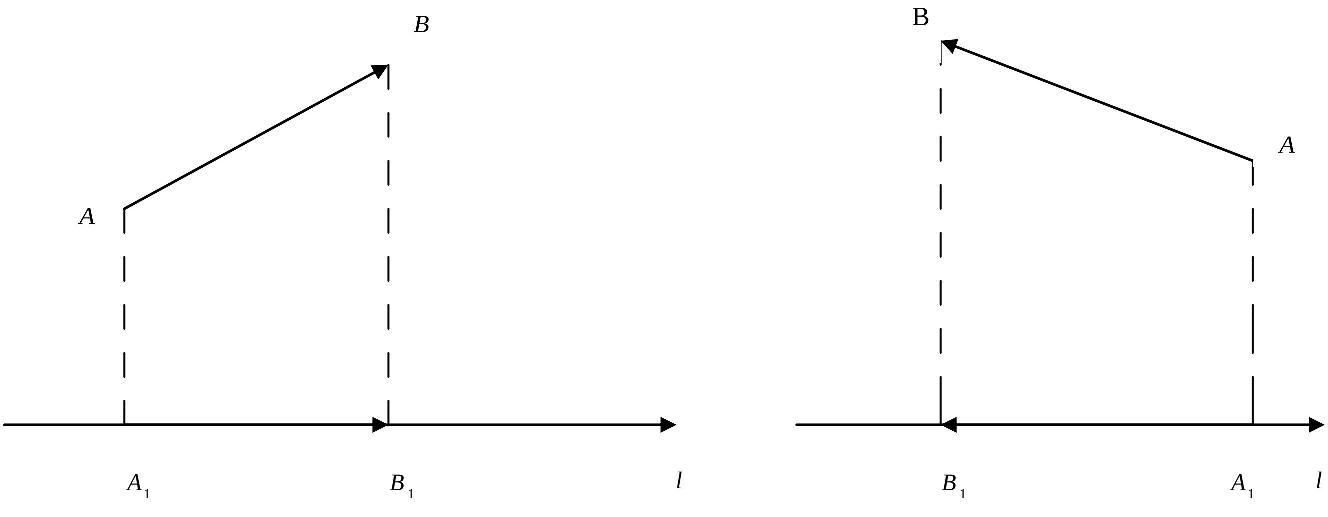
Reja

1. Vektorlar proeksiyasilari va vektorning koordinatalari.
2. Koordinata shakliga berilgan vektorlar ustida chiziqli amallar .
3. Vektorning uzunligi va uning yo'naltiruvchi kosinuslari .

Tayanch so'z va iboralar

Proyeksiya, bazis vektorlar, radius vektor, koordinata shaklida berilgan vektorlar ustida chiziqli amallar, vektorning uzunligi, yo'naltiruvchi kosinuslar.

1 Vektorlar proeksiyasilari va vektorning koordinatalari .



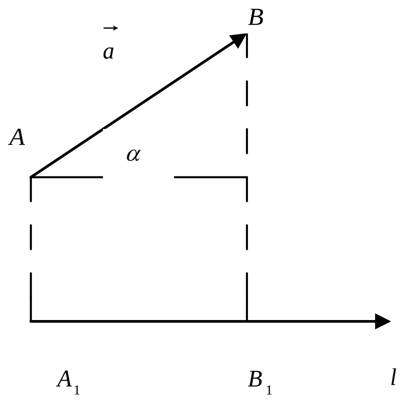
Fazoda biror o'q va biror $\overrightarrow{AB}$ vektor berilgan bo'lsin

$\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$ $\qquad$ $\left|\overrightarrow{AB}\right| = -\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$

A_1 va B_1 nuqtalar A va B nuqtalarning

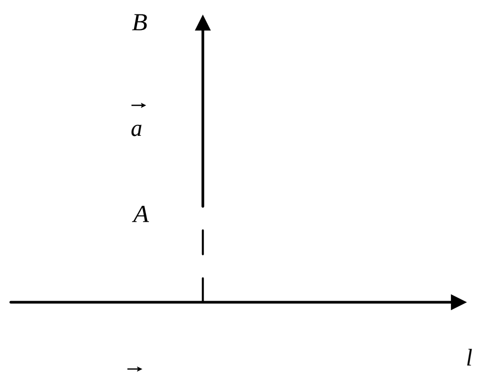
L o'qidagi proeksiyalari deyiladi

$\overrightarrow{A_1B_1}$ vektor $\overrightarrow{AB}$ vektorning l o'qdagi tashkil etuvchisi yoki komponentasi deyiladi. Yo'nalishiga qarab ular musbat va manfiy bo'ladi.



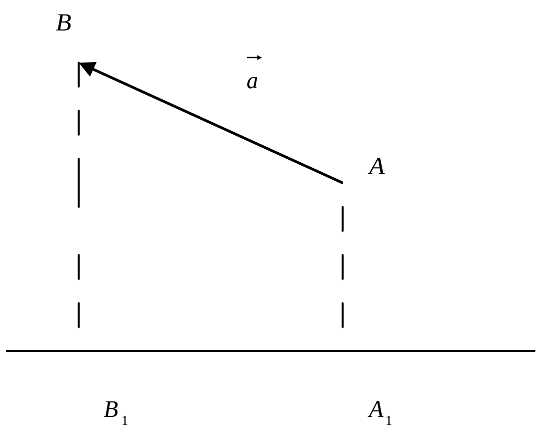
$\alpha < 90^0$

пр$_l$ a>0



$\alpha = 90^0$

пр$_l$ $\vec{a} = 0$



$\alpha > 90^0$

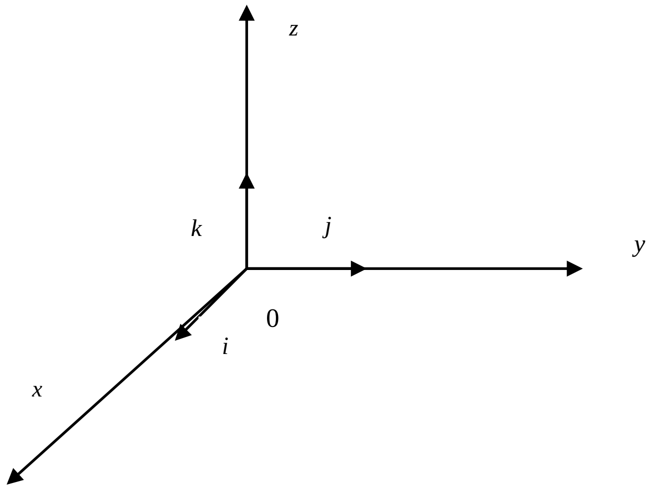
пр$_l$ a<0

1) $np_l a = |\vec{a}| \cos \alpha$

2) $np_l(\vec{a} + \vec{b}) = np_l \vec{b}$

3) $np_l \lambda \vec{a} = \lambda |\vec{a}| \cdot \cos \alpha$

1. O XYZ to'g'ri burchakli koordinata sistemasini olaylik, bu sistema Dekart koordinatalar sistemasi deyiladi.



$\vec{a}$ vektor $\overrightarrow{OA}$ vektorning o'qlaridagi proeksiyalari mos ravishda a_x , a_y, a_z i, j, k birlik –bazis vektorlar ortlar deb ataladi

$\vec{a}(a_x, a_y, a_z) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

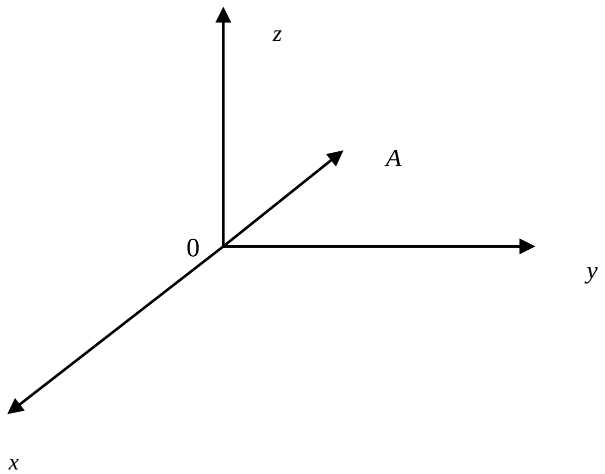
Bu ifodani $\vec{a}$ vektorning I , j , k bazis vektorlar yoki koordinata o'qlari bo'yicha yoyilmasi deyiladi

Bu yerda a_x, a_y, a_z lar vektorning koordinata o'qlardagi proeksiyalari vektorning koordinatalari

Koordinata boshidan chiqqan vektor radius vektor deyiladi .

$\vec{a}(a_x, a_y, a_z) = \vec{a} = (x, y, z) = \vec{r}(x, y, z)$ $\overrightarrow{OA} = \vec{r}$

Масалан . $\vec{a}(2, 3, 4)$ $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$



2. Koordinata shaklida berilgan vektorlar ustida chiziqli amallar .

Bizga quyidagi vektorlar berilgan bo'lsin

$\vec{a} = \overrightarrow{a_x i} + \overrightarrow{a_y j} + \overrightarrow{a_z k}$

$\vec{b} = \overrightarrow{b_x i} + \overrightarrow{b_y j} + \overrightarrow{b_z k}$

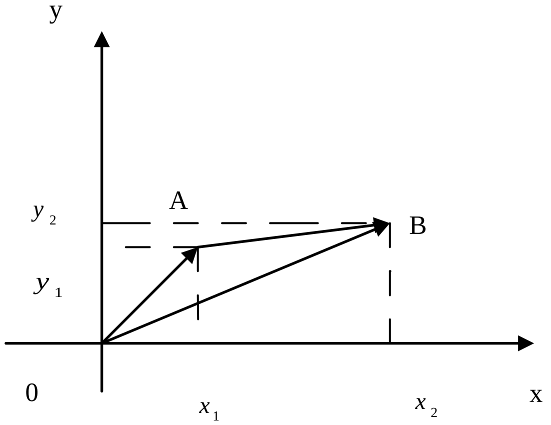
1) $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}$

2) $\lambda \vec{a} = \lambda a_x i + \lambda a_y j + \lambda a_z k$

Masalan ;

$A(x_1; y_1; z_1) \qquad B(x_2; y_2; z_2)$

$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$



3. Vektorning uzunligi va uning yo’naltiruvchi kosinuslari .

Fazoda Dekart koordinata sistemasidagi Ox Oy Oz o’qlari bo’yicha yo’nalgan ijk ortlar ya’ni bazis vektorlar berilgan bo’lsin

$\vec{a}$ vektor uzining a_x, a_y, a_z $(\vec{a}(x, y, z))$

koordinata bilan berilgan bo’lib, u shu bazisda $\vec{a} = a_x i + a_y j + a_z k$

ko’rinishda ifodalanadi. Uning uzunligi $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ ko’rinishda aniqlanadi

$\vec{a}$ vektorning koordinata o’qlari bilan hosil kiladigan burchaklarni o_x, o_y, o_z o’qlari bo’yicha mos ravishda α, β, γ burchaklar bilan belgilaymiz

a vektorni yo’naltiruvchi kosinuslari quyidagi formulalar bilan hisoblanadi

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

Bu formulalar quyidagi tenglikni qanoatlantiradi.

$$COS^2\alpha + COS^2\beta + COS^2\gamma = 1$$

Mustahkamlash uchun savollar

1. Vektor proeksiyasi haqida nima deya olasiz?
2. Koordinata shakliga berilgan vektorlar ustida chiziqli amallar?
3. Vektorning uzunligi?
4. Yo’naltiruvchi kosinus deb nimaga aytiladi?

6- MA'RUZA.
IKKI VEKTORNING SKALYAR va VEKTOR KO'PAYTMASI VA UNING XOSSALARI.

Reja

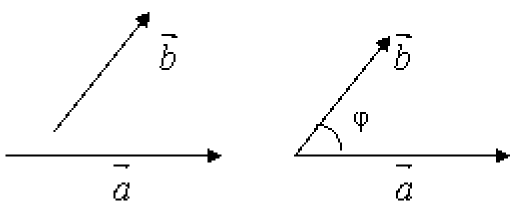
1. Skalyar ko'paytmaning ta'rifi.
2. Skalyar ko'paytmaning xossalari.
3. Skalyar ko'paytmaning koordinatalardagi ifodasi.
4. Ikki vektor tashkil qilgan burchak.
5. Fazoda dekart koordinatalar sistemasi.
6. Vektor ko'paytma ta'rifi.
7. Vektor ko'paytma xossalari.
8. Uchburchakning yuzi.
9. Misollar.

Tayanch so'z va iboralar

Skalyar ko'paytmaning ta'rifi, skalyar ko'paytmaning xossalari, skalyar ko'paytmaning koordinatalardagi ifodasi, ikki vektor tashkil qilgan burchak, fazoda dekart koordinatalar sistemasi, vektor ko'paytma ta'rifi, vektor ko'paytma xossalari.
Uchburchakning yuzi.

Mavzuning bayoni:

Tekislikda ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni qaraylik. Ularni biror O nuqtaga qo'yamiz.



12-чизма

<u>Ta'rif</u>: $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb shu vektor larning uzunliklari bilan ular hosil qilgan burchak kosinusini ko'paytirishdan hosil qilingan songra aytiladi.

Skalyar ko'paytma $\vec{a}\,\vec{b}$ yoki $(\vec{a},\vec{b})$ orqali belgilanadi. Ta'rifga ko'ra

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi \qquad (1)$$

Masalan: $|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 3,\ \varphi = 60^o$ bo'lsa, $(\vec{a},\vec{b}) = 2\cdot 3\cdot\cos 60^o = 6\cdot\frac{1}{2} = 3.$

Natija: Nol vektorni har qanday vektorga skalyar ko'paytmasi nolga teng.

Skalyar ko'paytmaning yana bir ta'rifi: Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi ulardan birining uzunligi bilan ikkinchisining birinchisi yo'nalishiga tushirilgan proeksiyasi ko'paytmasiga teng, ya'ni $(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot Пр_{\vec{a}}|\vec{b}| = |\vec{b}|\cdot Пр_{\vec{b}}|\vec{a}|,\ (\vec{a}\neq 0, \vec{b}\neq 0).$

Isbot:

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right) = |\vec{a}|\,Пр_{\vec{a}}|\vec{b}| =$$

$$(\vec{b},\vec{a}) = |\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cos\left(\vec{b}\,\hat{}\,\vec{a}\right) = |\vec{b}|\,Пр_{\vec{b}}|\vec{a}|$$

chap tomonlarning tengligidan o'ng tomonning tengligi kelib chiqadi.

Skalyar ko'paytmaning xossalari.

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ o’rin almashtirish xossasi.

2. $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\,\vec{c}+\vec{a}\,\vec{c}$ taqsimot xossasi.

3. $\lambda\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\lambda\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\cdot\vec{b})$ guruhlash xossasi.

4. Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar bir xil yo’nalishdagi kollinear vektorlar bo’lsa, $\vec{a}\,\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$ chunki cos0=1 .

Agar qarama-qarshi yo’nalgan bo’lsa, $\vec{a}\,\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|$ chunki $\cos 180^0=-1$.

5. $\vec{a}\,\vec{a}$ **=**$|\vec{a}||\vec{a}|$**cos0=**$|\vec{a}|^2$ $\Rightarrow$ $\vec{a}^{\,2}=|\vec{a}|^2$

6. $\vec{a}$ perpendikulyar $\vec{b}$ bo’lsa , $\vec{a}\,\vec{b}=0$ bo’ladi.

Eslatma. 5 va 6 xossalardan foydalanib $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ birlik vektorlarning skalyar ko’paytmalarini ko’rsak

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{l}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=\vec{k}\cdot\vec{j}=0$$

tengliklarning o’rinli bo’lishi ravshan.

<u>Natijalar</u>: 1) $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$ vektorning uzunligi

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} \qquad (2)$$

ga teng.

2) (1) dan $\cos(\vec{a}\cdot\vec{b})=\cos\varphi=\dfrac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ (3)

(2) va (3) ni e’tiborga olsak,

$$\cos\varphi=\frac{a_1b_1+a_3b_3+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}} \qquad (4)$$

3) $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$ va $\vec{a}=\{b_1,b_2,b_3\}$ vektorlarning perpendikulyarlik sharti (3) formula bo’yicha quyidagicha aniqlanadi: $a_1b_1+a_3b_3+a_3b_3=0$ (5)

1-misol: $\vec{a}(3,5)$, $\vec{b}(2,-1)$ vektorlarning skalyar ko’paytmasini aniqlang. $Б=\{\vec{i},\vec{j}\}$

Yechish: $(\vec{a},\vec{b})=3\cdot 2+5\cdot(-1)=1.$

2-misol: $\vec{a}(1,2)$, $\vec{b}(1,-\frac{1}{2})$ vektorlar tashkil qilgan burchakni aniqlang.

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{1\cdot 1+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{1^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}}==\frac{0}{\sqrt{5}\sqrt{\frac{5}{4}}}=0$$

3-misol: $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=5,\ (\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})=\dfrac{2\pi}{3}$, булса $|\vec{a}+\vec{b}|-?$

Yechish: $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^{\,2}+2(\vec{a}\vec{b})+\vec{b}^{\,2}}=\sqrt{|\vec{a}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi+|\vec{b}|^2}=$

$\sqrt{9+25+2\cdot 15\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{34-15}=\sqrt{19}$

Mavzuning bayoni:

Tekislikda koordinatalar sistemasi qanday kiritilgan bo'lsa, fazoda ham shunday kiritiladi.

OX, OY, OZ perpendikulyar to'g'ri chiziqlar O nuqtada kesishib, fazoni 8 ta oktantga ajratadi. OX o'qning musbat yo'nalishiga $\vec{i}$ vektorni, OY o'qining musbat yo'nalishiga $\vec{j}$ vektorni, OZ o'qning musbat yo'nalishiga $\vec{k}$ vektorni qo'yamiz. $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ $B\{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ni dekart reper deb ataymiz.

Agar A nuqta *B* reperda A(x_1,y_1,z_1) koordinatalarga, B nuqta *A* reperda B(x_2,y_2,z_2) koordinatalarga ega bo'lsa, u holda

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (1)$$

Agar C(x,y) nuqta AB to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lib, AB kesmani λ nisbatda bo'lsa, u holda $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}$ (8) tenglik o'rinli bo'ladi.

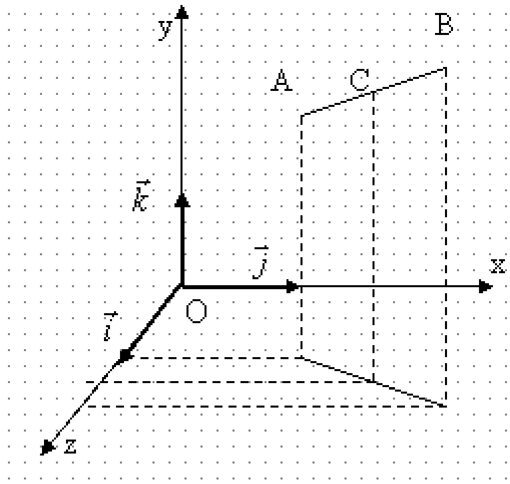
A, B, C nuqtalarning koordinatalari orasida

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \qquad (3)$$

munosabatlar tekislikdagi kabi saqlanadi. S nuqta AB kesmaning o'rtasi bo'lganda

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{2} \qquad (4)$$

formulalarga ega bo'lamiz.



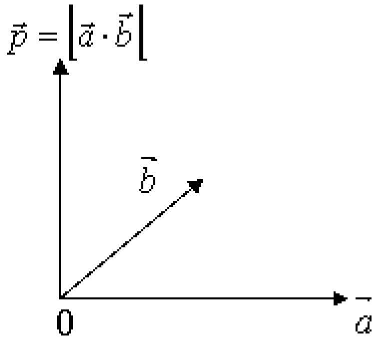
13-чизма

<u>Ta'rif</u>: $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi deb quyidagi uchta shartni qanoatlantiruvchi $\vec{p}$ ga aytiladi:

1) $|\vec{p}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a} \cdot \vec{b})$;

2) $\vec{p} \perp \vec{a}, \vec{p} \perp \vec{b}$;

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$ vektorlar umumiy boshga keltirilib, $\vec{p}$ ning uchidan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar yotgan tekislikka qaraganda $\vec{a}$ vektordan $\vec{b}$ vektor tomonga qarab eng qisqa yo'l bilan burilish soat strelkasi xaraktiga teskari bo'lsin, (o'ng sistema). Vektor ko'paytmani $\vec{p} = [\vec{a} \cdot \vec{b}[$ bilan belgilaymiz.



14-чизма

Ta'rifdagi shartlar quyidagi geometrik ma'no kasb etadi:

1-shartdan $\vec{p}$ vektorning moduli $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar bo'yicha qurilgan parallelogramm yuziga tengligi kelib chiqadi.

2-shartdan $[\vec{a}, \vec{b}]$ vektor ko'paytma parallelogramm tekisligiga perpendikulyar vektor ekanligini aniqlaydi.

3-shart $\vec{p}$ vektorning yo'nalishini aniqlaydi. 14-chizmada $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$ vektorlar o'ng uchlik tashkil etadi.

Vektor ko’paytma quyidagi xossalarga ega.

1. Ko’paytma vektorlardan kamida bittasi nol vektor yoki $a \parallel b$ bo’lsa, [a b]=0 bo’ladi.

ISBOT. Haqiqatdan ham, $a \parallel b$ bo’lsa, u holda [a b]=0. Agar ular parallel bo’lsa, ular orasidagi burchak 0^0 yoki 180^0 bo’lib, sin (a b)=0 bo’ladi va 1-shartga asosan tekislikka perpendikulyar, ammo [a b] ko’paytmada a ,b ρ vektor ko’paytma nol vektor bo’ladi.

2. Agar vektor ko’paytma ko’paytuvchilarining o’rinlarini almashtirsa, vektor ko’paytmaning ishorasi o’zgaradi: [a b]=-[b a].

ISBOT. Xaqiqqatdan ham, vektor ko’paytma ta’rifning 1-va 2-bandlarga asosan [a b]=-[b a] vektorlarning uzuznliklari teng va ikkalasi ham bitta tekislikka perpendikulyar, ammo [a b] vektor yo’nalishiga qarama-qarshi [b a] vektor hosil qilamiz.

3. Italgan haqiqiy son λ uchun ushbu munosabatlar o’rinlidir:

$$\lambda\ [a\ b]=[\lambda\ a\ b]=[a\ \lambda\ b]$$

4. Vektor ko’paytma uchun taqsimot qonuni o’rinlidir:

$$[a\,(b+c)]=[a\ b]+[a\ c]$$

5. Birlik vektorning vektor ko’paytmalari quyidagicha bo’ladi:

$$\vec{i}\times\vec{i}=0,\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j},\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{j}=0,$$

$$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{k}=0.$$

Agar dekart koordinatalar sistemasida a va b vektorlari bilan berilgan, ya’ni

$$\begin{matrix} a = a_x i + a_y j + a_z k \\ b = b_x i + b_y j + b_z k \end{matrix}$$ bo’lsa, u holda

$$[ab] = (a_x i + a_y j + a_z k)(b_x i + b_y j + b_z k) = (a_x b_z - a_z b_y)i - (a_x b_z - a_z b_x)j + (a_x b_z + a_z b_x)k =$$

$$= \begin{vmatrix} a_y a_z \\ b_y b_z \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_z a_z \\ b_z b_z \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_x a_y \\ b_x b_y \end{vmatrix} k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_y & a_z & a_z \\ b_y & b_z & b_z \end{vmatrix},\ \text{êè}\ \left\{ \begin{vmatrix} a_y a_z \\ b_y b_z \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} a_z a_z \\ b_z b_z \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} a_x a_y \\ b_x b_y \end{vmatrix} \right\}$$

Vektor ko’paytma yordamida uchburchakning yuzini hisoblash uchun formula hosil qilish mumkin. ABC uchburchak uchlarining koordinatalri bilan berilgan bo’lsin:

$$A(x_1, y_1, z_1,), B(x_2, y_2, z_2,), C(x_3, y_3, z_3,).$$

Vektor ko’paytma ta’rifiga ko’ra hosil bo’lgan vektorning moduli parallelogrammning yuziga teng. Uning yarmi esa uchburchakning yuziga teng bo’ladi:

$$S_{vABC} =1/2|[AB\ AC]|$$

4-misol. Uchlari A(2; 3; 1), B(4; 0; 2), C(7; 0; 2) nuqtalarda bo’lgan uchburchak yuzini toping.

$$AB=\{2;-3;3\},\ AC\{5;-3;3\}$$

$$AB\times AC=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 3 \\ 5 & -3 & 3 \end{vmatrix}=-9\mathbf{j}-6k+15\mathbf{j}+15k+9\mathbf{j}-6\mathbf{j}=9\mathbf{j}+9k$$

$S_{\nabla ABC}=1/2\ |AB\ AC|=1/2\sqrt{81+18}=\frac{81}{18}\sqrt{2}=\frac{81}{\sqrt{2}}$ kv. bir.

