



O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIV VA O‘RTA MAXSUS TA‘LIM VAZIRLIGI
TOSHKENT DAVLAT SHARQSHUNOSLIK INSTITUTI

“OLIV MATEMATIKA”

fanidan

MA`RUZALAR MATNI

Toshkent – 2012

MA'R U Z A 1

MATEMATIKAGA KIRISH. MATEMATIKA BO'LIMLARI. SONLAR. SONLARNING BERILISHI

Darsning o'quv maqsadi: Talabalarga matematika fanining hayotdagi o'rni va bo'limlari bilan tanishtirish hamda matematikaning asosiy tushunchasi – sonlar klassifikatsiyasi haqida ma'lumot berish.

Tayanch so'zlar: Natural, butun, kasr, rasional, irrasional, haqiqiy, kompleks sonlar, sonlar o'qi sanoq boshi

Ma'ruza rejasi.

1. Matematika fanining hayotdagi o'rni va bo'limlari
2. Sonlar haqida tushuncha va ularning turlari.
3. Sonlar o'qi, kooordinata sistemasi.
4. Sonlarni joylashtirish va ularni qiyoslash.

Har bir fonning asosiy tushunchasi bo'ladi. Masalan, musiqada notalar, kimyoda atom va molekula, biologiyada hujayra, til va adabiyotda harf va so'zlar bo'lsa, matematikada esa raqam va sonlardir. Sonlar raqamlardan tashkil topadi. Matematikada ikki xil raqamlar: rim va arab raqamlari mavjuddir. Rim raqamlari I, V, X, C, D, M... harflarning ma'lum qoidalar asosida sonlarni tashkil etsa, arab raqamlari 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 kombinatsiya orqali juda katta sonlarni oson ravishda hosil etadi. Foydalanishi qulay bo'lgani uchun arab raqamlari ommaviylashgandir.

Insoniyat qadimdan o'zining bor narsalarini sanash ishtiyoqida bo'lgani uchun sonlarni kashf etgan. Buyuk allomamiz Abu Rayxon Beruniy quyidagi fikrlarni aytganlar: "Narsalarni sanash inson tabiatidandir. Narsalarning miqdori uni birlik deb qabulqilingan narsaga taqqoslash bilan aniqlanadi." Shuning uchun ilk zamonlarda sanash uchun yaratilgan va hozirgi kunda NATURAL sonlar deb ataladigan sonlar paydo bo'lgan. Demak, NATURAL son deb musbatva butun sonlarga aytamiz. Bunday sonlar asosan sanoq va tartib nomerlarni belgilash uchun ishlatiladi. Keyinchalik insonlar o'zaro oldi-berdi ishlarni olib borish natijasida foyda va qarz(ziyon) degan tushunchalar paydo bo'lib, ularning miqdorini belgilash uchun manfiy sonlardan foydalanish zaruratini hosil etdi. Bundan Butun sonlar to'plami ya'ni barcha manfiy va musbat butun sonlar va nol soniga ega bo'lgan to'plam butun sonlar to'plami deb nomlanadigan bo'ldi. Bu to'plamning elementlarini esa butun sonlar deb atay boshlashdi. Misol uchun

... -925, ..., -101, ..., -100, ..., -25, -24, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, ..., 45, ... 1001, ...

Hayotda hamma narsalarning sanog'i butun sonlarda bo'lavermaydi. Masalan, terilgan paxta naq 50 yoki 51 kg bo'lmay bu sonlar o'rtasidagi son bilan ifodalashga to'g'ri kelishi mumkin. Buning uchun kasr son deb ataldigan sonni kiritish zarur bo'ladi. Demak, kasr sonlar butun sonlar orasidagi sonlar

bo'lib, ular $\frac{a}{b}$ ko'rinishida bo'ladi. Bunda, a - surat, b - maxraj son deb ataladi. Bunday kasrlar oddiy

kasr deb yuritiladi. Agar surat maxrajidan katta ($a > b$) bo'lsa natural kasr, aksincha ($a < b$) bo'lsa to'g'ri kasr deb ataladi. Noto'g'ri kasrning butun qismi ajratilib yozilgan xolatiga aralash kasr deyiladi.

Kasrlarni maxraji o'n soniga karrali bo'lsa, uni maxrajsiz yozish mumkin va kasrning bunday ko'rinishiga o'nli kasr deb ataladi.

Masalan, $\frac{3}{10} = 0.3$, $\frac{7}{100} = 0.07$, $\frac{11}{1000} = 0.011$

Har qanday oddiy kasrni o'nli kasrga (suratni maxrajga bo'lish yo'li bilan) o'tkazish mumkin. Bunda gohida cheksiz o'nli kasrga duch kelib qolish mumkin.

$\frac{1}{3} = 0.3333\dots$ bu holda, bir son davriy ravishda takrorlanaversa, bunday sonni cheksiz davriy oʻnli

kasr deb ataladi va uni qisqacha $0.3333\dots = 0.(3)$ yoziladi.

$$\frac{3}{7} = 0.428571\dots$$

Bu kasr cheksiz, ammo davriy boʻlmagani uchun, uni cheksiz nodavriy oʻnli kasr deb ataladi.

Yuqorida aytilganlariga koʻra, natural sonlar butun sonlar toʻplamiga kirar ekan. Agarda gʻar qanday

butun sonni kasr son shaklida tasvirlash mumkin ekanligini inobatga olsak, ($5 = \frac{5}{1}$) kasr sonlar butun

sonlarni oʻz ichiga oladi. Barcha natural, butun va kasr sonlar rasional sonlar toʻplamini tashkil etadi. (Natural sonlar toʻplamini N , butun sonlar toʻplamini Z , rasional sonlar toʻplamini Q bilan belgilanadi) bu toʻplamning elementlarini rasional sonlar deb ataladi.

Qiymati aniq kattalikka ega boʻlmagan sonlarni irrasional sonlar deb ataymiz. Bunga cheksiz nodavriy oʻnli kasrlar

$$0.13133125785341\dots$$

$$\pi = 3.141592\dots$$

$$e = 2.718281\dots$$

$$\sqrt{2} = 1.4142135623\dots$$

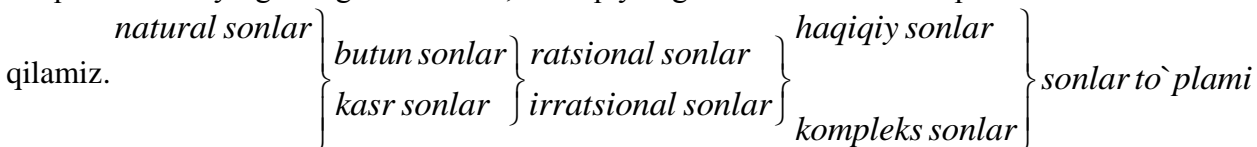
$$\sqrt{3} = 1.73205080756\dots$$

Irrasional va rasional sonlar birgalikda haqiqiy sonlar toʻplamini tashkil etadi (R bilan belgilanadi) va bu toʻplam elementlarini haqiqiy sonlar deb ataladi.

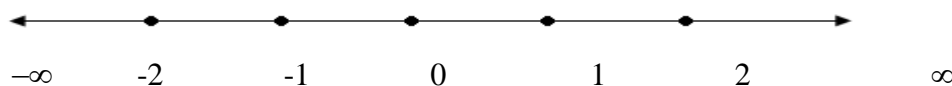
Biz bilamizki, manfiy sondan kvadrat chiqarib boʻlmaydi, ammo $\sqrt{-1} = i$ deb belgilash kiritsak, u holda $\sqrt{-4} = \sqrt{(-1) \cdot 4} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4} = 2i$ boʻladi.

$a + bi$ koʻrinishidagi songa kompleks sonlar deyiladi. a - haqiqiy qismini, b -mavhum qismining koeffitsienti deb ataladi.

Yuqorida aytilganlarga koʻra, quyidagi sonlar toʻplami daraxtini hosil



Analitik geometriya metodlarining eng asosiy xususiyatlaridan biri bu sonlar orqali geometrik obrazlarining joylashishini ifodalashdir. Geometrik obrazlarning holatini belgilovchi sonlar ularning koordinatalari deb ataladi. Toʻgʻri chiziqda nuqtaning joylashishini koʻramiz. Buning uchun biror O nuqtani olib, undan toʻgʻri chiziq oʻtkazamiz, bir yoʻnalishni musbat qarama-qarshi yoʻnalishini manfiy yoʻnalish deb qabul qilamiz. Keyin esa biror e oʻlcham olib birlik sifatida O nuqtadan ikkala yoʻnalish boʻyicha toʻgʻri chiziqni e oʻlcham boʻyicha birliklarga boʻlib chiqamizda, musbat yoʻnalish boʻyicha 1,2,3,4,..., va manfiy yoʻnalish boʻyicha O nuqtadan boshlab -1,-2,-3,-4,..., yozib chiqamiz. Natijada sanoq oʻqi hosil boʻladi. O nuqta sanoq boshi boʻlib xizmat qiladi.



Bu son oʻqida joylashgan istalgan ikkita sondan qaysi biri oʻngroqda joylashgan boʻlsa, oʻsha son ikkinchisidan katta hisoblanadi.

Masalan, $5 \text{ } \textit{ea}$ 6 $6 > 5$ chunki u oʻngroqda joylashgan.

$-4 \text{ } \textit{ea}$ 1 $1 > -4$ chunki u oʻngroqda joylashgan

$-2 \text{ } \textit{ea}$ 0 $0 > -2$ chunki u oʻngroqda joylashgan

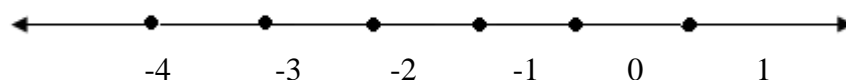
Agarda sonlar oʻqida A va V nuqtalar mos ravishda x_1 va x_2 koordinatalarga ega boʻlsa,

u holda AV masofa

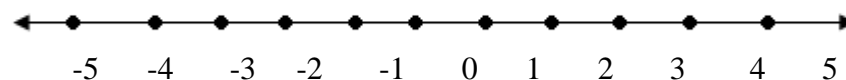
$$AV = x_2 - x_1$$

formula orqali aniqlanadi.

Agarda AV masofa manfiy qiymatga ega bo'lsa, u holda, A nuqtadan V nuqtaga borish yo'nalishi manfiy yo'nalish bilan ustma-ust tushadi, ya'ni V nuqta A nuqtaning o'ng tomonda joylashganini bildiradi.



$$AV = 1 - 4 = -3$$



$$AV = 5 - (-2) = 7$$

Agar S nuqta AV kesmani $\lambda = \frac{AC}{CB}$ nisbatda bo'lsa uning X_S koordinatasi

$$X_C = \frac{X_A + \lambda X_B}{1 + \lambda}$$
 formula orqali ifodalanadi.

Nazorat uchun savollar

1. Natural sonlar nima uchun ishlatiladi?
2. Butun sonlar to'plamiga qanday sonlar kiradi?
3. Kasr sonlar turlarini aytib bering.
4. O'nli kasr sonlar qanday ko'rinishga ega?
- 5.

Mustaqil ish topshiriqlari:

1. Rasional sonlar to'plamiga qanday sonlar kiradi?
2. Irrasional sonlarga misollar keltiring.
3. Sanoq o'qini hosil qilish kanday?
4. Kesmani λ nisbatda bo'luvchi nuqtaning koordinatasini topish formulasini yozing.

MA'R U Z A 2 VEKTORLAR ALGEBRASI

Dars o'quv maqsadi: Vektorlar algebrasi bilan tanishtirish

Tayanch iboralar : Chiziqli fazo, o'lchov, skalyar ko'paytma, chiziqli erkli va bog'liq vektorlar, bazis, ortonormal bazis, chiziqli operator, kvadratik forma, kvadratik formaning kanonik ko'rinishi.

Ma'ruza rejasi

1. Vektor tushunchasi. Chiziqli fazo va uning o'lchovi. Evklid fazolari.
2. Vektorlarning turlari.
3. Vektorlar ustida amallar.

Chiziqli fazo tushunchasi matematikadagi asosiy tushunchalardan biri bo'lib, iqtisodda ham muhim ahamiyatga ega.

1-ta'rif. Agar bo'sh bo'lmagan L -to'plamning istalgan x, y, z elementlari va λ son uchun qo'shish- $x + y \in L$, songa ko'paytirish- $\lambda x \in L$ aniqlangan bo'lib, bu amallar uchun quyidagi xossalari o'rinli bo'lsa,

1. $x + y = y + x$ (qo'shish amalining kommutativligi);
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ (qo'shishning assosiativligi);
3. L da shunday 0 (nol) element mavjudki, istalgan $x \in L$ uchun $x + 0 = x$;
4. Har bir $x \in L$ uchun, L da shunday $-x$ elementi mavjudki, uning uchun $x + (-x) = 0$;
5. α va β sonlar va $x \in L$ uchun $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
6. $1 \cdot x = x$;
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
8. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;

u holda u chiziqli yoki vektor fazo deyiladi.

Yuqoridagi ta'rifda songa ko'paytirish amali deganda ikki holatni farqlash kerak. Agar ta'rifdagi sonlar haqiqiy sonlar to'plami $R = (-\infty, +\infty)$ dan olingan deb qaralsa, bunday chiziqli fazo haqiqiy chiziqli fazo deyiladi, agarda bu sonlar kompleks sonlar to'plami C dan olingan deb qaralsa, bunday chiziqli fazo kompleks chiziqli fazo deyiladi.

2-ta'rif. Agar shunday $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sonlar topilib, ular uchun

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda chiziqli fazo elementi x vektor a_1, a_2, \dots, a_n vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat deyiladi.

3-ta'rif. Agar hammasi ham nolga teng bo'lmagan shunday $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sonlar topilib, ular uchun

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0 \tag{1}$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda a_1, a_2, \dots, a_n vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq vektorlar sistemasi deyiladi, aks holda, ya'ni (1) tenglik o'rinli ekanligidan $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ bo'lsa, ular chiziqli erkli vektorlar sistemasi deyiladi.

Agar a_1, a_2, \dots, a_n vektorlar orasida nol vektor bo'lsa, u holda ular chiziqli bog'liq bo'ladi. Agar a_1, a_2, \dots, a_n vektorlardan bir nechtasi chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda ularning o'zi ham chiziqli bog'liq bo'ladi.

4-ta'rif. Agar L chiziqli fazoda n tasi chiziqli erkli va istalgan $n+1$ tasi bog'liq bo'lgan vektorlar mavjud bo'lsa, ya'ni chiziqli erkli vektorlarning maksimal soni n ga teng bo'lsa, u holda L fazo n o'lchovli chiziqli fazo deyiladi.

5-ta'rif. n o'lchovli chiziqli fazodagi istalgan n ta chiziqli erkli vektorlar sistemasi chiziqli fazoning bazisi deyiladi.

1-teorema. Chiziqli fazoning har bir elementini yagona usul bilan bazisning chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida ifoda qilish mumkin.

2-teorema. Agar L dagi $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ vektorlar chiziqli erkli bo'lib, istalgan x -vektor ularning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lsa, u holda bu vektorlar L da bazisni tashkil etadi.

Evklid fazolari.

6-ta'rif. Agar L chiziqli fazo berilgan bo'lib, $\forall x, y \in L$ elementlar uchun shunday $(x; y)$ son mos qo'yilgan bolsa va u quyidagi xossalarni qanoatlantirsa:

1. $(x, y) = (y, x), (x, y \in L)$;
2. $(x, y + z) = (x, y) + (x, z), (x, y, z \in L)$;
3. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y), (\alpha \in R, x, y \in L)$;
4. $(x, x) \geq 0$ va faqat $x = 0(x \in L)$ bo'lganda $(x, x) = 0$,

U holda bu chiziqli fazoda skalyar ko'paytma aniqlangan deyiladi.

Skalyar ko'paytma kiritilgan chiziqli fazo evklid fazosi deyiladi.

Skalyar ko'paytma yordamida vektorning normasi (uzunligi) tushunchasini kiritish mumkin. x vektorning uzunligi (normasi) $|x|$ deb, quyidagicha aniqlangan songa aytiladi.

$$|x| = \sqrt{(x, x)}$$

Norma quyidagi xossalarga ega bo'ladi.

1. $|x| = 0$ faqat va faqat shu holdaki, agar $x = 0$, bo'lsa.

2. Istalgan λ son uchun $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$

3. $|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$ -Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi

4. $|x + y| \leq |x| + |y|$ uchburchak tengsizligi

Ikkita x va y vektorlar orasidagi burchak θ quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$\cos \theta = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}, \text{ bu yerda } 0 \leq \theta \leq \pi \text{ deb qaraladi.}$$

Normaning 1-va 2-xossalari to'g'ridan-to'g'ri skalyar ko'paytma ta'rifidan kelib chiqadi. 3- va 4-xossalarni isbot qilaylik. Skalyar ko'paytmaning ta'rifiga va 1-,2-xossalarga ko'ra quyidagilarni hosil qilamiz.

$$0 \leq (x + \alpha y, x + \alpha y) = (x, x) + 2\alpha(x, y) + \alpha^2(y, y);$$

bu yerda $\alpha = -\frac{(x, y)}{(y, y)}$ deb olsak, quyidagi hosil bo'ladi.

$$0 \leq (x, x) - 2 \cdot \frac{(x, y)^2}{(y, y)} + \frac{(x, y)^2 \cdot (y, y)}{(y, y)^2} = |x|^2 - \frac{(x, y)^2}{|y|^2} \Rightarrow (x, y)^2 \leq |x|^2 \cdot |y|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$$

Demak, Koshi -Bunyakovskiy tengsizligi isbot bo'ladi. Endi 4-xossa Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan kelib chiqadi:

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leq |x|^2 + 2 \cdot |x| \cdot |y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |x + y| \leq |x| + |y|$$

Agar x va y vektorlar ortogonal vektorlar orasidagi burchak $\frac{\pi}{2}$ ga teng bo'lsa, ya'ni $(x, y) = 0$ bo'lsa, u holda ular ortogonal vektorlar deyiladi.

Agarda n o'lchovli evklid fazosidagi $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ vektorlar uchun $(\ell_i, \ell_j) = 0 \quad i \neq j$ bo'lib, $|\ell_i| = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$, bo'lsa, u holda ular bu fazoning ortonormal bazisi deyiladi.

3-teorema. Har qanday n o'lchovli L evklid fazosida ortonormal bazis mavjuddir.

7-ta'rif. Agar L_1 chiziqli fazoning har bir elementi $x \in L_1$ uchun biron qoida, qonunga asosan L_2 chiziqli fazoning aniq elementi mos qo'yilgan bo'lsa, L_1 ni L_2 ga akslantiruvchi operator berilgan deyiladi. Bu operatorni A deb belgilab, akslantirishni $A: L_1 \rightarrow L_2$ shaklda ifoda etiladi, bu akslantirishda x ning y ga mos kelishi $Ax = y$ kabi yoziladi.

8-ta'rif. Agar istalgan $x \in L_1, y \in L_2$ va λ son uchun

$$A(x + y) = Ax + Ay$$

$$A(\lambda x) = \lambda Ax$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $A: L_1 \rightarrow L_2$ operator chiziqli operator deyiladi.

$A: L_1 \rightarrow L_2$ va $B: L_2 \rightarrow L_3$ chiziqli operatorlar bo'lsa, A va B operatorlarning ko'paytmasi (yoki kompozitsiyasi) deb ushbu $(AB)(x) = A(Bx)$ ko'rinishda aniqlangan operatorga aytiladi. Bu yerda $AB: L_1 \rightarrow L_3$ va $C = AB$ chiziqli operatoridir.

Agar $A: L \rightarrow L$ va $B: L \rightarrow L$ chiziqli operatorlar bo'lsa, bunday operatorlar uchun $A+B$, $\lambda \cdot A$ va $A \cdot B$ chiziqli operatorlarni aniqlashimiz mumkin bo'ladi. L chiziqli fazoning o'zini-o'ziga akslantiruvchi barcha chiziqli operatorlar to'plamini $\mathfrak{L}(L)$ deb belgilaymiz, operatorlarni qo'shish va songa ko'paytirishga nisbatan $\mathfrak{L}(L)$ to'plam chiziqli fazoni tashkil etadi.

Kvadratik formalar

Turli amaliy masalalarni yechishda kvadratik formalar hosil bo'lib, ularni o'rganishga to'g'ri keladi.

10-ta'rif. n ta o'zgaruvchining kvadratik formasi deb

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

tenglik orqali aniqlangan f funksiyaga aytiladi.

:

4-teorema. Istalgan kvadratik formani xos bo'lmagan chiziqli almashtirish yordamida kanonik ko'rinishga olib kelish mumkin.

Kvadratik formaning kanonik ko'rinishi koeffitsientlari ma'nosida yagona bo'lmaydi. Lekin quyidagi teorema o'rinlidir:

5-teorema. (Kvadratik forma uchun inertsiya qonuni). Kvadratik formaning barcha kanonik ko'rinishlaridagi musbat va manfiy hadlari soni bir xil bo'ladi.

Kvadratik formaga mos keluvchi matritsaning rangi shu kvadratik formaning rangi deb atalib, kvadratik formaning kanonik ko'rinishdagi noldan farqli koeffitsientlar soniga teng bo'lib, yuqoridagi teorema ko'ra kvadratik formaning barcha xos bo'lmagan chiziqli almashtirishlari uchun uning rangi o'zgarmas bo'ladi.

Agarda barcha $(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ uchun $f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ ($f(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kvadratik forma musbat (manfiy) aniqlangan deyiladi.

6-teorema. $f = X'AX$ kvadratik forma musbat aniqlangan bo'lishi uchun A matritsaning barcha bosh minorlari musbat bo'lishi zarur va yetarlidir, ya'ni

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

bo'lishi zarur va yetarlidir.

Kvadratik forma manfiy aniqlangan bo'lishi uchun esa $(-1)^i \Delta_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Nazorat uchun savollar

1. Chiziqli fazo nima?
2. Chiziqli erkli va chiziqli bog'liq vektorlarning ta'rifini keltiring.
3. Chiziqli fazo o'lchami nima?

4. Bazis nima?
5. Evklid fazo ta'rifini keltiring.

Mustaqil ish topshiriqlari:

1. Koshi-Bunyakovskiy, uchburchak tengsizliklarini keltiring.
2. Chiziqli operator nima?
3. Kvadratik forma nima?
4. Kvadratik formaning kanonik ko'rinishi qanday bo'ladi?
5. Xalqaro savdo modelini tushuntiring?

M A ' R U Z A 3

TEKISLIKDA CHIZIQNING BERILISHI TO'G'RI CHIZIQ TENGLAMASI

Dars o'quv maqsadi: Analitik geometriyaning asosiy tushunchalari. Nuqta va to'g'ri chiziq va uning tenglamalari bilan tanishtirish.

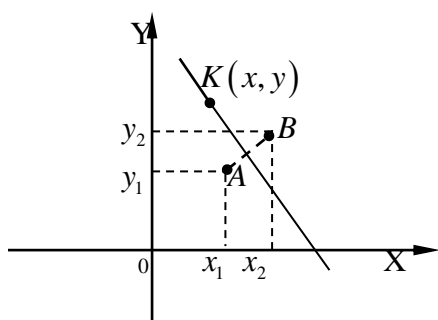
Tayanch iboralar: Tekislik tenglamasi, fazoda to'g'ri chiziq tenglamasi, yo'naltiruvchi vektor.

Ma'ruza rejasi

1. Tekislikda to'g'ri chiziqni berilishi va uning tenglamasi.
2. Ikki nuqta orasidagi masofa va ulardan utuvchi tugri chizik tenglamasi.
3. Tekislikda to'g'ri chiziqning parallellik va perpendikulyarlik shartlar.
4. Bir nuqtadan utuvchi tugri chiziklar tuplamining tenglamasi.

1-ta'rif. OXY Dekart koordinatalari kiritilgan tekislikda yotgan egri chiziq tenglamasi deb, bu egri chiziqda yotuvchi nuqtalar koordinatalari x va y ni bog'lovchi tenglamaga aytiladi. Umumiy holda egri chiziq tenglamasi $F(x, y) = 0$ ko'rinishda, mumkin bo'lgan hollarda $y = f(x)$ yoki $x = \varphi(y)$ oshkor ko'rinishdagi tengliklar orqali beriladi. Bu yerda $F(x, y)$, $f(x)$ va $\varphi(y)$ funksiyalar egri chiziqni aniqlovchi qonun-qoidalarni ifoda etadilar.

Endi berilgan $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalardan bir xil masofada yotuvchi nuqtalarning geometrik o'rini ifoda etuvchi tenglamani topaylik.



$K(x, y)$ nuqta A va B nuqtalardan bir xil masofada yotsin, u holda

$$KA = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} = KB$$

$$x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 = x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2^2$$

$$(2x_2 - 2x_1)x + (2y_2 - 2y_1)y + (x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2) = 0$$

bu yerda $2x_2 - 2x_1 = a$, $2y_2 - 2y_1 = b$, $x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = c$ belgilashlarni kiritsak, quyidagi tenglama hosil bo'ladi

$$ax + by + c = 0 \quad (1)$$

bu tenglamada a, b, c lar o'zgarimas sonlardir. (1) tenglama to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi. Bu tenglamaning ayrim maxsus hollarini qaraymiz:

1) agar $c = 0$ bo'lsa, $ax + by = 0$ yoki $y = -\frac{a}{b}x$ $b \neq 0$, ya'ni to'g'ri chiziq koordinata boshidan o'tadi.

2) agar $b = 0$ $a \neq 0$ bo'lsa, $x = -\frac{c}{a} = \text{const}$, ya'ni to'g'ri chiziq OY o'qqa parallel bo'ladi.

3) agar $a = 0$ $b \neq 0$ bo'lsa, $y = -\frac{c}{b} = \text{const}$, ya'ni to'g'ri chiziq OX o'qqa parallel bo'ladi.

4) agar $b = 0$ va $c = 0$ bo'lsa $x = 0$, ya'ni to'g'ri chiziq OY o'q bilan ustma-ust tushadi.

5) agar $b \neq 0$ $a = 0$ va $c = 0$ bo'lsa, $y = 0$ to'g'ri chiziq OX o'q bilan ustma-ust tushadi.

Agar (1) tenglamada $a \neq 0$, $b \neq 0$ va $c \neq 0$ bo'lsa, quyidagini hosil qilamiz

$$ax + by = -c \Rightarrow \frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} = 1, \quad -\frac{c}{a} = m, -\frac{c}{b} = n \text{ deb belgilasak } \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1.$$

To'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasini hosil qilamiz, bu yerda $|m|$ va $|n|$ berilgan to'g'ri chiziqning koordinata o'qlarini kesishidan hosil bo'lgan kesmalar uzunliklariga teng bo'ladi.

Agar (1) tenglamada $b \neq 0$ bo'lsa, uni quyidagi ko'rinishga olib kelish mumkin:

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}, \text{ bu yerda } -\frac{a}{b} = k, -\frac{c}{b} = d \text{ deb belgilash kiritib, } y = kx + d$$

ko'rinishdagi tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi deyiladi. Tenglamadagi k koeffitsient to'g'ri chiziqning OX o'qi bilan musbat yo'nalish bo'yicha hosil qilgan φ burchakning tangensiga teng, ya'ni $k = \text{tg } \varphi$.

Endi $A(x_1, y_1)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini topamiz, bunda burchak koeffitsienti k berilgan deb qaraladi. To'g'ri chiziq tenglamasini $y = kx + d$ ko'rinishda izlaymiz, u holda $y_1 = k \cdot x_1 + d$ tenglik o'rinli bo'ladi, ikkala tenglikni hadma-had ayirib quyidagini hosil qilamiz

$$y - y_1 = k \cdot (x - x_1) \quad (2)$$

$A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini topaylik. (2) tenglamaga ko'ra, quyidagini hosil qilamiz,

$$y_2 - y_1 = k \cdot (x_2 - x_1) \text{ yoki } k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

k ning qiymatini (2) tenglamaga qo'ysak, quyidagini hosil qilamiz:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \text{ yoki } \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

$y = k_1x + d_1$ va $y = k_2x + d_2$ to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lsin. Bu to'g'ri chiziqlar kesishish nuqtasi atrofida, birinchi to'g'ri chiziqni soat strelkasiga teskari yo'nalishda aylantirish natijasida to'g'ri chiziq bilan ustma-ust tushguncha hosil bo'lgan burchak φ , ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak deyiladi.

To'g'ri chiziqlar umumiy ko'rinishda berilgan bo'lsin:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

U holda bu to'g'ri chiziqlarning parallellik sharti $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ tenglik orqali beriladi, ularning perpendikulyarlik sharti esa $a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 = 0$ tenglik bilan ifodalanadi.

Agar qaralayotgan to'g'ri chiziqlar parallel bo'lmasa,

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi yechimi shu to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasidan iborat bo'ladi.

Endi berilgan $M(x_0, y_0)$ nuqtadan $ax + by + c = 0$ to'g'ri chiziqqa bo'lgan masofani topaylik.

To'g'ri chiziq tenglamasini $y = kx + d$ ko'rinishga keltiramiz, $k = -\frac{a}{b}$, $d = -\frac{c}{b}$. Berilgan M nuqtadan

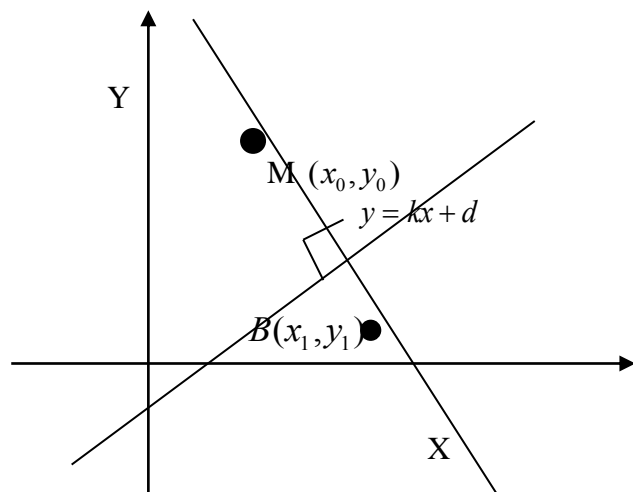
o'tib $y = kx + d$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagi ko'rinishda

bo'ladi: $y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0)$. Quyidagi sistemani yechamiz,

$$\begin{cases} y_1 = kx_1 + d \\ y_1 - y_0 = -\frac{1}{k}(x_1 - x_0) \end{cases} \Rightarrow kx_1 + d - y_0 = -\frac{1}{k}(x_1 - x_0) \Rightarrow k^2x_1 - ky_0 + kd = -x_1 + x_0 \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{x_0 + ky_0 - kd}{k^2 + 1} \Rightarrow y_1 = k \cdot \frac{x_0 + ky_0 - kd}{k^2 + 1} + d = \frac{kx_0 + k^2y_0 - k^2d + k^2d + d}{k^2 + 1} =$$

$$= \frac{kx_0 + k^2y_0 + d}{k^2 + 1}$$



Sistema yechimi (x_1, y_1) bilan aniqlanuvchi $B(x_1, y_1)$ nuqta va $M(x_0, y_0)$ nuqtalar orasidagi masofani topamiz:

$$\begin{aligned}
MB &= \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = \sqrt{\left(\frac{x_0 + ky_0 - kd}{k^2 + 1} - x_0\right)^2 + \left(\frac{kx_0 + k^2y_0 + d}{k^2 + 1} - y_0\right)^2} = \\
&= \frac{\sqrt{(x_0 + ky_0 - kd - k^2x_0 - x_0)^2 + (kx_0 + k^2y_0 + d - k^2y_0 - y_0)^2}}{k^2 + 1} = \frac{\sqrt{(kx_0 - y_0 + d)^2(k^2 + 1)}}{k^2 + 1} = \\
\frac{|kx_0 - y_0 + d|}{\sqrt{k^2 + 1}} &= \frac{\left|-\frac{a}{b}x_0 - y_0 - \frac{c}{b}\right|}{\sqrt{\left(-\frac{a}{b}\right)^2 + 1}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}};
\end{aligned}$$

Demak, $M(x_0, y_0)$ nuqtadan $ax + by + c = 0$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani d deb belgilasak, ushbu

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

formulani hosil qilamiz.

Nazorat uchun savol va topshiriqlar

1. Fazoda tekislik va to'g'ri chiziq tenglamalari.
2. Tekislik va to'g'ri chiziqlarning parallelizm va perpendikulyarlik shartlari.

MUSTAQIL ISH UCHUN MAVZU VA SAVOLLAR

1. Agar $D = 0$ bo'lsa, u holda $Ax + By + Cz = 0$ tekislik koordinata boshidan o'tadi.
2. Agar $A = 0$ bo'lsa, $By + Cz + D = 0$ tekislik OX o'qqa parallel bo'lishini ko'rsating.
3. Agar $A = 0, D = 0$ bo'lsa, $By + Cz = 0$ tekislik OX o'qdan o'tishini ko'rsating.
4. Agar $A = 0, B = 0$ bo'lsa, $Cx + D = 0$ tekislik OXY tekislikka parallel bo'lishini ko'rsating.
5. Agar $A = 0, B = 0, D = 0$ bo'lsa, $Cz = 0$ (yoki $z = 0$) tekislik OXY tekislik bilan ustma-ust tushadi. Ushbu

$$\begin{aligned}
A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\
A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0
\end{aligned} \tag{10}$$

tekisliklarning parallelizm va perpendikulyarlik shartlari ularni aniqlaydigan $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ va $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ vektorlarning parallelizm va perpendikulyarlik shartlari bilan bir xil bo'ladi, shuning uchun ular quyidagicha bo'lishini isbotlang.

MA'RUZA 4

AYLANA, ELLIPS, GIPERBOLA VA PARABOLA

Dars o'quv maqsadi: Egri chiziqlar: aylana, ellips, giperbola, parabolalarning xossalari bilan talabalarni tanishtirish

Tayanch iboralar: Aylana, ellips, giperbola, parabola, fokus, ekstsentrisitet, fokal radiuslar, tenglamasi.

Ma'ruza rejasi

1. Aylana xakida tushuncha va uning tenglamasi.
2. Ellips xakida tushuncha va uning tenglamasi.

3. Giperbola xakida tushuncha va uning tenglamasi.

4. Parabola xakida tushuncha va uning tenglamasi.

1-ta'rif. Tekislikda berilgan $M(x_0, y_0)$ nuqtadan bir xil R masofada yotuvchi barcha nuqtalarning geometrik o'rni aylana deyiladi. Berilgan $M(x_0, y_0)$ nuqta aylana markazi, R esa aylana radiusi deb ataladi.

Aylana tenglamasini topaylik. Aylana markazi $M(x_0, y_0)$ nuqtada bo'lib, uning radiusi R ga teng bo'lsin. $B(x, y)$ nuqta aylanada yotuvchi nuqta bo'lsin, u holda ta'rifga ko'ra aylana tenglamasi quyidagi

$$MB = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = R \quad \text{yoki} \quad (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2 \quad (3)$$

ko'rinishda bo'ladi. (3) tenglamada sodda almashtirishlarni bajarsak, aylana tenglamasini

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0 \quad (4)$$

ko'rinishga olib kelish mumkin. (4) ko'rinishdagi tenglamadan (3) ko'rinishdagi tenglamaga o'tish uchun, (4) da to'liq kvadratlarni ajratish kerak bo'ladi, u holda $m^2 + n^2 - 4p > 0$ shart asosida,

$$\left(x + \frac{m}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{n}{2}\right)^2 - \frac{m^2 + n^2 - 4p}{4} = R^2$$

tenglamani hosil qilamiz.

2-ta'rif. Ellips deb tekislikda berilgan ikki nuqttagacha bo'lgan masofalar yig'indisi avvaldan berilgan o'zgarmas songa teng bo'lgan barcha nuqtalarning geometrik o'rniga aytiladi.

Ta'rifdagi ikki nuqta ellipsning fokuslari deyilib, berilgan o'zgarmas son fokuslar orasidagi masofadan katta bo'lishi kerak. Endi ta'rifdan foydalanib ellips tenglamasini hosil qilaylik. Soddalik uchun ellips fokuslari OX o'qida yotib, koordinata boshiga nisbatan simmetrik joylashgan deb olamiz. Ya'ni F_1 va F_2 lar ellips fokuslari bo'lsa, ular $F_1(-c, 0)$ va $F_2(c, 0)$ ($c > 0$) ko'rinishda deb olamiz.

Agar ta'rifdagi o'zgarmas sonni $2a$ ($a > 0$) deb olsak, $2a > F_1F_2$, ya'ni $2a > 2c$ yoki $a > c$ shart o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. Agar $M(x, y)$ nuqta ellipsda yotsa, u holda ta'rifga ko'ra $MF_1 + MF_2 = 2a$ tenglik o'rinli bo'lishi kerak. Ya'ni

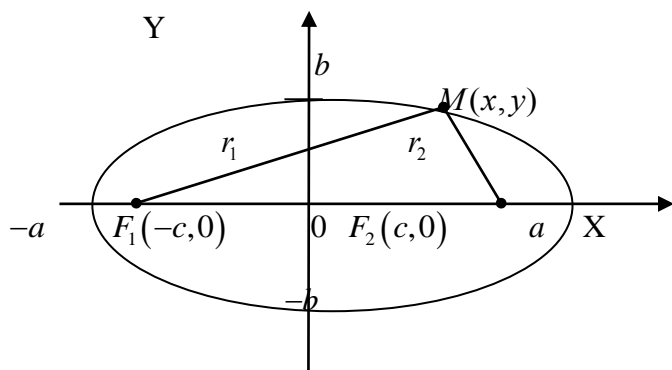
$$\begin{aligned} MF_1 + MF_2 &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \Rightarrow 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx \Rightarrow \\ &\Rightarrow a^2[(x-c)^2 + y^2] = (a^2 - cx)^2 \Rightarrow a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \end{aligned}$$

$a > c$ bo'lgani uchun $a^2 - c^2 = b^2$ deya olamiz, u holda ellipsning ushbu kanonik tenglamasini hosil qilamiz,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (5)$$

(5) tenglama bilan berilgan ellips koordinata o'qlariga va koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi. a va b musbat sonlar deb qaralib, ular ellipsning yarim o'qlari deyiladi. (5) tenglamani keltirib chiqarishda $a > b$ edi, shuning uchun uning fokuslari OX o'qida joylashgan bo'lib, fokuslar koordinata boshidan $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ masofada yotadi. $\frac{c}{a} = \varepsilon < 1$ nisbat ellipsning ekstsentrisseti deyiladi. Ellipsda yotgan $M(x, y)$ nuqtadan fokuslargacha bo'lgan masofalar fokal radius-vektorlar deb nomlanib, ular quyidagi tenglik orqali topiladi: $r_1 = a - \varepsilon x$, $r_2 = a + \varepsilon x$.

Agar (5) tenglamada $a < b$ bo'lsa, ellips fokuslari OY o'qda joylashib, $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, $\varepsilon = \frac{c}{b}$, $r_1 = b - \varepsilon y$, $r_2 = b + \varepsilon y$ tengliklar o'rinli bo'ladi.