1-misol: $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k},\ \vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}$ vektorlarga yasalgan parallelogrammning yuzini va uning diagonallari uzunliklarini toping.

$$\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=S(\#)=\sqrt{\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}^2}=\sqrt{6}.\qquad d_1=\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{14},\ d_2=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{2}.$$

2-misol: Uchlari A(3,0,5), V(3,-2,2), S(1,2,4) nuqtalarda bo’lgan AVS uchburchak yuzini toping.

Yechish: $\overrightarrow{AB}=-2\vec{j}-3\vec{k},\qquad \overrightarrow{AC}=-2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}.$

$$\left[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\right]=\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 2 & -1\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}-3 & 0\\ -1 & -2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & -2\\ -2 & 2\end{vmatrix}\vec{k}=8\vec{i}+6\vec{j}-4\vec{k}.$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left(\left[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\right]\right)=\frac{1}{2}\sqrt{64+36+16}=\frac{1}{2}\sqrt{116}=\sqrt{29}.$$

Mustahkamlash uchun savollar

1. Skalyar ko’paytmaning ta’rifi.
2. Skalyar ko’paytmaning xossalari.
3. Skalyar ko’paytmaning koordinatalardagi ifodasi.
4. Ikki vektor tashkil qilgan burchak.
5. Fazoda dekart koordinatalar sistemasi.
6. Vektor ko’paytma ta’rifi.
7. Vektor ko’paytma xossalari.
8. Uchburchakning yuzi.

.

7- MA’RUZA

Uchta vektorning aralash ko’paytmasi , xossalari. Aralash ko’paytmani vektorning koordinatalari orqali ifodasi. Ikki karrali vektor ko’paytma tushunchasi.

Reja

1. Aralash ko’paytmalar .
2. Aralash ko’paytmaning geometrik ma’nosi .
3. Aralash ko’paytmaning asosiy xossalari .
4. Aralash ko’paytmani determinant yordamida hisoblash .
5. Ikki karrali vektor ko’paytma tushunchasi.

Tayanch so’z vaiboralar

Aralash ko’paytmalar, aralash ko’paytmaning geometrik ma’nosi, aralash ko’paytmaning asosiy xossalari, aralash ko’paytmani determinant yordamida hisoblash, ikki karrali vektor ko’paytma tushunchasi.

1. Aralash ko’paytmalar .

Bizga $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlar berilgan bo’lsin .

Ta'rif: $\vec{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$ va $\vec{c}=\{x_3, y_3, z_3\}$ vektorlar berilgan bo'lsa, bu vektorlarning aralash ko'paytmasi deb , $\vec{a}\times\vec{b}$ vektor ko'paytma bilan $\vec{c}$ vektorning skalyar ko'paytmasiga aytiladi va odatda $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}$ ko'rinishda yoziladi

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k},\ \vec{c}=x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k},$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}\right)(x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k})=$$

$$=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}x_3+\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}y_3+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}z_3=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Aralash ko'paytmaning geometrik ma'nosi qirralari berilgan $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlarning modullaridan tashkil topgan parallelopepedning xajmini ifodalaydi.

$$V=(\vec{OA}\times\vec{OB})\cdot\vec{OC}$$

Fazodagi ixtiyoriy $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlarning komplanar vektorlar bo'lishi uchun ularning aralash ko'paytmasi nol bo'lishi zarur va kifoya.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0$$

Misol. Uchlari O(0;0;0) , A(5;2;0), B(2;5;0) , C(1;2;4) nuqtalarda bo'lgan parallelopipedning xajmini toping.

$$V=(\vec{OA}\times\vec{OB})\cdot\vec{OC}=\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}=84 \text{ kub birlik.}$$

Хулоса ; Аралаш ко'пайтма скаляр микдордир .

2.Aralash ko'paytmaning geometrik ma'nosi .

$$v_{пар}=[a\times b]\cdot|c|\cdot\cos\alpha=[a\times b]\cdot c$$

Agar aralash ko'paytma .
+a v s bo'lsa o'ng boғlash (uchlik)
- a v s -chap uchlik .

$$v_{пар}=\pm abc$$

3 vektordan yasalgan parallepepedning xajmi 3 vektorning aralash ko'paytmasiga ishora aniqligida teng .

Aralash ko'paytma yordamida shu vektorlardan yasalgan piramida xajmini hisoblash mumkin .

$$v_{пир}=\frac{1}{3}S_{as}\cdot h=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}S_{as}\right)\cdot h=\frac{1}{6}S_{as}\cdot h$$

$$v=\frac{1}{6}S_{as}\cdot h=\frac{1}{6}[a\times b]\cdot c$$

$$v_{пир} = \pm \frac{1}{6} abc$$

3.Aralash ko’paytmaning asosiy xossalari .

$\vec{a} \cdot (b \times c) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

belgilarining o’rnini almashtirish mumkin, chunki $a \cdot b = b \cdot a$

$a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c = abc$ deb yozishimiz mumkin.

Aralash ko’paytmada vektorlarni doiraviy almashtirish natijasida uning qiymati o’zgarmaydi $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}$

Aralash ko’paytmada ikki qo’shni vektorlar o’rni almashganda bu ko’paytma ishorasini o’zgartiradi .

$abc = -bac = bca$

4.Aralash ko’paytmani determinant yordamida hisoblash .

Bizga
$$\vec{a} = ia_x + ja_y + ka_z$$
$$\vec{b} = ib_x + jb_y + kb_z$$
$$\vec{c} = ic_x + jc_y + kc_z$$
berilgan bo’lsin .

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} d_x \\ a_y a_z \\ b_y b_z \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} d_y \\ a_x a_z \\ b_x b_z \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} d_x \\ a_x a_y \\ b_x b_y \end{vmatrix} = d_x i - d_y + d_z k$$

$$(a \times b) \cdot c = d_x c_x + (-c_y d_y) + c_z d_z = c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Masalan

a (7; 3; -4) v (2; -2; 7) s (12; 8; -15)

Agar 3 vektorni komplyanarligini topmoqchi bo’lsak ,uning xajmini nolga tenglaymiz.

$$abc = \begin{vmatrix} 7 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 7 \\ 12 & 8 & -15 \end{vmatrix} = 0$$

Demak ,vektorlar komplanar ekan.

5. Ikki karrali vektor ko’paytma tushunchasi.

$(a \times b) \times \vec{c}$

$\vec{a}$ *ва* $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektor hosil bo’ladi.

Tahrif $\vec{a}$ *ва* $\vec{c}$ vektorlarni vektor ko’paytmasini $\vec{a}$ vektorga vektor ko’paytmasi natijasida hosil bo’lgan vektor ikki karali vektor ko’paytma deyiladi

Hosil bo’lgan vektor $\vec{b}$ *ва* $\vec{c}$ vektorga komplanar bo’ladi va u quyidagicha ifodalanadi.

$\vec{d} = [\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})] = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) = \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

Mustahkamlash uchun savolllar

1. Aralash ko’paytmalar .
2. Aralash ko’paytmaning geometrik ma’nosi .
3. Aralash ko’paytmaning asosiy xossalari .
4. Aralash ko’paytmani determinant yordamida hisoblash .
5. Ikki karrali vektor ko’paytma tushunchasi.

8-MA’RUZA

Mavzu. Tekislikda to’g’ri chiziq va uning tenglamalari

Reja

1. Chiziq va uning tenglamasi haqida.

2. To’g’ri chiziq va uning tenglamalari:

1) To’g’ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi.

2) Berilgan bitta va ikkita nuqtadan o’tuvchi to’g’ri chiziq tenglamalari.

3) To’g’ri chiziqning umumiy tenglamasi va uning xususiy hollari.

4) To’g’ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi.

5) To’g’ri chiziqning normal tenglamasi.

3. Ikki to’g’ri chiziq orasidagi burchak.

4. To’g’ri chiziqlarning perpendikulyarlik va parallellik shartlari.

5. Ikkita to’g’ri chiziqning kesishuvi.

6. Nuqtadan to’g’ri chiziqqacha bo’lgan masofa.

Tayanch ibora va tushunchalar

Tekislikda chiziq va uning tenglamasi, burchak koeffisienti, to’g’ri chiziqning burchak koeffisientli tenglamasi, to’g’ri chiziqning umumiy tenglamasi, to’g’ri chiziqning o’qlardan ajratgan kesmalarga nisbatan tenglamasi, berilgan bitta nuqtadan o’tuvchi to’g’ri chiziqlar tenglamasi, berilgan ikki nuqtadan o’tuvchi to’g’ri chiziq tenglamasi, to’g’ri chiziqning normali, to’g’ri chiziqning normal tenglamasi. To’g’ri chiziqlar orasidagi burchak, to’g’ri chiziqlarning perpendikulyarligi va parallelligi, ikkita to’g’ri chiziqlarning kesishuvi, berilgan nuqtadan berilgan to’g’ri chiziqqacha bo’lgan masofa, ikkita parallel to’g’ri chiziqlar orasidagi masofa.

1. Chiziq va uning tenglamasi haqida.

Analitik geometriyaning eng muhim tushunchalaridan biri, **chiziq tenglamasi** tushunchasidir. Tekislikda to’g’ri burchakli koordinatalar sistemasida L chiziq berilgan bo’lsin(4-chizma).

Ta’rif. L chiziqda yotuvchi istalgan $M\,(x,y)$ nuqtaning koordinatalari

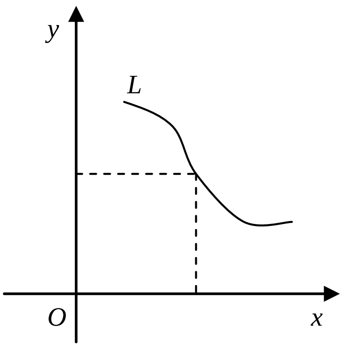
$$F\,(x,y)=0 \qquad (1)$$

tenglamani qanoatlantirib, unda yotmagan nuqtalarning koordinatalari qanoatlantirmasa, bu tenglama L chiziqning tenglamasi deyiladi. Bundan L chiziq, koordinatalari (1) tenglamani qanoatlantiruvchi barcha nuqtalar to’plamidan iborat ekanligi kelib chiqadi. Chiziqning tenglamasini tuzish deganda unga tegishli ixtiyoriy $M\,(x,y)$ nuqtaning koordinatalari orasidagi munosabatni(bog’lanishni) tenglama ko’rinishida ifodalashdan iborat. Topilgan chiziq tenglamasi uchun: chiziqdagi istalgan nuqtaning koordinatalari uni qanoatlantiradi va aksincha, nuqtaning koordinatalari tenglamani qanoatlantirsa, bu nuqta shu chiziqda yotadi.

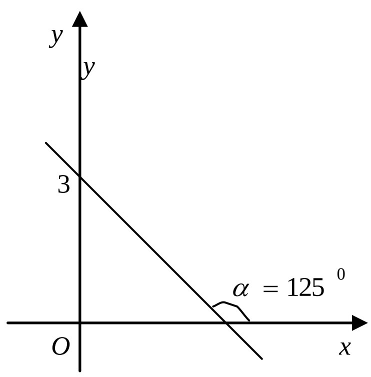
2. To’g’ri chiziq va uning tenglamalari.

To’g’ri chiziq tushunchasi analitik geometriyaning asosiy tushunchalaridan biridir. Quyida har xil holatlarda to’g’ri chiziqning analitik ifodalarini (tenglamalarini) keltirib chiqaramiz va ular yordamida to’g’ri chiziqning tekislikdagi vaziyatlarini o’rganamiz.

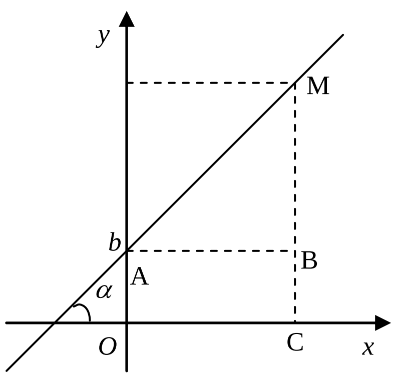
1) *To’g’ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi*. To’g’ri chiziqning OX o’qi musbat yo’nalishi bilan hosil qilgan burchagi α va to’g’ri chiziqning ordinatlar o’qidan ajratgan kesmasining kattaligi b berilganda, uning tekislikdagi holati aniq bo’ladi. Masalan, $b=3$, $\alpha=125^0$ bo’lsa, uning holati aniq bo’ladi (5-chizma).



4-chizma



5-chizma



6-chizma

Yuqoridagi miqdorlar berilganda to’g’ri chiziqning tenglamasini keltirib chiqaramiz. $M\,(x,y)$ to’g’ri chiziqqa tegishli ixtiyoriy nuqta bo’lsin (6-chizma). AMB to’g’ri burchakli uchburchakdan

$$\frac{BM}{AB} = tg\,\alpha \text{ , bundan } BM = ABtg\,\alpha$$

6–chizmadan $y = BC + BM$; yoki $y = ABtg\,\alpha + b$, $AB = x$ bo'lganligi uchun $y = xtg\,\alpha + b$ bo'ladi. $tg\,\alpha$ to'g'ri chiziqning **<u>burchak koeffitsienti</u>** deyiladi va $tg\,\alpha = k$ bilan belgilaymiz. Shunday qilib,

$$y = kx + b \qquad (2)$$

munosabat kelib chiqadi. Bunga to'g'ri chiziqning **<u>burchak koeffitsientli tenglamasi</u>** deyiladi. $b = 0$ bo'lsa, to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tib, tenglamasi $y = kx$ bo'ladi. $k = 1$ bo'lsa, $y = x$ bo'lib, bu birinchi koordinat- lar burchagining bissektrisasi bo'ladi.

1-misol. OX o'qi bilan 120^0 burchak hosil qiluvchi va OY o'qini $A(0;\ 3)$ nuqtada kesib o'tuvchi to'g'ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

Yechish. Shartga ko'ra, to'g'ri chiziq OY o'qini $A(0;\ 3)$ nuqtada kesib o'tadi, demak $b = 3$. Bu nuqtadan OX o'qiga parallel chiziq o'tkazamiz, hamda shu to'g'ri chiziq bilan 120^0 burchak hosil qiluvchi tomon, yasalishi kerak bo'lgan to'g'ri chiziq bo'ladi .

Endi shu to'g'ri chiziq tenglamasini yozamiz. Bu holda $k = tg\ 120^0 = -\sqrt{3}$, $b = 3$ bo'lganligi uchun, $y = -\sqrt{3}\,x + 3$ to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi bo'ladi.

<u>2) Berilgan bitta nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasining tenglamasi.</u> Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi. $A(x_1, x_1)$, $B(x_2; y_2)$ nuqtalar berilgan bo'lsin.

$$y = kx + b \qquad (3)$$

to'g'ri chiziq A nuqtadan o'tsin. Bu holda A nuqtaning koordinatalari to'g'ri chiziq tenglamasini qanoatlantiradi, ya'ni $y_1 = kx_1 + b$ bo'ladi. (3) tenglikdan oxirgi tenglikni ayirsak:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad (4)$$

hosil bo'ladi. (4) tenglamaga berilgan **<u>bitta nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasining</u> tenglamasi** deyiladi.

To'g'ri chiziq $B(x_2; y_2)$ ikkinchi nuqtadan ham o'tsa,

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$$

bo'lib,

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

bo'ladi. k ning yuqoridagi qiymatini (4)ga qo'yib,

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (5)$$

tenglamani hosil qilamiz. (5) **<u>berilgan ikki</u>** $A(x_1, y_1)$ **va** $B(x_2, y_2)$ **nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi** deyiladi.

2-misol. Biror xil mahsulotdan 100 donasini ishlab chiqarishga 300 ming so'm xarajat qilinsin. 500 donasi uchun esa xarajat 1300 ming so'm bo'lsin. Xarajat funksiyasi chiziqli (to'g'ri chiziq) bo'lsa, shu mahsulotdan 400 dona ishlab chiqarish xarajatini toping.

Yyechish. Masala sharti bo'yicha $A(100, 300)$ va $B=(500, 1300)$ nuqtalar berilgan. Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasiga asosan,

$$\frac{y-300}{1300-300}=\frac{x-100}{500-100}, \text{ yoki } y=2{,}5x+50$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Oxirgi tenglamadan $x=400$ uchun, $y=1050$ ekanligini topamiz. Demak, mahsulotdan 400 dona ishlab chiqarish uchun 1050 ming so'm xarajat qilinadi.

<u>3). To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi va uning xususiy hollari.</u> Ikki noma'lumli

$$Ax+By+C=0$$

tenglamani qaraymiz.

Bundan, $By=-Ax-C$, $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$ bo'lib, $k=-\frac{A}{B}$, $b=-\frac{C}{B}$ bilan belgilasak, $y=kx+b$ tenglama hosil bo'ladi. ShHunday qilib, $Ax+By+C=0$ tenglama ham to'g'ri chiziq tenglamasi ekanligi kelib chiqadi.

$$Ax+By+C=0 \tag{6}$$

tenglamaga to'g'ri chiziqning **<u>umumiy tenglamasi</u>** deyiladi.

To'g'ri chiziq umumiy tenglamasining hususiy hollari: 1) $A\neq 0$, $B\neq 0, C=0$ bo'lsa, $Ax+By=0$ bo'lib, to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tadi, chunki $O(0;0)$ nuqtaning koordinatalari tenglamani qanoatlantiradi;

2) $A=0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$, bo'lsa, $y=-\frac{C}{B}$ bo'lib, OY o'qdan $-\frac{C}{B}$ kesma ajratib, OX o'qiga parallel to'g'ri chiziq tenlamasi bo'ladi;

3) $B=0$, $A\neq 0$, $C\neq 0$ bo'lsa, $x=-\frac{C}{A}$ bo'lib, OX o'qdan $-\frac{C}{A}$ kesma ajratib , OY o'qiga paralllel to'g'ri chiziq tenglamasi bo'ladi;

4) $A=0$, $C=0$, $B\neq 0$ bo'lsa, $y=0$ bo'lib, OX o'qining tenglamasi hosil bo'ladi;

5) $B=0$, $C=0$, $A\neq 0$ bo'lsa, $x=0$ bo'lib, OY o'qining tenglamasi hosil bo'ladi;

6) $A=0$, $B=0$, $C\neq 0$ bo'lsa, $C=0$ bo'lib, o'zgarmas miqdor, bir paytda 0 dan farqli hamda 0 ga tengligi kelib chiqadi, bunday bo'lishi mumkin emas.

3-misol. $x-2y+6=0$ to'g'ri chiziq uchun k va b parametrlarni toping.

Yyechish: Buning uchun berilgan tenglamani y ga nisbatan yechamiz: $2y=x+6$, $y=1/2\cdot x+3$ bundan (2) tenglama bilan taqqoslab $k=1/2$, $b=3$, ekanligini topamiz. SHunday qilib, to'g'ri chiziq umumiy tenglamasini burchak koeffitsientli tenglamaga keltirib k va b parametrlarni topdik.

4) <u>To'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi.</u> To'g'ri chiziq koordinat o'qlaridan mos ravishda a va b kesmalar ajratib o'tsin(7-chizma). To'g'ri chiziq $A(a;0)$ va $B(0;b)$ nuqtalardan o'tadi. Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasiga asosan

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a}, \qquad \frac{y}{b}=\frac{x-a}{-a}, \qquad \frac{y}{b}=-\frac{x}{a}+1$$

yoki
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (7)$$

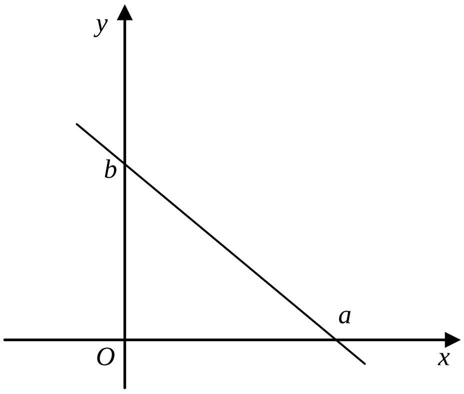
tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglamaga to'g'ri chiziqning **kesmalarga nisbatan tenglamasi** deyiladi.

4-misol. $3x+5y-15=0$ to'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasini yozing va uni yasang.

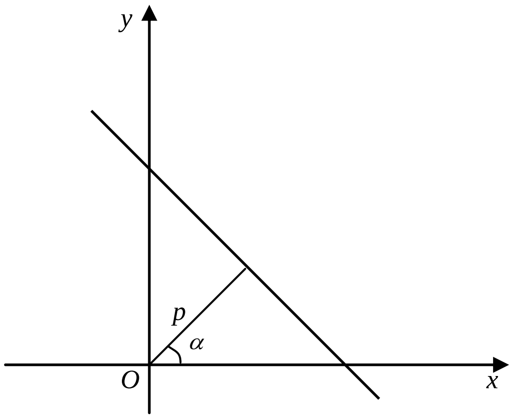
Yyechish. $3x+5y-15=0$ to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini (7) ko'rinishdagi tenglamaga keltiramiz.

$$3x+5y=15, \quad \frac{3x}{15}+\frac{5y}{15}=1 \quad \text{ёки} \quad \frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$$

bu to'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi bo'ladi. Endi koordinat o'qlaridan mos ravishda 5 va 3 kesmalarni ajratib, ajratilgan kesmalar oxiridan yasalishi kerak bo'lgan to'g'ri chiziqni o'tkazamiz.



7- chizma.



8- chizma.

5) To'g'ri chiziqning normal tenglamasi. To'g'ri chiziqqa koordinat boshidan tushirilgan perpendikulyarning (normal) uzunligi va uning OX o'qi musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagi α berilganda to'g'ri chiziqning tekislikdagi holati aniq bo'ladi (8-chizma) va uning tenglamasi

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0 \qquad (8)$$

bo'ladi. (8) tenglamaga to'g'ri chiziqning **normal tenglamasi** deyiladi. Ma'lumki, $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. Normal tenglamada shu shart bajarilishi kerak. To'g'ri chiziq umumiy tenglamasini normal tenglama keltirish uchun

$$M=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

normallovchi ko'paytuvchini hisoblab, uni

$$Ax+By+C=0$$

tenglamaga ko'paytiramiz. Bu holda

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

normal tenglama hosil bo’ladi. Normallovchi ko’paytuvchining ishorasi ozod had ishorasiga teskari olinadi.

5-misol. Normalning uzunligi $p=3$ va uning OX o’qi bilan hosil qilgan burchagi 30^0 bo’lsa, to’g’ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

Yyechish. SHartga ko’ra normal OX o’qi bilan 30^0 li burchak tashkil etadi. Bu burchakni yasaymiz va uning qo’zg’aluvchi tomoni normal to’g’ri chiziq bo’ladi. SHu to’g’ri chiziqda $p=3$ kesma ajratib uning oxiridan unga perpendikulyar to’g’ri chiziq o’tkazamiz. Bu yasalishi kerak bo’lgan to’g’ri chiziq bo’ladi . Endi to’g’ri chiziqning tenglamasini yozamiz. SHartga ko’ra normalning uzunligi va uning OX o’qi bilan hosil qilgan burchagi berilgan, bu holda ma’lumki, to’g’ri chiziqning (8) normal tenglamasini yozamiz. $p=3$, $\alpha=30^0$ bo’lganligi uchun

$x\cos 30^0 + y\sin 30^0 - 3 = 0$ *ёки* $\sqrt{3}/2\cdot x + 1/2\cdot y - 3 = 0$

Natijada $\sqrt{3}\,x + y - 6 = 0$ tenglama hosil bo’ladi.

6-misol.. $4x-3y-5=0$ to’g’ri chiziq tenglamasini normal tenglamaga keltiring.

Yyechish. Normallovchi ko’paytuvchini topamiz: $M=\frac{1}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{1}{5}$ bo’ladi.

Berilgan tenglamani $M=1/5$ ko’paytirib, $4/5\cdot x-3/5\cdot y-1=0$ tenglamani hosil qilamiz. Bu to’g’ri chiziqning normal tenglamasi, chunki

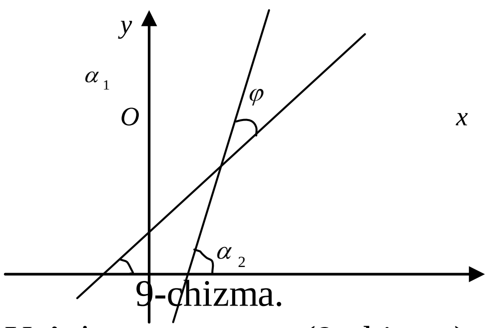
$$(\frac{4}{5})^2+(-\frac{3}{5})^2=\frac{16}{25}+\frac{9}{25}=\frac{25}{25}=1, \qquad (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1)$$ edi.

2. Ikki to’g’ri chiziq orasidagi burchak.

Ikkita

$$y=k_1x+b_1,$$
$$y=k_2x+b_2$$

to’g’ri chiziqlar berilgan bo’lsin. Bunda $k_1=tg\alpha$, $k_2=tg\alpha_2$ bu to’g’ri chiziqlar parallel bo’lmasin va ular orasidagi burchakni topish talab etilsin. To’g’ri chiziqlar orasidagi burchakni φ bilan belgilaymiz.



9-chizma.

Ya’ni ,$\varphi=\alpha_2-\alpha_1$(9-chizma) . Ma’lumki,

$$tg\,\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\,\alpha_2 - tg\,\alpha_1}{1 + tg\,\alpha_1 \cdot tg\,\alpha_2}$$

yoki

$$tg\,\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \qquad (1)$$

bo’ladi. (1) ikki to’g’ri chiziq orasidagi burchakning tangensini topish formulasi deb ataladi.

1-misol. $y = 3x + 1$, $y = 2x + 5$ to’g’ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

Yyechish. (1) formulaga asosan,

$$\varphi = \frac{3 - 2}{1 + 2 \cdot 3} = \frac{1}{7} \text{ bo’lib, } \varphi = arctg\ {}^{1}\!/_{7} \approx arctg\ 0.14 \approx 8^0, \varphi \approx 8^0$$

bo’ladi.

3. To’g’ri chiziqlarning perpendikulyarlik va parallellik shartlari.

To’g’ri chiziqlar perpendikulyar bo’lsa, ular orasidagi burchak

$$\varphi = 90^0 \text{ bo’lib, } tg\,90^0 = \infty \quad \text{yoki} \quad \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = \infty, \quad 1 + k_1 . k_2 = 0$$

kelib chiqadi, bundan

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

bo’ladi, bunga ikki to’g’ri chiziqning **perpendikulyarlik sharti** deyiladi.

To’g’ri chiziqlar parallel bo’lsa, $\varphi = 0$ bo’lib, $tg\,0^0 = 0$, ,yoki

$$\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = 0, \; k_2 - k_1 = 0 \;, \; k_1 = k_2$$

kelib chiqadi.

$$k_1 = k_2$$

tenglikka **ikki to’g’ri chiziqning parallellik sharti** deyiladi.

5. Ikkita to’g’ri chiziqning kesishuvi.

Ikkita to’g’ri chiziqning kesishish nuqtasini topish uchun ularning tenglamalarini birgalikda yechib, kesishish nuqtasining koordinatalari topiladi.

2-misol. $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0, \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$

to’g’ri chiziqlarning kesishish nuqtasini toping.

Yyechish. Ikkinchi tenglamani (-1) ga ko’paytirib, hosil bo’lgan tenglamalarni hadma-had qo’shib $x - 1 = 0$, $x = 1$ ni hosil qilamiz. $x = 1$ ni birinchi tenglamaga qo’ysak, $2 \cdot 1 + y - 3 = 0$ yoki $y = 1$ bo’ladi. SHunday qilib, bu to’g’ri chiziqlar $A(1;1)$ nuqtada kesishadi.

6. Nuqtadan to’g’ri chiziqqacha bo’lgan masofa.

$M(x_0; y_0)$ nuqta va $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ to’g’ri chiziq berilgan bo’lsin. Berilgan nuqtadan, berilgan to’g’ri chiziqqacha bo’lgan masofa

$$d = \left| x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p \right| \qquad (2)$$

formula yordamida topiladi. To’g’ri chiziq tenglamasi umumiy

$$Ax + By + C = 0$$

ko’rinishda berilgan bo’lsa, nuqtadan to’g’ri chiziqqacha bo’lgan masofa,

$$d = \frac{\left| Ax_0 + By_0 + C \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (3)$$

formula bilan topiladi.

3-misol. $A(3;\ \sqrt{5})$ nuqtadan $2x + \sqrt{5}y - 2 = 0$ to’g’ri chiziqqacha bo’lgan masofani toping.

Yyechish. To’g’ri chiziq tenglamasi umumiy holda berilgan. SHuning uchun (3) formulaga asosan,

$$d = \left| \frac{2 \cdot 3 + \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} - 2}{\pm\sqrt{2^2 + \sqrt{5}^2}} \right| = \left| \frac{6 + 5 - 2}{3} \right| = \frac{9}{3}, \qquad d = 3$$

bo’ladi.

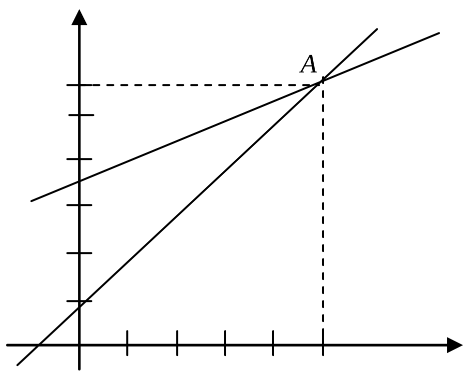
4-misol. Ikki xil transport vositasida yuk tashish xarajatlari funksiyasi

$$y = 100 + 50x \quad \text{va} \quad y = 200 + 30x$$

bilan ifodalansin. Bunda, y transport xarajati, x har yuz kilometrga yuk tashish masofasi. Qanday masofadan boshlab 2-xil transport vositasi bilan yuk tashish tejamliroq bo’ladi.

Yyechish. Masala shartida berilgan $y = 100 + 50x$ va $y = 200 + 30x$ to’g’ri chiziqlar kesishadigan nuqtani topamiz: tengliklarning chap tomonlari teng bo’lganligi uchun $100 + 50x = 200 + 30x$ tenglamani hosil qilamiz, bundan $x = 5$, $y = 350$ bo’ladi. Demak, to’g’ri chiziqlar $A(5{,}350)$ nuqtada kesishadi.

Endi to’g’ri chiziqlarni yasaymiz: (10-chizma).



10- chizma

10-chizmadan ko’rinadiki, yuk tashish masofasi 500 km dan ortiq bo’lganda 2-xil transport vositasi bilan yuk tashilsa, xarajat kamroq bo’ladi.

7. Ikkita parallel to’g’ri chiziqlar orasidagi masofani topish

$$5x - 2y + 10 = 0 \quad \text{va} \quad 5x - 2y + 36 = 0$$

parallel to’g’ri chiziqlar berilgan bo’lsin. Bu to’g’ri chiziqlar orasidagi masofani topish uchun, bu to’g’ri chiziqlarning bittasida ixtiyoriy bir nuqtani tanlaymiz va tanlangan nuqtadan ikkinchi to’g’ri chiziqqacha bo’lgan masofani topamiz: birinchi to’g’ri chiziqda $x = 4$ desak, $y = 15$ bo’lib, $A(4,15)$ 1-to’g’ri chiziqdagi nuqta bo’ladi. $A(4,15)$ nuqtadan ikkinchi $5x - 2y + 36 = 0$ to’g’ri chiziqqacha bo’lgan masofani (3) formulaga asosan, hisoblasak,

$$d = \left| \frac{5 \cdot 4 - 2 \cdot 15 + 36}{\sqrt{5^2 + (-2)^2}} \right| = \frac{26}{\sqrt{29}} \quad , \quad d = \frac{26}{\sqrt{29}}$$

bo’ladi.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Chiziqning tenglamasi deganda nima tushuniladi?
2. To’g’ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi qanday yoziladi?
3. To’g’ri chiziqning burchak koeffitsienti deb nimaga aytiladi?
4. Berilgan bitta nuqtadan o’tuvchi to’g’ri chiziqlar dastasining tenglamasi qanday?
5. Berilgan ikki nuqtadan o’tuvchi to’g’ri chiziq tenglamasi qanday?
6. To’g’ri chiziqning umumiy tenglamasi va uning xususiy xollari nimalardan iborat?
7. To’g’ri chiziqning koordinat o’qlaridan ajratgan kesmalariga nisbatan tenglamasi qanday yoziladi?
8. To’g’ri chiziqning normal tenglamasi qanday?
9. Normalning uzunligi nima?
10. To’g’ri chiziqning umumiy tenglamasini normal tenglamaga qanday qilib keltiriladi?
11. To’g’ri chiziqning tenglamasi normal ko’rinishdaligini qanday tekshiriladi?
12. Ikki to’g’ri chiziq orasidagi burchak qanday topiladi?
13. Ikki to’g’ri chiziqning perpendikulyarlik sharti nima?
14. Ikki to’g’ri chiziqning parallellik sharti qanday bo’ladi?
15. Ikkita to’g’ri chiziqning kesishish nuqtasi qanday topiladi?
16. Nuqtadan to’g’ri chiziqqacha bo’lgan masofa qanday formuladan foydalanib topiladi?
17. Ikkita parallel to’g’ri chiziqlar orasidagi masofani topish qanday bajariladi?

9-MA’RUZA

Mavzu: Fazoda tekislik. Tekislikning umumiy tenglamasi. Ikki tekislik orasidagi burchak. Tekisliklarning parallellik va perpendikulyarlik sharlari.

Reja

1. **Fazoda Dekart koordinatalar sistemasi va asosiy masalalar.**
2. **Fazoda sirt va uning tenglamasi.**
3. **Berilgan nuqtadan o’tib, berilgan vektorga perpendikulyar bo’lgan tekislik tenglamasi.**
4. **Tekislikning umumiy tenglamasi va uning xususiy hollari.**
5. **Tekislikning kesmalar bo’yicha tenglamasi.**
6. **Berilgan uchta nuqtalardan o’tuvchi tekislik tenglamasi.**

Tayanch ibora va tushunchalar

Fazoda nuqtaning o'rni, aplikata, oktantlar, koordinat tekisliklari, ikki nuqta orasidagi masofa, kesmani berilgan nisbatda bo'lish, sirt va uning tenglamasi, sirtning tartibi, sferik sirt, fazoda tekislik, normal vektor, tekislikning umumiy tenglamasi, tekislikning kesmalar bo'yicha tenglamasi, berilgan uchta nuqtadan o'tuvchi tekislik, ikki tekislik orasidagi burchak, nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa, ikki tekislikning parallelligi va perpendikulyarligi.

1. Fazoda Dekart koordinatalar sistemasi va asosiy masalalar.

Tekislikdagi Dekart koordinatalariga o'xshash fazodagi koordinatalar ham aniqlanadi, o'zaro perpendikulyar OX, OY, OZ son o'qlari, umumiy 0 nuqtadan o'tsin. Fazoda A ***nuqtaga uchta haqiqiy son*** (x, y, z) va aksincha uchta haqiqiy songa bitta nuqta mos keladi. Bu moslik ham bir qiymatlidir. Bu sonlarga nuqtaning fazodagi koordinatalari deyiladi. x abtsissasi, y ordinatasi, z ***aplikatasi*** deb ataladi. Koordinat o'qlaridan o'tuvchi tekisliklarga ***koordinat tekisliklari*** deyiladi va ular fazoni 8 ta bo'laklarga **- oktantlarga** ajratadi. $A\ (x,\ y,\ z)$ nuqtaning koordinatalari OA radius vektorning ham koordinatalari bo'ladi.

Fazodagi analitik geometriyada ham quyidagi sodda masalalar qaraladi:

1) fazodagi berilgan $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$ va $B\ (x_2,\ y_2,\ z_2)$ nuqtalar orasidagi masofa,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

formula bilan aniqlanadi;

2) AB kesmani $\lambda = AC : CB$ nisbatda bo'luvchi $C\ (x,\ y,\ z)$ nuqtaning koordinatalari

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

formulalar yordamida topiladi.

2. Fazoda sirt va uning tenglamasi.

Ma'lumki, tekislikda

$$F\ (x,\ y) = 0$$

tenglama biror chiziqni ifodalaydi.

$$F\ (x,\ y,\ z) = 0 \qquad (1)$$

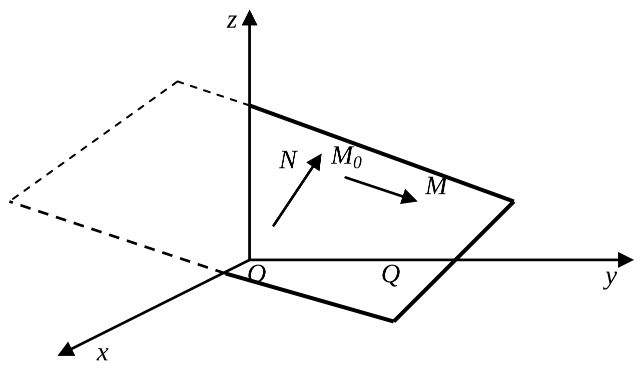
tenglama $OXYZ$, R^3 fazoda koordinatalari (1) tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami, biror ***sirtni aniqlaydi***. Bu tenglamaga ***sirt tenglamasi*** deyiladi. (1) tenglama darajasiga ***sirtning tartibi*** deb ataladi. Masalan, OYZ koordinat tekisligida yotgan istalgan $A(x,\ y,\ z)$ nuqtaning abstsissasi $x = 0$ bo'ladi va aksincha $A\ (0,\ y,\ z)$ nuqta OYZ koordinat tekisligida yotadi. Demak, OYZ koordinat tekisligining tenglamasi $x = 0$ bo'lib, u birinchi tartibli bo'ladi. Xuddi, yuqoridagidek $y = 0$, $z = 0$ mos ravishda OXZ va OXY koordinat tekisliklari tenglamalarini ifodalaydi.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R$$

tenglama markazi $C\ (a,\ b,\ c)$ nuqtada radiusi R bo'lgan sferik sirt tenglamasi ikkinchi tartiblidir.

3. **Berilgan nuqtadan o’tib, berilgan vektorga perpendikulyar bo’lgan tekislik tenglamasi.**

$OXYZ$ to’g’ri burchakli koordinatalar sistemasida $M_0\ (x_0,\ y_0,\ z_0)$ nuqta va $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ vektor berilgan bo’lsin. M_0 nuqtadan o’tuvchi, $\vec{N}$ vektorga perpendikulyar Q tekislikning fazodagi vaziyati aniq bo’ladi. Uning tenglamasini keltirib chiqaramiz. Q tekislikda ixtiyoriy $M\ (x,\ y,\ z)$ nuqta olamiz(1-chizma).



1-chizma.

$\overrightarrow{M_0M}$ va $\vec{N}$ vektorlar o’zaro perpendikulyar bo’lganda va faqat shundagina M nuqta Q tekislikda yotadi. Ma’lumki $\overrightarrow{M_0M}$ vektorning koordinatalari $(x - x_0),\ (y - y_0),\ (z - z_0)$ bo’ladi. Ikki vektorning perpendikulyarlik shartiga asosan:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (2)$$

bo’ladi. Bu Q ***<u>tekislik tenglamasi</u>*** bo’ladi.

Ta’rif. Q tekislikka perpendikulyar $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ vektorga bu tekislikning ***<u>normal</u>*** vektori deyiladi.

1-misol. $M_0\ (4,\ -3,\ 5)$ nuqtadan o’tib, $\vec{N} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ vektorga perpendikulyar bo’lgan tekislik tenglamasini yozing.

Yechish. (2) formulaga asosan,

$$2(x - 4) + (-3)(y + 3) + 4(z - 5) = 0,\ 2x - 8 - 3y - 9 + 4z - 20 = 0$$

yoki

$$\underline{2x - 3y + 4z - 37 = 0}$$

<u>bo’lib, bu izlanayotgan tekislik tenglamasidir.</u>

4. Tekislikning umumiy tenglamasi va uning xususiy hollari.

(2) tenglamadan

$$Ax - Ax_0 + By - By_0 + Cz - Cz_0 = 0 \text{ yoki } Ax_0 - B\mathbf{y}_0 - Cz_0 = D$$

bilan belgilashdan keyin

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (3)$$

tenglamani hosil qilamiz. (3) tenglamaga fazoda tekislikning ***umumiy tenglamasi*** deyiladi.

Umumiy tenglamaning xususiy hollarini qaraymiz:

1) $D = 0$ bo'lsa, $Ax + By + Cz = 0$ bo'lib, tekislik koordinatalar boshidan o'tadi;

2) $C = 0$ bo'lsa, $Ax + By + D = 0$ bo'lib, tekislik OZ o'qiga parallel; xuddi shunday $Ax + Cz + D = 0$, $By + Cz + D = 0$ tekisliklar mos ravishda OY va OX o'qlariga paralleldir;

3) 2-holda $D = 0$ bo'lsa, tekislik tenglamalari $Ax + By = 0$, $Ax + Cz = 0$, $By + Cz = 0$ bo'lib, ular mos ravishda OZ, OY, OX koordinat o'qlaridan o'tadi;

4) $B = C = 0$, bo'lsa, $Ax + D = 0$ tekislik YOZ koordinat tekisligiga parallel, xuddi shunday $By + D = 0$, $Cz + D = 0$ tekisliklar mos ravishda XOZ, XOY koordinat tekisliklariga parallel bo'ladi;

5) $B = C = D = 0$ bo'lsa, $Ax = 0$ bo'lib, YOZ koordinat tekisligi bilan ustma-ust tushadi, ya'ni $x = 0$, YOZ koordinat tekisligining tenglamasi bo'ladi. Xuddi shunday $y = 0$ va $z = 0$, mos ravishda XOZ va XOY koordinat tekisliklarining tenglamasini ifodalaydi .

5. Tekislikning kesmalar bo'yicha tenglamasi. (3) tenglamada A, B, C, D koeffitsientlar hammasi 0 dan farqli bo'lsa, tekislik koordinat o'qlaridan OL, ON va OP kesmalar ajratadi(2-chizma). (3) tenglamani quyidagicha o'zgartiramiz:

$$Ax + By + Cz = D, \qquad \frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1.$$

Oxirgi tenglamada

$$-D/A = a, \quad -D/B = b, \quad -D/C = c$$

belgilash kritsak,

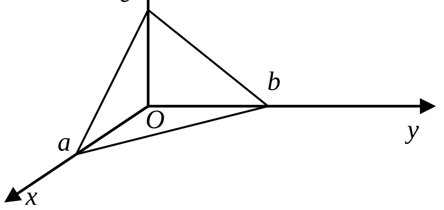
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

tenglama kelib chiqadi. Bu tenglamaga fazoda ***tekislikning kesmalarga nisbatan*** tenglamasi deyiladi.

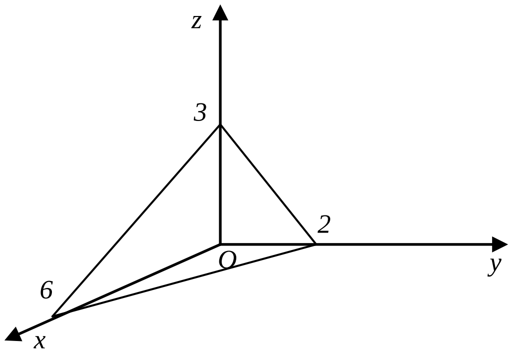
2-misol. Tekislikning $x + 3y + 2z - 6 = 0$ umumiy tenglamasi berilgan, bu tekislikni yasang.

Yyechish. Tenglamani tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasiga keltiramiz:

$$x + 3y + 2z = 6, \qquad \frac{x}{6} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1.$$



2-chizma



3-chizma

Oxirgi tenglamadan ma'lumki, tekislik koordinat o'qlaridan mos ravishda 6, 2, 3 kesmalar ajratadi. Bu kesmalarning oxiridan tekislikni o'tkazamiz (3-chizma).

6. Berilgan uchta $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$ va $C(x_3; y_3; z)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasi

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

ko'rinishda bo'lib, uchta vektorning komplanarligidan kelib chiqadi. $M(x, y, z)$ tekislikdagi ixtiyoriy nuqta. $\vec{AM}$, $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ vektorlar komplanardir.

7. Ikki tekislik orasidagi burchak. Nuqtadan tekislikkacha masofa.

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

tekisliklar orasidagi burchak ularning normal $\vec{n}_1$ va $\vec{n}_2$ vektorlari orasidagi burchakka teng bo'lib,

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (5)$$

formula o'rinli bo'ladi. (5) ga ikkita tekislik orasidagi burchak kosinusini topish formulasi deyiladi.

$\vec{n}_1$ va $\vec{n}_2$ normal vektorlar kollinear bo'lsa,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

bo'lib**, <u>*bu ikki tekislikning parallellik sharti deyiladi.*</u>**.

$\vec{n}_1$ va $\vec{n}_2$ normal vektorlar perpendikulyar bo'lsa,

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

bo'lib, <u>***bu ikki tekislikning perpendikulyarlik sharti***</u> bo'ladi. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ <u>nuqtadan</u> $Ax + By + Cz + D = 0$ <u>tekislikkacha bo'lgan masofa</u>

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (6)$$

formula bilan topiladi.

3-misol. $x + 2y - 3z + 4 = 0$ va $2x + 3y + z + 8 = 0$ tekisliklar orasidagi burchakni toping.

Yyechish. $n_1\ (1, 2, -3)$ va $n_2\ (2, 3, 1)$ mos ravishda berilgan tekisliklarning normal vektorlari bo'lganligi uchun (5) formulaga asosan,

$$\cos\varphi \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + (-3)\cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{5}{14}, \qquad \varphi \approx 69^0 05^1$$

bo'ladi.

4-misol. $2x - y - 2z + 4 = 0$ va $2x - y - 2z - 8 = 0$ tekisliklarning parallelligini ko'rsating va ular orasidagi masofani toping.

Yyechish. Berilgan tekisliklarning normal vektorlari $n_1\ (2,\ -1,\ -2)$ va $n_2\ (2,\ -1,\ -2)$ parallellik shartini qanoatlantiradi, demak berilgan tekisliklar ham paralleldir. Endi birinchi tekislikda biror nuqtani aniqlab undan ikkinchi tekislikkacha bo'lgan masofani topamiz. $x = z = 0$ bo'lsa, birinchi tekislik tenglamasidan $y = 4$ bo'lib, $M_0\ (0;\ 4;\ 0)$ nuqta birinchi tekislikdagi nuqta bo'ladi. (6) formulaga asosan,

$$d = \frac{|2 \cdot 0 - 1 \cdot 4 - 2 \cdot 0 - 8|}{\pm\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{|-12|}{3} = 4\,.$$

Demak, parallel tekisliklar orasidagi masofa $d = 4$ bo'ladi.

Mustahkamlash uchun savollar

1. R^3 fazoda nuqtaning o'rni qanday aniqlanadi?
2. Qanday moslikka bir qiymatli moslik deyiladi?
3. R^3 fazodagi koordinatalar qanday aniqlanadi?
4. Koordinat tekisliklari nima?
5. Koordinat tekisliklari R^3 fazoni nechta bo'lakka ajratadi?
6. R^3 fazoda ikki nuqta orasidagi masofa qanday topiladi?
7. R^3 fazoda sirt va uning tenglamasi qanday aniqlanadi?
8. Sirtning tartibi deb nimaga aytiladi?
9. Sferik sirt nechanchi tartibli?
10. Berilgan nuqtadan o'tib va berilgan vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasi qanday bo'ladi?
11. Qanday vektorga tekislikning normal vektori deyiladi?
12. Tekislikning umumiy tenglamasi va uning xususiy xollari qanday bo'ladi?
13. Tekislikning kesmalar bo'yicha tenglamasi qanday yoziladi?
14. Berilgan uchta nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi determinant orqali qanday bo'ladi?
15. Ikkita tekislik orasidagi burchak qanday topiladi?
16. Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa nima va u qanday topiladi?
17. Ikki tekislikning parallellik va perpendikulyarlik shartlari nima?

10-MA'RUZA

Fazoda to'g'ri chiziq tenglamasi. To'g'ri chiziqning umumiy, kanonik va parametrik tenglamalari. Ikki to'g'ri chiziqning parallellik va perpendikulyarlik shartlari. Fazoda to'g'ri chiziq va tekislik.