3-ta'rif. Giperbola deb berilgan ikki nuqtagacha bo'lgan masofalar ayirmasining moduli avvaldan berilgan o'zgarmas songa teng bo'lgan barcha nuqtalarning geometrik o'rniga aytiladi.

Ta'rifdagi ikki nuqta giperbolaning fokuslari deyilib, berilgan o'zgarmas son fokuslar orasidagi masofadan kichik bo'lishi kerak. Giperbola tenglamasini uning fokuslari OX o'qida yotib, koordinata boshiga nisbatan simmetrik joylashgan hol uchun hosil qilaylik. Giperbola fokuslari F_1, F_2 nuqtalarda bo'lsa, biror $c > 0$ son uchun ular $F_1(-c, 0)$ va $F_2(c, 0)$ koordinatalarga ega bo'ladi. Agar giperbola ta'rifidagi o'zgarmas sonni $2a (a > 0)$ deb olsak, u holda $2a < F_1F_2$, ya'ni $2a < 2c$, $a < c$ bo'lishi kerak. Agar $M(x, y)$ nuqta giperbolada yotsa, ta'rifga ko'ra $|MF_1 - MF_2| = 2a$, demak,

$$\begin{aligned}
 (MF_1 - MF_2)^2 &= 4a^2 \Rightarrow \left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right)^2 = 4a^2 \Rightarrow (x+c)^2 + y^2 - \\
 &- 2\sqrt{((x+c)^2 + y^2)((x-c)^2 + y^2)} + (x-c)^2 + y^2 = 4a^2 \Rightarrow 2\sqrt{((x+c)^2 + y^2)((x-c)^2 + y^2)} = \\
 &= 2(x^2 + y^2) + 2(c^2 - 2a^2) \Rightarrow \sqrt{((x+c)^2 + y^2)((x-c)^2 + y^2)} = ((x^2 + y^2) + (c^2 - 2a^2))^2 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow (x^2 - c^2)^2 + ((x+c)^2 + (x-c)^2)y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 + 2(x^2 + y^2)(c^2 - 2a^2) + (c^2 - 2a^2)^2 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow (-2c^2 - 2c^2 + 4a^2)x^2 + (2x^2 + 2c^2 - 2x^2 - 2c^2 + 4a^2)y^2 = (c^2 - 2a^2)^2 - c^4 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 4(a^2 - c^2)x^2 + 4a^2y^2 = 4a^4 - 4a^2c^2 \Rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = \\
 &= 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1
 \end{aligned}$$

$0 < a < c$ bo'lgani uchun $c^2 - a^2 = b^2$ deya olamiz, natijada giperbolaning quyidagi kanonik ko'rinishdagi tenglamasi hosil bo'ladi:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (6)$$

(6) tenglama ko'rinishida berilgan giperbola koordinata o'qlari va koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi. a va b parametrlar musbat son bo'lib, a - haqiqiy yarim o'q, b - mavhum yarim o'q deb nomlanadi. Giperbola OX o'qni giperbola uchlar deb ataluvchi $A_1(-a, 0)$ va $A_2(a, 0)$, nuqtalarda kesib o'tadi. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ son fokuslardan koordinata boshigacha bo'lgan masofaga teng bo'ladi.

$\frac{c}{a} = \varepsilon > 1$ nisbat giperbola ekstsentrisiteti deb nomlanadi. $y = \frac{b}{a}x$ va $y = -\frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqlar giperbola asimptotalari deyiladi. Giperbolada yotuvchi $M(x, y)$ nuqtadan fokuslargacha bo'lgan masofalar fokal radius-vektorlar deb atalib, quyidagicha topiladi:

$$r_1 = |\varepsilon x - a|, \quad r_2 = |\varepsilon x + a|.$$

Agar (6) tenglamada $a = b$ bo'lsa, bunday giperbola teng tomonli giperbola deyiladi, uning tenglamasi $x^2 - y^2 = a^2$, asimptotalari esa $y = \pm x$ ko'rinishda bo'ladi.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{va} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

o'zaro qo'shma giperbolalar deyiladi.

4-ta'rif. Berilgan nuqta va berilgan to'g'ri chiziqdan teng masofada yotuvchi barcha nuqtalarning geometrik o'rni parabola deb aytiladi.

Ta'rifdagi nuqta parabola fokusi, to'g'ri chiziq uning direktrisasi deyiladi. Parabola tenglamasini uning fokusi OX o'qda, direktrisasi OY o'qqa parallel bo'lgan hol uchun hosil qilaylik. Parabola fokusi $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ nuqta, direktrisa tenglamasi esa $x = -\frac{p}{2}$ bo'lsin ($p > 0$). Agar $M(x, y)$ nuqta parabolada

yotsa, u holda ta'rifga ko'ra $MF = \left|x + \frac{p}{2}\right|$ tenglik o'rinli bo'lishi kerak, ya'ni

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right| \Rightarrow \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow (7)$$

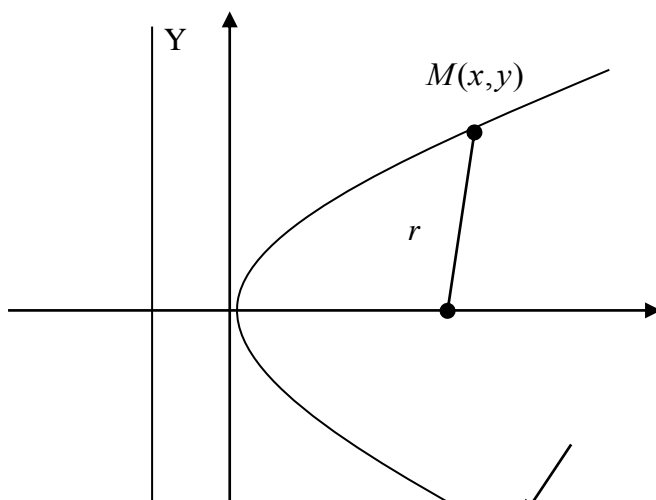
$$\Rightarrow y^2 = 2px$$

hosil bo'ladi. (7) tenglama bilan ifodalanuvchi parabola OX o'qqa nisbatan simmetrik bo'lib, OX o'qni koordinata boshida kesib o'tadi, bu nuqta parabolaning uchi deb ataladi. Parabolaning $M(x, y)$ nuqtasi uchun fokal radius-vektor $r = x + \frac{p}{2}$ ko'rinishda bo'ladi. Ushbu

$$x^2 = 2py \quad (8)$$

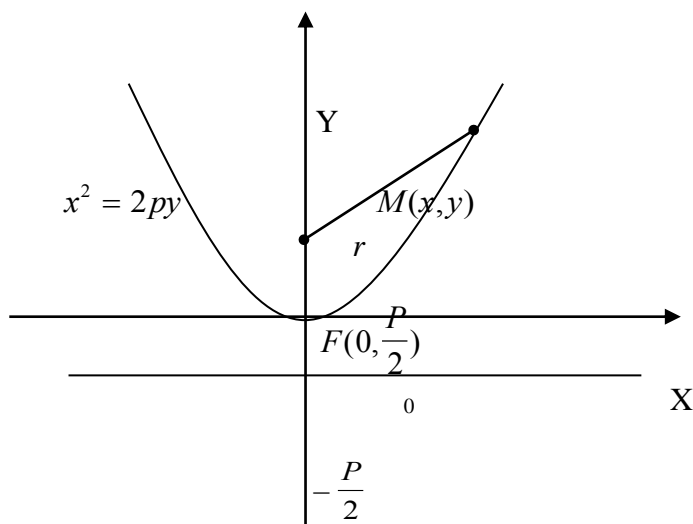
tenglama bilan berilgan parabola fokusi $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$ nuqtada, direktrisasi $y = -\frac{p}{2}$ to'g'ri chiziqdan

iborat bo'lib, parabolaning $M(x, y)$ nuqtasi uchun fokal radius-vektor $r = y + \frac{p}{2}$ ko'rinishda bo'ladi



$$F\left(\frac{P}{2}, 0\right) \quad X$$

$$y^2 = 2px$$



Agar x va y o'zgaruvchilar teskari proporsional ya'ni $y = \frac{m}{x}$ tenglik orqali bog'langan bo'lsa, sistemasi OXY koordinatalar bissektralarini, yangi koordinatalar $OX'Y'$ sistemasi sifatida qarash, bu tenglama $(x')^2 - (y')^2 = m$ ko'rinishga keladi, bundan esa asimptotalari OX va OY o'qlardan iborat bo'lgan teng tomonli giperbola ekanligi kelib chiqadi. Agar $m > 0$ bo'lsa giperbola I va III choraklarda, agar $m < 0$ bo'lsa II va IV choraklarda joylashgan bo'ladi.

Endi kasr-chiziqli funktsiyani qaraylik:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

Bu yerda $c \neq 0$ va $ad - bc \neq 0$ deb olinadi. Kasr-chiziqli funktsiya grafigi asimptotalari $x = -\frac{d}{c}$ va

$y = \frac{a}{b}$ bo'lgan teng tomonli giperbola bo'ladi.

Nazorat uchun savol va topshiriqlar

1. Aylana ta'rifini bering va formilasini yozing.
2. Ellips ta'rifini bering va formilasini yozing.

Mustaqil ish topshiriqlari:

1. Giperbola ta'rifini bering va formilasini yozing.
2. Parabola ta'rifini bering. va formilasini yozing.

MA'RUZA 5

KOMBINATORIKA

Dars o'quv maqsadi: Talabalarga kombinatorika bo'yicha tushuncha berish.

Tayanch so'zlar: kombinatorika, birlashmalar, o'rin almashtirishlar, o'rinlashtirishlar, guruhlashlar.

Ma'ruza rejasi

1. Birlashmalar
2. O'rin almashtirishlar
3. o'rinlashtirishlar
4. Guruhlashlar

O'zaro turlicha bo'lgan predmet (element)lardan tuziladigan quyidagi uch xil kombinatsiyalarni umumiy nom bilan birlashmalar deb atash qabul qilingan.

O'rin almashtirishlar

a_1, a_2, \dots, a_m dan iborat m ta turli element olib ularning sonini va qiymatini o'zgartmasdan faqat tartibini o'zgartirib, har xil usullar bilan ularning o'rinlarini almashtiramiz. Shu yo'l bilan hosil qilingan kombinatsiyalardan har biri (shu hisobda birinchisi ham) o'rin almashtirishlar deb ataladi. m ta elementdan hosil qilingan hamma almashtirishlarning umumiy soni R_m bilan belgilanadi. Bu son 1 dan boshlab (yoki baribir 2 dan boshlab) m gacha (m ham shu hisobda) hamma butun sonlarni bir-biriga ko'paytirish natijasiga teng:

$$P_m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1) \cdot m!$$

Bu yerda !-faktorial belgilash

$$0! = 1, 1! = 1$$

1 Misol. Uchta a, b, c elementlardan tuzilgan o'rin almashtirishlar sonini toping.

$$P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6. \text{ Haqiqatan quyidagi 6 ta o'rin almashtirish hosil qilamiz}$$

$$abc, acb, bca, bac, cab, cba$$

2 Misol. Sport jamiyati prezidiumiga saylangan besh kishi orasida besh hil vazifani necha xil usul bilan taqsim qilish mumkin?

$$P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

O'rinlashtirishlar

m ta har xil elementdan n tadan qilib olib, bu n ta elementni turlicha o'rinlashtirish yo'li bilan gruppalar tuzamiz. Bu usulda hosil qilingan gruppalar m ta elementdan n tadan olib tuzilgan o'rinlashtirishlar deb ataladi. m ta elementdan n tadan olib hosil qilingan o'rinlashtirishlarning umumiy soni A_m^n bilan belgilanadi va quyidagiga teng:

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\dots(m-(n-1)) \text{ } \ddot{e}ku \text{ } A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

m ta elementdan n tadan olib hosil qilingan o'rinlashtirishlarning umumiy soni A_m^n bilan belgilanadi. Bu son eng kattasi m ga teng bo'lgan ketma-ket n ta butun sonning ko'paytmasiga teng:

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\dots[m-(n-1)]$$

1 Misol. To'rtta a, b, c, d elementlardan 2 tadan olib tuzilgan o'rinlashtirishlar sonini toping.

$$A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$$

$$ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb, bd, db, cd, dc$$

2 Misol. Majlining prezidiumiga 8 kishi saylandi. Bu 8 kishi rais, kotib va sanoq komissiyasidan iborat uchta vazifani necha xil usul bilan o'zaro taqsimlash mumkin?

$$A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

Gruppalar

m ta turli elementdan n tadan olib, ularning tartibiga e'tibor bermasdan gruppalar tuzamiz. Shu yo'l bilan hosil qilingan kombinatsiyalar m ta elementdan n tadan olib tuzilgan guruhlar deb ataladi.

Bir-biridan farq qiladigan guruhlarining umumiy soni C_m^n bilan belgilanadi.

$$C_m^n = \frac{P_m}{P_n \cdot P_{m-n}} = \frac{m!}{n!(m-n)!} \quad C_m^n = 1$$

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}$$

1 Misol. Beshta a, b, c, d, e elementdan uchtdan olib tuzilgan xamma guruhlar sonini toping
 $C_5^3 = 10$.

$abc, abd, abe, ace, ade, bcd, bce, bde, cde, acd$

2 Misol. Nomlari ko'rsatilgan 8 ta kishidan 3 ta sanoq komissiyasi saylash kerak. Buni necha usul bilan bajarish mumkin (har bir sanovchining vazifasi bir xil bo'lganligidan oldingi misoldan farq qiladi).

$$C_8^3 = \frac{876}{123} = 56$$

3 Misol. To'rt xonali sonning necha xil yozish mumkin. Agarda uning raqamlari har xil bo'lsa, birinchi xonada 0 dan boshqa raqam, ya'ni $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot 9$ - demak 9 ta

Ikkinchi xonada birinchi raqamdan boshqa raqam – demak 9 ta

Uchinchi xonada birinchi va ikkinchi raqamdan boshqa – demak 8 ta

To'rtinchi xonada birinchi, ikkinchi va uchinchi raqamdan boshqa – 7 ta

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$$

4 Misol. To'rt xonali necha xil raqam tanlash mumkin, agar 0 dan boshqa raqamlar ishtirok etadi deb olsak, (takrorlashtirish mumkin)

$$9^4 = 6561$$

1 Misol. 10 ta sportchi bitta oltin, bitta kumush, bitta bronza medallar uchun kurashmoqdalar. Bu sportchilar orasida medallar necha xil usul bilan taqsimlash mumkin?

$$A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

2 Misol. 10 ta sportchidan 6 kishilik komandani necha xil usulda g'osil qilish mumkin?

$$C_{10}^6 = 210$$

5 Misol. 5 ta markasiz konvert va 4 xil bir xil narxli markalar bor. Bir konvertga bitta marka yopishtirib necha xil usulda xat jo'natish mumkin.

$$C_5^1 \cdot C_4^1 = 20$$

6 Misol. Rus, ingliz, fransuz, nemis, italyan tillarning har birida boshqa biriga bevosita tarjima qilish uchun nechta lug'at mavjud bo'lishi kerak.

$$A_5^2 = \frac{5!}{3!} = 4 \cdot 5 = 20$$

7 Misol. Bir talabada 5 ta ikkinchisida 9 ta kitob bor. Hamma kitoblar har xil. Bu talabalar:

a) birga bir

b) ikkiga ikki qilib necha marta kitob almashtirishlari mumkin.

$$a) C_5^1 \cdot C_9^1 = 5 \cdot 9 = 45$$

$$b) C_5^2 \cdot C_9^2 = 10 \cdot 36 = 360$$

5.8. A shahardan V shaharga uchta, V dan S shaharga esa to'rtta temir yo'l bor. A dan S ga necha xil usulda borish mumkin?

$$C_3^1 \cdot C_4^1 = 12$$

5.11. 1,2,3 va 5 raqamlaridan nechta har xil raqamli uch xonali juft son tuzish mumkin?

$$A_m^n = m(m-1)\dots(m-(n-1)) \quad A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$$

5.15. osh tayirlashda asosan yetti xil narsa kerak: yogʻ, goʻsht, piyoz, sabzi, guruch, suv, tuz. Bu masalliqni necha xil tartibda idishlarga solish mumkin.

$$P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$$

5.19. 12 ta erkak va 8 ta ayol kishilik gruppadan 3 ta erkak va 2 ta ayol qatnashgan 5 kishilik komissiyani necha xil usulda tuzish mumkin.

$$C_{12}^3 \cdot C_8^2 = \frac{12!}{3!9!} \cdot \frac{8!}{2!6!} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{7 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 220 \cdot 28 = 6160$$

5.20. sport loto 36 tadan 6

$$C_{36}^6 = \frac{36!}{6!30!} = \frac{31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 31 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 6 = 278256$$

500 soʻm boʻlsa 139128000

5.23. student toʻrtta imtihonni oʻn kun davomida topshirishi zarur. Toʻrtta imtihon topshirish uchun jadvalni necha xil qilib tuzib berish mumkin

$$C_{10}^4 = 210$$

Nomeri koʻrsatilgan sakkizta kishidan uchta sanoq komissiyasini saylash kerak. Buni necha usul bilan bajarish mumkin.

Har bir sanovchining vazifasi bir xil boʻlganligidan yuqoridagi misoldan farqliroq, biz bu holda oʻrinlashtirishlar emas, balki gruppalashtirib gruppalar hosil qilamiz

$$C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$$

Matematikada yuqorida oʻtilgan kombinatsiyalardan tashqari yana juda koʻp xil kombinatsiyalar mavjuddir.

Masalan, ikkita elementni uchtadan qilib necha usul bilan yozish mumkin.

$$2^3 = 8$$

Nazorat uchun savollar

1. Birlashmalar deb nimaga aytamiz?
2. Oʻrin almashtirishlarga misol keltiring.
3. Oʻrinlashtirishga taʼrif bering.

Mustaqil ish topshiriqlari:

1. Oʻrinlashtirish bilan oʻrin almashtirishning farqi nimada?
2. Guruhlashtirish bilan oʻrinlashtirishning farqi qanday?

MAʼRUZA 6

MATRITSA VA DETERMINANTLAR

Matritsalar va ular ustida amallar

Dars oʻquv maqsadi: Matritsa va ular ustida amallarni bajarishni talabalrga oʻrgatish

Tayanch iboralar: Matritsa, minor, algebraik to'ldiruvchi, matritsa rangi, kvadrat matritsa.

Ma'ruza rejasi

1. Matritsa ta'rif.
2. Matritsa tartiblari va rangi.
3. Matritsalar ustida amallar.

Matritsalar va ular ustida amallar

1-ta'rif. O'lchamlari $m \times n$ bo'lgan matritsa deb, satrlar soni m ga, ustunlar soni n ga teng bo'lgan, $m \cdot n$ ta sondan tashkil topgan to'g'ri to'rtburchak shaklidagi sonli jadvalga aytiladi.

Matritsalar lotin alifbosining katta harflari A,B,C va h.k. bilan belgilanadi va matritsani tashkil etuvchi sonlar uning elementlari deb atalib, matritsaning i -satri va j -ustuni kesishmasida joylashgan elementi a_{ij} -ko'rinishda yoziladi. Matritsalar

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ko'rinishda yoki qisqacha $A = (a_{ij}), i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$ shaklda ham ifodalanishi mumkin. Matritsalar ni ifodalashda $\| \cdot \|$ yoki $[\cdot]$ belgilardan ham foydalaniladi.

Birgina satrdan yoki birgina ustundan iborat matritsa vektor-satr yoki vektor-ustun deb nomlanadi, ya'ni

$$A = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \text{ vektor -satr, } B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \cdot \\ b_{m1} \end{pmatrix} \text{ vektor-ustun}$$

Matritsa o'lchami $(n \times n)$ bo'lsa, ya'ni satrlar soni ustunlar soniga teng bo'lsa, bunday matritsa n -tartibli kvadrat matritsa deyiladi. Kvadrat matritsaning $a_{ii}, i = \overline{1, n}$ ko'rinishdagi elementlari uning diogonal elementlari deb atalib, ular matritsaning diogonalini tashkil etadi deyiladi. Agar kvadrat matritsa uchun $i \neq j$ bo'lganda $a_{ij} = 0$ bo'lsa, bunday matritsa diogonal matritsa deyiladi. Agar diogonal matritsada barcha $i = \overline{1, n}$ lar uchun $a_{ii} = 1$ bo'lsa, bunday matritsa birlik matritsa deb ataladi va E bilan belgilanadi, ya'ni

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Agar matritsaning barcha elementlari, ya'ni istalgan $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$ uchun $a_{ij} = 0$ bo'lsa, u holda bunday matritsa 0-ko'rinishda ifodalanadi va nol- matritsa deyiladi.

Endi matritsalar ustida bajariladigan amallarni kiritamiz.

2-ta'rif. $A = (a_{ij})$ matritsani λ -songa ko'paytmasi deb shunday C -matritsa tushuniladiki, bunda C matritsa elementlari c_{ij} ushbu $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ tenglik orqali aniqlanadi.

Xususan istalgan A matritsa uchun $0 \cdot A = 0$ bo'ladi.

3-ta'rif. Bir xil $m \times n$ o'lchamli $A = (a_{ij})$ va $B = (b_{ij})$ matritsalar uchun ularning yig'indisi deb shunday $m \times n$ o'lchamli $C = (c_{ij})$ matritsaga aytiladiki, istalgan $i = \overline{1, n}$ va $j = \overline{1, m}$ lar uchun c_{ij} -element, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ tenglik orqali aniqlanadi va matritsalar yig'indisi $A+B$ shaklda belgilanadi, ya'ni $C=A+B$

A matritsaning B matritsaga ko'paytmasini aniqlashda, A matritsaning ustunlar soni B matritsaning satrlar soniga teng bo'lishi talab etiladi. Ya'ni $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times k}$ bo'lishi kerak.

4-ta'rif. $A = (a_{ij})_{m \times n}$ va $B = (b_{ij})_{n \times k}$ matritsalar ko'paytmasi deb, o'lchami $m \times k$ bo'lgan shunday $C = (c_{ij})_{m \times k}$ matritsaga aytiladiki, uning c_{ij} -elementi,

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is} \cdot b_{sj}, \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, k}$$

tenglik orqali aniqlanib, matritsalar ko'paytmasi $A \cdot B$ ko'rinishda ifodalanadi, ya'ni $C = A \cdot B$.

Yuqorida kiritilgan matritsalar ustidagi amallar uchun quyidagi xossalari o'rinli bo'lib, bu xossalarning isboti, ularga mos xossalarning sonlar ustida o'rinli ekanligidan kelib chiqadi. Bu isbotlarni o'quvchining o'ziga havola qilamiz.

1. Matritsalar qo'shish amali uchun kommutativlik- o'rin almashtirish xossasi o'rinli, ya'ni

$$A + B = B + A;$$

2. Matritsalar qo'shish amali uchun assotsiativlik- guruhlash xossasi o'rinli, ya'ni

$$(A + B) + C = A + (B + C);$$

3. Matritsalar songa ko'paytirishda qo'shishga nisbatan distributivlik xossasi o'rinli, ya'ni

$$\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$$

4. Matritsalar ko'paytirish amalida qo'shishga nisbatan distributivlik xossasi o'rinli, ya'ni

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad \text{yoki} \quad (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C;$$

5. Matritsalar songa ko'paytirish va matritsalar matritsaga ko'paytirish orasida quyidagi xossa o'rinli, ya'ni

$$\lambda \cdot (A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B);$$

6. Matritsalar ko'paytirish amali uchun guruhlash xossasi o'rinlidir, ya'ni

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$$

Shuni ta'kidlab o'tish lozimki, $A \cdot B$ ko'paytma mavjud ekanligidan $B \cdot A$ ning mavjud ekanligi kelib chiqmaydi, sababi $A \cdot B$ ko'paytmani aniqlashda A –matritsaning ustunlar soni B- matritsaning satrlar soniga teng bo'lishi kerak, bunda B matritsaning ustunlar soni A-matritsaning satrlar soniga teng bo'lmasligi ham mumkin, shuning uchun $B \cdot A$ ko'paytmani har doim aniqlab bo'lmas ekan. Masalan:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

matritsalar uchun $A \cdot B$ ni aniqlash mumkin, lekin $B \cdot A$ ni aniqlab bo'lmaydi.

Yana shuni ta'kidlash kerakki $A \cdot B$ va $B \cdot A$ ko'paytmalar mavjud bo'lgan taqdirda ham $A \cdot B = B \cdot A$ tenglik o'rinli bo'lmasligi mumkin.

Masalan:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

matritsalar uchun $A \cdot B$ ko'paytma matritsaning o'lchami 3×3 bo'lsa, $B \cdot A$ niki esa 2×2 . Demak, tabiiy ravishda $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Endi matritsa rangi tushunchasini kiritamiz. O'lchami $m \times n$ bo'lgan A- matritsa berilgan bo'lsin. $k = \min\{m, n\}$ deb olsak, A matritsada satr yoki ustunlarni o'chirish natijasida tartibi k dan oshmaydigan bir nechta kvadrat matritsalar hosil qilishimiz mumkin. Mana shu kvadrat matritsalar determinantlari berilgan A-matritsaning minorlari deb aytiladi.

5-ta'rif. A matritsaning rangi deb uning noldan farqli minorlarining eng yuqori tartibiga aytilib, $r(A)$ orqali belgilanadi.

Bu ta'rifdan, agar $A \neq 0$ va A matritsa o'lchami $m \times n$ bo'lsa, u holda $r(A) \leq \min\{m, n\}$ bo'lar ekan.

Endi A n -tartibli kvadrat matritsa bo'lsin. U holda

$$A \cdot E = E \cdot A = A \quad \text{va} \quad O \cdot A = A \cdot O = O$$

munosabatlar o'rinli ekanligini ko'rish qiyin emas.

Natural k son uchun quyidagi tenglik orqali

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k\text{-marta}}$$

A matritsaning « k -darajasi» ni aniqlaymiz.

Shartli ravishda $A^0 = E$ va $A^1 = A$ deb qabul qilinadi.

Agar A matritsa elementlarining tartib raqamlarini o'zgartirmagan holda satrlarini ustun yoki ustunlarini satr qilib almashtirsak, hosil bo'lgan yangi matritsa A matritsaning transponirlangani deb

nomlanib, A' (yoki A^T) shaklda belgilanadi. Masalan, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ bo'ladi.

A matritsani A' ga almashtirish matritsani transponirlash deb nomlanadi. Transponirlash quyidagi xossalarga ega:

1. $(A')' = A$
2. $(\lambda A)' = \lambda \cdot A'$
3. $(A + B)' = A' + B'$
4. $(A \cdot B)' = B' \cdot A'$

Bu xossalarning isbotini ham o'quvchiga havola qilamiz.

Nazorat uchun savollar

1. Matritsa nima?
2. Matritsalar ustida qanday amallar bajarilishi mumkin?
3. Qanday matritsalarini ko'paytirish mumkin?

Mustaqil ish topshiriqlari:

1. Minor va algebraik to'ldiruvchi orasida qanday farq bor?
2. Kvadrat matritsa deb qanday matritsaga aytamiz?

MA`RUZA 7

DETERMINANTLAR

Dars o'quv maqsadi: Determinantlar va uning xossalari bilan tanishtirish hamda determinantlar
Tayanch iboralar: Determinant, determinant bosh diagonal elementlari, determinant tartibi.
Ma'ruza rejasi

1. Determinant ta'rif.
2. Determinant tartiblari va uni pasaytinish.
3. Determinantlarni hisoblash.

Determinantlar

Matematika va uning tatbiqlarida, xususan iqtisodagi tatbiqlarida chiziqli tenglamalar sistemasini yechishga to'g'ri keladi. Bunday sistemalarni yechishda, ular bilan bog'liq bo'lgan kvadrat matritsalarini xarakterlash uchun determinant deb nomlanuvchi son mos qo'yiladi. Bu son $|A|$ yoki $\det(A)$ shaklida ifoda etiladi. Kvadrat matritsa determinantini, uning tartibi n -bo'yicha induksiya metodi orqali ta'riflaymiz.

$n=1$ bo'lsin, ya'ni $A=(a_{11})$ 1-tartibli matritsa bo'lsin, A -matritsaning determinanti deb $|A|=a_{11}$ sonini olamiz.

$n-1$ tartibli barcha kvadrat matritsalar uchun ularning determinanti aniqlangan bo'lsin deb faraz qilamiz.

1-ta'rif. n -tartibli $A=(a_{ij})$ matritsa a_{ij} elementining M_{ij} -minori deb, A -matritsaning i -satri va j -ustunini o'chirishdan keyin hosil bo'lgan $(n-1)$ tartibli matritsa determinantiga aytiladi.

2-ta'rif. n -tartibli $A=(a_{ij})$ matritsa a_{ij} -elementining algebraik to'ldiruvchisi A_{ij} - deb quyidagi songa aytiladi

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Yig'indi $\sum_{s=1}^n a_{is} A_{is}$ - i -satr bo'yicha yoyilma, $\sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj}$ yig'indi esa, j -ustun bo'yicha yoyilma deb ataladi.

3-ta'rif. n -tartibli kvadrat $A=(a_{ij})$ matritsaning determinanti deb, quyidagi tenglik bilan aniqlangan songa aytiladi:

$$|A| = \sum_{k=1}^n a_{1k} A_{1k} \quad (1)$$

Bu ta'rifdan foydalanib 2- va 3-tartibli determinantlarni hisoblash uchun quyidagi formulalarni hosil qilamiz:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^2 a_{1k} A_{1k} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^3 a_{1k} A_{1k} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+ a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

1-teorema (Laplas teoremasi). Istalgan i va j lar uchun

$$\sum_{s=1}^n a_{is} A_{is} = \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj} = |A| \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, n} \quad (2)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Ya'ni n -tartibli A -matritsa uchun uning barcha yoyilmalari uning determinantiga teng bo'lar ekan.

1-xossa. Agar A -matritsaning biron-bir satridagi (ustunidagi) barcha elementlari nolga teng bo'lsa, u holda uning determinanti nolga teng bo'ladi.

Haqiqatan ham, agar matritsaning i -satri elementlari $a_{ik} = 0$, $k = \overline{1, n}$ bo'lsa, (1) formuladan $|A| = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Agar matritsaning j -ustun elementlari $a_{kj} = 0$, $k = \overline{1, n}$ bo'lsa, Laplas teoremasidan, ya'ni (2) tenglikdan $|A| = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

2-xossa. Agar A -matritsaning biron-bir satr (ustun) elementi λ soniga ko'paytirilsa, determinant qiymati ham λ soniga ko'payadi, ya'ni $\lambda \cdot |A|$ ga teng bo'ladi.

Bu xossaning isboti (1) tenglikdan to'g'ridan-to'g'ri kelib chiqadi, chunki

$$\sum_{k=1}^n (\lambda \cdot a_{ik}) \cdot A_{ik} = \lambda \cdot \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} = \lambda \cdot |A|.$$

Xossaning ustun holi uchun isboti, Laplas teoremasi, ya'ni (2) tenglikdan kelib chiqadi.

3-xossa. A -matritsa va uning transponirlangani A' matritsalarining determinantlari teng bo'ladi, ya'ni $|A| = |A'|$ tenglik o'rinlidir.

Bu xossaning isboti to'g'ridan-to'g'ri Laplas teoremasi, ya'ni (2)- tenglikdan kelib chiqadi. Chunki transponirlangan A' matritsa uchun (1) tenglikni, ya'ni satr bo'yicha yoyilmasini qarasaq, bu yoyilma A matritsa uchun ustun bo'yicha yoyilmadan iborat bo'ladi, u holda (2) tenglikdan bu $|A|$ ga tengligi kelib chiqadi. Demak $|A'| = |A|$ ekan.

4-xossa. Agar A -matritsaning ikkita qo'shni satrlari o'rnini almashtirsak, hosil bo'lgan yangi A_1 matritsaning determinanti A -matritsa determinantining teskari ishora bilan olinganiga teng bo'ladi, ya'ni $|A_1| = -|A|$ tenglik o'rinli bo'ladi.

A_1 matritsa A matritsaning i - va $i+1$ - satrlari o'rnini almashtirishdan hosil bo'lgan bo'lsin, agar A_1 matritsaning $i+1$ satri bo'yicha yoyilmasini qarasaq, ya'ni

$$|A_1| = \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{i+1+k} M_{ik} = - \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{i+k} M_{ik} = -|A|$$

ekani kelib chiqadi. Demak, bu holda 4-xossa isbot bo'ldi.

Endi A_1 matritsa A -matritsadan i va j satrlarining ($i < j$) o'rinlarini almashtirishdan hosil bo'lgan bo'lsin, u holda bu almashtirishni ketma-ket keluvchi satrlar o'rnini almashtirish orqali ifodalash mumkin bo'ladi. Aytaylik $j = i + m$ ko'rinishda bo'lsin. $i, i+1, i+2, \dots, i+m-1, i+m$ satrlar joylashuvidan $i+m, i+1, i+2, \dots, i+m-1, i$ -satrlar joylashuviga o'tish kerak, buni quyidagicha bajarish mumkin.

$i, i+1, i+2, \dots, i+m-1, i+m \rightarrow i+1, i, i+2, \dots, i+m-1, i+m \rightarrow \dots \rightarrow i+1, i+2,$
 $\dots, i+m-1, i+m, i$

bu o'tishlar soni m ga teng, so'ngra

$i+1, i+2, \dots, i+m, i+m-1, i \rightarrow \dots, i+m, i+1, i+2, \dots, i+m-2, i+m-1, i$ -bu o'tishlar soni $m-1$ ga teng.

Demak, jami $m + m - 1 = 2m - 1$ qadamli o'tishlar bor ekan va A -matritsa determinanti o'z ishorasini toq marta o'zgartirar ekan, u holda $|A_1| = -|A|$ bo'ladi.

5-xossa. Agar A -matritsa bir xil ikki satrga (ustunga) ega bo'lsa, u holda uning determinanti nolga teng $|A| = 0$ bo'ladi.

Chunki, agar A -matritsaning i - va j -satrlari bir xil bo'lsa, u holda ularning o'rinlarini almashtirishdan hosil bo'lgan matritsa A_1 uchun $A_1 = A$ va $|A_1| = -|A|$ bo'lishi kerak, ya'ni $|A| = -|A|$, bundan esa $|A| = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

6-xossa. Agar A -matritsada ikki satrning (ustun) mos elementlari proporsional bo'lsa, u holda uning determinanti nolga teng, ya'ni $|A| = 0$ bo'ladi.

Faraz qilaylik, A -matritsaning i -satri mos elementlari j -satrning mos elementlariga proporsional bo'lsin, ya'ni

$$a_{ik} = \lambda a_{jk}, \quad k = \overline{1, n} \quad (3)$$

tengliklar o'rinli bo'lsin, (λ -proporsional koeffitsenti), u holda, agar A_1 matritsani A matritsaning j-satri elementlarini uning i-satri elementlari bilan almashtirishdan hosil bo'lgan matritsa deb qarash, u holda (3) tenglik va 2-xossaga ko'ra $|A| = \lambda \cdot |A_1|$ ekanligi kelib chiqadi. 5-xossaga ko'ra $|A_1| = 0$ bo'ladi, demak $|A| = 0$ ekan.

7-xossa. Agar A matritsaning biron satr (ustun) elementlarini boshqa satr (ustun) mos elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirib yig'indi hosil qilsak, bunday yig'indi nolga teng bo'ladi, ya'ni

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = 0, \quad i \neq j.$$

Agar A - matritsaning j-satr elementlarini uning i-satr elementlari bilan almashtirishdan hosil bo'lgan matritsani A_1 desak, 5-xossaga ko'ra $|A_1| = 0$ bo'ladi. Agar A_1 matritsaning j-satri bo'yicha yoyilmasini olsak, determinantning ta'rifiga ko'ra

$$|A_1| = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = 0$$

ekanligi kelib chiqadi.

Bu yerda 7-xossa va Laplas teoremasiga ko'ra quyidagi natijani hosil qilamiz.

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} |A|, & \text{agar } i = j \text{ bo'lsa} \\ 0, & \text{agar } i \neq j \text{ bo'lsa} \end{cases} \quad (4)$$

8-xossa. A matritsaning biron-bir satri (ustuni) elementlarini bir xil songa ko'paytirib, boshqasiga qo'shishdan hosil bo'lgan A_1 - matritsaning determinanti A matritsa determinantiga teng bo'ladi, ya'ni $|A_1| = |A|$.

Ushbu matritsalar berilgan bo'lsin,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} + \lambda a_{j1} & a_{i2} + \lambda a_{j2} & \cdots & a_{in} + \lambda a_{jn} \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

U holda 4-tenglikdan,

$$|A_1| = \sum_{k=1}^n (a_{ik} + \lambda a_{jk}) A_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} + \lambda \sum_{k=1}^n a_{jk} A_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot A_{ik} = |A|,$$

ya'ni 8-xossa isboti kelib chiqadi.

9-xossa. b_1, b_2, \dots, b_n sonlarni n-tartibli A matritsaning berilgan satr (ustun) mos elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytmasining yig'indisi, A matritsaning berilgan satr (ustun) elementlarining b_1, b_2, \dots, b_n sonlari bilan almashtirilgan matritsa determinantiga teng bo'ladi.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ va } B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$|B| = \sum_{k=1}^n b_k A_{ik}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Quyidagi xossani isbotsiz keltiramiz.

10-xossa. n-tartibli kvadrat A va B matritsalar uchun $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ tenglik o'rinli bo'ladi, ya'ni matritsalar ko'paytmasining determinanti, ularning determinantlari ko'paytmasiga teng bo'ladi.

Nazorat uchun savollar

1. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlarni hisoblash formulasini yozing.
2. p -tartibli determinant qanday hisoblanadi?

Mustaqil ish topshiriqlari:

1. Determinantning yossalari.
2. Determinantning tartibini pasaytirish usuli.

MA`RUZA 8

TESKARI MATRITSA.

Dars o'quv maqsadi: Teskari matrisani qurish bosqichlarini o'rgatish hamda minor, algebraik to'ldiruvchi tushunchasi bilan tanishtirish.

Tayanch iboralar: Matritsa, minor, algebraik to'ldiruvchi, determinant, teskari matritsa, matritsa rangi.

Ma'ruza rejasi

1. Teskari matritsa. ta'rif.
2. Teskari matritsa qurishda minor va algebraik to'ldiruvchi.
3. Teskari matritsa qurish qoidasi va uni tekshirish.

Teskari matritsa.

1-ta'rif. A kvadrat matritsaga teskari matritsa deb, shunday A^{-1} matritsaga aytiladiki, uning uchun quyidagi $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ tenglik o'rinli bo'lsin.

2-ta'rif. Agar A matritsa uchun $|A| \neq 0$ bo'lsa, bunday matritsa xos bo'lmagan matritsa, aks holda, ya'ni $|A| = 0$ bo'lsa xos matritsa deyiladi.

1-teorema. A kvadrat matritsaga teskari A^{-1} matritsa mavjud va yagona bo'lishi uchun, uning xos bo'lmagan matritsa bo'lishi zarur va yetarlidir.

Zarurligi. Agar A matritsa uchun unga teskari A^{-1} matritsa mavjud bo'lsa, u holda $A \cdot A^{-1} = E$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bu yerdan 10-xossani e'tiborga olib, quyidagini hosil qilamiz.

$$|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |E| = 1, \quad (5)$$

demak $|A| \neq 0$ bo'lar ekan.