Reja

1. Fazoda berilgan nuqtadan o'tuvchi va berilgan yo'naltiruvchi vektorga ega bo'lgan to'g'ri chiziq vektorli tenglamasi.

2. **Fazoda to'g'ri chiziq(FTCH)ning parametrik va kanonik tenglamalari.**

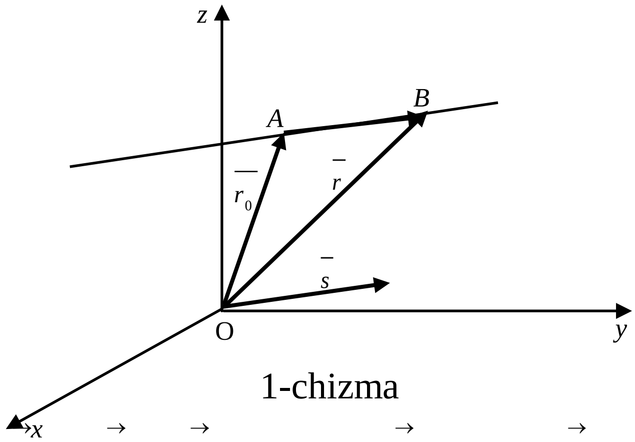
3. Fazoda umumiy va proektsiyalarga nisbatan hamda berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamalari.

4. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.
5. Fazoda to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak.

Tayanch ibora va tushunchalar

Yo'naltiruvchi vektor, vektorli, parametrik, kanonik, umumiy, proektsiyalarga nisbatan tenglamalar, ikki tekislikning kesimi, fazoda ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak hamda ularning parallelligi va perpendikulyarligi, fazoda to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak hamda ularning parallelligi,perpendikulyarligi, fazoda to'g'ri chiziqning koordinat tekisliklaridagi izlari.

1. **Fazoda berilgan nuqtadan o'tuvchi va berilgan yo'naltiruvchi vektorga ega bo'lgan to'g'ri chiziq vektorli tenglamasi.** Fazoda to'g'ri chiziqning holati u o'tadigan biror $A(x_1, y_1, z_1)$ nuqta va to'g'ri chiziq parallel bo'lgan $\vec{s} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$ **yo'naltiruvchi vektor**ning berilishi bilan to'la aniqlanadi. Uning tenglamasini yozish uchun unda ixtiyoriy $B(x, y, z)$ nuqta olamiz (1-chizma).



1-chizma

Ma'lumki, $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$ bo'lib, $\vec{AB}$ vektor $\vec{s}$ vektorga kollinear, ya'ni $\vec{AB} = t\vec{s}$, $t -$ skalyar parametr. $\vec{OA} = \vec{r}_0$, $\vec{OB} = \vec{r}$ desak,

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s} \qquad (1)$$

bo'ladi. (1) tenglikka **fa*zoda to'g'ri chiziqning vektorli tenglamasi*** deyiladi.

2. **Fazoda to'g'ri chiziq(FTCH)ning parametrik va kanonik tenglamalari.**

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{r}_0 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{s} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$ bo'lganligi uchun (1) tenglamadan vektorlarning tengligiga asosan,

$$\begin{cases} x = x_1 + tm, \\ y = y_1 + tn, \\ z = z_1 + tp \end{cases} \qquad (2)$$

tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi. Bunga ***to'g'ri chiziqning parametrik tenglamasi*** deyiladi, bunda $t -$ parametr.

(2) tenglamadan t parametrni yo'qotsak,ya'ni $x - x_1 = tm$, $\frac{x - x_1}{m} = t$, õóääè øóíäàé $\frac{y - y_1}{n} = t$, $\frac{z - z_1}{p} = t$

á¢ëèá , îõèðãè 3òà òåíãëèêëàð íèíã ¢íã òîìîíëàðè òåíã á¢ëãàíëèãè ó÷óí

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p} \qquad (3)$$

tenglama kelib chiqadi. (3) tenglamaga to'g'ri chiziqning ***kanonik tenglamasi*** deyiladi.

1-misol. $M_0(2;\ -3;\ 5)$ nuqtadan o'tib koordinat o'qlari bilan $\alpha=\pi/4,\ \ \beta=\pi/3,\ \ \gamma=\pi/3$ burchak tashkil etuvchi to'g'ri chiziqning kanonik va parametrik tenglamalarini yozing.

Yyechish.To'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori sifatida

$$s=\cos\alpha\cdot i+\cos\beta\cdot j+\cos\gamma\cdot k=\frac{\sqrt{2}}{2}i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k$$ vektorni

olamiz.

(3) tenglamaga asosan,

$$\frac{x-2}{\sqrt{2}/2}=\frac{y+3}{1/2}=\frac{z-5}{1/2}$$

to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasini hosil qilamiz.

Oxirgi tengliklarning har birini t bilan belgilab,

$$\frac{x-2}{\sqrt{2}/2}=t \qquad \frac{y+3}{1/2}=t \qquad \frac{z-5}{1/2}=t$$ yoki

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}t+2;$$

$$y=\frac{1}{2}t-3;$$

$$z=\frac{1}{2}t+5$$

to'g'ri chiziqning parametrik tenglamasini hosil qilamiz.

4. Fazoda umumiy va proektsiyalarga nisbatan hamda berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamalari.

Fazoda to'g'ri chiziqni **ikki tekislikning kesimi**dan iborat deb ham qarash mumkin. Shuning uchun to'g'ri chiziqni analitik holda quyidagi sistema

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \qquad (4)$$

orqali ham ifodalash mumkin. (4) tenglamada $A_1,\ B_1,\ C_1$ koeffitsientlar mos ravishda $A_2,\ B_2,\ C_2$ koeffitsientlarga proportsional bo'lmasa u to'g'ri chiziqni ifodalaydi. Bunga to'g'ri chiziqning ***umumiy tenglamasi*** deyiladi.

(4) sistemadan birinchi y noma'lumni, keyin x noma'lumni yo'qotsak,

$$\begin{cases} x=x_1+mz, \\ y=y_1+nz \end{cases} \qquad (5)$$

tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi. Bundagi birinchi tenglama OY o'qqa parallel bo'lgan tekislik, ikkinchisi OX o'qqa parallel bo'lgan tekislik bo'lib, berilgan to'g'ri chiziqni XOZ va YOZ koordinat tekisliklariga proektsiyalaydi. (5) sistemaga to'g'ri chiziqning ***proektsiyalarga*** nisbatan tenglamasi deyiladi.

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ va $M_2(x_2, y_2, z_2)$ **berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq** tenglamasi tekislikda berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasidagidek ushbu ko'rinishda

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (6)$$

bo'ladi.

2-misol. $\begin{cases} 2x + y - 5z + 3 = 0, \\ 3x + 2y - 4z + 2 = 0 \end{cases}$

to'g'ri chiziqning proektsiyalarga nisbatan va kanonik tenglamalarini yozing.

Yechish. Berilgan tenglamalar sistemasidan oldin y ni yo'qotamiz, buning uchun birinchi tenglamani (-2) ko'paytirib tenglamalarni hadma-had qo'shib $-x + 0 + 6z - 4 = 0$, yoki $x = 6z - 4$ tenglamani hosil qilamiz. Endi x noma'lumni yo'qotamiz, buning uchun birinchi tenglamani (3) ga ikkinchi tenglamani (-2) ga ko'paytirib hadma - had qo'shib $-y - 7z + 5 = 0$ yoki $y = -7z + 5$ tenglamani keltirib chiqaramiz. Shunday qilib,

$$\begin{cases} x = 6z - 4, \\ y = -7z + 5 \end{cases}$$

sistema to'g'ri chiziqning proektsiyalarga nisbatan tenglamasi bo'ladi.

Oxirgi tenglamalar sistemasini quyidagicha o'zgartiramiz:

$$\begin{matrix} x + 4 = 6z \\ y - 5 = -7z \end{matrix} \quad \text{yoki} \quad \frac{x + 4}{6} = z, \qquad \frac{y - 5}{-7} = z.$$

Demak, $$\frac{x + 4}{6} = \frac{y - 5}{-7} = \frac{z - 0}{1}.$$

Bu to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasidir.

3-misol. Uchburchakning uchlari $A(3, -2, 1)$, $B(6, 5, -7)$ va $C(5, -4, 3)$ berilgan. BD medinaning kanonik tenglamasini yozing.

Yechish. D nuqta AC tomonni teng ikkiga bo'ladi. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish formulasiga asosan:

$$x_D = \frac{3 + 5}{2} = 4, \qquad y_D = \frac{-2 - 4}{2} = -3, \qquad z_D = \frac{1 + 3}{2} = 2.$$

Demak, $D(4, -3, 2)$ bo'ladi. Mediana B va D nuqtalardan o'tadi. (6) formulaga asosan:

$$\frac{x - 6}{4 - 6} = \frac{y - 5}{-3 - 5} = \frac{z + 7}{2 + 7} \quad \text{yoki} \quad \frac{x - 6}{-2} = \frac{y - 5}{-8} = \frac{z + 7}{9}.$$

Bu BD medinaning kanonik tenglamasidir.

5. **Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.**

Fazoda ikkita to'g'ri chiziq kanonik tenglamalari bilan berilgan bo'lsin:

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}; \qquad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Bu **to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak**, ularning yo'naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakka teng bo'lib,

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_1^2 + p_1^2}} \qquad (7)$$

formula yordamida topiladi.

Berilgan to'g'ri chiziqlar parallel bo'lsa,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \qquad (8)$$

bo'lib, bu fazoda **ikki to'g'ri chiziqning *parallellik* sharti** deyiladi.

To'g'ri chiziqlar perpendikulyar bo'lsa, yo'naltiruvchi vektorlar ham perpendikulyar bo'lib,

$$m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2 = 0 \qquad (9)$$

bo'ladi, bu **ikki to'g'ri chiziqning perpendikulyarlik sharti**dir.

4-misol. $\frac{x-5}{7} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-2}{1}$ *ва* $\frac{x-8}{7} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z-4}{-1}$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

Yechish. Oldin to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektorlarini topamiz:

$$\vec{s}_1 = 7\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}, \qquad \vec{s}_2 = 7\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}.$$

To'g'ri chiziqlar orasidagi burchak ularning yo'naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakka teng. (7) formulaga asosan:

$$\cos\varphi = \frac{7\cdot 7 + 5\cdot(-4) + 1\cdot(-1)}{\sqrt{7^2 + 5^2 + 1^2} \cdot \sqrt{7^2 + (-4)^2 + (-1)^2}} = \frac{28}{15\sqrt{22}} \approx 0.3127,$$

$$\cos\alpha \approx 0.3127.$$

Jadvaldan $\varphi \approx 71^0 48^1$ ekanligini topamiz.

5-misol. $M_0\ (2, -1, 3)$ nuqtadan o'tib,

$$\frac{x+4}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-2}{4}$$

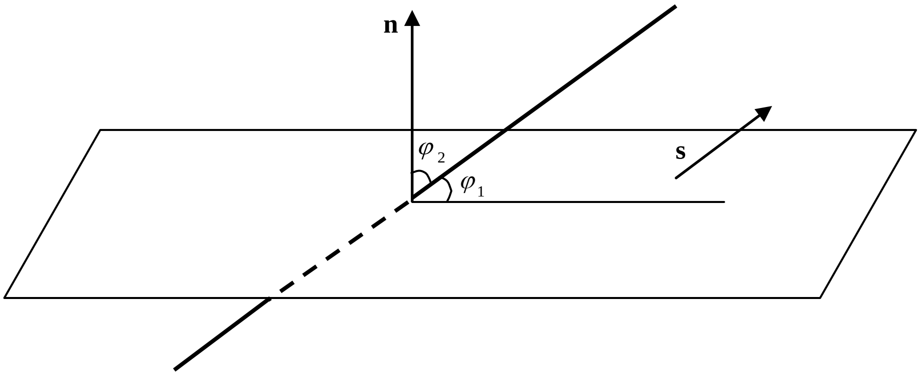
to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasini yozing.

Yechish. Izlanayotgan to'g'ri chiziq yo'naltiruvchi vektori uchun berilgan to'g'ri chiziq yo'naltiruvchi vektorini olish mumkin, chunki ular shartga ko'ra parallel, ya'ni $\vec{s} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ yo'naltiruvchi vektor bo'ladi. Berilgan nuqtadan o'tib, $\vec{s}$ yunaltiruvchi vektorga ega bo'lgan, izlanayotgan to'g'ri chiziq tenglamasi (3) ga asosan,

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{4}$$

bo’ladi.

5.Fazoda to’g’ri chiziq va tekislik orasidagi burchak. Fazoda to’g’ri chiziq va tekislik orasidagi burchak **d**eb, to’g’ri chiziqning tekislikdagi proektsiyasi bilan to’g’ri chiziq orasidagi qo’shni burchaklardan biri olindi (2-chizma).



2-chizma.

To’g’ri chiziq $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ kanonik tenglamasi bilan tekislik $Az+By+Cz+D=0$ umumiy tenglamasi bilan berilgan bo’lsin. φ_1 burchakni topish uchun to’g’ri chiziqning yo’naltiruvchi vektori $\vec{s}=m\vec{i}+n\vec{j}+p\vec{k}$ vektor bilan tekislikning normal vektori orasidagi φ_2 burchakni hisoblaymiz:

$$\cos\varphi_2=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+p^2+n^2}}.$$

φ_1 burchak φ_2 burchakni $\pi/2$ gacha to’ldiradi. Demak,

$$\cos\varphi_2=\cos(\pi/2-\varphi_1)=\sin\varphi_1$$

Shunday qilib,

$$\sin\varphi_1=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+p^2+n^2}} \qquad (10)$$

bo’ladi. (10) fazoda to’g’ri chiziq va tekislik orasidagi burchakni topish formulasi bo’ladi.

To’g’ri chiziq tekislikka parallel bo’lsa $\vec{s}(m,n,p)$ va $\vec{n}(A,B,C)$ vektorlar perpendikulyar bo’lib,

$$Am+Bn+Cp=0 \qquad (11)$$

tenglik o’rinli bo’ladi. (11) tenglikka **to’g’ri chiziq va tekislikning *<u>parallellik sharti</u>*** deyiladi. To’g’ri chiziq tekislikka perpendikulyar bo’lsa, $\vec{s}(m,n,p)$ va $\vec{n}(A,B,C)$ vektorlar parallel bo’ladi va

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p} \qquad (12)$$

munosabat kelib chiqadi. (12) tenglik **to’g’ri chiziq va tekislikning *<u>perpendikulyarlik</u>* sharti** bo’ladi.

(11) shart bajarilmasa to'g'ri chiziq va tekislik kesishadi. Kesishish nuqtasini topish uchun, ushbu

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}, \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

uch noma'lumli tenglamalar sistemasini yyechish kerak bo'ladi.

6-misol. $A(5,\ 1,\ -4)$ va $B(6,\ 1,\ -3)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq bilan $2x-2y+z-3=0$ tekislik orasidagi burchakni toping.

Yechish. AB nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori sifatida $\vec{s} = \vec{AB}(1,0,1)$ ni olamiz. Tekislikning normal vektori $\vec{n}(2,-2,1)$ bo'lganligi uchun (10) formulaga asosan:

$$\sin\varphi = \frac{2\cdot 1 + 0\cdot(-2) + 1\cdot 1}{\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{4+4+1}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin\varphi = \sqrt{2}/2, \qquad \varphi = 45^0.$$

7 –misol. $\begin{cases} 2x+3y+3z-7=0, \\ x+2y+2z-4=0 \end{cases}$

to'g'ri chiziqni yasang.

Yechish. Ma'lumki to'g'ri chiziqni yasash uchun u o'tadigan ikkita nuqtani aniqlash yetarli. Buning uchun to'g'ri chiziqning koordinat tekisliklari bilan kesishish nuqtalarini topamiz. Bu nuqtalarga **to'g'ri chiziqning koordinat tekisliklaridagi <u>izlari</u>** deyiladi.

To'g'ri chiziqning XOY tekislikdagi **izini** topish uchun berilgan sistemada $z=0$ deb olamiz, ya'ni

$$\begin{cases} 2x+3y-7, \\ x+2y-4=0. \end{cases}$$

Bu sistemani $x,\ y$ noma'lumlarga nisbatan yechsak, $x=2,\quad y=1$ bo'ladi. Demak, berilgan to'g'ri chiziqning XOY koordinata tekisligidagi izi $M_1\ (2,\ 1,\ 0)$ nuqta bo'ladi.

Endi to'g'ri chiziqning XOZ tekislikdagi izini topamiz. Buning uchun berilgan tenglamalar sistemasida $y=0$ deb, hosil bo'lgan sistemani yechib, $x=2,\quad z=1$ topamiz. Demak, to'g'ri chiziqning XOZ tekislikdagi izi $M_2\ (2,\ 0,\ 1)$ bo'ladi. Topilgan M_1 va M_2 nuqtalardan to'g'ri chiziq o'tkazamiz.

Mustahkamlash uchun savollar

1. R^3 fazoda to'g'ri chiziq qanday aniqlanadi?

2. To'g'ri chiziqning vektorli, parametrik va kanonik tenglamalari qanday yoziladi?

3. To'g'ri chiziqning umumiy va proektsiyalarga nisbatan tenglamalari nimalardan iborat?

4. R^3 fazoda ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak qanday topiladi?

5. Fazoda ikki to’g’ri chiziqning parallellik sharti qanday?
6. Fazoda ikki to’g’ri chiziqning perpendikulyarlik sharti nima?
7. Fazoda to’g’ri chiziq va tekislik orasidagi burchak deb qaysi burchak olinadi?
8. Fazoda to’g’ri chiziq va tekislikning parallellik sharti nimadan iborat?
9. Fazoda to’g’ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik sharti qanday?
10. . To’g’ri chiziqning koordinat tekisliklaridagi izlari nimadan iborat va qanday topiladi?
11. To’g’ri chiziqning yo’naltiruvchi vektori nima?

11-MA’RUZA

Mavzu: Kompleks sonlar. Algebraning asosiy teoremasi

Reja

1. Kompleks son va uning algebraik, trigonometrik, ko’rsatkichli shakllari hamda ular ustida amallar.
2. Algebraning asosiy teoremasi.
3. Kubik tenglama va Kardano formulasi.
4. Yuqori darajali tenglamalar.

Tayanch ibora va tushunchalar

Kompleks son, kompleks sonning algebraik, trigonometrik, ko’rsatkichli shakllari, kompleks sonlar ustida amallar, Muavr formulasi, Eyler formulasi, algebraning asosiy teoremasi, kubik tenglama va Kardano formulasi, yuqori darajali tenglamalarni yyechish usullari.

1.Kompleks son va uning algebraik, trigonometrik, ko’rsatkichli shakllari hamda ular ustida amallar.

Fan va amaliyotning rivojlanishi haqiqiy sonlar to’plamining yetarli emasligini ko’rsatdi. Masalan, tashqi ko’rinishi juda sodda $x^2+1=0$, $x^2+x+1=0$ tenglamalar haqiqiy sonlar to’plamida yechimga ega emas. Demak, istalgan algebraik tenglamani yyechish uchun haqiqiy sonlar to’plami yetarli bo’lmay qoladi.

Bundan tashqari elektronikada va fizikaning turli bo’limlarida murakkab tabiatli kattaliklar qaraladiki, ularni haqiqiy sonlar tushunchasi qamray olmaydi. Shu sababli sonlar tushunchasini kengaytirish ehtiyoji yuzaga keldi.

1.Ta’rif. x va y haqiqiy sonlar, i esa($i=\sqrt{-1}$)qandaydir bir simvol bo’lsa,

$$z = x + yi \qquad (1)$$

ifodaga kompleks son (algebraik shakli) deyiladi, bunda quyidagi shartlar qabul qilingan deb hisoblanadi:

1) $x+0i=x$; $0+yi=yi$ va $1\cdot i=i$; $-1\cdot i=-i$;

2) faqat $x=x_1$, $y=y_1$ bo’lgandagina , $x+yi=x_1+y_1 i$ bo’ladi;

3) $(x+yi)+(x_1+y_1 i)=(x+x_1)+(y+y_1)i$;

4) $(x+yi)\cdot(x_1+y_1 i)=(xx_1-yy_1)+(xy_1+x_1 y)i$.

$z=x+yi$ kompleks sonda $x=0$, $y\neq 0$ bo’lsa, y mavhum son deyiladi. i son mavhum birlik deyiladi . x va y sonlar z kompleks sonning mos ravishda haqiqiy va kompleks qismi deyiladi va $x = \text{Re } z, y = \text{Im } z$ ko'rinishda belgilanadi . $y = 0$ bulsa, $z = x$ - haqiqiy son, agar $x = 0$ bo'lsa, $z = iy$ sof mavhum son bo'ladi. Mavhum qismlarining ishorasi bilangina farq qiluvchi $z = x + iy$ va $\bar{z} = x - iy$ kompleks sonlar qo'shma kompleks sonlar deyiladi .

Agar $z_1 = x_1 + iy_1$ va $z_2 = x_2 + iy_2$ ikkita kompleks son berilgan bo'lsa, ular ustida algebraik amallar quyidagicha bajariladi:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \quad (2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Kompleks sonlarni darajaga ko'tarish ikkihadni darajaga ko'tarish

kabi bajariladi, i sonning darajalari quyidagi formulalar bo'yicha aniqlanadi. $i^2 = -1;\ i^3 = -i;\ i^4 = 1$ va h.k.

Umuman, $i^{4k} = 1;\ i^{4k+1} = i,\quad i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i$.
(3)

1-misol. $z_1 = 2 + i$ va $z_2 = 3 - 2i$ sonlarning yig'indisi va ayirmasini toping

Yechish. (2) formulaning birinchi va ikkinchisidan quyidagilarni topamiz:

$$z_1 + z_2 = (2 + i) + (3 - 2i) = (2 + 3) + (1 - 2)i = 5 - i,$$

$$z_1 - z_2 = (2 + i) - (3 - 2i) = (2 - 3) + i(1 + 2) = -1 + 3i.$$

2-misol. $z_1 = 2 - 3i$ va $z_2 = 1 + 2i$ kompleks sonlar ko'paytmasini toping.

Yechish. (2) formulaga ko'ra quyidagini hosil qilamiz:

$$z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i) \cdot (1 + 2i) = (2 \cdot 1 - (-3) \cdot 2) + i(2 \cdot 2 + (-3) \cdot 1) = (2 + 6) + i(4 - 3) = 8 + i;$$

Har bir $z = x + iy$ kompleks son geometrik jihatdan Oxy koordinatalar tekisligining (x, y) nuqtasi yoki $\vec{ON}$ vektori bilan tasvirlanadi.

Kompleks son tasvirlanadigan Oxy tekislik kompleks tekislik deyiladi.

z kompleks soniga mos keluvchi N nuqtaning holatini r va φ qutb koordinatalari bilan ham aniqlash mumkin.

Bunda koordinatalar boshidan N nuqtagacha bo'lgan masofaga, $z = |\vec{ON}|$ soni kompleks sonning moduli deyiladi va $|z|$ bilan belgilanadi; $\vec{ON}$ vektorning Ox o'qining musbat yunalishi bilan hosil qilgan φ burchak kompleks sonning argumenti deyiladi va y arg z kabi belgilanadi.

$z = x + iy$ kompleks son uchun quyidagi formula o'rinlidir:

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad tg\,\varphi = \frac{y}{x} \qquad (4)$$

bunda $\varphi = \arg z$ ning qiymati $0 \le \arg z < 2\pi$ shartni qanoatlantiradi.

3-misol. $z = -\sqrt{3} + i$ kompleks sonning moduli va argumentini toping.

Yechish. $x = -\sqrt{3},\ y = 1$ bo'lganligi uchun $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 2;\ \ tg\,\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

tenglamadan φ argumentni topamiz:

$$\varphi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}.$$

Shunday qilib, $r = 2,\ \ \varphi = \frac{5\pi}{6};$

Kompleks sonning $z = x + iy$ ko'rinishdagi ifodasi kompleks sonning algebraik shakli deyiladi.

Kompleks sonning $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ko'rinishdagi ifodasi uning trigonometrik shakli deyiladi.

Trigonometrik ko'rinishda berilgan kompleks sonlar ustida amallar quyidagicha bajariladi :

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= (r_1 r_2)[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \end{aligned} \tag{5}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)], \tag{6}$$

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \tag{7}$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \tag{8}$$

bunda k=0,1,2,..,(n-1).