Yetarliligi. A -matritsa xos bo'lmagan matritsa bo'lsin, ya'ni $|A| \neq 0$ bo'lsin. U holda (4) tenglikdan, matritsalarini o'zaro ko'paytirish va matritsani songa ko'paytirish qoidasiga ko'ra,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{j1} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{j2} & \dots & A_{n2} \\ A_{1k} & A_{2k} & \dots & A_{jk} & \dots & A_{nk} \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{jn} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad (6)$$

ekanligi kelib chiqadi.

Endi teskari matritsaning yagona ekanligini ko'rsatamiz. Agar B matritsa A matritsa uchun teskari matritsa bo'lsa, $B = A^{-1}$ ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham

$$B = B \cdot E = B \cdot (A \cdot A^{-1}) = (B \cdot A) \cdot A^{-1} = E \cdot A^{-1} = A^{-1}$$

Demak, $B = A^{-1}$ ekan.

(5) tenglikdan $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ ekanligi kelib chiqadi.

3-ta'rif. Matritsa ustidagi elementar almashtirishlar deb quyidagi almashtirishlarga aytiladi:

1. Barcha elementlari noldan iborat satrni (ustunni) tashlab yuborish.
2. Satrning (ustunning) barcha elementlarini noldan farqli songa ko'paytirish.
3. Satr (ustun) o'rinlarini almashtirish.
4. Berilgan satr (ustun) elementlariga boshqa satr (ustun) elementlarini biron songa ko'paytirib qo'shish.
5. Matritsani transponirlash.

2-teorema. Matritsa rangi uning ustida elementar almashtirishlarni bajarish natijasida o'zgarmaydi.

Bu teorema isboti yuqorida keltirilgan determinantlar xossalaridan kelib chiqadi. Xuddi shuningdek matritsa rangi uchun quyidagi xossalar o'rinli ekanligini ko'rsatish mumkin:

1. $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$
2. $r(A + B) \geq |r(A) - r(B)|$
3. $r(AB) \leq \min \{r(A), r(B)\}$
4. $r(A'A) = r(A)$
5. Agar A va B lar kvadrat matritsalar bo'lib, $|B| \neq 0$ bo'lsa, u holda $r(AB) = r(A)$ bo'ladi.

$A = (a_{ij}) \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}$ bo'lsin, uning satrlaridan quyidagi satr-vektorlarni hosil qilamiz.

$$I_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \quad I_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, I_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

Berilgan I_1, I_2, \dots, I_m satrlar chiziqli bog'liq deyiladi, agarda shunday $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ sonlar mavjud bo'lsaki, ulardan biron-tasi noldan farqli bo'lib, $\lambda_1 I_1 + \lambda_2 I_2 + \dots + \lambda_m I_m = 0$ tenglik o'rinli bo'lsa, bu yerda $0 = (0, 0, \dots, 0)$ -hos vektor, aks holda ular chiziqli erkli satrlar deyiladi. Demak, agar berilgan satrlar chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda biron-bir satr qolganlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'ladi. Aytaylik $\lambda_m \neq 0$ bo'lsa, u holda $I_m - m$ -sitr qolganlarining chiziqli kombinatsiyasi, ya'ni $I_m = -\frac{\lambda_1}{\lambda_m} I_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_m} I_2 - \dots - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} I_{m-1}$ bo'lar ekan. Agarda I_1, I_2, \dots, I_m satrlar chiziqli erkli bo'lsa, u holda $\lambda_1 I_1 + \lambda_2 I_2 + \dots + \lambda_m I_m = 0$ tenglikdan $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Xuddi shuningdek ustun-vektorlar uchun yuqoridagilarni aytish mumkin.

Matritsalar uchun quyidagi teoremlar o'rinli bo'ladi.

3-teorema. Matritsa uchun uning chiziqli erkli satrlarning maksimal soni chiziqli erkli ustunlarning maksimal soniga teng bo'ladi.

4-teorema. Matritsa rangi undagi chiziqli erkli satrlarning (ustunlarning) maksimal soniga teng bo'ladi.

Matritsa rangini topish uchun matritsa ustida elementar almashtirishlar bajarish natijasida bu matritsani uchburchak yoki trapetsiya ko'rinishiga olib kelish mumkin, ya'ni

$$\begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' & \dots & a_{1r}' \\ 0 & a_{22}' & \dots & a_{2r}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr}' \end{pmatrix} - \text{uchburchak ko'rinish, } r(A) = r$$

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1r} & a'_{r+1} & \cdots & a'_{1k} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2r} & a'_{2r+1} & \cdots & a'_{2k} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{rr} & a'_{rr+1} & \cdots & a'_{rk} \end{pmatrix} - \text{trapetsiya ko'rinish, } r(A) = r$$

Takrorlash uchun savollar

1. Matritsa nima?
2. Minor va algebraik to'ldiruvchi orasida qanday farq bor?
3. Teskari matritsa deb qanday matritsaga aytiladi?

Mustaqil ish topshiriqlari:

1. Teskari matritsa qanday topiladi?
2. Teskari matritsani qurish qoidasi aytib bering.
3. Teskari matritsani to'g'ri tuzilganligini tekshirish usuli qanday?

MA`RUZA 9

CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI

Dars o'quv maqsadi: Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi bilan va ularni yechish usullari bilan tanishtirish

Tayanch iboralar: Chiziqli tenglamalar sistemasi, chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi, Kramer usuli, Gauss usuli, bir jinsli tenglama, kengaytirilgan matritsa, Kroneker- Kapelli teoremasi.

Ma'ruza rejasi

1. Chiziqli tenglamalar sistemasining umumiy ko'rinishi va uning yechimi.
2. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi
3. Ko'p tarmoqli iqtisod modeli (Balans modeli)

Chiziqli tenglamalar sistemasining umumiy ko'rinishi va uning yechimi

n ta noma'lum va m ta tenglamadan iborat chiziqli tenglamalar sistemasi deb quyidagi sistemaga aytiladi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ - & - & - & - & - & - \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ - & - & - & - & - & - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \quad (1)$$

bu yerda $a_{ij}, b_i (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$ - berilgan sonlar bo'lib, a_{ij} - noma'lumlar oldidagi koeffitsientlar, b_i - ozod hadlar deyiladi.

1-ta'rif. (1) tenglamalar sistemasidagi noma'lum x_1, x_2, \dots, x_n larning o'rniga mos ravishda c_1, c_2, \dots, c_n sonlarni qo'yish natijasida ushbu

Oxirgi tenglikdan $x_j = \frac{1}{\Delta} (b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \dots + b_n A_{nj}) = \frac{\Delta_j}{\Delta}$, $\Delta_j = \overline{1, n}$ yekanligi kelib chiqadi.

Demak, quyidagi teorema o'rinli yekan.

1-teorema (Kramer teoremasi). Agar sistema determinanti $\Delta \neq 0$ bo'lsa, u holda (1) sistema yagona yechimga yega bo'lib, bu yechim quyidagi formulalar orqali topiladi.

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1, n} \quad (4)$$

Teoremadagi (4) formula Kramer formulasi deb nomlanadi. (1) tenglamalar sistemasini (3)-(4) formulalar orqali yechilishi yesa Kramer yoki determinantlar usuli deyiladi. Shuni ta'kidlash kerakki, bu usullarni tenglamalar soni noma'lumlar soniga teng bo'lgan holdagina qo'llash mumkin. Yendi umumiy holda qo'llaniladigan usul-Gauss usulini bayon qilamiz. Gauss usuli noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish usuli deb ham nomlanadi.

Chiziqli tenglamalar sistemasi ustida bajariladigan yelemantar almashtirish deb quyidagilarga aytiladi: (1) Sistemadagi biron-bir tenglamani noldan farqli songa ko'paytirish, tenglamalar o'rnini almashtirish va biron-bir tenglamani songa ko'paytirib, boshqa bir tenglamaga qo'shish. Mana shu almashtirishlar natijasida hosil bo'lgan yangi tenglamalar sistemasi avvalgisiga yekvivalent, ya'ni yechimlar to'plami ikkala sistema uchun bir xil bo'ladi.

(1) sistema matritsasi va ozod hadlar ustuni yordamida kengaytirilgan matritsa hosil qilamiz,

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & | & b_2 \\ \hline & & & & & | & \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & | & b_m \end{array} \right)$$

Yuqoridagi ta'kidlangan almashtirishlar natijasida, bu matritsa quyidagi ko'rinishlardan biriga kelishi mumkin:

$$\text{a) } \left(\begin{array}{cccc|c} x_{i1} & x_{i2} & x_{i3} & \dots & x_{in} & \\ \hline c_{11} & c_{12} & c_{11} & \dots & c_{1n} & | & d_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & \dots & c_{2n} & | & d_2 \\ \hline & & & & & | & \\ \hline 0 & 0 & \dots & \dots & c_{mn} & | & d_n \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} c_{ii} \neq 0, \quad i = \overline{1, n} \\ m = n, \quad r(A) = r(\bar{A}) = n \end{array} \quad \text{bu}$$

holda yechim yagona;

$$\text{â) } \left(\begin{array}{cccc|c} x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{in} & \\ \hline c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & | & d_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} & | & d_2 \\ \hline & & & & & | & \\ \hline 0 & 0 & \dots & c_{mn} & | & d_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & | & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} c_{ii} \neq 0, \quad i = \overline{1, n} \\ m > n, \quad r(A) = r(\bar{A}) = n \end{array}$$

bu holda yechim yagona;

$$\begin{array}{c}
 x_i \quad x_{i1} \cdots x_{i1} \cdots x_{in} \\
 \left(\begin{array}{cccc|c}
 c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1n} & | & d_1 \\
 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2n} & | & d_2 \\
 \hline
 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & \cdots & c_{rn} & | & d_r \\
 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & | & 0 \\
 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & | & 0
 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l}
 c_{ii} \neq 0, \quad i = \overline{1, n} \\
 r(A) = r(\overline{A}) = r, \quad r < n
 \end{array}
 \end{array}$$

bu holda sistema cheksiz ko'p yechimga yega bo'ladi.

$$\begin{array}{c}
 x_{i1} \quad x_{i2} \quad \cdots x_{ir} \cdots x_{in} \\
 \left(\begin{array}{cccc|c}
 c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1n} & | & d_1 \\
 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2n} & | & d_2 \\
 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & \cdots & c_{rn} & | & d_r \\
 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & | & d_{r+1} \\
 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & | & d_m
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

$$c_{ii} \neq 0, \quad i = \overline{1, n}$$

bu yerda d_{r+1}, \dots, d_m sonlardan birontasi noldan farqli, bu holda

$$r(A) = r, \quad r(\overline{A}) = r + 1, \quad \text{ya'ni} \quad r(A) \neq r(\overline{A}) \quad \text{sistema yechimga yega yemas.}$$

Bu yerda i_1, i_2, \dots, i_n lar 1, 2, ..., n ning qandaydir o'rin almashtirishlaridan iborat bo'ladi. Demak, quyidagi teorema o'rinli.

2-teorema. (Kroneker-Kapelli teoremasi). Agar sistema matritsasi rangi kengaytirilgan matritsa rangiga teng bo'lsa, ya'ni $r(A) = r(\overline{A})$ bo'lsa, u holda sistema birgalikda bo'ladi, ya'ni yechimga yega bo'ladi.

Demak, biz quyidagi xulosalarni qilishimiz mumkin yekan.

1. Agar $r(A) = r(\overline{A})$ bo'lsa, sistema birgalikda bo'ladi.
2. Agar $r(A) \neq r(\overline{A})$ bo'lsa, sistema birgalikda bo'lmaydi.
3. Agar $r(A) = r(\overline{A}) = n$ bo'lsa, sistema yagona yechimga yega bo'ladi.
4. Agar $r(A) = r(\overline{A}) < n$ bo'lsa, sistema cheksiz ko'p yechimga yega bo'ladi.

Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi

Agar chiziqli tenglamalar sistemasi (1) da ozod hadlar nolga teng bo'lsa, ya'ni $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ bo'lsa, hosil bo'lgan tenglamalar sistemasi bir jinsli tenglamalar sistemasi deyiladi, ya'ni

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = 0 \\ \text{-----} \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Bu sistema kengaytirilgan matritsaning oxirgi ustuni yelemntlari nolga teng bo'lgani uchun sistema matritsasi va kengaytirilgan matritsalar rangi teng bo'ladi, ya'ni $r(A) = r(\bar{A})$ bo'ladi. Shuning uchun Kroneker-Kaspelli teoremasiga ko'ra bir jinsli tenglamalar sistemasini har doim birgalikda bo'ladi. Masalan, $(0, 0, \dots, 0) = 0$ sistemasining trivial yechimi (nol yechim) bo'ladi.

(5) tenglamalar sistemasining matritsa ko'rinishi quyidagidan iborat:

$$AX = 0. \quad (6)$$

Yuqorida keltirilgan 1-4 xulosalarga ko'ra, agar $r(A) = n$ bo'lsa (5)-sistema yagona, nol yechimga yega, agarda $r(A) < n$ bo'lsa, cheksiz ko'p yechimga yega bo'ladi. Demak $m = n$ bo'lgan holda (5) sistema noldan farqli yechimga yega bo'lishi uchun uning determinanti nolga teng bo'lishi zarur va yetarli bo'lar yekan.

Agar (5) sistemada $m < n$ bo'lsa, ya'ni tenglamalar soni noma'lumlar sonidan kichik bo'lsa, (5) sistema albatta noldan farqli yechimlarga yega bo'ladi (cheksiz ko'p), chunki bu holda $r(A) \leq m$ va demak $r(A) < n$ bo'ladi.

Shuni ta'kidlash kerakki, agar

$X_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ va $X_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ vektorlar (6) sistema yechimi bo'lsa, u holda istalgan λ_0 va λ_1 sonlar uchun, $\lambda_0 X_0 + \lambda_1 X_1$ -vektor ham (6) sistema yechimi bo'ladi, haqiqatan ham,

$$A(\lambda_0 X_0 + \lambda_1 X_1) = \lambda_0 AX_0 + \lambda_1 AX_1 = \lambda_0 0 + \lambda_1 0 = 0. \quad (7)$$

Bu tengliklar matritsalarini qo'shish, songa ko'paytirish va ko'paytirish ta'riflaridan kelib chiqadi.

(7) tenglikdan shuni xulosa qilish mumkinki, (6) sistema yechimlarining chiziqli kombinatsiyasi ham (6)-sistemasining yechimi bo'lar yekan.

5-ta'rif. Agar (6) sistemasining X_1, X_2, \dots, X_k -chiziqli yerikli yechimlar sistemasini berilgan bo'lib, bu sistemasining istalgan X yechimi ularning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lsa, ya'ni shunday $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sonlar mavjud bo'lsaki,

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_k X_k$$

bo'lsa, u holda bu sistema fundamental yechimlar sistemasini deyiladi

Ta'rifda $X_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$, $i = 1, 2, \dots, k$, ko'rinishda bo'lgani uchun, $k \leq n$ bo'ladi.

3-teorema. Agar (6) sistema uchun $r(A) < n$ bo'lsa, u holda istalgan fundamental yechimlar sistemasini $k = n - r(A)$ ta yechimdan iborat bo'ladi.

Nazorat uchun savollar

1. Chiziqli tenglamalar sistemasini deb qanday sistemaga aytiladi?
2. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer usuli.
3. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli.

Mustaqil ish topshiriqlari:

1. Kroneker- Kapelli teoremasi.
2. Qaysi hollarda yagona yechim, qaysi hollarda cheksiz ko'p yechim bo'ladi?
3. Balans modeli nima?

MA`RUZA 10

KETMA - KETLIKLARNING LIMITI. FUNKSIYA TUSHUNCHASI. UZLUKSIZ FUNKSIYA

Dars o'quv maqsadi: Sonlar ketma-ketligi va uning limitini o'rgatish, funksiya va uning xossalari bilan tanishtirish

Tayanch iboralari: Limit, cheksiz kichik miqdorlar, funksiya, uzluksizlik, noaniqliklar.

Ma`ruza rejasi

1. Sonli ketma-ketlikning limiti.
2. Funksiya tushunchasi. Funksiya limiti
3. Uzluksiz funksiyalar va ularning asosiy xossalari.
4. Noaniqliklar

Sonli ketma-ketliklar limiti

N - natural sonlar to'plamida berilgan funksiya sonlar ketma-ketligi deb yuritiladi, ularni $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ yoki $x_1, x_2, \dots, x_n \dots$ ko'rinishlarda ifodalaymiz.

1-ta'rif. $\varepsilon > 0$ va a son uchun $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ interval a ning ε -atrofi deyiladi. Agar $a=0$ bo'lsa, $(-\varepsilon, \varepsilon)$ interval qisqacha ε -atrof deyiladi.

2-ta'rif. Agar istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun, ε -atrofdan tashqarida $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning chekli sondagi hadi bo'lsa, u holda $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik deyiladi. Bu hol

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

shaklda ifodalanib, n cheksizlikka intilganda x_n ketma-ketlikning limiti 0 ga teng yoki $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik 0 ga yaqinlashadi deb aytiladi.

2-ta'rifni unga teng kuchli bo'lgan, o'zgacha ko'rinishda ham aytish mumkin. Agar istalgan $\varepsilon > 0$ cheksiz kichik son uchun shunday $n_0(\varepsilon)$ natural son mavjud bo'lsaki, istalgan $n \geq n_0(\varepsilon)$ bo'lgan natural n son uchun $|x_n| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ deyiladi.

Endi cheksiz kichik ketma-ketliklar xossalarini keltiramiz.

1) Agar $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ va $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ bo'lsa, u holda $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = 0$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ bo'lganda, istalgan α son uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha x_n = 0$; Haqiqatan ham, agar $\alpha = 0$ bo'lsa, $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 \cdot x_n = 0$ ekanligi ravshan. Agar $\alpha \neq 0$ bo'lsa, u holda $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $n_0(\varepsilon)$ natural son

mavjudki, $n \geq n_0(\varepsilon)$ bo'lganda $-\frac{\varepsilon}{|\alpha|} < x_n < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. U holda $n \geq n_0(\varepsilon)$ bo'lganda $-\varepsilon < \alpha x_n < \varepsilon$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha x_n = 0$.

3) Agar $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ va $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ bo'lsa, u holda $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$; chunki $\varepsilon > 0$ son uchun shunday n_1 va n_2 natural sonlar mavjudki, barcha $n \geq n_1$ uchun $|x_n| < \sqrt{\varepsilon}$ va barcha $n \geq n_2$ uchun

$|y_n| < \sqrt{\varepsilon}$ bo'ladi, u holda barcha $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ lar uchun $|x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon}$, ya'ni $|x_n y_n| < \varepsilon$

Demak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0.$$

4) Agar $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ bo'lsa, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'ladi. Chunki $\varepsilon = 1$ son uchun shunday n_0 natural son mavjudki, istalgan $n \geq n_0$ uchun $|x_n| < 1$ o'rinli bo'ladi. Agar biz $K = \max_{1 \leq n < n_0} |x_n|$ deb olsak, istalgan natural n son uchun $|x_n| < K + 1$ tengsizlik o'rinli bo'ladi, ya'ni $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning chegaralangan ketma-ketlik ekanligi kelib chiqadi.

5) Agar $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ chegaralangan ketma-ketlik bo'lsa, u holda $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, ya'ni $\{x_n y_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik ham cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.

Haqiqatan ham $K > 0$ son uchun, barcha natural n larda $|y_n| < K$ bo'lsin. $\varepsilon > 0$ son uchun shunday n_0 mavjudki, barcha $n \geq n_0$ lar uchun $|x_n| < \frac{\varepsilon}{K}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. U holda barcha

$n \geq n_0$ uchun $|x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon$ Demak, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$.

6) Agar barcha n larda $0 \leq x_n \leq y_n$ tengsizlik o'rinli bo'lib $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ bo'lsa, u holda $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ bo'lganligi uchun, $\forall \varepsilon > 0$ son uchun $(-\varepsilon, \varepsilon)$ atrofdan tashqarida $\{x_n\}$ ketma-ketlikning ham chekli elementi yotadi, ya'ni $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

7) Agar barcha n larda $x_n \leq z_n \leq y_n$ tengsizlik o'rinli bo'lib, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ va $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ bo'lsa, u holda $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ bo'ladi. Ma'lumki, $x_n \leq z_n \leq y_n$ tengsizlikdan $0 \leq z_n - x_n \leq y_n - x_n$ tengsizlik kelib chiqadi. 1-xossaga ko'ra $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$, bundan 6-xossaga ko'ra $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n - x_n) = 0$. U holda yana 1-xossaga ko'ra $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [(z_n - x_n) + x_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n - x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

3-ta'rif. $R \supset A$ to'plam berilgan bo'lsin. Agar shunday K son topilib, istalgan $x \in A$ uchun $x \leq K$ ($K \leq x$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda A to'plam yuqoridan (quyidan) chegaralangan to'plam deyiladi. Bunda K son A to'plamning yuqori (quyi) chegarasi deyiladi. Agar A yuqoridan ham quyidan ham chegaralangan bo'lsa, bunday to'plam chegaralangan deyiladi.

4-ta'rif. Agar $x < K$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $\forall x \in A$ son uchun $x < a \leq K$ ($x > a \geq K$) tengsizlikni qanoatlantiruvchi $a \in A$ element mavjud bo'lsa, K son A to'plamning aniq yuqori (aniq quyi) chegarasi deyiladi va $\sup A = k$ ($\inf A = K$) ko'rinishda yoziladi.

1-teorema. Agar A to'plam yuqoridan va quyidan chegaralangan bo'lsa $\sup A$ ($\inf A$) chekli son bo'ladi.

2-teorema. Agar $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik o'suvchi (kamayuvchi) bo'lib $\sup\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = 0$ ($\inf\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = 0$) bo'lsa, u holda $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ bo'ladi.

5-ta'rif. Agar istalgan $M > 0$ son uchun $(-M; M)$ atrof ichida $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning chekli sondagi hadi bo'lsa, u holda bu ketma-ketlik cheksiz katta ketma-ketlik deyiladi. Bu hol

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

shaklda ifodalanib, n cheksizlikka intilganda x_n ketma-ketlik limiti cheksizlikka teng, yoki cheksizlikka intiladi deb aytiladi.

Bu ta'rifda $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning biror hadidan keyingi barcha hadlari musbat bo'lsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$$

manfiy bo'lsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$$

deb ta'riflanadi.

Masalan, $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$ va $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n) = -\infty$.

5-ta'rifni unga teng kuchli bo'lgan, o'zgacha ko'rinishdagi ta'rifga almashtirish ham mumkin.

Agarda istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday n_0 nomer mavjud bo'lsaki barcha $n \geq n_0$ lar uchun $|x_n| > \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, $(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty)$ deyiladi. Agar istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday n_0 nomer mavjud bo'lsaki, barcha $n \geq n_0$ lar uchun $x_n > \varepsilon$ ($x_n < -\varepsilon$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ deyiladi

6-ta'rif. Agar $\{x_n - a\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lsa, u holda $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik limiti a songa teng (yoki a songa yaqinlashadi) deyiladi, Bu hol $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ shaklda ifoda etiladi.

Demak, agar $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a) = 0$ tenglik o'rinli bo'lsa, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ deyiladi. Bunday ketma-ketlik yaqinlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.

Ketma-ketlik limiti quyidagi xossalarga ega. Faraz qilaylik $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ va $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ bo'lsin, u holda:

1. Istalgan α va β sonlar uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha a + \beta b,$$

chunki cheksiz kichik ketma-ketlik xossalarga ko'ra,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x_n + \beta y_n - \alpha a - \beta b) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\alpha(x_n - a) + \beta(y_n - b)] = 0.$$

2. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangandir. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ bo'lsin, u holda $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a) = 0$ bo'lgani uchun $\{x_n - a\}_{n=1}^{\infty}$ chegaralangan ketma-ketlik bo'ladi, ya'ni shunday $K > 0$ son mavjudki, barcha n lar uchun $|x_n - a| < K$, u holda

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \leq |x_n - a| + |a| < K + |a|, \quad n \in N.$$

Demak, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ -chegaralangan ketma-ketlik ekan.

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n x_n = a \cdot b$.

Cheksiz kichik ketma-ketlik xossalarga ko'ra,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n - ab) = \lim_{n \rightarrow \infty} [(x_n - a)y_n + a(y_n - b)] = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a)y_n + \lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot (y_n - b) = 0 \cdot b + a \cdot 0 = 0.$$

4. $y_n \neq 0$, $n \in N$ va $b \neq 0$ bo'lsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Aniqlik uchun $b > 0$ bo'lsin, u holda $\varepsilon = \frac{b}{2}$ uchun shunday n_0 mavjudki barcha $n \geq n_0$ lar uchun

$$|y_n - b| < \frac{b}{2}.$$

U holda

$$-\frac{b}{2} < y_n - b < \frac{b}{2} \Rightarrow y_n > \frac{b}{2} > 0$$

va $0 < \frac{1}{y_n} < \frac{2}{b}$, ya'ni $\frac{1}{y_n}$ ketma-ketlik chegaralangan ekan. U holda ($n \geq n_0$ deb qarash mumkin)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n \cdot b - y_n a}{y_n \cdot b} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_n - a)b - a(y_n - b)}{y_n \cdot b} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[b \cdot (x_n - a) \cdot \frac{1}{y_n \cdot b} - a(y_n - b) \cdot \frac{1}{y_n \cdot b} \right] = 0$$

5) Biror nomerdan boshlab $x_n \leq y_n$ bo'lsa, u holda $a \leq b$. Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni $a > b$ bo'lsin, u holda $\varepsilon > 0$ sonni shunday tanlab olish mumkinki, $a - \varepsilon > b + \varepsilon$ (masalan, $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$) tengsizlik o'rinli bo'ladi, u holda shunday n_0 natural son mavjudki, barcha $n \geq n_0$ lar uchun $a - \varepsilon < x_n$ va $y_n < b + \varepsilon$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi, u holda biror $n \geq n_0$ uchun $x_n > y_n$ bo'ladi. Bu esa ziddiyatdir.

FUNKSIYA UZLUKSIZLIGI

Uzluksiz funksiyalar

1-ta'rif. x_0 nuqtaning biron-bir atrofida aniqlangan $f(x)$ funksiya uchun $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ tenglik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deb ataladi.

Agar $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$, $\left(\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0) \right)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada o'ngdan (chapdan) uzluksiz deyiladi.

Funksiya limiti xossalaridan quyidagi teorema o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

1-teorema. Agar $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

1-ta'rifni orttirmalar tilida ham aytish mumkin. Agar argumentning ikki x_0 va $x_0 + \Delta x$ qiymatlari qaralsa, Δx -argument orttirmasi deyiladi. Bu orttirmaga mos keluvchi $y = f(x)$ funksiya orttirmasi Δy quyidagicha aniqlanadi

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Agar $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Funksiya limiti xossalaridan foydalanib, uzluksiz funksiyalar uchun quyidagi teoremlarning o'rinli ekanligini ko'rsatish mumkin.

2-teorema. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, quyidagi funksiyalar ham uzluksiz bo'ladi

$$\alpha f(x) \pm \beta g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$$

bu yerda α va β istalgan sonlar bo'lib, funksiyalar nisbati qaralayotganda $g(x_0) \neq 0$ deb faraz qilinadi.

3-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $x=b$ nuqtada uzluksiz, $g(x)$ funksiya esa $x=x_0$ nuqtada uzluksiz bo'lib, $g(x_0) = b$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda murakkab $f(g(x))$ funksiya $x=x_0$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.

2-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya biron A -to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, bu funksiya A -to'plamda uzluksiz deyiladi.

Uzluksiz funksiyalarning asosiy xossalari

Quyida keltiriladigan uzluksiz funksiyalarning xossalarini teorema shaklida bayon qilamiz.

4-teorema. (Boltsano-Koshining birinchi teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda aniqlangan va uzluksiz bo'lib, oraliq chegaralarida turli ishorali qiymatlarni qabul qilsa, ya'ni $f(a) \cdot f(b) < 0$ bo'lsa, u holda (a, b) oraliqda shunday c nuqta mavjudki, bu nuqtada funksiya nolga teng, ya'ni $f(c) = 0$.

5-teorema. (Boltsano-Koshining ikkinchi teoremasi). $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'lib, oraliq chegarasida turli qiymatlarni qabul qilsa, ya'ni $f(a) = A$, $f(b) = B$ bo'lib, $A \neq B$ bo'lsa, u holda A va B sonlari orasida yotuvchi istalgan C son uchun (a, b) intervalda shunday c nuqta mavjudki, bu nuqta uchun

$$f(c) = C$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

6-teorema. (Veyershtassning birinchi teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsa, $f(x)$ funksiya bu oraliqda chegaralangan bo'ladi, ya'ni shunday m va M sonlari mavjud bo'ladiki, istalgan $x \in [a, b]$ uchun

$$m \leq f(x) \leq M$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

7-teorema. (Veyershtarssning ikkinchi teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsa, bu oraliqda $f(x)$ funksiya o'zining yuqori aniq $\sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$ va quyi aniq $\inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$ chegaralariga erishadi, ya'ni $[a, b]$ oraliqda shunday x_0 va x_1 nuqtalar mavjudki, $f(x_0) = \sup\{f(x)\}$ va $f(x_1) = \inf\{f(x)\}$.

Noaniqliklar

Ketma-ketlik va funksiyalar limitlarini hisoblayotganda quyidagi ko'rinishdagi noaniqliklar yuzaga kelishi mumkin:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

Bu yerdagi noaniqliklarning ayrimlarini boshqasi orqali ifodalash mumkin. Limitning 7-xossasiga ko'ra $\frac{1}{\infty} = 0$, $\frac{1}{0} = \infty$ simvollarni kiritishimiz mumkin. Shunga ko'ra

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot \infty = 0 \cdot \frac{1}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}, \quad 1^{\infty} = e^{\infty \ln 1} = e^{\infty \cdot 0}, \quad 0^0 = e^{0 \ln 0} = e^{\infty \cdot 0}, \quad \infty^0 = e^{0 \ln \infty} = e^{0 \cdot \infty}$$

noaniqliklar tengligini yoza olamiz, shuni ta'kidlash kerakki, bu tengliklar sonlar tengligi ma'nosiga ega bo'lmay, balki bir ko'rinishdagi noaniqlikni ikkinchi xil ko'rinishdagi noaniqlikka olib kelish

mumkinligini anglatadi. Shu holatni e'tiborga olib $\frac{0}{0}$ va $\infty - \infty$ ko'rinishidagi noaniqliklarga

misollar keltiramiz:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot x}{x} = a \lim_{x \rightarrow 0} 1 = a$$

$$4. \chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x - \text{ratsional son bo'lsa} \\ 0, & \text{agar } x - \text{irratsional son bo'lsa} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \chi(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \chi(x) - \text{limit mavjud emas.}$$

Bu misollar $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi noaniqliklardan iboratdir. Endi $\infty - \infty$ ko'rinishdagi noaniqliklarga misollar keltiramiz:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + a - x) = a$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \chi(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \chi(x) \text{ limit mavjud emas.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Shuni ta'kidlaymizki, ushbu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

limit birinchi ajoyib limit,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

esa ikkinchi ajoyib limit deb nomlanadi.

Takrorlash uchun savollar

1. Ketma-ketlik deb nimaga aytiladi?
2. Cheksiz kichik ketma-ketlik deganda qanday ketma-ketlik tushuniladi?
3. Ketma-ketlik limiti xossalari keltiring.
4. Limiti mavjud bo'lmagan ketma-ketliklarga misollar keltiring.

5. 2 ga intiluvchi 3 ta ketma-ketlik yozing.

Mustaqil ish topshiriqlari:

1. Uzlüksiz funksiya ta'rifini aytib, misollar keltiring.
2. Veyershtass teoremlarini ayting.
3. Chegaralangan ketma-ketlikka misollar keltiring.
4. Noaniqliklarni ochishga misollar keltiring.

MA`RUZA 11

FUNKSIYA HOSILASI. FUNKSIYA HOSILASINI HISOBLASH QOIDALARI

Dars o'quv maqsadi: Hosila tushunchasi, uning xossalari va jadvalini o'rganish

Tayanch iboralar: Funksiya, argument orttirmasi, funksiya orttirmasi, hosila, bir tomonlama hosilalar, kritik nuqta, maksimum, minimum, o'sish va kamayish oraliqlari, botiqlik, qavariqlik, differentsial, ekstremum

Ma`ruza rejasi

1. Hosila tushunchasi.
2. Hosilaning geometrik ma`nosi
3. Hosilani hisoblash qoidalari
4. Hosila olish jadvali

Hosila tushunchasi

Biz $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligini

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (1)$$

tenglik bajarilishi orqali ta'riflagan edik. Agar $x - x_0 = \Delta x$ - argument orttirmasi deb nomlanuvchi kattalikni kiritsak, $x \rightarrow x_0$ da tabiiy $\Delta x \rightarrow 0$. (1) limitda yangi o'zgaruvchiga $x = x_0 + \Delta x$ o'tsak, uni quydagicha yozish mumkin

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \quad (2)$$

Agar funksiya orttirmasi deb nomlanuvchi $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$ miqdorni kiritsak, (2)dan

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. Demak, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, argument orttirmasi Δx nolga intilganda, ya'ni Δx cheksiz kichik miqdor bo'lganda, unga mos keluvchi funksiya orttirmasi $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ham nolga intilishi, ya'ni cheksiz kichik miqdor bo'lishi kelib chiqadi. Shuni e'tiborga olsak, x_0 nuqtada uzluksiz bo'lgan $y = f(x)$ funksiya uchun, ushbu

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (3)$$

limit $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi noaniqlik bo'lishligi kelib chiqar ekan. Avval ko'rganimizdek bunday noaniqliklar qaralayotgan funksiya bog'liq bo'lib, (3) limit qiymati chekli, cheksiz yoki mavjud bo'lmasligi mumkin. Umuman aytganda (3)- ko'rinishdagi limitni x_0 nuqta atrofida berilgan istalgan funksiya uchun qarashimiz mumkin. Shuni ta'kidlash lozimki, agar (3) limit qaralayotgan $y = f(x)$

funksiya uchun chekli bo'lsa, u holda bu funksiya $x = x_0$ nuqtada uzluksiz bo'lishligi kelib chiqadi. Haqiqatan ham, agar

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = a$$

bo'lib, a - chekli son bo'lsa, funksiya limiti ta'rifiga ko'ra $\varepsilon > 0$ son uchun, shunday $\delta > 0$ son mavjud bo'ladiki $0 < |\Delta x| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha Δx lar uchun

$$a - \varepsilon < \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < a + \varepsilon$$

ya'ni qaralayotgan Δx lar uchun, $\Delta x > 0$ bo'lganda

$$(a - \varepsilon) \cdot \Delta x < f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < (a + \varepsilon) \cdot \Delta x \quad (4)$$

yoki $\Delta x < 0$ bo'lganda

$$(a + \varepsilon) \cdot \Delta x < f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < (a - \varepsilon) \cdot \Delta x \quad (5)$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. U holda (4) tengsizlikdan $f(x_0 + 0) = f(x_0)$ va (5) tengsizlikdan $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ ekanligini hosil qilamiz. Bundan,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0),$$

ya'ni $y = f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada uzluksiz ekanligi kelib chiqadi.

1-ta'rif. Agar ushbu limit qiymati $\lim_{\Delta x \rightarrow \Delta x} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ chekli bo'lsa, u holda $y = f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega deyiladi.

Limit qiymati $y = f(x)$ funksiyaning $x = x_0$ nuqtadagi hosilasi deyiladi, va quyidagicha belgilanishi mumkin.

$$y'(x_0), f'(x_0), \frac{dy(x_0)}{dx}, \frac{df(x_0)}{dx}, y'_x(x_0)$$

Demak, $f'(x_0)$ deb quyidagini

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

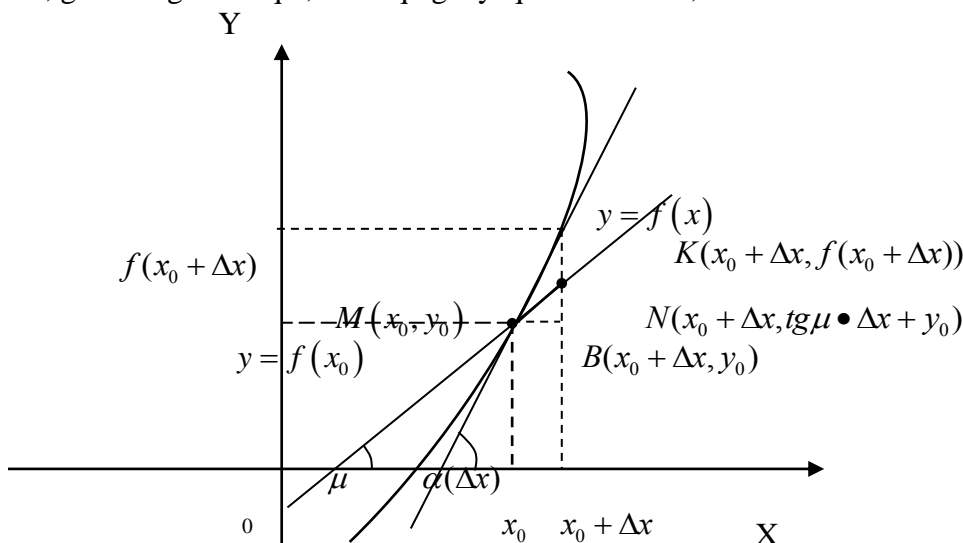
tushunar ekanmiz. Hosila ta'rifidan, agar $y = f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, bu funksiya $x = x_0$ nuqtada uzluksiz ekanligi kelib chiqar ekan. Teskari tasdiq noto'g'ri ekanligini, ushbu uzluksiz $f(x) = |x|$ funksiyaning $x = 0$ nuqtada hosilasi mavjud emasligi isbot qiladi. Haqiqatan ham, quyidagi tengliklar

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \\ \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1 \end{aligned}$$

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$ -limitning mavjud emasligini ko'rsatadi, ya'ni $f(x) = |x|$ funksiya $x = 0$ nuqtada hosilaga ega emas, ammo $f(x) = |x|$ uzluksiz funksiya.

Endi, funksiya hosilasi qanday ma'no kasb etishini ko'rib chiqaylik.