(7) va(8) formulalarga Muavr formulalari deyiladi.

Kompleks sonning ko'rsatkichli shakli

$$z = re^{i\varphi}$$

ko'rinishda bo'lib,

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{9}$$

(9) formulaga Eyler formulasi deyiladi.

4-misol. $z = 1 - i$ sonni sakkizinchi darajaga ko'taring.

Yechish. Berilgan sonni trigonometrik formada tasvirlaymiz:

$z = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{\varphi} + i\sin\frac{7\pi}{\varphi}\right)$ Muavr formulasiga ko'ra quyidagini hosil qilamiz:

$$z^8 = (1-i)^8 = \left[\sqrt{2}^8\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right]^8 = \left(\sqrt{2}\right)^8\left[\left(\cos(8\cdot\frac{7\pi}{4}) + i\sin(8\cdot\frac{7\pi}{4})\right)\right] =$$

$$= 16\left(\cos 14\pi + i\sin 14\pi\right) = 16 .$$

2. Algebraning asosiy teoremasi.

Ko'phadlarning ildizlari bilan ish ko'rilganda, har qanday ko'phad ham ildizga ega bo'laveradimi? degan savol tug'uladi. Koeffitsientlari haqiqiy bo'lib, haqiqiy ildizga ega bo'lmagan ko'phadlar mavjudligi ma'lum, x^2+1 ana shunday ko'phadlardan biridir. Koeffitsientlari ixtiyoriy kompleks (haqiqiy koeffitsientli ko'phadlar bularning xususiy holidir) sonlardan iborat bo'lgan ko'phadlar ichida ham ildizga ega bo'lmaganlari mavjudmi degan savol tug'iladi? SHunday ko'phadlar majud bo'lganda edi, kompleks sonlar sistemasini kengaytirishga to'g'ri kelar edi. Ushbu kompleks sonlar algebrasining asosiy teoremasi o'rinlidir.

Teorema. Darajasi birdan kichik bo'lmagan, istalgan son koeffitsientli, har qanday ko'phad hech bo'lmaganda , umumiy holda bitta kompleks ildizga ega bo'ladi.

Bu teorema matematikaning eng katta yutuqlaridan biri hisoblanadi va fanlarning xilma-xil sohalarida tatbiq qilinadi. Yuqoridagi teoremadan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

Natija. n - darajali $(n \ge 1)$ istalgan kompleks koeffitsientli ko'phad, xuddi n ta kompleks ildizga ega bo'ladi. Bunda ildizlar necha karrali bo'lsa, xuddi shuncha marta sanaladi.

Algebraning asosiy teoremasi $n=0$ bo'lganda ham o'rinli, chunki 0- darajali ko'phad ildizlarga ega emas. Algebraning asosiy teoremasi darajasi aniqlanmagan nolg' ko'phadgagina (nolg' soniga) qo'llanishi mumkin emas.

3. Kubik tenglama va Kardano formulasi.

1). Ushbu tenglama

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad (10)$$

kubik tenglama deyiladi. x_1, x_2, x_3 lar (10) tenglamaning ildizlari bo'lsa, tenglamani

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = 0$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bundan

$$a = -(x_1+x_2+x_3),\;\; b = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,\;\;\; c = -x_1x_2x_3$$

bo'ladi.

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

tenglama $x = z - \frac{a}{3}$ almashtirish yordami bilan

$$z^3 + pz + q = 0$$

ko'rinishga keltiriladi. $z^3 + pz + q = 0$ tenglama ushbu

$$z=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=u+v \qquad (11)$$

Kardano formulasi bilan yechiladi:

1) $\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$ bo'lsa, u holda $z_1=u_1+v_1;\ z_{2,3}=-\frac{u_1+v_1}{2}\pm\frac{u_1-v_1}{2}i\sqrt{3}$ bo'ladi, bunda u_1 va v_1 lar u va v ildizlarning haqiqiy qiymatlari;

2) $\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$ bo'lsa , u holda $z_1=\frac{3q}{p};\ z_2=z_3=-\frac{3q}{2p}=-\frac{z_1}{2}$ bo'ladi;

3) $\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$ bo'lsa , u holda $z_1=2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3},\quad z_{2,3}=2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos(\frac{\varphi}{3}\pm 120^0)$ bo'ladi, bundagi

$$\cos\varphi=-\frac{q}{2}:\sqrt{\frac{-p^3}{27}}\ .$$

5-misol. $x^3-4x^2+x+6=0$ tenglamaning yechimlari

$x_1+x_2+x_3;\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3;\quad x_1x_2x_3$

ifodalarni tuzib, tekshirilsin.

Yyechish. $x^3-4x^2+x+6=0$ berilgan tenglamani quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$x^3-4x^2+x+6=0\Rightarrow\ x^3-4x^2+4x-4x+x+6=0\Rightarrow$$

$$x(\ x^2-4x+4)-4x+8+x-2=0\Rightarrow\ x(x-2)^2-4(x-2)+(x-2)=0\Rightarrow$$

$$(x-2)[\,x(x-2)-4+1]=0\Rightarrow\ (x-2)(x^2-2x-3)=0$$

$$x-2=0 \qquad\qquad x^2-2x-3=0$$

$$x_1=2, \qquad\qquad x_2=3,\ x_3=-1;$$

$x_1+x_2+x_3;\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3;\quad x_1x_2x_3$ ifodalarning qiymatlarini tekshiramiz:

$$-4=a=-(x_1+x_2+x_3)=-(2+3-1)=-4,$$

$$1=b=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=2\cdot3+2\cdot(-1)+3\cdot(-1)=6-2-3=1,$$

$$6=c=-x_1x_2x_3=-(2\cdot3\cdot(-1))=6.$$

4. Yuqori darajali tenglamalar.

Yuqori darajali tenglamalarni yyechish usullaridan biri tenglamaning chap qismidagi ko'phadni ko'paytuvchilarga ajratish usulidir. Bu usul Bezu teoremasining ushbu qo'llanilishiga asoslanadi. α soni n – darajali $P(x)$ ko'phadning ildizi bo'lsa, bu ko'phadni $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ ko'rinishda ifodalash mumkin, bunda $Q(x)$ - $P(x)$ni $(x - \alpha)$ga bo'lishda chiqadigan bo'linma bulib, $n - 1$ darajali ko'phad.

Shunday qilib, n – darajali $P(x) = 0$ tenglamaning hech bo'lmaganda bitta ildizi ma'lum bo'lsa, masalani Bezu teoremasi yordami bilan $n - 1$ darajali tenglamani yyechishga keltirish, boshqacha aytganda, tenglamaning darajasini pasaytirish mumkin.

Tabiiy savol tug'iladi: qanday qilib tenglamaning hech bo'lmasa bitta ildizini topish mumkin?

Butun koeffitsientli tenglamalar holida ratsional, xususan butun ildizlarni, albatta ular mavjud bo'lsa, topish mumkin.

Butun koeffitsientli algebraik tenglamaning ratsional ildizlarini topish usuli ushbu teorema bilan beriladi:

T e o r e m a. $\frac{p}{q}$ Qisqarmas kasr butun koeffisientli

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad (11)$$

tenglamaning ildizi bo'lsin. U holda p soni a_n ozod hadning bo'luvchisi, q esa a_0 bosh koeffitsientning bo'luvchisi bo'ladi**.**

Isboti. $\frac{p}{q}$ qisqarmas kasrni (11) tenglamaga qo'yib va maxrajdan qutqazib, ushbu tenglikni olamiz:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} q + \dots + a_{n-1} p q^{n-1} + a_n q^n = 0 \qquad (12)$$

(12) tenglikni ikki usul bilan qaytadan yozamiz:

$$a_n q^n = p\left(- a_0 p^{n-1} - a_1 p^{n-2} q - \dots - a_{n-1} q^{n-1}\right); \qquad (13)$$

$$a_0 p^n = q\left(- a_1 p^{n-1} - \dots - a_{n-1} p q^{n-1} - a_n q^{n-1}\right). \qquad (14)$$

(13) tenglikdan oydinki $a_n q^n$ ko'paytma p ga bo'linadi va q^n bilan p o'zaro tub bo'lgani uchun a_n soni p ga bo'linadi. SHu kabi (14) tenglikka ko'ra a_0 soni q ga bo'linadi. Teorema isbotlandi.

Isbotlangan teoremadan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

1- **natija.** Butun koeffitsientli tenglamaning istalgan butun ildizi ozod hadining bo'luvchisidan iborat.

2- **Natija.** Butun koeffitsientli tenglamaning bosh koeffitsienti 1 ga teng bo'lsa, u holda tenglamaning barcha ratsional ildizlari, ular mavjud bo'lsa, butun son bo'ladi.

6-misol. Ushbu tenglamani yeching: $2x^3 - 7x^2 + 5x - 1 = 0$.

Yechish. Tenglamaning ratsional ildizlarini topamiz. $\frac{p}{q}$ qisqarmas kasr tenglamaning ildizi bo'lsin U holda p ni ozod hadning bo'luvchilari ichidan, ± 1 sonlari ichidan, q ni esa bosh koeffitsientning musbat bo'luvchilari, ya'ni 1,2 ichidan izlash kerak. Shunday qilib, tenglamaning ratsional ildizlarini ± 1, $\pm \frac{1}{2}$

sonlari ichidan izlash kerak bo'ladi. Tekshirib ko'rish mumkinki, $\frac{1}{2}$ soni berilgan tenglamaning ildizi bo'ladi.

$(2x-1)$ ko'paytuvchini qavsdan chiqarish kerakligini nazarda tutgan holda tenglamaning chap qismini ko'paytuvchilarga ajratib, $(2x-1)\left(x^2-3x+1\right)=0$ tenglamani olamiz. Ikkinchi ko'paytuvchini 0 ga tenglashtirib, $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ ildizga ega bo'lamiz.

Javob: $x_1=\frac{1}{2}$, $x_{2,3}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Kompleks son deb nimaga aytiladi?
2. Kompleks sonning algebraik shakli qanday bo'ladi?
3. Kompleks sonlarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va bo'linmasi qanday topiladi?
4. Kompleks sonlarning trigonometrik ko'rinishi qanday?
5. Muavr formulasi nimadan iborat?
6. Eyler formulasi qanday?
7. Algebraning asosiy teoremasi nimadan iborat?
8. Kardano formulasi qanday?
9. Yuqori darajali tenglamalarni yyechishning qanday usullarini bilasiz?

12-MA'RUZA

Mavzu. Matematik tahlilga kirish. Matematik mantiq elementlari. Haqiqiy sonlar to'plami. Sonli oraliqlar. Ketma-ketlik, ketma-ketlikning limiti va xossalari.

Reja

1. Sonli ketma-ketlik ta'rifi va umumiy tushunchalar.
2. Chegaralangan va chegaralanmagan sonli ketma-ketliklar.
3.Cheksiz katta va cheksiz kichik ketma-ketliklar hamda ularning xossalari.
4. Sonli ketma-ketlikning limiti va uning xossalari.

Tayanch ibora va tushunchalar

Sonli ketma-ketlik, umumiy had, chegaralangan va chegaralanmagan ketma-ketliklar, quyidan chegaralangan, cheksiz katta va cheksiz kichik ketma-ketliklar, ketma-ketlikning limiti, yaqinlashuvchi ketma – ketlik, nuqtaning atrofi, cheksiz limit, chekli limit.

1. Sonli ketma-ketlik ta'rifi va umumiy tushunchalar

1-ta'rif. Natural sonlar qatoridagi

$$1,2,3,\ \ldots,\ n,\ \ldots$$

har bir n songa haqiqiy x_n son mos qo'yilgan bo'lsa,

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \qquad (1)$$

(1) haqiqiy sonlar to'plamiga sonli ketma-ketlik yoki qisqacha ketma-ketlik deyiladi.

$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ sonlarga sonli ketma-ketlikning hadlari deyilib, x_n ga ketma – ketlikning umumiy hadi yoki n – hadi deb ataladi, (1) sonli ketma-ketlikni qisqacha $\{x_n\}$ simvol bilan belgilanadi. Masalan, 1) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ sonlar ketma-ketligi

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n} \dots .$$

bo'ladi;

2) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ sonlar ketma-ketligi $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$.

bo'ladi.

Sonli ketma-ketlikning umumiy hadini olish usuli ko'rsatilgan bo'lsa, u berilgan deyiladi. Misol uchun, 1) $x_n = 2 + (-1)^n$ bo'lsa, u 1, 3, 1, 3, 1, 3, ..., 1, 3, ... ;

3) $\frac{2}{3}$ kasrni o'nli kasrga aylantirganda verguldan keyin bitta, ikkita, uchta va hokazo raqamlarni olib,

$$x_1 = 0,6, \; x_2 = 0,66, \quad x_3 = 0,666, \dots$$

sonlar ketma-ketligini olish mumkin;

4) $a_1, \; a_1 + d, \; a_1 + 2d, \dots, \; a_1 + (n-1)d, \dots$

arifmetik progressiya ham sonli ketma-ketlikdir, bunda a_1 birinchi had, d arifmetik progressiya ayirmasi;

4) $b_1, b_1 q, b_1 q^2, \dots, b_1 q^{n-1}, \dots$

sonlar ketma-ketligi ham ketma-ketlikka misol bo'ladi, bu birinchi hadi b_1 maxraji q bo'lgan geometrik progressiyadir.

Sonli ketma-ketlikning ta'rifidan ma'lumki, u cheksiz sondagi elementlarga ega bo'lib, ular hech bo'lmaganda o'zlarining tartib raqami bilan farq qiladi.

Sonlar ketma-ketligining geometrik tasviri sonlar o'qidagi nuqtalar bilan ifodalanadi.

Sonli ketma-ketliklar ustida ushbu arifmetik amallarini bajarish mumkin: 1) $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligini songa ko'paytirish,

$$m x_1, \; m x_2, \; m x_3, \dots, \; m x_n, \dots$$

ko'rinishda bo'ladi;

2) ikkita $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ sonlar ketma-ketligining yig'indisi

$$x_1 + y_1, \; x_2 + y_2, \dots, \; x_n + y_n, \dots;$$

ko'rinishda aniqlanadi;

3) ikkita $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ sonlar ketma-ketiligini ayirmasi

$$x_1 - y_1, \; x_2 - y_2, \dots, \; x_n - y_n, \dots$$

ko'rinishda bo'ladi;

4) ikkita $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ sonlar ketma-ketligi ko'paytmasi

$$x_1 \cdot y_1,\ x_2 \cdot y_2, ...,\ x_n \cdot y_n, ...;$$

kabi aniqlanadi;

5) ikkita $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ sonlar ketma-ketligining nisbati, maxraj 0 dan farqli bo'lganda,

$$\frac{x_1}{y_1},\ \frac{x_2}{y_2}, ...,\ \frac{x_n}{y_n}, ...$$

ko'rinishda bo'ladi hamda mos ravishda $\{mx_n\}$, $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ simvollar bilan belgilanadi.

2. Chegaralangan va chegaralanmagan sonli ketma-ketliklar.

1-ta'rif. $\{x_n\}$ sonlar ketma – ketligi uchun shunday M (m son) son mavjud bo'lib, ketma-ketlikning istalgan elementi uchun $x_n \le M$ $(x_n \ge m)$ tengsizlik bajarilsa $\{x_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan (quyidan) chegaralangan deyiladi.

2-ta'rif. $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi quyidan va yuqoridan chegaralangan bo'lsa, ya'ni shunday m va M sonlar mavjud bo'lib, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning istalgan elementi uchun $m \le x_n \le M$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan deyiladi.

3-ta'rif. $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi uchun shunday A musbat son mavjud bo'lib, x_n element mavjud bo'lib, $|x_n| > A$ (ya'ni $x_n > A$ yoki $x_n < -A$) tengsizlik bajarilsa $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi chegaralanmagan deyiladi.

Yuqoridagi ta'riflardan kelib chiqadiki, $\{x_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan bo'lsa, uning hamma elementlari $(-\infty,\ M]$ oraliqqa tegishli, $\{x_n\}$ ketma-ketlik quyidan chegaralangan bo'lsa, uning hamma elementlari $[m,\ +\infty)$ oraliqqa tegishli, yuqoridan va quyidan chegaralangan bo'lsa, $[m,\ M]$ oraliqqa tegishli bo'ladi.

Misollar:

1) 1, 2, 3, ..., n, ... sonlar ketma-ketligi quyidan chegaralangan, lekin yuqoridan chegaralangan;

2) -1, -2, -3, ..., -n, ... sonlar ketma-ketligi yuqoridan chegaralangan;

3) 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ... , $\frac{1}{n}$,... sonlar ketma-ketligi chegaralangan, chunki uning hamma elementlari uchun $0 \le x_n \le 1$ tengsizlik bajariladi, bunda $m = 0$ $M = 1$ bo'ladi;

4) -1, 2, -3, 4, -5, ..., $-(-1)^n n$,... sonlar ketma-ketligi chegaralanmagan, chunki qanday A son olmaylikki, bu ketma-ketlik ichida $|x_n| > A$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi elementlari mavjud bo'ladi.

3.Cheksiz katta va cheksiz kichik ketma-ketliklar hamda ularning xossalari

1-ta'rif. $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi istalgan A son uchun, shunday N raqam mavjud bo'lib, hamma $n > N$ lar uchun $|x_n| > A$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi cheksiz katta ketma-ketlik deyiladi.

$\{x_n\}$ cheksiz katta ketma-ketlik chegaralanmagan bo'ladi.

2-ta'rif. Istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N raqam mavjud bo'lib, $n > N$ lar uchun $|x_n| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa $\{x_n\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik sonlar ketma-ketligi deyiladi.

Misollar:

1) natural sonlar ketma-ketligi $\{n\}$ cheksiz katta ketma-ketlikdir;

2) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ sonlar ketma-ketligi cheksiz kichikdir, haqiqatan ham, istalgan $\varepsilon > 0$ son olsak, $|x_n| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ dan $n > \frac{1}{\varepsilon}$ bo'lib, N uchun $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ ($\frac{1}{\varepsilon}$ butun qismi) olib, hamma $n > N$ lar uchun $\frac{1}{n} = |x_n| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. 2-ta'rifga asosan $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik bo'ladi. CHeksiz kichik va cheksiz katta ketma-ketliklar orasida ushbu bog'liqlik bor.

1-teorema. $\{x_n\}$ cheksiz katta ketma-ketlik va uning hamma elementlari 0 dan farqli bo'lsa, $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik va aksincha $\{\alpha_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik va $\alpha_n \neq 0$ bo'lsa, $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ ketma-ketlik cheksiz katta ketma-ketlik bo'ladi.

Isbot. $\{x_n\}$ cheksiz katta ketma-ketlik bo'lsin. Istalgan $\varepsilon > 0$ son olib, $A = \frac{1}{\varepsilon}$ deylik. 1-ta'rifdan shu A son uchun shunday N raqam mavjudki, $n > N$ lar uchun $|x_n| > A$ bo'ladi. Bundan hamma $n > N$ uchun $\left|\frac{1}{x_n}\right| < \frac{1}{A} = \varepsilon$ kelib chiqadi. Bu $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ ketma-ketlikning cheksiz kichikligini bildiradi. (Teoremaning ikkinchi qismini isbot qilishni o'quvchiga havola etamiz).

Cheksiz kichik ketma-ketliklar quyidagi xossalarga ega.

2-teorema. Ikkita cheksiz kichik ketma-ketliklarning algebraik yig'indisi yana cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.

Isbot. $\{\alpha_n\}$ va $\{\beta_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketliklar bo'lsin. Bu cheksiz kichik ketmk-ketliklar uchun, istalgan ε son uchun N_1 raqam topiladiki, $n > N_1$ lar uchun, $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik, N_2 raqam topiladiki, $n > N_2$ lar uchun $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizliklar bajariladi. $N = \max\{N_1, N_2\}$ desak, $n > N$ lar uchun birdaniga $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizliklar bajariladi. Shunday qilib,

$$\left|\alpha_n \pm \beta_n\right| \le \left|\alpha_n\right| + \left|\beta_n\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bњladi.
Bu $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz kichik ekanligini bildiradi.
Natija. Istalgan chekli sondagi cheksiz kichiklarning algebraik yig'indisi yana cheksiz kichik ketma-ketlikdir.
3-teorema. Ikkita cheksiz kichik ketma-ketlikning ko'paytmasi, cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.
Isbot. $\{\alpha_n\}$ va $\{\beta_n\}$ lar cheksiz kichik ketma-ketliklar bo'lsin. $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz kichikligini isbotlash talab etiladi. $\{\alpha_n\}$ cheksiz kichik bo'lganligi uchun, istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N_1 raqam topiladiki, $n > N_1$ lar uchun $\left|\alpha_n\right| < \varepsilon$, $\{\beta_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lganligi uchun $\varepsilon = 1$ uchun shunday N_2 topiladiki $n > N_2$ lar uchun $\left|\beta_n\right| < 1$, bajariladi. $N = \max\{N_1, N_2\}$ deb olsak, $n > N$ lar uchun ikkala tengsizlik ham bajarilib,

$$\left|\alpha_n \cdot \beta_n\right| \le \left|\alpha_n\right| \cdot \left|\beta_n\right| < \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon$$

bo'ladi. Bu $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz kichikligini bildiradi.
Natija. Istalgan sondagi cheksiz kichiklarning ko'paytmasi yana cheksiz kichik bo'ladi.
Eslatma. Ikkita cheksiz kichiklarning nisbati cheksiz kichik bo'lmasligi mumkin, masalan, $\alpha_n = \frac{1}{n}$, $\beta_n = \frac{1}{n}$ cheksiz kichiklarning nisbati hamma elementlari 1 lardan iborat chegaralanlan ketma-ketlikdir. $\alpha_n = \frac{1}{n}$, $\beta_n = \frac{1}{n^2}$ cheksiz kichik ketma-ketliklarning nisbati $\left\{\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right\} = \{n\}$ bo'lib, cheksiz katta ketma-ketlik hosil bo'ladi. $\alpha_n = \frac{1}{n^2}$, $\beta_n = \frac{1}{n}$ bo'lsa, ularning nisbati $\left\{\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ cheksiz kichik bo'ladi.
4-teorema. Chegaralangan ketma-ketlikning cheksiz kichik ketma-ketlikka ko'paytmasi cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi. (Bu teoremaning isbotini o'quvchiga havola qilamiz).

4. Sonli ketma-ketlikning limiti va uning xossalari

1-ta'rif. Istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun unga bog'liq bo'lgan N son topilsaki, barcha $n > N$ lar uchun $\left|x_n - a\right| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, a songa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning $n \to \infty$ dagi limiti deyiladi va

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \quad ёки \quad n \to \infty \ да \ x_n \to a$$

simvollar bilan belgilanadi. Chekli limitga ega sonli sonli ketma-ketlikka, yaqinlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.
Limitning ta'rifiga misol qaraymiz.
Limitning ta'rifidan foydalanib,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$ ekanligini ko'rsatamiz. Istalgan $\varepsilon>0$ son olamiz.

$$|x_n-1|=\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\left|\frac{n-n-1}{n+1}\right|=\frac{1}{n+1}$$

bo'lganligi uchun, $|x_n-1|<\varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi n larning qiymatini topish, $\dfrac{1}{n+1}<\varepsilon$ tengsizlik bilan bog'liq va $1<\varepsilon(n+1)$ *ёки* $n>\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ bo'ladi. Shuning uchun N sifatida $\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ sonning butun qismini olish mumkin, ya'ni $N=\left[\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right]$ bњladi. Bu holda $|x_n-1|<\varepsilon$ tengsizlik hamma $n>N$ lar uchun bajariladi. Masalan, $\varepsilon=0{,}1$ bo'lsin, bu holda

$$N=\left[\frac{1-0{,}1}{0{,}1}\right]=\left[\frac{0{,}9}{0{,}1}\right]=9. \qquad n=10>N=9$$

bo'lsin. Bunda

$$x_{10}=\frac{10}{10+1}=\frac{10}{11}$$

bo'lib,

$$|x_{10}-1|=\left|\frac{10}{11}-1\right|=\frac{1}{11}<\varepsilon=0{,}1.$$

Shunday qilib n =10 dan boshlab, hamma n lar uchun $|x_{10}-1|<0{,}1$ tengsizlik bajariladi.

Demak, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Boshqa bir necha $\varepsilon>0$ lar olib, qaysi raqamlardan boshlab, tengsizlikning bajarilishini ko'rsatishni o'quvchiga havola etamiz.