1. Hosilaning geometrik ma'nosi. Tekislikda berilgan $y = f(x)$ funksiya grafigining $M(x_0, y_0)$, (bu yerda $y_0 = f(x_0)$) nuqtasiga o'tkazilgan urinmani qaraymiz. Bu urinmani hosil qilish uchun quyidagi chizmada, avval MK kesuvchi to'g'ri chiziq o'tkazamiz. So'ngra Δx -orttirmani nolga intiltirsak, grafikdagi K -nuqta, M -nuqtaga yaqinlasha borib,



MK to'g'ri chiziq MN -urinma holatini egallaydi. U $\Delta x \rightarrow 0$ da MK to'g'ri chiziq OX -o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan $\alpha(\Delta x)$ burchagi, MN -urinma hosil qilgan φ burchakka intiladi. Bu yerda MN to'g'ri chiziq tenglamasi $y - y_0 = tg \varphi \cdot (x - x_0)$ ko'rinishda bo'lib, $x - x_0 = \Delta x$ va $tg \varphi = k$ - MN to'g'ri chiziq OX o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchak koeffitsienti ekanligini e'tiborga olsak, MN to'g'ri chiziq tenglamasi $y = k \cdot \Delta x + y_0$ ko'rinishda bo'ladi. 1-chizmada MKB uchburchak uchun $MB = \Delta x$, $KB = \Delta y$ va $tg \alpha(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ Demak,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} tg \alpha(\Delta x) = tg \varphi = k$$

ya'ni $f'(x_0) = k$ tenglikni hosil qilamiz. Shunday qilib, $y = f(x)$ funksiyaning $x = x_0$ nuqtadagi $f'(x_0)$ hosilasi shu funksiya grafigining $M(x_0, y_0)$ nuqtasiga o'tkazilgan MN urinmaning burchak koeffitsientiga teng bo'lar ekan. MN -urinmaning $y = k \cdot \Delta x + y_0$ tenglamasida $\Delta x = x - x_0$, $y_0 = f(x_0)$ va $k = f'(x_0)$. U holda $y = f(x)$ funksiya grafigining $M(x_0, y_0)$ nuqtasida o'tkazilgan urinma tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'lar ekan.

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

2. Hosilaning mexanik ma'nosi. $S = s(t)$ funksiya harakat qilayotgan jismning t -vaqt davomida bosib o'tgan yo'lini bildirsa, shu jismning $t = t_0$ vaqtdagi oniy tezligi $\mathcal{G}(t_0)$ ni topish masalasini qaraymiz. Buning uchun t -vaqtga Δt orttirma beraylik, u holda mana shu vaqt davomida jism ma'lum bir masofa $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ ni bosib o'tadi, u holda jismning Δt vaqt davomidagi o'rtacha tezligini $\mathcal{G}_{o'r} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ tenglik orqali topish mumkin. Tabiiyki o'rtacha tezlik, $t = t_0$ vaqtdagi oniy tezlik $\mathcal{G}(t_0)$ ga qandaydir xatolik bilan teng bo'ladi. Biz $|\Delta t|$ vaqt kattalikni qanchalik kichik qilib olsak, $\mathcal{G}_{o'r}$ -o'rtacha tezlik $\mathcal{G}(t_0)$ oniy tezlikka shunchalik yaqin bo'lib, xatolik kam bo'ladi. Shuning uchun,

$$\mathcal{G}(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathcal{G}_{o'r} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = S'(t_0)$$

tenglik o'rinli deya olamiz. Natijada jismning $S = s(t)$ harakat tenglamasida, yo'ldan t -vaqt bo'yicha olingan hosila, shu jismning ayni t -vaqtdagi tezligiga teng bo'lar ekan, ya'ni

$$S'(t) = \mathcal{G}(t).$$

3. Hosilaning iqtisodiy ma'nosi. Shuni ta'kidlash lozimki, hosilaning iqtisodiy ma'nosi ko'p qirrali bo'lib, muayyan ob'ektga yo'naltirilgan maqsaddan kelib chiqadi. Biz shu masalalardan birini keltiramiz. $U = U(t)$ funksiya t -vaqt davomida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi o'zgarishini bildirsin. Ishlab chiqarishning $t = t_0$ vaqtdagi mehnat unumdorligini topish masalasini ko'raylik. Buning uchun t -vaqtga Δt - orttirma beramiz, u holda mana shu vaqt davomida ma'lum miqdordagi $\Delta U = U(t_0 + \Delta t) - U(t_0)$ mahsulot ishlab chiqariladi, o'rtacha mehnat unumdorlik $Z_{o'rtta} = \frac{\Delta U}{\Delta t}$ tenglik orqali topiladi. Yuqoridagi mulohazalarga o'xshash $t = t_0$ vaqtdagi mehnat unumdorligi uchun quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$Z(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} Z_{o'rtta} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta t} = U'(t_0)$$

Demak, mahsulot hajmini vaqt bilan bog'lovchi $U(t)$ funksiyaning vaqt bo'yicha $U'(t)$ hosilasi, ishlab chiqarishning $Z(t)$ unumdorligini berar ekan, ya'ni

$$U'(t) = Z(t)$$

Endi funksiya hosilasini topishning asosiy qoidalari bilan tanishamiz.

1. Agar $f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda istalgan o'zgarimas a -son uchun $\varphi(x) = a \cdot f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lib, bu hosila quyidagi tenglik orqali topiladi $\varphi'(x_0) = a \cdot f'(x_0)$, chunki funksiya limiti xossasiga ko'ra,

$$\varphi'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a f(x_0 + \Delta x) - a f(x_0)}{\Delta x} = a \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = a \cdot f'(x_0)$$

2. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda $\varphi(x) = f(x) \pm g(x)$ funksiya ham $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lib, bu hosila quyidagi tenglik orqali topiladi.

$$\varphi'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

Haqiqatan ham, limit xossalari va hosila ta'rifiga ko'ra.

$$\begin{aligned} \varphi'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) \pm g(x_0 + \Delta x) - (f(x_0) \pm g(x_0))}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \pm \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \pm \\ &\pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \pm g'(x_0) \end{aligned}$$

3. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x = x_0$ nuqtada hosilasiga ega bo'lsa, u holda $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$ funksiya ham $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lib, bu hosila quyidagi tenglik orqali topiladi.

$$\varphi'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

Funksiya limiti xossasiga va $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega funksiya shu nuqtada uzluksiz ekanligidan, quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} \varphi'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] \cdot g(x_0 + \Delta x) + f(x_0) [g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot g(x_0 + \Delta x) + \\ &+ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0) \cdot \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \end{aligned}$$

4. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lib, $g(x_0) \neq 0$ bo'lsa, u holda $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ funksiya ham $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'ladi va bu hosila quyidagi formula orqali topiladi:

$$\varphi'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

5. Agar $u = g(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lib, $y = f(u)$ funksiya esa, $u = u_0 = g(x_0)$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda $y = f(g(x))$ murakkab funksiya $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'ladi va bu hosila quyidagi formula orqali topiladi.

$$y'_0(x_0) = f'_u(u_0) \cdot u'_x(x_0)$$

6. Agar $y = f(x)$ va $x = g(y)$ funksiyalar o'zaro teskari funksiyalar bo'lib, $x = x_0$ nuqtada $f'(x_0) \neq 0$ va $y_0 = f(x_0)$ nuqtada $g'(y_0)$ hosilalar mavjud bo'lsa, u holda $g'_y(y_0) = \frac{1}{f'_x(x_0)}$, ya'ni

$x'_y(y_0) = \frac{1}{y'_x(x_0)}$ tenglik o'rinli. Murakkab funksiya hosilasiga va $x' = 1$ ekanligini e'tiborga olib, $x = g(f(x))$ tenglikdan quyidagi kelib chiqadi.

$$1 = (x)' = (g(f(x)))'_x = g'_y(y_0) \cdot f'_x(x_0).$$

7. Agar funksiya $f(kx+b)$ ko'rinishda bo'lsa

$$(f(kx+b))' = kf'(kx+b)$$

bo'ladi. Bu tenglik murakkab funksiya hosilasidan kelib chiqadi.

Yuqoridagi qoidalar umumiy holda quyidagicha yozilishi mumkin:

$$1. (a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x), \quad a = \text{const}$$

$$2. (f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$3. (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$4. \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$$5. y = f(u), \quad u = g(x)$$

funksiyalar uchun $(f(u))'_x = f'_u(u) \cdot u'_x$.

$$6. y = f(x) \text{ va } x = g(y) \text{ o'zaro teskari funksiyalar uchun, } x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

$$7. y = f(kx+b) \text{ funksiya uchun } y' = kf'(kx+b)$$

Endi asosiy elementar funksiyalarning hosilalarini hisoblaylik.

$$1. y = c = \text{const}, \text{ u holda } (c)' = 0 \text{ bo'ladi, chunki } \Delta y = 0 \text{ bo'lgani uchun } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

$$2. y = x^\alpha \text{ darajali funksiya uchun } (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \text{ o'rinli bo'ladi.}$$

Limitning xossalari ko'ra,

$$(x^\alpha)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1 \right]}{x \cdot \frac{\Delta x}{x}} = \alpha \cdot \frac{x^\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

Xususan, $(x)' = 1$.

3. $y = a^x$ ($a > 0$) ko'rsatkichli funksiya uchun $(a^x)' = a^x \ln a$. Ajoyib limit xossalariga ko'ra

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x \cdot (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a.$$

Xususan, $(e^x)' = e^x$.

2 va 3 ning isbotida mos ravishda $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a}{x} = a$ va $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ ekanligidan foydalanildi.

4. $y = \log_a x$ logarifmik funksiya ($a > 0$, $a \neq 1$) uchun $(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x}$. Haqiqatdan ham,

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e.$$

Xususan, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

5. $y = \sin x$ uchun $(\sin x)' = \cos x$. 1-ajoyib limit va $\cos x$ funksiya uzluksizligiga ko'ra

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{2 \cdot \frac{\Delta x}{2}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Bu yerdan funksiya hosilasi xossalaridan foydalanib quyidagilarni hosil qilamiz:

$$(\cos x)' = \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right]' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

6. Teskari trigonometrik funksiyalar. $y = \arcsin x$ uchun $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ tenglik o'rinli

bo'ladi.

$x = \sin y$ funksiya $y = \arcsin x$ funksiyaga teskari bo'lgani uchun, teskari funksiya hosilasi formulasiga ko'ra

$$(\arcsin x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Xuddi shunga o'xshash, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \arccos x$ va $y = \operatorname{arcctg} x$ funksiyalar uchun

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ va } (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \text{ tengliklarni hosil qilish mumkin.}$$

Yuqorida hosil bo'lgan formulalarni quyidagi jadval ko'rinishida ifoda qilamiz.

1. $c' = 0$

2. $x' = 1$

3. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

4. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

5. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

6. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

7. $(e^x)' = e^x$

8. $(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

9. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

10. $(\sin x)' = \cos x$

11. $(\cos x)' = -\sin x$

12. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

13. $(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$

14. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

16. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

17. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Takrorlash uchun savollar

1. Hosila ta'rifini ayting.
2. Hosilaning geometrik ma'nosi nima?
3. Hosilaning fizik ma'nosi nima?

Mustaqil ish topshiriqlari:

1. Hosilani hisoblash qoidalarini keltiring?
2. Elementar funksiyalar hosilalarining jadvalini keltiring.

MA`RUZA 12

YUQORI TARTIBLI HOSILALAR, MURAKKAB FUNKSIYALARDAN HOSILA

Darsning o'quv maqsadi: Hosilani hisoblash va yuqori tartibli hosilalarni olishni o'rganish

Tayanch iboralar: Yuqori tartibli hosilalar, aralash yosilalar, differensial, yuqori tartibli differensial, murakkab funksiya.

Ma`ruza rejasi

1. Yuqori tartibli hosilalar.
2. Murakkab funksiya hosilasi
3. Funksiya differentsiali.
4. Differensial hisobning asosiy teoremlari.
5. Teylor formulasi.
6. Funksiyani hosila yordamida tekshirish va uning grafigini yasash

7. Hosilaning iqtisodiyotga tadbirlari. Mikroiqtisodiyotda chegaraviy (marjinal) xarajatlar.

Yuqori tartibli hosilalar

Agar $y = f(x)$ funksiya uchun (a, b) oraliqning har bir nuqtasida hosila mavjud bo'lsa, u holda (a, b) oraliqda yangi $f'(x)$ funksiyaning hosil qilamiz. Bu $f'(x)$ funksiya $x = x_0 \in (a, b)$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda $x = x_0$ nuqtada $y = f(x)$ funksiya ikkinchi tartibli hosilaga ega deyilib, bu hosila

$$y''(x_0), f''(x_0), \frac{d^2 y(x_0)}{dx^2}, \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}, y''_{x^2}(x_0)$$

shaklda belgilanadi. Demak, ikkinchi tartibli hosila quyidagi tenglik orqali topilar ekan:

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}$$

Xuddi shuningdek, $y = f(x)$ funksiya uchun uchinchi, to'rtinchi va n - tartibli hosilani aniqlash mumkin. Umumiy holda, agar $y = f(x)$ funksiya uchun (a, b) oraliqning har bir nuqtasida $(n-1)$ - tartibli hosilaga ega bo'lib, mana shu hosil bo'lgan funksiyaning $f^{(n-1)}(x)$ deb belgilasak, o'z navbatida $f^{(n-1)}(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, bu hosila $y = f(x)$ funksiyaning $x = x_0$ nuqtadagi n -tartibli hosilasi deyiladi. n -tartibli hosilani quyidagi ko'rinishlarda ifoda etish mumkin.

$$y^{(n)}(x_0), f^{(n)}(x_0), \frac{d^n y(x_0)}{dx^n}, \frac{d^n f(x_0)}{dx^n}, y^{(n)}_{x^n}(x_0)$$

Demak, ta'rifga ko'ra n -tartibli hosila

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}$$

tenglik orqali aniqlanar ekan. Bu tenglikni umumiy holda quyidagicha yozishimiz mumkin

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))', n = 1, 2, 3, \dots$$

bu yerda $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Yuqori tartibli hosila uchun quyidagi tengliklar o'rinli bo'ladi.

1. $(cf(x))^{(n)} = c \cdot f^{(n)}(x) \quad c = const$
2. $(f(x) + g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$
3. $(f(ax + b))^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax + b)$
4. $(f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x)$

Bu tengliklarning barchasini matematik induksiya usuli bilan isbot qilish mumkin. 4-tenglik Leybnits formulasi deb nomlanadi.

1.

Funksiya differentsiali

Matematika tadbiriqida asosan taqribiy hisoblashlar qo'llaniladi. Taqribiy hisoblashlarning muhim manbai funksiya differentsiali hisoblanadi. Biz mana shu tushuncha bilan tanishamiz.

$f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biron-bir atrofida berilgan bo'lib, x_0 nuqtada uzluksiz, ya'ni $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ bo'lsin. Agar $x - x_0 = \Delta x$ va $f(x) - f(x_0) = \Delta y$ deb belgilashlar kiritsak, Δx argument orttirmasi, Δy esa shu orttirmaga mos keluvchi funksiya orttirmasi bo'lib, yuqoridagi limit munosabatini quyidagicha yozish mumkin:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$

2-ta'rif: Agar $\Delta x \rightarrow 0$ da, funksiya orttirmasi Δy ni quyidagi ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa,

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \quad (1)$$

bu yerda A - o'zgarmas son, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0$, u holda $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differentsiallanuvchi deyiladi va funksiyaning x_0 nuqtadagi differentsiali $A \cdot \Delta x$ ga teng deb ataladi. Bu differentsial $A \cdot \Delta x = df(x_0)$ shaklda belgilanadi.

Izoh. $\alpha(\Delta x)$ funksiya uchun $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0$ tenglik $\alpha(\Delta x) = o(\Delta x)$ kabi ifoda etiladi va $\alpha(\Delta x)$ funksiya $\Delta x \rightarrow 0$ da Δx ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya deyiladi.

1-teorema. x_0 nuqtaning biron-bir atrofida berilgan $f(x)$ funksiya shu nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda x_0 nuqtada $f(x)$ funksiyaning $df(x_0)$ differentsiali mavjud bo'lib, bu differentsial uchun

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

tenglik o'rinli.

Isbot.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

tenglikda $\frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) = \alpha(\Delta x)$ belgilashni kiritsak, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$. U holda $\alpha(\Delta x) \cdot \theta(\Delta x)$ bo'lgani uchun

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x.$$

Demak, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differentsiallanuvchi va

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x \quad (2)$$

tenglik o'rinli.

Xulosa qilib shuni aytish mumkin ekanki, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada differentsiallanuvchi bo'lishi uchun, funksiyaning x_0 nuqtada hosilaga ega bo'lishi zarur va yetarli, bu nuqtadagi differentsial uchun (2) tenglik o'rinlidir.

Shunday qilib, x_0 nuqtada differentsiallanuvchi funksiya orttirmasi

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x) = df(x_0) + o(\Delta x) \quad (3)$$

Taqribiy hisoblashlarni funksiya orttirmasini uning differentsiali bilan almashtirish orqali bajarish mumkin, ya'ni (3) tenglikda $o(\Delta x)$ ni tashlab yuborsak quyidagi taqribiy

$$\Delta y \approx df(x_0)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu yerda yo'l qo'yilgan xatolik $o(\Delta x)$ ko'rinishda bo'lib, $|\Delta x|$ kichik bo'lgani sari bu xatolik $|\Delta x|$ ga nisbatan tezroq kichiklashib boradi.

Agar $f(x)$ funksiya (a, b) intervalning har bir nuqtasida differentsiallanuvchi bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda differentsiallanuvchi deyiladi.

Endi misollar qaraymiz. $f(x) = x$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ da differentsiallanuvchi bo'lib, (2) tenglikga ko'ra

$$dx = (x)' \cdot \Delta x = \Delta x$$

o'rinli bo'ladi, ya'ni erkli o'zgaruvchi uchun, uning differentsiali va orttirmasi teng bo'lar ekan.

Bu tenglikdan funksiya differentsiali uchun

$$df(x) = f'(x) \cdot dx \quad \text{yoki} \quad dy = y' dx \quad (4)$$

tenglikni yoza olamiz. Demak,

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}, \quad y' = \frac{dy}{dx}.$$

(4) tenglikka tayanib asosiy elementar funksiyalarning differentsiali va differentsiialash qoidalarini kelitiramiz.

$$1. d(c) = 0 \quad c = const$$

$$2. d(x^\alpha) = \alpha \cdot x^{\alpha-1} dx$$

$$3. d(a^x) = a^x \ln a dx, \quad d(e^x) = e^x dx$$

$$4. d(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} dx, \quad d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$$

$$5. d(\sin x) = \cos x dx$$

$$6. d(\cos x) = -\sin x dx$$

$$7. d(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$8. d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{1}{\sin^2 x} dx$$

$$9. d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$10. d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$11. d(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$12. d(\operatorname{arcctg} x) = -\frac{1}{1+x^2} dx$$

Differentsiialash qoidalari quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.

$$1. d(cf(x)) = c \cdot df(x), \quad c = const$$

$$2. d[f(x) \pm g(x)] = df(x) \pm dg(x)$$

$$3. d[f(x) \cdot g(x)] = g(x)df(x) + f(x)dg(x)$$

$$4. d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}$$

Nazorat uchun savollar

1. Yuqori tartibli hosilalar nima?
2. Aralash yosilalar deb nimaga aytiladi?
3. Diffrensial bilan hosilanind farqi?

Mustaqil ish topshiriqlari:

1. Yuqori tartibli differensial tushunchasi to'g'risida?
2. Murakkab funksiya qanday ko'rinishda bo'ladi?.

MA`RUZA 13

FUNKSIYA LIMITINI HISOBLASH, AJOYIB LIMITLAR, LOPITAL QOIDASI

Darsning o'quv maqsadi: Funksiya limitini hisoblash va limitni hisoblashda ajoyib limitlardan foydalanishni o'rganish

Tayanch iboralar: Funksiya limiti, ajoyib limitlar, noaniqliklar, Lopital qoidasi

Maruza rejasi

1. Funksiya limitini hisoblash .
2. Ajoyib limitlar.
3. Lopital qoidasi

Funksiya limiti

1-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biron-bir atrofida aniqlangan bo'lib (x_0 nuqtada aniqlangan bo'lishi shart emas) istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son mavjud bo'lsaki, $0 < |x - x_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x lar (ya'ni istalgan $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$) uchun $|f(x) - a| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda x argument x_0 ga intilganda $f(x)$ funksiyaning limiti a ga teng deyiladi, (bu hol $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ shaklda ifoda etiladi),

1`-ta'rif. Agar $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ bo'lgan istalgan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda x argument x_0 ga intilganda $f(x)$ funksiyaning limiti a ga teng deyiladi.