Eslatma 1. $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi biror a limitga ega bo'lsa, uni $\alpha_n=x_n-a$ cheksiz kichik miqdor ko'rinishida ifodalash mumkin, chunki $\varepsilon>0$ son uchun shunday N topiladiki, $n>N$ lar uchun

$$|\alpha_n|=|x_n-a|<\varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. SHuning uchun a limitga ega bo'lgan $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligini

$$x_n-a=\alpha_n$$

ko'rinishda ifodalash mumkin, bunda α_n cheksiz kichik ketma-ketlik.

2-ta'rif. $\varepsilon>0$ biror musbat son bo'lsin. $|x_n-a|<\varepsilon$ tengsizlik hamma n lar uchun bajarilsa, $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi a nuqtaning ε atrofida deyiladi.

2-eslatma. Ma'lumki $|x_n-a|<\varepsilon$ tengsizligi

$$-\varepsilon<x_n-a<\varepsilon \text{ yoki } a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$$

tengsizlik bilan teng kuchli bo'lib, x_n element a nuqtaning ε atrofida bo'ladi. Shuning uchun, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limitini quyidagicha ham ta'riflash mumkin:- a nuqtaning ε atrofi uchun shunday N raqamni ko'rsatish mumkin bo'lsaki, hamma $n > N$ lardan boshlab, hamma x_n elementlar a nuqtaning ε atrofida bo'lsa, a songa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi.

3-eslatma. Ma'lumki cheksiz katta ketma-ketlik limitga ega emas yoki uni cheksiz limitga ega deyiladi va

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

bilan belgilanadi. Ketma-ketlikning limitini cheksiz limitdan farq qilishi uchun chekli limit ham deb yuritiladi.

Eslatma. Tushunarliki, har bir cheksiz kichik ketma-ketlik yaqinlashuvchi va uning limiti $a = 0$ ga teng.

Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar quyidagi xossalarga ega

1.Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning limiti yagonadir.

2. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangan.

Eslatma. Chegaralangan ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lmasligi mumkin. Masalan,

$$-1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots$$

ketma-ketlik, chegaralangan, lekin limitga ega emas.

3. $\{x_n\}$va $\{y_n\}$ soli ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, mos ravishda a va b limitlarga ega bo'lsa, ularning algebraik yig'indisi ham yaqinlashuvchi bo'lib, $a \pm b$ limitga ega bo'ladi.

4. $\{x_n\}$va $\{y_n\}$ soli ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, mos ravishda a va b limitlarga ega bo'lsa, ularning ko'paytmasi ham yaqinlashuvchi bo'lib, limiti $a \cdot b$ ga teng bo'ladi.

5. $\{x_n\}$va $\{y_n\}$ soli ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, mos ravishda a va b limitlarga ega bo'lsa, ularning nisbati ham maxrajning limiti noldan farqli bo'lganda, yaqinlashuvchi bo'lib, uning limiti $\frac{a}{b}$ ga teng bo'ladi.

Bu xossalarni, ketma-ketlikning limiti va cheksiz kichik ketma-ketliklarning xossalaridan foydalanib isbotlash mumkin. Masalan, 4-xossani isbotlaylik. Ketma-ketliklar yaqilashuvchi bo'lganligi uchun

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n$$

ko'rinishda ifodalanadi, bunda α_n, β_n lar cheksiz kichik ketma-ketliklar. Bu holda

$$x_n \cdot y_n - ab = a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n$$

bo'ladi. $(a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n)$ ifoda cheksiz kichik ketma-ketlikning xossalariga asosan cheksiz kichik ketma-ketlikdir. Demak $x_n y_n - ab$ ham cheksiz kichikdir, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n - ab) = 0 \qquad \text{ёки} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab$$

bo'ladi.

1-misol. Ushbu limitni hisoblang.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-1}{4n^2-5}$$

Yechish. $n\to\infty$ surat ham maxraj ham cheksiz katta bo'lib, nisbatning limiti haqidagi xossani qullash mumkin emas, chunki bu xossada surat va maxrajning limiti mavjud bo'lishi kerak edi. Shuning uchun, bu ketma-ketliklarni n^2 ga bo'lib, shaklini o'zgartiramiz hamda limitlarning xossalarini qo'llab, ushbuni hosil qilamiz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-1}{4n^2-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{4-\frac{5}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{\lim\limits_{n\to\infty}(4-\frac{5}{n^2})}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}4-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}}=\frac{3+0-0}{4-0}=\frac{3}{4}.$$

Mustahkamlash uchun savollar

1. Sonli ketma-ketlik deb nimaga aytiladi?
2. Sonli ketma – ketlikning umumiy hadi nima?
3. Sonlar ketma – ketligi qanday belgilanadi?
4. Sonli ketma – ketlik qachon berilgan deyiladi?
5. Arifmetik va geometrik progressiyalar sonli ketma – ketliklarga misollar bo'ladimi?
6. Sonli ketma – ketlik nechta elementga ega?
7. Sonli ketma – ketlikning geometrik tasviri qanday bo'ladi?
8. Sonli ketma – ketliklar ustida qanday amallarni bajarish mumkin?
9. Qanday sonlar ketma – ketligi chegaralangan deyiladi va misollar keltiring?
10. Quyidan chegaralangan sonlar ketma – ketligiga misollar keltiring?
11. Quyidan chegaralangan sonlar ketma – ketligiga misollar keltiring?
12. Yuqoridan chegaralangan sonlar ketma-ketligiga misollar keltiring?
13. Chegaralangan sonlar ketma – ketligiga misollar keltiring?
14. Chegaralanmagan sonlar ketma – ketligiga misollar keltiring?
15. Cheksiz ketma – ketlik deb nimaga aytiladi?
16. Cheksiz kichik ketma – ketlik qanday ta'riflanadi?
17. Cheksiz katta va kichik ketma – ketliklarga misollar keltiring?
18. Cheksiz katta va kichik ketma – ketliklar orasida qanday bog'lanish bor?
19. Cheksiz kichik ketma – ketliklar qanday xossalarga ega?
20. Ketma-ketlikning limiti deb nimaga aytiladi?
21. Qanday sonlar ketma – ketligi yaqinlashuvchi deyiladi?
22. Yaqinlashuvchi ketma-ketlikni yig'indi ko'rinishda qanday ifodalash mumkin?
23. Nuqtaning atrofi nima?
24. Cheksiz katta sonlar ketma-ketlikning limiti nimaga teng?
25. Chekli limit deganda nima tushuniladi?
26. Cheksiz kichik sonlar ketma-ketligining limiti nimaga teng?
27. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar qanday xossalarga ega?
28. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalari qanday isbotlanadi?

13-MA`RUZA
Mavzu: Funksiyaning ta'rifi va berilish usullari. Asosiy elementar funksiyalar.

Reja:

1. Funksiya haqida tushuncha va uning ta'rifi.
2. Funksiyaning berilish usullari.
3. Chegaralangan va chegaralanmagan funksiyalar.
4. Juft va toq funksiyalar.
5. Davriy funksiyalar.
6. Monoton funksiyalar.
7. Asosiy elementar funksiyalar.

1. Funksiya haqida tushuncha va uning ta'rifi.

Tabiatda ikki xil miqdorlar uchraydi, o'zgaruvchi va o'zgarmas miqdorlar. Bizga bir necha to'rtburchak berilgan bo'lsin. Ularda quyidagi miqdorlar qatnashadi. Tomonlarning uzunliklari, burchaklarning kattaliklari, yuzalari va perimetrlari. Bu miqdorlardan ba'zilari o'zgarmaydi, ba'zilari o'zgarib turadi. Masalan, qaralayotgan hamma to'rtburchaklarda burchaklarining to'g'riligi, ularning soni to'rtta bo'lishligi va yig'indisi 360° ga tengligi o'zgarmaydi. Tomonlarining uzunliklari, perimetrlari, yuzlari esa o'zgarib turadi. Xuddi shuningdek, bir necha doira chizsak, ularda aylana uzunliklarining o'z diametrlariga nisbati hammasida bir xil bo'lib, π ga teng, lekin ularning radiuslari, aylana uzunliklari, doira yuzlari o'zgarib turadi.

Ma'lum sharoitda faqat bir xil son qiymatlariga ega bo'lgan miqdorlar o'zgarmas miqdorlar deyiladi. Ma'lum sharoitda har xil son qiymatlariga ega bo'lgan miqdorlar o'zgaruvchi miqdorlar dyiladi. Odatda o'zgarmas miqdorlarni *a, b, c, d, ...*, o'zgaruvchi miqdorlarni *x, y, z, u, v, . . .* harflari bilan belgilaydilar.

Matematikada ko'pincha o'zaro bir-biriga bog'liq ravishda o'zgaradigan miqdorlar bilan ish ko'riladi. Yuqoridagi misollarimizda doiraning yuzi uning radiusining o'zgarishiga qarab o'zgaradi, ya'ni doiraning radiusi ortsa, yuzi ham ortadi, kamaysa kamayadi. Xuddi shuningdek, kvadratning tomoni bilan yuzi orasida ham shunday bog'lanish bor. Kvadratning yuzi uning tomoniga bog'liq ravishda o'zgaradi.

Ta'rif **:** Agar x miqdorning X sohadagi har bir qiymatiga biror f qonuniyatga ko'ra y miqdorning Y-sohadan aniq bir qiymati mos keltirilsa, y miqdor x miqdorning X-sohadagi funksiyasi deyiladi va $y=f(x)$ kabi yoziladi.

Bu holda x - argument yoki erkli o'zgaruvchi, y - esa funksiya yoki erksiz o'zgaruvchi deyiladi. Agar y x ning funksiyasi bo'lsa, u holda x va y lar orasidagi bog'lanish funksiyali bog'lanish deyiladi va quyidagicha yoziladi: $y=f(x)$, $y=q(x)$, $y=\varphi(x)$ va hokazo. Agar yuqoridagi misollarga e'tibor bersak, doiraning yuzi radiusning funksiyasi, kvadratning yuzi tomonining funksiyasi ekan.

Argument qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari to'plami funksiyaning aniqlanish sohasi, funksiyaning o'zi qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari to'plami funksiyaning o'zgarish sohasi yoki qiymatlari to'plami deyiladi.

2. Funksiyaning berilish usullari.

Funksiya sharoitiga qarab jadval, analitik va grafik usullar bilan berilishi mumkin.

Funksiya jadval usulida berilganda, argumentning ma'lum tartibdagi x_1, x_2, x_3,… x_n,… qiymatlari va funksiyaning ularga mos keluvchi y_1, y_2, y_3, … ,y_n, … qiymatlari jadval holida beriladi:

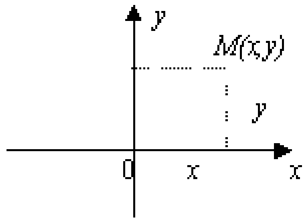
X	x_1	x_2	x_3	…	x_n	…
Y	y_1	y_2	y_3	…	y_n	…

Funksiyalarning jadval usulida berilishiga misol qilib kvadratlar, kublar, kvadrat ildizlar jadvallarni ko'rsatish mumkin. Bu usuldan ko'pincha miqdorlar orasida tajribalar o'tkazishda foydalaniladi.

To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi. Ma'lumki, sonlar o'qida nuqtaning vaziyati bir son uning koordinatasi bilan aniqlanar edi. Endi to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi tushunchasini kiritamiz.

Tekislikda sanoq boshlari ustma-ust tushadigan va o'zaro perpendikulyar bo'lgan OX va OY sonlar o'qini chizamiz. Gorizontal holda tasvirlangan sonlar o'qi ordinatalar o'qi, ularning kesishgan nuqtasi koordinatalar boshi deyiladi. Hammasi birgalikda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi deyiladi.

To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida nuqtaning vaziyati quyidagicha aniqlanadi. Faraz qilamiz, to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi olingan tekislikda ixtiyoriy M nuqta berilgan bo'lsin. Shu nuqtadan koordinata o'qlariga perpendikulyarlarning absissalar o'qidagi proeksiyasiga mos keluvchi son uning absissasi, koordinatalar o'qidagi proeksiyasiga mos keluvchi son esa uning ordinatasi deyiladi va *M(x,y)* tartibida yoziladi. (1-chizma).



Demak, to'g'ri burchakli koordinatalar tekisligida har qanday bir juft ma'lum tartibda berilgan son bilan aniqlanar ekan. Xuddi shuningdek, har qanday bir juft songa koordinatalar tekisligida bitta nuqta mos keladi.

Funksiyaning grafik usulda berilishi. $y=f(x)$ funksiyaning grafigi deb koordinatalari $y=f(x)$ ni to'g'ri tenglikka aylantiruvchi tekislikdagi barcha nuqtalar to'plamiga aytiladi. Agar funksiyaning grafigi tasvirlangan bo'lsa, funksiya grafik usulda berildi deyiladi.

Endi savol tug'iladi, har qanday egri chiziq biror funksiyani ifodalaydimi? Buni aniqlash uchun egri Ou o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar chizamiz, agar bu to'g'ri chiziq egri chiziq bilan kamida ikki nuqtada kesishsa, grafik funksiyani ifodalamaydi, agar bitta nuqtada kesishsa funksiyani ifodalaydi.

Funksiyaning analitik usulda berilishi. Formula yordamida berilgan funksiyalarga analitik usulda berilgan deyiladi. Masalan, $y=x^2$, $y=kx+b$, $y=a^x$, $y=lgx$, $y=sinx$, $y=tgx$, $y=2x^3-x+4$ funksiyalar analitik usulda berilgan. Agar analitik usulda berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi to'g'risida alohida shart qo'yilmagan bo'lsa, u holda $y=f(x)$ da o'ng tomonda turuvchi ifoda ma'noga ega bo'ladigan x ning qiymatlari olinadi. Masalan, agar $y=x^2$ ni kvadratning tomoni bilan yuzi ifodalovchi bog’lanish sifatida olsak, u holda aniqlanish sohasi barcha musbat sonlardan iborat bo’ladi.

Funksiyaning aniqlanish sohasini topishga doir misollar ko’raylik. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini toping:

1. $y=\frac{3}{x}$ yechimi. Ma’lumki, kasr ma’noga ega bo’lishi uchun uning maxraji noldan farqli bo’lishi kerak. Demak, $x\neq 0$ yoki $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

2. $y=\frac{1}{2}(x-1)^{-1}$ yechimi. Xuddi yuqoridagidek muhokama yuritsak, $2x-1\neq 0$ yoki $2x\neq 1$, $x\neq\frac{1}{2}$. Demak, aniqlanish sohasi $(-\infty;\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2};+\infty)$ dan iborat.

3. $y=\sqrt{3x+2}$ yechimi. Kvadrat ildiz ma’noga ega bo’lishi uchun ildiz ostidagi ifoda manfiy bo’lmasligi kerak, ya’ni $3x+2\geq 0$, bunda $x\geq-\frac{2}{3}$. Demak, aniqlanish sohasi $[-\frac{2}{3},+\infty)$ dan iborat.

4. $y=\frac{1}{\sqrt{4x-5}}$ yechimi. Agar yuqoridagidek muhokama yuritsak, u holda $4x-5>0$ bo’ladi. Bundan $x>\frac{5}{4}$. Demak, aniqlanish sohasi $(\frac{5}{4},+\infty)$ dan iborat.

5. $y=\lg(2x-1)$ yechimi. Logarifmik funksiya faqat musbat sonlar uchun aniqlangan. Demak, $(2x-1)>0$ bo’lishi kerak. Bundan $x>\frac{1}{2}$. Demak, aniqlanish sohasi $(\frac{1}{2},+\infty)$ dan iborat.

6. $y=\frac{1}{\lg(2x-1)}$ yechimi. Agar yuqoridagidek muhokama yuritsak, $2x-1>0$, $2x-1\neq 1$ bo’ladi. Bundan $x>\frac{1}{2}$, $x\neq 1$ kelib chiqadi. Demak, aniqlanish sohasi $(\frac{1}{2};+1)\cup(1;+\infty)$ dan iborat.

A) analitik usul funksiyaning o’rganish jarayonida juda ko’p uchraydigan usuldir, lekin ba’zi xollarda funksiyaning qiymatini topish murakkab hisoblashlarga olib keladi:

B) $y=f(x)$ yozuv hali funksiyaning analitik usulda berilishi bo’lmasligi mumkin. Masalan, ushbu Dirixle funksiyasini olaylik:

$$y=\begin{cases}1, & agar \quad x-ratsional \quad son \ bo'lsa\\ 0, & agar \quad x-irratsional \quad son \ bo'lsa\end{cases}$$

Demak $y=f(x)$ funksiya berilgan, uning aniqlanish sohasi barcha haqiqiy sonlar to’plamidan iborat, ammo funksiyaning analitik ifodasi berilgan emas:

V) funksiyaning jadval usulida berilishi qulaydir, chunki bir necha qiymatlar topilgan bo’ladi, lekin funksiyaning sohasi cheksiz to’plam bo’lganda, uning barcha qiymatlarini ko’rsatib bo’lmaydi:

G) funksiyaning grafik usulda berilishi uning o’zgartirishlarini ko’rgazmali qilish imkonini beradi.

Funksiyaning grafigi – egri chiziq (xususiy holda to’g`ri chiziq), ba’zi hollarda biror nuqtalar to’plami bo’ladi.

Funksiya grafigini chizish. $y=f(x)$ funksiyaning grafigini hosil qilish uchun $M(x,f(x))$ nuqtalarni hosil qilib, ular bir-biriga juda yaqin bo'lganda, silliq chiziq bilan tutashtiriladi.

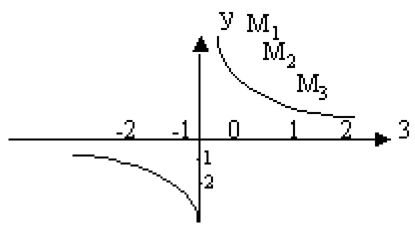
Misol. 1) $y=\frac{1}{x}$ funksiyaning grafigi chizilsin. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $x\neq 0$ haqiqiy sonlar to'plami, ya'ni $]-\infty,0[\,U\,]0,+\infty[$ dan iborat.

Endi, aniqlanish sohasidan x ning bir necha qiymatlarini olib, y ning ularga mos keladigan qiymatlarini topamiz.

X	1	2	3	-1	-2	-3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	…
f(x)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	2	-2	…

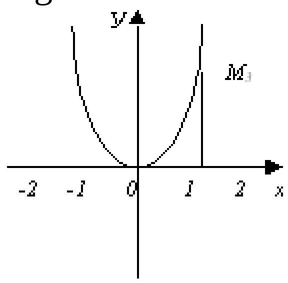
Koordinata tekisligida $M_1(1;1),\ M_2(2;\frac{1}{2}),\ M_3(3;\frac{1}{3}),....$

nuqtalarni hosil qilamiz. Bir biriga yaqin turga nuqtalarni uzluksiz chiziq yorlamida tutashtirsak, funksiyaning grafigini ifoda qiladigan egri chiziq giperbola hosil bo'ladi. (2-chizma)

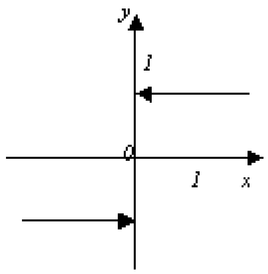


2-chizma.

2) $y=x^2$ ning grafigi chizilsin.



3-чизма.



4-чизма.

Jadval tuzamiz:

x	0	1	2	3	-1	-2	-3	…
$y=x^2$	0	1	4	9	1	4	9	…

$M_1(0;\ 0),\quad M_2(1;\ 1),\quad M_3(2;\ 4),....$ nuqtalarni hosil qilamiz. Ularni silliq chiziq bilan tutashtirsak, parabola egri yaizig'i hosil bo'ladi.(3-chizma)

3) 4-chizmada

$$y=\begin{cases}1, & agar \quad x>0 \quad bo'lsa,\\ 0, & agar \quad x=0 \quad bo'lsa,\\ -1, & agar \quad x<0 \quad bo'lsa.\end{cases}$$

funksiyaning grafigi ko'rsatilgan.

Aksincha, agar tekislikda biror egri chiziq berilgan bo'lib, abssissalar o'qiga tik bo'lgan har qanday to'g`ri chiziq bu egri chiziq bilan bittadan ko'p bo'lmagan nuqtada kesishsa, u holda bu egri chiziq funksiyani ifoda qiladi.

3. Chegaralangan va chegaralanmagan funksiyalar.

1. $y=f(x)$ funksiyaning o'zgarish sohasidagi har qanday qiymati uchun shunday o'zgarmas chekli B sonni ko'rsatish mumkin bo'lib, $f(x)\leq B$ bo'lsa, *f(x) yuqoridan chegaralangan* funksiya deyiladi.

2. $y=f(x)$ funksiyaning o'zgarish sohasidagi har qanday qiymati uchun shunday o'zgarmas chekli A sonni ko'rsatish mumkin bo'lib, $f(x)\geq A$ bo'lsa, *f(x) quyidan chegaralangan* deyiladi.

Misol. 1. $y=x^2-4x+6$ funksiya $-\infty<x<+\infty$ oraliqda aniqlangan bo'lib, u quyidan chegaralangan. Haqiqatdan ham, $y=(x-2)^2+2$. Demak, $y\geq 2$ ya'ni funksiyaning eng katta qiymati yo'q. Eng kichik qiymati *2*.

2. $y=-3x^2+4x+1$ funksiya yuqoridan chegaralangan. Haqiqatdan ham,

$$y=-3x^2+4x+1=-3(x^2-\frac{4}{3}\cdot x-\frac{1}{3})=-3(x-\frac{2}{3})^2-\frac{7}{3},$$

ya'ni funksiyaning eng katta qiymati bor. Eng kichik qiymati yo'q. Demak, $y\leq-\frac{7}{3}$.

Agar $y=f(x)$ funksiya yuqoridan ham, quyidan chegaralangan bo'lsa, ya'ni $A\leq f(x)\leq B$ bo'lsa, bunday funksiyaga *chegaralangan* funksiya deyiladi.

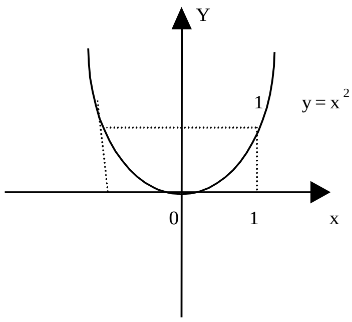
Masalan, $y=sinx$, $y=cosx$ funksiyalar chegaralangandir, chunki $-1\leq sinx\leq 1$ va $-1\leq cos\leq 1$ shartlari bajariladi.

Agar $y=f(x)$ funksiya uchun $A\leq f(x)$ yoki $f(x)\leq B$ tengsizliklarni qanoatlantiradigan A yoki B sonlari mavjud bo'lmasa, u holda bunday funksiya *chegaralanmagan* funksiya deyiladi.

Masalan, $y=x$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqda aniqlangan, lekin chegaralanmagan funksiyadir, ya'ni $-\infty<y<+\infty$. $f(x)\geq a$ bo'lsa, funksiyaning aniqlanish sohasidan olingan x uchun grafikning barcha nuqtalari $y=a$ to'g'ri chiziqdan (2-chizma) yuqorida joylashgan bo'ladi.

4. Juft va toq funksiyalar.

$y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli x o'zgaruvchining har bir qiymati bilan $-x$ qiymat ham shu funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli bo'lsa va bunda $f(-x)=f(x)$ tenglik bajarilsa, $y=f(x)$ funksiya *juft funksiya* deyiladi. Masalan, $f(x)=x^2$ funksiya juft funksiyadir. Haqiqatdan, bu funksiya $\boldsymbol{R}$ to'plamda aniqlangan va demak, aniqlanish sohasi har qanday x bilan $-x$ ni o'z ichiga oladi. Bundan tashqari, $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$ tenglik bajariladi. Juft funksiya grafigi ordinata o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi (7-chizma).



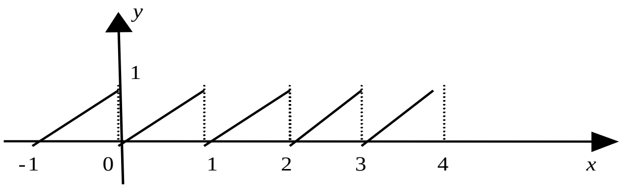
7-chizma

$y=\cos\alpha$ juft funksiyadir. Haqiqatdan ham, har qanday α va $-\alpha$ uchun P_α va $P_{-\alpha}$ nuqtalar absissalar o'qiga nisbatan simmetrik joylashgan (9-chizma). Bundan shu nuqtalarning absissalari bir xil, ordinatalari esa qarama-qarshi ekani kelib chiqadi. Bu kosinus ta'rifiga ko'ra, har qanday α da quyidagi tenglik to'g'ri ekanini bildiradi: $\cos\alpha=\cos(-\alpha)$. Umuman, har qanday juft funksiyaning grafigi ordinata o'qiga nisbatan simmetrikdir. $y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli x ning har bir qiymati bilan $-x$ qiymat ham shu funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli bo'lsa va bunda $f(-x)=-f(x)$ tenglik bajarilsa, $y=f(x)$ funksiya *toq funksiya* deyiladi. Toq funksiyaning grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik joylashadi. Masalan, $f(x)=x^3$ funksiya toq funksiyadir. Haqiqatdan ham, $f(-x)=(-x)^3=-f(x)$, ya'ni $f(-x)=-f(x)$ tenglik bajariladi. Bu funksiyaning grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'lib, kubik paraboladan iboratdir (9- chizma). $y=\sin x$ toq funksiyadir. Haqiqatdan ham, chizmada P_α va $R_{-\alpha}$ nuqtalarning ordinatalari bir xil, lekin ishoralari qarama-qarshiligidan $\sin\alpha=y_\alpha$, $\sin(-\alpha)=-y_\alpha$ bo'ladi. Bundan esa $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ bo'ladi. Har qanday funksiya ham juft yoki toq bo'lishi shart emas.

Masalan, $y=2x+5, y=x^2+x^3$, $y=\sin x+\cos x$ juft ham, toq ham emas. Demak funksiyalar har doim juft yoki toq bo'lishi shart emas ekan.

5. Davriy funksiyalar.

Ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya uchun shunday $t>0$ son mavjud va funksiyaning aniqlanish sohasidan olingan har bir x uchun $x+t$ va $x-t$ lar aniqlanish sohasiga joylashgan bo'lib, $f(x+t)=f(x)$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ *davriy funksiya* deb ataladi. t sonlarni eng kichigi funksiyaning *davri* deyiladi.



8-chizma

Misol. y=sinx , y=cosx, y=tgx,y=x-[x] davriy funksiyalardir.

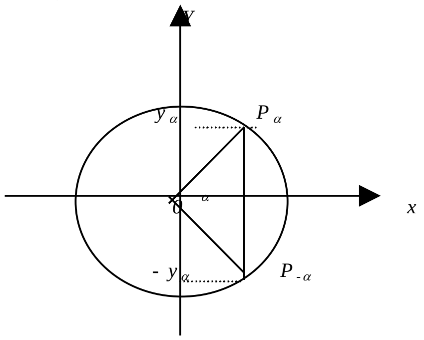
Davriy funksiyaning grafigini hosil qilish uchun uning bir davr ichidagi grafigini chizib, so'ngra uni chapga va o'ngga cheksiz ko'p marta ko'chirish kerak.

Misol. $f(x)=x-[x]=x - E(x)$ funksiya berilgan. Bunda $E(x)=[x]$ ifoda x ning butun qismini bildiradi. (E – fransuzcha Entier -ante-butun so'zining birinchi harfi). Masalan, $[x]=m$ $(m\le x<m+1)$ m butun son.

$f(x)=x-E(x)=\{x\}$. Bu funksiya x ning kasr qismini bildiradi, ya'ni $f(1)=0;$ $f(1,05)=0,05;\ldots$, $f(x)$ funksiya davriydir va uning davri $t=1$ dir. Haqiqatdan,

$f(x+1)=x+1-E(x+1)=x+1-E(x)-1=x-E(x)=f(x)$.

Demak, har qanday butun son ham davr bo'ladi. Funksiyaning grafigi 8-chizmada

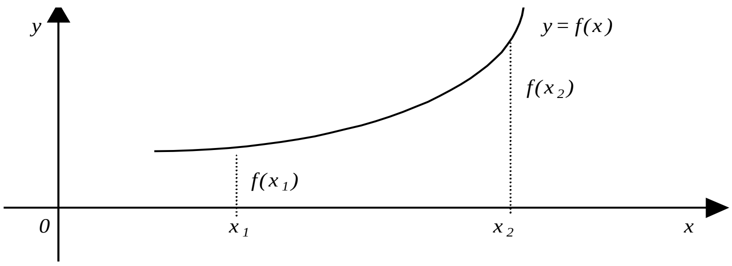


ko'rsatilgan.

6. Monoton funksiyalar.

Ta'rif: *y=f(x)* funksiyaning *X* sohadagi ihtiyoriy ikkita (x_1,x_2) qiymatlari uchun $x_1<x_2$ bo'lganda $f(x_1)<f(x_2)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda *y=f(x) funksiyasi X* ***sohada o'suvchi*** funksiya deyiladi.

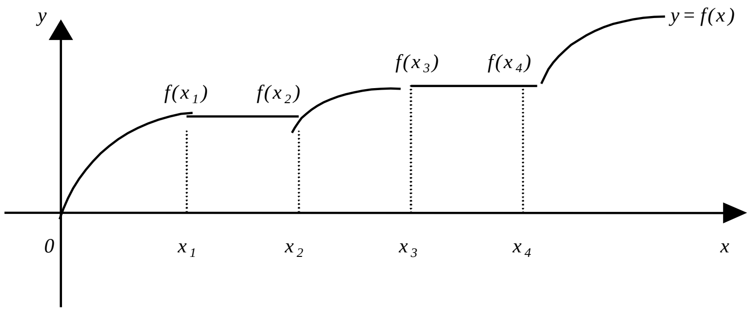
Yuqorida, aytib o'tilgan ta'rifni geometrik nuqtai nazardan quyidagicha ko'rsatishimiz mumkin.



Yuqoridagi ta'rifdan ko'rinadiki, funksiya biror oraliqda o'suvchi bo'lishi uchun shu oraliqdagi argumentning kichik qiymatiga funksiyaning kichik qiymati, argumentning katta qiymatiga funksiyaning katta qiymati mos kelar ekan.

1) $y=2^x$ funksiyasi butun son o'qida o'suvchi.
2) *y=tgx* funksiya ham o'suvchi funksiyadir.

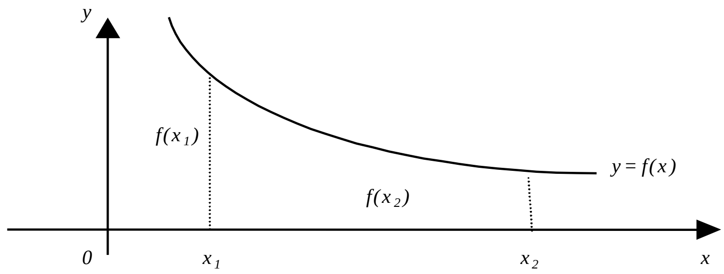
Ta'rif: *y=f(x)* funksiyaning *X* sohadagi ixtiyoriy ikkita (x_1,x_2) qiymatlari uchun $x_1\le x_2$ bo'lganda $f(x_1)\le f(x_2)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda *y=f(x)* funksiyasi (x_1,x_2) oralig'ida *kamaymaydigan* funksiya deyiladi.



Ta'rif: *y=f(x)* ning argumenti *X* ni $\forall(x_1,x_2)$ uchun $x_1<x_2$, bo'lganda $f(x_1)>f(x_2)$ tengsizligi o'rinli bo'lsa, *y=f(x)* ni (x_1,x_2) oralig'ida kamayuvchi funksiya deyiladi.

Misol. $y=x^2$ funksiyaning olsak, bu funksiya $(-\infty,0)$ oraliqda kamayuvchi, $(0,\infty)$ oraliqda o'suvchi funksiyadir.

Misol. *y=sinx* funksiya $(0,\frac{\pi}{2})$ oraliqda monoton o'suvchi bo'lib, $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ oraliqda monoton kamayuvchidir.



Ta'rif: $y=f(x)$ ning argumentining ixtiyoriy (x_1, x_2) qiymatlari uchun $x_1 \leq x_2$ bo'lganda $f(x_1) \geq f(x_2)$ bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiyasi (x_1, x_2) oralig'ida *o'smaydigan* funksiya deyiladi.

Agar berilgan oraliqda argumentning katta qiymatiga funksiyaning katta qiymati mos kelsa, ya'ni shu oraliqdagi ixtiyoriy x_1 va x_2 uchun $x_2 > x_1$ shartdan $f(x_2) > f(x_1)$ kelib chiqsa, $y=f(x)$ funksiya shu oraliqda *o'suvchi* deyiladi.

Ta'rif: Biror (x_1, x_2) oralig'ida o'suvchi va kamayuvchi funksiyalar monoton funksiyalar deyiladi.

7. Elementar funksiyalar.

Bu yerda *elementar funksiyalar* deb atalgan funksiyalarning ba'zi bir sinflarini ko'rsatib o'taylik.

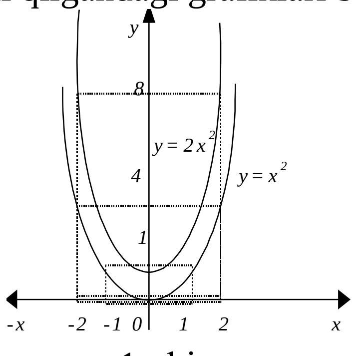
1. *Butun va kasr ratsional funksiyalar. X* ga nisbatan butun $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ ko'phad (bu yerda $a_0, a_1, a_2, ...$ o'zgarmas) bilan tasvirlanuvchi funksiya butun ratsional funksiya deyiladi.

Bunday ikki ko'phadning

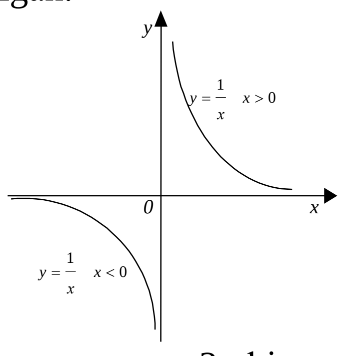
$$y=\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1}+...+b_{m-1}x + b_m}$$

nisbati kasr ratsional funksiya deyiladi. Bu funksiya x ning maxraji nolga aylantiruvchi qiymatlaridan boshqa hamma qiymatlari uchun aniqlangan bo'ladi.

Misol tariqasida 1-chizmada $y=ax^2$ funksiya (parabola) ning a koeffitsienti har xil qiymatlar qabul qilgandagi grafiklari berilgan.



1-chizma



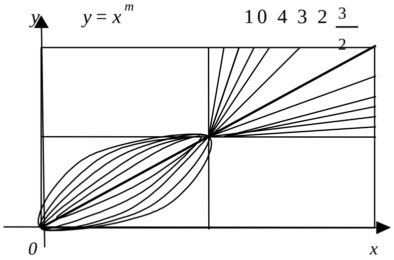
2-chizma.

2-chizmada esa $y=\frac{a}{x}$ funksiya (teng yonli giperbola) ning a har xil qiymatlarni qabul qilgandagi grafiklari berilgan.

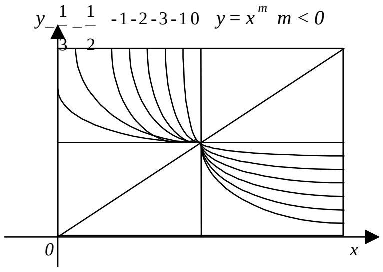
2. *Darajali funksiya.* Quyidagi $y=x^{\mu}$ ko'rinishdagi funksiyani darajali funksiya deyiladi, bu yerda μ ixtiyoriy o'zgarmas haqiqiy son. Agar μ kasr bo'lsa, biz ildizga ega bo'lamiz. Masalan, m natural son bo'lsin va: $y=x^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{x}$.

Bu funksiya m toq bo'lganda, x ning hamma qiymatlari uchun va m juft bo'lganda, x ning faqat musbat qiymatlari uchun aniqlanadi. Bu holda biz ildizning faqat arifmetik qiymatini hisobga olamiz. Nihoyat, μ irratsional son bo'lsa, $x>0$ deb faraz etamiz ($x=0$ qiymat $\mu>0$ bo'lgandagina olinadi).

Quyida 3 va 4-chizmalarda μ ning har xil qiymatlari uchun darajali funksiyaning grafiklari berilgan.

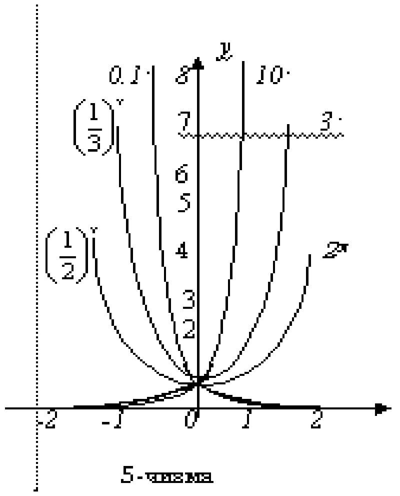


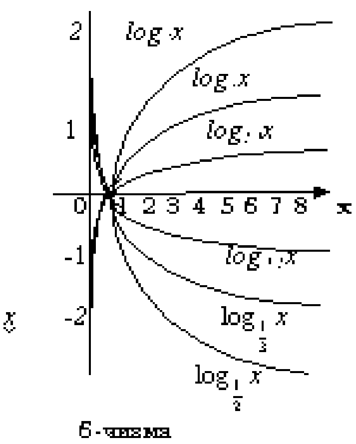
3-chizma.



4-chizma.

3. *Ko'rsatkichli funksiya,* ya'ni $y=a^x$ ko'rinishdagi funksiyadir, bu yerda a 1 dan farqli musbat son; x istalgan haqiqiy qiymat qabul qila oladi. 5-Chizmada a ning har xil qiymatlari uchun ko'rsatkichli funksiyaning grafiklari berilgan.





4. *Logarifmik funksiya,* ya'ni $y=log_a x$ ko'rinishdagi funksiya, bu yerda a yuqoridagi singari 1 dan farqli musbat sondir; x faqat musbat qiymatlar qabul qiladi.

6-chizmada bu funksiyaning a ning turli qiymatlaridagi grafiklari berilgan.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Funksianing berilish usullarini ayting.
2. Juft va toq funksiyalar haqida gapiring.
3. Qanday funksiyaga butun va kasr ratsional funksiya deyiladi?
4. Darajali funksiya deb qanday funksiyaga aytiladi?
5. Ko'rsatkichli funksiya debchi?
6. Logarifmik funksiya ta'rifini ayting?

14-MA'RUZA.

Mavzu. **Funksiya limiti. Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar, ularning xossalari. Funksiya limitinig xossalari. Birinchi va ikkinchi ajoyib limitlar. Cheksiz kichik miqdorni taqqoslash.**

Reja

1. **Funksiyaning limiti va uning asosiy xossalari.**
2. **Aniqmasliklar va ularni ochish.**

Tayanch iboralar va tushunchalar

Funksiya limiti va uning xossalari, ketma-ketlik, cheksiz katta miqdor, chap va o'ng limitlar, cheksiz kichik funksiya, ko'paytmaning va bo'linmaning limiti, birinchi ajoyib limit, aniqmasliklarni ochish.

1. Funksiyaning limiti va uning asosiy xossalari

1. 1-ta'rif. $y = f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lib, istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son mavjud bo'lsaki, $|x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha $x \neq a$ nuqtalar uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, A chekli son $y = f(x)$ funksiyaning $x = a$ nuqtadagi limiti deb ataladi va quyidagicha yoziladi

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \text{ёки} \quad x \to a \quad \text{да} \quad f(x) \to A \tag{1}$$

Funksiya limitining ta'rifidan kelib chiqadiki $x - a = \alpha$ cheksiz kichik bo'lganda $f(x) - A$ ham cheksiz kichik bo'ladi.

2-ta'rif. $y = f(x)$ funksiya, x ning yetarlicha katta qiymatlarida aniqlangan bo'lib, istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday, $N > 0$ mavjud bo'lsaki, $|x| > N$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, o'zgarmas A son, $y = f(x)$ funksiyaning $x \to \infty$ dagi limiti deyiladi, va

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \tag{2}$$

bilan belgilanadi.

1-ta'rifda faqat $x < a$ yoki $x > a$ bo'lgan qiymatlar qaralsa, funksiyaning ***<u>chap yoki o'ng limit</u>*** tushunchasi kelib chiqadi va

$$\lim_{x \to a-0} f(x), \quad \lim_{x \to a+0} f(x) \tag{3}$$

bilan begilanadi.

3-ta'rif. Limiti $A = 0$ bo'lgan funksiyaga **cheksiz kichik funksiya (ch. kich. f.)** deyiladi.

4-ta'rif. Limiti $A = +\infty$ yoki $A = -\infty$ bo'lgan funksiyalarga **cheksiz katta funksiya (ch. kat. f.)** deyiladi va

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to a} f(x) = +\infty \tag{4}$$

bilan belgilanadi.
Limitning ta'rifidan kelib chiqadiki $y = C$ o'zgarmas miqdorning limiti o'ziga teng.

Funksiya limitining asosiy xossalari:

1) *yig'indining limiti*. CHekli sondagi funksiyalar algebraik yig'indisining limiti, qo'shiluvchi funksiyalar limitlarining algebraik yig'indisiga teng, ya'ni $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalarning $x \to a$ dagi limitlari mavjud bo'lsa,

$$\lim_{x \to a}\left[f_1(x) \pm f_2(x)\right] = \lim_{x \to a} f_1(x) \pm \lim_{x \to a} f_2(x) \tag{5}$$

2) chekli sondagi funksiyalar *ko'paytmasining limiti* funksiyalar limitlarining ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$\lim_{x \to a}\left[f_1(x) \cdot f_2(x)\right] = \lim_{x \to a} f_1(x) \cdot \lim_{x \to a} f_2(x) \tag{6}$$

Natija: O'zgarmas ko'paytuvchini limit belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya'ni,

$$\lim_{x \to a}\left[c f_1(x)\right] = c \lim_{x \to a} f_1(x) \tag{7}$$

3) Ikkita funksiya *nisbatining limiti,* maxrajning limiti nњldan farqli bo'lsa, bu funksiyalar limitlarining nisbatiga teng, ya'ni $\lim_{x \to a} f_2(x) \neq 0$

bo'lsa,

$$\lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f_1(x)}{\lim_{x \to a} f_2(x)} \tag{8}$$

bo'ladi.

Limitlarni hisoblashda quyidagi limitlardan foydalaniladi:

$$\lim_{x \to a} \frac{\sin x}{x} = 1; \tag{9}$$

$$\lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to 0}(1 + \alpha)^{1/\alpha} = e, \qquad e = 2{,}71828 \; ... \tag{10}$$

Bu limitlarga mos ravishda ***birinchi*** **va *ikkinchi* ajoyib** limitlar deyiladi.

2. Aniqmasliklar va ularni ochish

1.Aniqmasliklar. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ limitni hisoblashda $f(x)$, $\varphi(x)$ funksiyalar ch.kich.f. lar bo'lsa, $f(x)/\varphi(x)$ nisbatga $x \to a$ da **(0/0) ko'rinishdagi aniqmaslik** deyiladi. $f(x)$, $\varphi(x)$ funksiyalar ch.kat.f. lar bo'lsa, $f(x)/\varphi(x)$ nisbatga $x \to a$ da (∞ / ∞) ***ko'rinishidagi aniqmaslik*** *deyiladi*. Xuddi shunga o'xshash $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0, ∞^0 aniqmasliklar

$$\lim_{x\to a}[f_1(x)-\varphi(x)],\quad \lim_{x\to a}[f(x)\cdot\varphi(x)] \quad \text{ва} \quad \lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}$$

limitlarni hisoblashda kelib chiqadi. Bunday hollarda limitlarni hisoblashga **aniqmasliklarni ochish** deyiladi.

$(0/0)$ va (∞/∞) ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochishda quyidagi xossadan foydalaniladi: $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar $x=a$ nuqtaning biror atrofidagi hamma nuqtalarda o'zaro teng bo'lsa, ularning $x\to a$ dagi limiti ham teng bo'ladi.

Masalan, $f(x)=\dfrac{x^2-9}{2(x-3)}$ va $\varphi(x)=\dfrac{x+3}{2}$ funksiyalar x ning $x=3$ dan boshqa hamma qiymatlari uchun teng, chunki

$$\frac{x^2-9}{2(x-3)}=\frac{(x-3)(x+3)}{2(x-3)}=\frac{x+3}{2}$$

Yuqoridagi xossaga asosan,

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\varphi(x)$$

bo'ladi, ya'ni

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{2}=\frac{6}{2}=3$$

natijaga ega bo'lamiz.

Funksiyalarning limitini topishga bir necha misollar qaraymiz.

1-misol.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x+6}{6x}=\frac{5}{6}$$

ekanligini funksiya limitining ta'rifidan foydalanib isbotlang.

Yyechish. Buni isbotlash uchun $f(x)=(5x+6)/6x$ o'zgaruvchi miqdor va $A=5/6$ o'zgarmas miqdor orasidagi farq $x\to\infty$ da cheksiz kichik funksiya ekanligini ko'rsatish kifoya. Demak,

$$\frac{5x+6}{6x}-\frac{5}{6}=\frac{5x+6-5x}{6x}=\frac{6}{6x}=\frac{1}{x}$$

$1/x$ o'zgaruvchi miqdor $x\to\infty$ da cheksiz kichik funksiyadan iborat. SHunday qilib,

$$\lim_{x\to\infty}(5x+6)/6x=5/6.$$

2-misol.

$$\lim_{x\to 3}(2x^2-5x+4)=7$$

ekanligini isbotlang hamda x va $(2x^2-5x+4)$ larning qiymatlari jadvali bilan tushuntiring.

Yechish. $x\to 3$ bo'lganligi uchun $x-3=\alpha$ cheksiz kichik miqdordir.

$x=3+\alpha$ ni $(2x^2-5x+4)-7$ ayirmaga qo'yib,

$$2(3+\alpha)^2-5(3+\alpha)+4-7=2(9+6\alpha+\alpha^2)-15-5\alpha+4-7=$$

$$=18+12\alpha+2\alpha^2-15-5\alpha+4-7=2\alpha^2+7\alpha$$

natijaga ega bњlamiz.

α cheksiz kichik funksiya bo'lganligi uchun $2\alpha^2+7\alpha$ ham cheksiz kichik bo'ladi.

SHunday qilib, $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-5x+4)=7$ isbot bo'ldi.

Endi yuqoridagi holatni x argument, $2x^2-5x+4$ funksiya qiymatlari jadvali bilan ko'rsataylik. Ma'lumki $x\to 3$ intiladi.

x	2	2,5	2,8	2,9	2,99	2,999	$\to 3$
$2x^2-5x+4$	2	4	5,68	6,32	6,9302	6,993002	$\to 7$

Bu jadvaldan ko'rinadiki, argumentning 3 ga yaqinlashib boruvchi qiymatlari uchun, funksiyaning mos qiymatlari 7 ga yaqinlashib boradi, ya'ni $x-3$ cheksiz kichik miqdorga $2x^2-5x+4-7$ ayirmaning ham cheksiz kichik miqdori to'g'ri keladi. Yuqoridagi jadvalda $x<3$ bo'lib, $x\to 3$ holni qaradik. $x>3$ bo'lib, $x\to 3$ holni o'quvchiga mustaqil ko'rsatishni tavsiya qilamiz.

3-misol.

$\lim\limits_{x\to 2}(4x^2-6x+3)$ limitni hisoblang.

Yechish. Algebraik yig'indining limiti, (5) formula, o'zgarmas ko'paytuvchini limit ishorasidan chiqarish (7) formulalarga asosan:

$$\lim_{x\to 2}(4x^2-6x+3)=\lim_{x\to 2}4x^2-\lim_{x\to 2}6x+\lim_{x\to 2}\lim_{x\to 2}3=4\lim_{x\to 2}x^2-6\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}3=$$

$$=4(\lim_{x\to 2}x)^2-6\lim_{x\to 2}x+3=4\cdot 2^2-6\cdot 2+3=7$$

hosil bњladi.

Yuqoridagi misolda, limitlarning xossalariga asosan, argument x ning o'rniga uning limitik qiymatini qo'yishga olib keldi.

4-misol.

$\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-4x+7)/(2x^2-5x+6)$ limitni hisoblang.

Yechish. Ikkita funksiya nisbatining limiti (8) formula hamda oldingi misolda foydalanilgan limitlarning xossalarini qo'llasak,

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-4x+7}{2x^2-5x+6}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2-4x+7\right)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2-5x+6\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}3x^2-\lim\limits_{x\to 1}4x+\lim\limits_{x\to 1}7}{\lim\limits_{x\to 1}2x^2-\lim\limits_{x\to 1}5x+\lim\limits_{x\to 1}6}=$$

$$=\frac{3\left(\lim\limits_{x\to 1}x\right)^2-4\left(\lim\limits_{x\to 1}x\right)+7}{2\left(\lim\limits_{x\to 1}\right)^2-5\lim\limits_{x\to 1}x+6}=\frac{3\cdot 1^2-4\cdot 1+7}{2\cdot 1^2-5\cdot 1+6}=\frac{6}{3}=2$$

bo'ladi.

Ratsional funksiyaing limitini hisoblash shu funksiyaning argument x ning limitik qiymatidagi, qiymatini hisoblashga keltirildi.

Eslatma. $f(x)$ elementar funksiyalarning $x\to a$ intilgandagi limiti (a aniqlanish sohasiga tegishli) funksiyaning $x=a$ nuqtadagi qiymatiga teng bo'ladi. Masalan,

$$\lim_{t\to 1}\left[\lg\left(t+\sqrt{t^2+80}\right)+\sqrt{t^2+8}\right]=\lg(1+\sqrt{t^2+80})+\sqrt{1+8}=\lg 10+3=1+3=4$$
.

5-misol. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+2}$ limitni hisoblang.

Yechish. $x=1$ da surat ham, maxraj ham nolga aylanib $(0/0)$ ko'rinish-dagi aniqmaslik hosil bo'ladi.

Surat va maxrajni $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ formula yordamida chiziqli ko'paytuvchilarga ajratamiz. Bunda x_1 va x_2 lar $ax^2+ba+c=0$ kvadrat tenglamaning ildizlari. Demak,

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(x+2/3)}{4(x-1)(x-1/4)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3(x+2/3)}{4(x-1/4)}=\frac{3(1+2/3)}{4(1-1/4)}=5/3$$

bњladi.

6-misol. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x^2+5x+4}{3x^2+7x-2}$ limitni hisoblang.

Yechish. $x\to\infty$ da (∞/∞) ko'rinishdagi aniqmas ifodaga ega bo'lamiz. Bunday aniqmaslikni ochish uchun kasrning surat va maxrajini x ning eng yuqori darajalisiga, ya'ni x^2 ga bo'lamiz, hamda limitlarning xossalaridan foydalansak

$$\lim_{x\leftarrow\infty}\frac{6x^2+5x+4}{3x^2+7x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{6+5/x+4/x^2}{3+7/x-2/x^2}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(6+5/x+4/x^2)}{\lim\limits_{x\to\infty}(3+7/x-2/x^2)}=\frac{6+0+0}{3+0+0}=2$$

bo'ladi. Bunda $5/x,\ 4/x^2\ \ 7/x,\ 2/x^2$ lar $x\to\infty$ da cheksiz kichik funksiyalardir.

7-misol. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$ limitni hisoblang.

Yechish. $x=3$ da surat va maxraj 0 ga teng bo'ladi. Maxrajda $\sqrt{x+1}$ irratsional ifoda mavjud, uni suratga o'tkazamiz, buning uchun kasrning surat va maxrajini $\sqrt{x+1}+2$ ga ko'paytiramiz.

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-9)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{\sqrt{(x+1)^2}-2^2}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{x+1-4}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}(x+3)\cdot(\sqrt{x+1}+2)=(3+3)(\sqrt{x+1}+2)=6\cdot 4=24.$$

8-misol. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$ limitni hisoblang.

Yechish. $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ bo'lganligi uchun

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{-(\cos x-\sin x)}{\cos^2 x-\sin^2 x}=$$

$$=-\lim_{x\to\pi/4}\frac{\cos x-\sin x}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}=-\lim_{x\to\pi/4}\frac{1}{\cos x+\sin x}=$$

$$=-\frac{1}{\cos\pi/4+\sin\pi/4}=-\frac{1}{\sqrt{2}/2+\sqrt{2}/2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

natijani olamiz.

9-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$ limitni birinchi ajoyib limitdan foydalanib hisoblang.

Yechish. $5x=\alpha$, deb almashtirsak, bundan $x=\alpha/5$, $x\to 0$ $\alpha\to 0$ bo'ladi.
SHuning uchun,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha/5}=5\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=5\cdot 1=5,$$

chunki

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$$

10-misol. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+3/x)^x$ limitni ikkinchi ajoyib limitdan foydalanib hisoblang.

Yechish. $x \to \infty$ da limitga o'tsak, 1^{∞} ko'rinishdagi aniqmaslik kelib chiqadi. $3/x = \alpha$ bilan almashtirsak, bu yerdan $x = 3/\alpha$ hamda $x \to \infty$ da $\alpha \to 0$ bo'ladi..Demak,

$$\lim_{x\to\infty}(1+3/x)^{x} = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{3/\alpha} = \left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}\right]^{3} = e^{3}$$

kelib chiqadi.

SHundayqilib, $\lim\limits_{x\to\infty}(1+3/x)^{x} = e^{3}$.

11-misol. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^{2}-1}\right)$ limitni hisoblang.

Yechish: $x \to 1$da $1/(x-1) \to \infty$ va $2/(x^{2}-1) \to \infty$ bo'lib, $(\infty - \infty)$ ko'rinishdagi aniqmaslik kelib chiqadi.

$$\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^{2}-1} = \frac{x+1-2}{x^{2}-1} = \frac{x-1}{x^{2}-1}.$$

Oxirgi ifoda $x \to 1$ da $(0/0)$ aniqmas ifoda bo'ladi. SHunday qilib,

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^{2}-1}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^{2}-1} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

12-misol. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^{2}+3x} - x\right)$ limitni hisoblang.

Yechish. $x \to +\infty$ da $\infty - \infty$ ko'rinishdagi aniqmaslik kelib chiqadi. Quyidagi shakl almashtirishni bajaramiz:

$$\sqrt{x^{2}+3x} - x = \frac{(\sqrt{x^{2}+3x} - x)(\sqrt{x^{2}+3x} + x)}{\sqrt{x^{2}+3x} + x} = \frac{(\sqrt{x^{2}+3x})^{2} - x^{2}}{\sqrt{x^{2}+3x} + x} =$$

$$= \frac{x^{2}+3x-x^{2}}{\sqrt{x^{2}+3x} + x} = \frac{3x}{\sqrt{x^{2}+3x} + x}.$$

Oxirgi ifoda $x \to \infty$ da (∞/∞) ko'rinishdagi aniqmaslik bo'lib, 11-misoldagidek x ning yuqori darajalisiga surat va maxrajini bo'lib,

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^{2}+3x} - x\right) = \lim_{x\to +\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^{2}+3x} + x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{3x/x}{\sqrt{x^{2}/x^{2} + 3x/x^{2}} + x/x} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{3}{\sqrt{1+3/x} + 1} = \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

bunda $x \to +\infty$ da $3/x \to 0$ bo'ladi.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Funksiyaning limiti deb nimaga aytiladi va u qanday yoziladi?
2. Chap va o'ng limitlar nimalar va u qanday yoziladi?
3. Cheksiz katta va cheksiz kichik miqdorlar qanday miqdorlar?
4. Ikki funksiya algebraik yig'indisining limiti nimaga teng?
5. Chekli sondagi funksiyalar ko'paytmasining limiti nimaga teng?
6. O'zgarmas ko'paytuvchini limit ishorasidan chiqarish mumkinmi?
7. Ikkita funksiya nisbatining limiti nimaga teng?

8. Birinchi ajoyib limit deb nimaga aytiladi?
9. Ikkinchi ajoyib limit nimaga teng?
10. Aniqmasliklarni ochish nimadan iborat?

15-MA'RUZA

Mavzu: Eksponenta. Natural logarifm. Giperbolik funksiyalar. Ularning xossalari va grafiklari.

Reja
1. Eksponenta.
2. Natural logarifm.
3. Giperbolik funksiyalar.
4. Ularning xossalari va grafiklari.

Tayanch so'z va iboralar
Eksponenta, natural logarifm, giperbolik funksiyalar, ularning xossalari va grafiklari.

e asosli logorifmlarni natural logarifm deb ataladi.

$y = \log_e x \qquad y = \ln x$

e soni exponenta so'zining bosh harfidan olingan.

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = 2,\ 2{,}25\ ,\quad \left(\frac{4}{3}\right)^3 \qquad 2, \quad \ldots\ldots\ e$

Giperbolik funksiyalar asosiy elementar funksiyalarga kirmasa ham biz ularni ko'p ishlatamiz. Giperbolik funksiyalar texnik misol va masalalar yyechishda katta ahamiyatga ega. Quyidagilar giperbolik funksiyalar.

1) Giperbolik sinx.

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

2) Giperbolik cosx.

$$ch = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

3) Giperbolik tgx.

$$thx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

4) Giperbolik ctgx.

$$cthx = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

sinx va cosx funksiyalari birlik doirada aniqlangan .

Giperbolik funksiyalarni bunday atalishi shu bilan aniqlanadiki geometrik nuqtalari nazarida shx, chx funksiyalar teng yonli giperbolalarni qurish yordamida aniqlanadi.

Shx, chx , thx funksiyalar sonlar o'qining barcha nuqtalarida aniqlangan .

Cthx $x \neq 0$ dan boshqa barcha nuqtalarida aniqlangan.

Funksiyalar.

$sh(-x) = -shx$ toq funksiya. $ch(-x) = chx$ juft funksiya.

$th(-x) = -th(x)$ toq funksiya. $cth(-x) = -cthx$ toq funksiya.

$ch^2 x - sh^2 x = 1$ $\qquad ch^2 x = \dfrac{1}{1 - th^2 x}$

$sh\,2x = 2shx \cdot chx$ $\qquad sh^2 x = \dfrac{1}{1 - cth^2 x}$

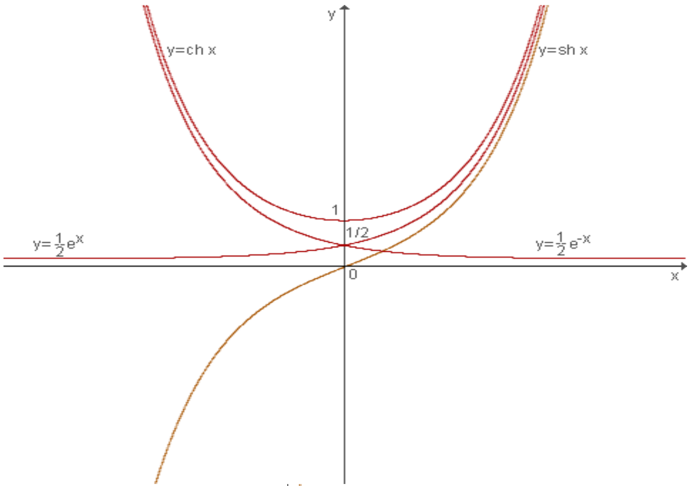
$ch\,2x = ch^2 x + sh^2 x$

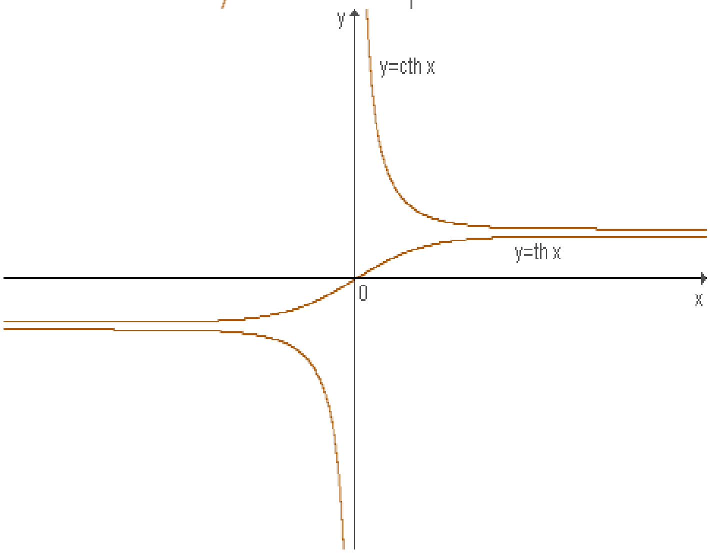
$sh(\pm y) = shx \cdot chy \pm chx \cdot shy$

$ch(x \pm y) = chx \cdot chy \pm shx \cdot shy$

$th(x \pm y) = \dfrac{thx + thy}{1 + thx \cdot thy}$

$x > 4$ larda $chx \approx \dfrac{e^x}{2}$ $\qquad shx \approx \dfrac{e^x}{2}$





Xossalar

$sh(x \pm y) = sh(x)ch(y) \pm ch(x)sh(y)$; $ch(x \pm y) = ch(x)ch(y) \pm sh(x)sh(y)$

$sh(2x) = 2sh(x)ch(x)$; $ch(2x) = ch^2(x) + sh^2(x)$; $ch(0) = 1$

16-MA’RUZA

Mavzu: Funksiyaning uzluksizligi va uzilishi. Uzluksiz funksiyaning xossalari. Kesmada uzluksiz bo’lgan funksiya haqida teorema.

Reja

1. **Funksiya orttirmasi.**
2. **Funksiya uzluksizligi ta’riflari.**
3. **Funksiyaning uzilish va uning turlari.**

Tayanch ibora va tushunchalar

Argument orttirmasi, funksiya orttirmasi, funksiya uzluksizligi, funksiyaning uzulishi, oraliqda uzluksiz, ikkita uzluksiz funksiya yig’indisi , ko’paytmasi va nisbati uzluksizligi, kesmada uzluksiz funksiyalar xossalari, funksiyaning uzilishi, 1-tur uzilish, 2-tur uzilish, bartaraf etiladigan(yo’qotiladigan) uzilish, elementar funksiyalarning uzuksizligi va uzilishi.

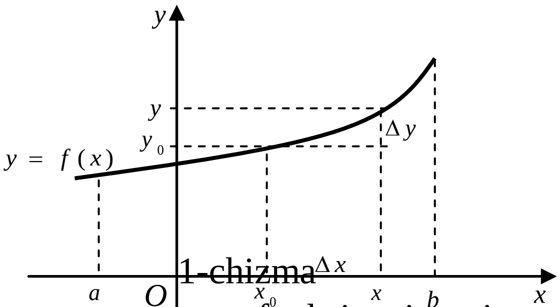
1. Funksiya orttirmasi

Uzluksizlik matematik tahlilning asosiy tushunchalaridan biridir. Matematika uzluksiz funksiya tushunchasiga birinchi navbatda turli harakat qonunlarini o’rganish natijasida keldi. Fazo va vaqt uzluksiz, masalan: harakatdagi nuqtaning bosib o’tgan yo’li s ning t vaqtga bog’lanishini ifodalovchi $s = f(t)$ qonun uzluksiz funksiyaga misol bo’ladi.

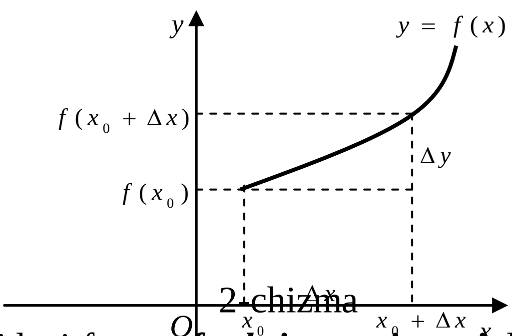
Qattiq jismlar, suyuqlik va gazlardagi holatlar hamda jarayonlar uzluksiz funksiyalar yordamida tavsiflanadi. Bunday uzluksiz jarayonlar iqtisodiyot modellarida ham mavjud. Bunday jarayonlar mexanika fizika va bir qancha maxsus fanlarda muayyan holda o’rganiladi.

Matematikada uzluksiz jarayonni umumiy holda o’rganamiz.

Funksiya orttirmasi. $y = f(x)$ funksiya biror $[a, \ b]$ kesmada aniqlangan va x_0 shu kesmadagi biror nuqta bo’lsin. x argumentning keyingi qiymati bo’lsa, $x - x_0 = \Delta x$ ga ***argument orttirmasi*** deyiladi (1-chizma).



1-chizma



2-chizma

$f(x) - f(x_0)$ funksiyaning qiymatlari orasidagi farqqa ***funksiya orttirmasi*** deyiladi va odatda Δy bilan belgilanadi. $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ yoki $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

1-chizmadan ko’rinadiki $\Delta x \to 0$ da $\Delta y \to 0$ bo’ladi.

1-misol. $y = f(x) = x^3$ funksiyaning $x_0 = 2$ nuqtada argument $\Delta x = 0{,}5$ orttirma olgandagi funksiya Δy orttirmasini toping.

Yyechish. $f(x_0) = 2^3 = 8$ funksiyaning boshlang'ich nuqtadagi qiymati. $f(x_0 + \Delta x) = f(2 + 0{,}5) = (2 + 0{,}5)^3$ funksiyaning keyingi qiymati, demak, funksiya orttirmasi

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (2 + 0{,}5)^3 - 2^3 =$$

$$= 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 0.5 + 3 \cdot 2 \cdot 0{,}5^2 + 0{,}5^3 - 8 = 7{,}625$$

bњladi.

Shunday qilib, $\Delta y = 7{,}625$.

2. **Funksiya uzluksizligi ta'riflari.**

1-ta'rif. $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan bo'lib, argumentning x_0 nuqtadagi cheksiz kichik orttirmasiga funksiyaning ham cheksiz kichik orttirmasi mos kelsa, ya'ni

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$

bo'lsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ***uzluksiz deyiladi*** (2-chizma). Bu ta'rifga qo'yidagi ta'rif ham teng kuchlidir.

2-ta'rif. x_0 nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan $y = f(x)$ funksiya shu nuqtada chekli limitga ega bo'lib, bu limit funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng, ya'ni

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

bo'lsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ***uzluksiz*** deyiladi.

Funksiya uzluksizligi ta'riflari quyidagi ***shartlarni*** o'z ichiga oladi:

1) funksiya x_0 nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan;

2) funksiyaning x_0 nuqtadagi chap va o'ng limitlari

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x), \qquad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

mavjud;

3) x_0 nuqtada chap va o'ng limitlar o'zaro teng, ya'ni

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x);$$

4) chap va o'ng limitlar funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng, ya'ni

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

2-misol. $y = x^3$ funksiyaning $x_0 = 2$ nuqtada uzluksizligini tekshiring.

Yechish. Ma'lumki, $y = x^3$ funksiya $x_0 = 2$ nuqtada va uning istalgan atrofida aniqlangan. Uzluksizlikni 1-ta'rifga asosan tekshiramiz. Buning uchun $x_0 = 2$ nuqtadagi funksiya orttirmasini topamiz:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = (2 + \Delta x)^3 - 2^3 =$$

$$2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \Delta x + 3 \cdot 2 \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3 - 2^3 = 12\Delta x + 6\Delta x^2 + \Delta x^3$$

argument orttirmasi $\Delta x \to 0$ ga intilganda limitga o'tamiz.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (12 \cdot \Delta x + 6\Delta x^2 + \Delta x^3) = 12 \cdot 0 + 6 \cdot 0^2 + 0^3 = 0 .$$

SHunday qilib, $\Delta x \to 0$ da $x_0 = 2$ nuqtada $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, bu esa 1-ta'rifga asosan funksiya uzluksiz ekanligini bildiradi. Bu misolda x_0 nuqta o'rniga ixtiyoriy nuqtani olish mumkin(masalan, $x_0 = 3$ uchun uzluksizlikni tekshiring).

Funksiya oraliqning hamma nuqtalarida uzluksiz bo'lsa, u shu **oraliqda** uzluksiz deyiladi.

2-misolda $y = x^3$ funksiya $(-\infty , + \infty)$ oraliqning hamma nuqtalarida uzluksizligi ravshan. Demak, $y = x^3$ funksiya $(-\infty , + \infty)$ oraliqda uzluksiz funksiyadir.

Elementar funksiyalarning hammasi o'zlarining aniqlanish sohalarida uzluksizdir.

$f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa:

1) $f(x) \pm \varphi(x)$; 2) $f(x) \cdot \varphi(x)$; 3) $f(x) / \varphi(x)$ $(\varphi(x_0) \neq 0$ bo'lganda) lar ham x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Kesmada uzluksiz funksiyaning xossalari. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u: 1) shu kesmada chegaralangan; 2) shu kesmada eng kichik va eng katta qiymatlarga erishadi; 3) kesmaning uchlarida turli ishorali qiymatlar qabul qilsa, shu kesmaning biror nuqtasida 0 ga teng bo'ladi; 4) $f(a)$ va $f(b)$ orasidagi barcha qiymatlarni qabul qiladi.

$y = f(z)$ va $z = \varphi(x)$ funksiyalar o'z argumentlarining uzluksiz funksiyalari bo'lsa, $y = f[\varphi(x)]$ murakkab funksiya ham uzluksiz bo'ladi. $y = f(x)$ uzluksiz bo'lib, $x = \varphi(y)$ teskari funksiya mavjud bo'lsa, u ham uzluksizdir.

3. Funksiyaning uzilish va uning turlari

Ta'rif. $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida aniqlangan, lekin bu nuqtaning o'zida uzluksizlik shartlaridan birortasi bajarilmasa, funksiya x_0 nuqtada **uzilishga ega deyiladi.**

$f(x)$ funksiya uchun

$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ chekli limitlar mavjud bo'lsa, chap va o'ng limitlar hamda $f(x_0)$ sonlar o'zaro teng bo'lmasa, x_0 nuqta ***1-tur uzilish** nuqtasi* deyiladi.

Xususan, $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$ bo'lsa x_0 ***bartaraf qilinadigan (yo'qotiladigan) uzilish*** nuqtasi deyiladi.

1-tur uzilish nuqtasi bo'lmagan uzilish nuqtalariga ***2-tur uzilish nuqtalari*** deyiladi. Bunday nuqtalarda, aqalli bitta tomonli limit qiymati cheksiz yoki mavjud bo'lmaydi.

1-misol. $f(x)=\frac{x-2}{|x-2|}$ funksiya $x_0=2$ nuqtada 1-tur uzilishga ega ekanligini isbotlang.

Yechish. funksiya $x_0=2$ nuqtada aniqlanmagan. Absolyut qiymat ta'rifidan $x-2<0$ yoki $x<2$ va $x-2>0$ yoki $x>2$ bњlganda mos ravishda

$$f(x)=\frac{x-2}{-(x-2)}=-1, \quad f(x)=\frac{x-2}{x-2}=1$$

bo'ladi.

Demak, $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=1$.

Shunday qilib, $x_0=2$ nuqta 1-tur uzilish nuqtasi bo'ladi. Bu uzilish nuqtasi **bartaraf** qilib (yo'qotib) bo'lmaydigan uzilish nuqtasiga kiradi.

2-misol. $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, funksiya $x_0=0$ nuqtada aniqlanmagan, lekin $x\neq 0$ hamma nuqtalarda aniqlangan.

Bir tomonli limitlar o'zaro teng, ya'ni

$$\lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

SHunday qilib, berilgan funksiya uchun $x_0=0$ nuqta ***bartaraf qilinadigan (yo'qotiladigan) uzilish*** nuqtasi bo'ladi.

3-misol. $f(x)=6/(x-3)^2$ funksiyaning $x=3$ nuqtada uzilishga ega ekanligini ko'rsating:

Yechish. Berilgan funksiya $x=3$ nuqtadan boshqa hamma nuqtalarda aniqlangan. $x<3$ bo'lganda $f(x)>0$ va $x>3$ bo'lganda ham $f(x)>0$.

$$\lim_{x\to 3-0} f(x)=+\infty \quad \text{va} \quad \lim_{x\to 3+0} f(x)=+\infty .$$

Bu 2-tur uzilishdir .

Mustahkamlash uchun savollar

1. Qanday jarayon uzluksiz bo'ladi?
2. Funksiya orttirmasi nima?
3. Qanday funksiya uzluksiz deyiladi?
4. Qanday funksiyaga oraliqda uzluksiz deyiladi?
5. Ikkita uzluksiz funksiya yig'indisi, ko'paytmasi va nisbati uzluksizligi haqida nima deyish mumkin?
6. Kesmada uzluksiz bo'lgan funksiyalar qanday xossalarga ega?
7. Qanday funksiyaga uzilishga ega deyiladi?