1-va 1`-tariflar teng kuchlidir. Agar 1-ta'rifda barcha $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ yoki $(x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)(x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ bo'lsa) lar uchun $|f(x) - a| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lishi talab qilinsa, u holda a son $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi chap (o'ng) limiti deyiladi va

$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = a$ ($\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = a$) ko'rinishda ifoda etiladi. Chap va o'ng limitlar uchun quyidagi belgilashlar qo'llaniladi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0)$$

Yuqoridagi ta'rifda x_0 nuqta va a sifatida $+\infty$ yoki $-\infty$ (cheksizliklarni olishimiz mumkin).

Ta'riflarda mos o'zgartirishlar kiritib, quyidagi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$$
 kabi limitlarni ta'riflashimiz mumkin.

2-ta'rif. Agar $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ($\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$) bo'lsa, u holda $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$) da $f(x)$ funksiya cheksiz kichik miqdor deyiladi.

3-ta'rif. Agar $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ($\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$) bo'lsa, u holda $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$) da $f(x)$ funksiya cheksiz katta miqdor deyiladi.

Funksiya limiti, cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar quyidagi xossalarga ega:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ va $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ bo'lsa, u holda istalgan α va β sonlar uchun

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = 0.$$

2. Agar $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biron $(x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$ ε -atrofida chegaralangan bo'ladi.

3. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biron ε -atrofida chegaralangan bo'lib, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ bo'lsa, u holda

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) g(x) = 0.$$

bo'ladi.

4. Agar $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ bo'lib, $c < a < b$ bo'lsa, u holda x_0 nuqtaning (biron $\varepsilon > 0$ son uchun) $(x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$ atrofida $c < f(x) < b$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

5. Agar $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ bo'lsa, u holda $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \infty$.

6. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biron atrofida chegaralangan bo'lib, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ bo'lsa, u holda $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \infty$ bo'ladi.

7. Agar $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ bo'lsa, u holda $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$ va aksincha, agar $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ bo'lsa

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = 0$ bo'ladi.

8. Agar $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ bo'lsa, istalgan α va β sonlar uchun

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f(x) \pm \beta g(x)) = \alpha \cdot a \pm \beta \cdot b, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = a \cdot b$$

bo'ladi.

9. Agar $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ va $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \neq 0$ bo'lsa, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$ bo'ladi.

10. Agar $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = a$ va $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ bo'lsa, u holda $f(g(x))$ murakkab funksiya uchun $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = a$.

11. Agar $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ bo'lib, x_0 nuqtaning biron atrofida (yoki $x_0 = \infty$ bo'lgan holda, $|x|$ yetarlicha katta bo'lgan barcha x larda) $f(x) \leq g(x)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $a \leq b$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

12. Agar x_0 nuqtaning biron atrofida (yoki $x_0 = \infty$ bo'lganda, $|x|$ yetarlicha katta bo'lgan barcha x larda) $f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$ tengsizlik o'rinli bo'lib, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$ bo'lsa, u holda $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = a$.

13. Agar x_0 nuqtaning biron atrofida (yoki $x_0 = \infty$ bo'lganda, $|x|$ yetarlicha katta bo'lgan barcha x larda) $f(x) = \text{const} = a$ bo'lsa, u holda $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$.

14. Agar $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ bo'lsa, u holda $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = a$. Aksincha, agar $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = a$ bo'lsa, u holda $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ bo'ladi.

Ajoyib limitlar.

Endi $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$ bo'lgani uchun $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin t}{t} = 1$. Shunday qilib,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Endi 1^∞ ko'rinishdagi noaniqlikka doir $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ limitni hisoblaylik. Dastavval

$$\lim_{x \rightarrow +0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

limitni qaraymiz. Agar x ushbu $\frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}$ tengsizliklarni qanoatlantirsa, u holda

$$n \leq \frac{1}{x} \leq n+1 \text{ va}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq (1+x)^{\frac{1}{x}} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \Rightarrow \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} \leq (1+x)^{\frac{1}{x}} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Bu tengsizlikda $x \rightarrow +0$, ya'ni $n \rightarrow +\infty$ bo'lsa, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e$ va

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ bo'lgani uchun, limitlar xossasiga asosan

$$\lim_{x \rightarrow +0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Endi $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ limitni qaraymiz. $-x = \frac{t}{1+t}$ almashtirish bajarsak, $x \rightarrow -0$ bo'lganda $t \rightarrow +0$

bo'ladi, chunki $t = -\frac{x}{1+x}$, u holda

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \left(1 - \frac{t}{1+t}\right)^{-\frac{1+t}{t}} = \left(\frac{1}{1+t}\right)^{-\frac{1+t}{t}} = (1+t)^{\frac{1+t}{t}} = (1+t)^{\frac{1}{t}} \cdot (1+t)$$

tenglik kelib chiqadi. Agar biz $x \rightarrow -0$, da ya'ni $t \rightarrow +0$ da limitga o'tsak

$$\lim_{x \rightarrow -0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow +0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \cdot (1+t) = e$$

hosil bo'ladi. Demak,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Shuni ta'kidlaymizki, ushbu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

limit birinchi ajoyib limit,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

esa ikkinchi ajoyib limit deb nomlanadi.

Lopital qoidasi

Limitlarni hisoblashda uchraydigan $\frac{0}{0}$ va $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi noaniqliklarni ochishda, quyidagi

Lopital qoidasi deb nomlanadigan qoidani asoslab beruvchi, teoremani keltiramiz.

14-teorema. Agar $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limit $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi noaniqlik bo'lib, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ limit mavjud bo'lsa, (cheksiz bo'lishi ham mumkin), u holda

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Misollar.

$$1. \lim_{x \rightarrow +0} x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +0} (-x) = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$$

Nazorat uchun savollar

1. Funksiya limitini hisoblash ta'rifini ayting?
2. Ajoyib limitlar jadvalini keltiring.
3. Lopital qoidasi formulasini yozing.

Mustaqil ish topshiriqlari:

1. Funksiya, argument orttirmasi nima?
2. Noaniqliklarning turlari.

MA`RUZA 14

FUNKSIYALARNING YOYILMASI. TEYLOR VA MAKLOREN FORMULALARI

Dars o'quv maqsadi: Funksiya yoyilmasini yozishda Teylor va Makloren formulalaridan foydalanish

Tayanch iboralar: Funksiya yoyilmasi, Teylor formulasi, Makloren formulasi, taqribiy hisoblashlar

Maruza rejasi

1. Funksiya yoyilmasi
2. Teylor formulasi.
3. Makloren formulasi.
4. Taqribiy hisoblashlar

Endi biz taqribiy hisoblashlarda ko'p qo'llaniladigan formulani keltiramiz.

5-teorema. Agar $\tau(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biron-bir atrofida berilgan bo'lib, x_0 nuqtada n -tartibgacha $\tau^{(k)}(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$ hosilalari mavjud bo'lib,

$$\tau(x_0) = \tau'(x_0) = \tau''(x_0) = \dots = \tau^{(n-1)}(x_0) = \tau^{(n)}(x_0) = 0$$

tengliklar o'rinli bo'lsa, u holda $\tau(x)$ funksiya uchun $\tau(x) = O((x - x_0)^n)$ munosabat o'rinli bo'ladi.

Isbot. Matematik induksiya usuli yordamida isbot qilamiz. $n = 1$ bo'lsin, u holda

$$\tau(x_0) = \tau'(x_0) = 0.$$

Bundan

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tau(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tau(x) - \tau(x_0)}{x - x_0} = \tau'(x_0) = 0$$

tenglik kelib chiqadi, ya'ni $\tau(x) = O((x - x_0))$ ekan.

Endi $n - 1$ da $\tau(x_0) = \tau'(x_0) = \dots = \tau^{(n-1)}(x_0) = 0$ tengliklardan $\tau(x) = O((x - x_0)^{n-1})$ munosabat o'rinli ekanligi kelib chiqsin deb faraz qilaylik va n da $\tau(x_0) = \tau'(x_0) = \dots = \tau^{(n-1)}(x_0) = \tau^{(n)}(x_0) = 0$ tengliklar o'rinli bo'lsin. Agar $\tau_1(x) = \tau'(x)$ belgilashni kiritsak, $\tau_1(x_0) = \tau_1'(x_0) = \tau_1^{(n-1)}(x_0) = 0$ ekanligi kelib chiqadi, demak,

$$\tau(x) = O((x - x_0)^n).$$

Teorema isbot bo'ldi.

$f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biron-bir atrofida berilgan va bu atrofda uning $(n - 1)$ tartibli hosilasi mavjud va x_0 nuqtada $f(x)$ funksiyaning n -tartibli hosilasi mavjud bo'lsin. Bu shartlarda x_0 ning qaralayotgan atrofida quyidagi $p(x)$ -ko'phadni aniqlay olamiz:

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Agar $\tau_n(x) = f(x) - p(x)$ funksiyani tekshirsak, $\tau_n(x_0) = \tau_n'(x_0) = \dots = \tau_n^{(n)}(x_0) = 0$ tengliklar kelib chiqadi. Yuqoridagi teoreмага ko'ra $\tau(x) = O((x - x_0)^n)$ munosabat o'rinlidir. Bundan Teylor formulasi deb nomlanuvchi formulani hosil qilamiz

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \tau_n(x), \quad (5)$$

bu yerda $\tau_n(x)$ formulaning qoldiq hadi deyiladi.

Isbot qilinganiga ko'ra $\tau_n(x) = O((x - x_0)^n)$, ya'ni x o'zgaruvchi x_0 dan yetarlicha kam farq qilsa, $\tau_n(x)$ ham 0 dan $(x - x_0)^n$ tartibda farqlanadi, ya'ni n qanchalik katta bo'lsa ($|x - x_0| < 1$ deb olish mumkin), $\tau_n(x)$ ifoda 0 dan shunchalik kam farq qiladi. Demak, hisoblashlarda ushbu

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

taqribiy formuladan foydalanishimiz mumkin ekan.

(5) formulada $x - x_0 = \Delta x$ deb belgilasak, Teylor formulasining quyidagi ko'rinishlarini hosil qilamiz:

$$f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2!}f''(x_0)\Delta x^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\Delta x^n + \theta(\Delta x^n)$$

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0) + \dots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0) + \theta(\Delta x^n)$$

Agar (5) formulada $x = 0$ deb olinsa, Makloren formulasi deb nomlanuvchi ushbu formulani hosil qilamiz:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \theta(x^n)$$

Endi ayrim elementar funksiyalarning yuqoridagi formulalarga yoyilmasini topaylik

1) $f(x) = e^x$ bo'lsa, $f^{(n)}(x) = e^x$ va $f^{(0)}(0) = 1$ bo'lgani uchun,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \theta(x^n).$$

2) $f(x) = \sin x$ bo'lsa, $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ va $f^{(n)}(0) = \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ ekanligidan, $n = 2k$

bo'lsa, $f^{(2k)}(0) = 0$ va $n = 2k - 1$ bo'lsa $f^{(2k-1)}(0) = \sin\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{k-1}$ shuning uchun

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \theta(x^{2k}).$$

3) $f(x) = \cos x$ bo'lsa, $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ va $f^{(n)}(0) = \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ $n = 2k$ bo'lganda

$f^{(2k)}(0) = \cos(k\pi) = (-1)^k$ va $n = 2k - 1$ bo'lganda $f^{(2k-1)}(0) = 0$ shuning uchun

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \theta(x^{2k+1}).$$

Hosil qilingan yoyilmalar e^x , $\sin x$ va $\cos x$ funksiyalar qiymatini topish x ga nisbatan ko'phad bo'lgan qiymatini topishga olib kelishini ko'rsatadi.

Nazorat uchun savollar

1. Funksiya yoyilmasi deb nimaga aytiladi?
2. Teylor formulasi qanday ko'rinishda bo'ladi?
3. Makloren formulasi qanday ko'rinishda bo'ladi?

Mustaqil ish topshiriqlari:

1. Taqribiy hisoblashlarini yozib bering?
2. Makloren va Teylor formulalarining farqi?
3. Elementar funksiyalarning yoyilmalari.

MA`RUZA 15

FUNKSIYANI UMUMIY TEKSHIRISH (EKSTREMUMLARI), KRITIK NUQTALARI VA ASIMPTOTALARI

Dars o'quv maqsadi: Funksiyani umumiy tekshirib, uning grafigini taqriban chizishning bosqichlarini o'rganish

Tayanch iboralar: Funksiya, argument orttirmasi, funksiya orttirmasi, hosila, bir tomonlama hosilalar, kritik nuqta, maksimum, minimum, o'sish va kamayish oraliqlari, botiqlik, qavariqlik, differentsial, ekstremum, funksiyaning asimptotalari.

Maruza rejasi

1. Funksiya kritik nuqtalarini topish

2. Funksiyaning maksimum va minimum nuqtalarini aniqlash.
3. Funksiyaning asimptotalari.
4. Funksiyaning hosila yordamida tekshirish va uning grafigini yasash

Funksiyaning hosila yordamida tekshirish va uning grafigini yasash

Endi funksiyaning tekshirishda hosilaning qo'llanilishini ko'rib chiqamiz.

6-teorema. $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda o'zgarmas bo'lishi uchun, uning hosilasi shu intervalda nolga teng bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. Zarurligi. Agar $x \in (a, b)$ uchun $f(x) = c = const$ bo'lsa, $f'(x) = (c)' = 0$ bo'lishi kelib chiqadi.

Yetarliligi. Ixtiyoriy $x \in (a, b)$ uchun $f'(x) = 0$ bo'lsin, u holda $a < x_0 < b$ va $a < x < b$ uchun $[x_0, x]$ oraliqda $f(x)$ funksiya Lagranj teoremasini qo'llasak

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c), \quad (x_0 < c < x)$$

tenglik o'rinli bo'lib, $f'(c) = 0$ dan $f(x) = f(x_0)$ ekanligi kelib chiqadi. Ya'ni $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda o'zgarmas ekanligini hosil qilamiz. Teorema isbot bo'ldi.

Natija. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun (a, b) intervalda $f'(x) = g'(x)$ tenglik o'rinli bo'lsa, shu intervalda

$$f(x) = g(x) + c, \quad c = const$$

tenglik o'rinlidir.

Haqiqatan ham, $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ funksiya uchun (a, b) intervalda $\varphi'(x) = 0$ ekanligi kelib chiqadi. U holda 1-teoremaga ko'ra $\varphi(x) = c = const, x \in (a, b)$, natijada

$$f(x) = g(x) + c, \quad x \in (a, b).$$

7-teorema. Agar $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda hosilaga ega bo'lib, barcha $x \in (a, b)$ uchun $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.

Isbot. $a < x_1 < x_2 < b$ bo'lsin, u holda $[x_1, x_2]$ oraliqda Lagranj teoremasiga ko'ra, shunday $c \in (x_1, x_2)$ mavjudki, uning uchun

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) > 0.$$

Bundan $x_2 - x_1 > 0$ bo'lgani uchun $f(x_2) - f(x_1) > 0$, ya'ni $f(x_1) < f(x_2)$. Demak, $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda o'suvchi ekan. $f'(x) < 0$ bo'lganda $f(x)$ funksiyaning kamayuvchi ekanligi shunga o'xshash tarzda isbot qilinadi.

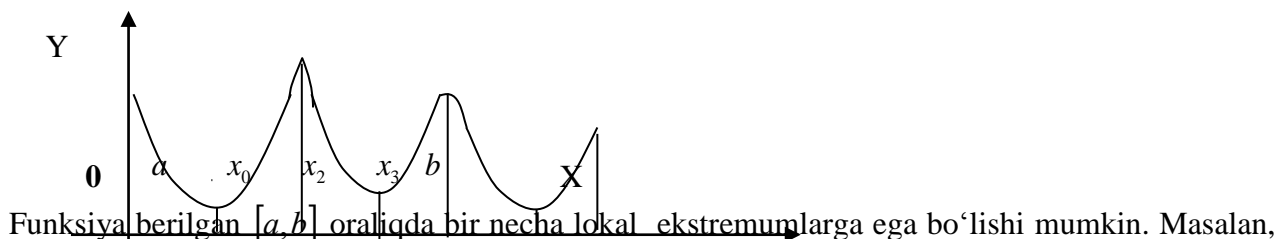
Izoh. Agar $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lib, shu intervalda $f'(x)$ hosila mavjud bo'lsa, hosila uchun $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) tengsizlik o'rinli bo'ladi, deyish mumkin, ya'ni o'suvchi (kamayuvchi) funksiyaning ayrim nuqtalaridagi hosilasi nolga teng bo'lishi mumkin. Masalan $y = x^3$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqda o'suvchi bo'lib, uning hosilasi $y' = 3x^2, x = 0$ da $y'(0) = 0$ bo'ladi.

Funksiyaning ekstremumi

Funksiyaning grafigini chizishda uning maksimum va minimum nuqtalari muhim o'rin egallaydi.

3-ta'rif. Agar x_0 nuqtaning shunday atrofida $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ($\delta > 0$) mavjud bo'lsaki, shu oraliqdan olingan istalgan $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ uchun $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada lokal maksimumga (lokal minimumga) erishadi deyiladi.

Funksiyaning lokal maksimum va lokal minimum nuqtalari, funksiyaning lokal ekstremumlari yoki shunchaki funksiya ekstremumlari deb yuritiladi.



Funksiya berilgan $[a, b]$ oraliqda bir necha lokal ekstremumlarga ega bo'lishi mumkin. Masalan, rasmda x_0, x_1, x_2, x_3 nuqtalarda funksiya lokal ekstremumlarga erishadi. $[a, b]$ oraliqdagi funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari funksiyaning global ekstremumlari deyiladi. Funksiya global ekstremumga oraliq chegaralarida erishishi mumkin. Masalan, rasmdagi funksiya uchun $f(b) = \max_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$ ekanligini ko'rish mumkin.

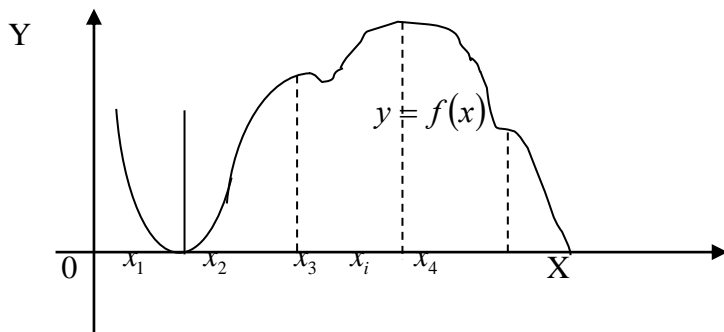
Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada lokal ekstremumga erishib, bu nuqtada $f'(x_0)$ hosila mavjud bo'lsa, Ferma teoremasiga ko'ra $f'(x_0) = 0$. Lekin, $f'(x_0) = 0$ ekanligidan, x_0 nuqtada funksiya ekstremumga erishadi deya olmaymiz. Masalan $y = x^3$ funksiya, $(-\infty, +\infty)$ da o'suvchi bo'lgani uchun uning ekstremum nuqtalari mavjud emas, lekin $y' = 3x^2$ hosila $x = 0$ da nolga teng bo'ladi. Shu bilan birga $y = \sqrt[3]{x^2}$ funksiya $x = 0$ nuqtada lokal ekstremumga ega bo'lib, bu nuqtada funksiya lokal minimumga erishgani bilan, $x = 0$ nuqtada funksiya hosilasi mavjud emasligini avval ko'rgan edik.

Yuqorida aytilganlarga asoslanib, lokal ekstremumning quyidagi zaruriy shartini keltirishimiz mumkin.

$f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishishi uchun, shu nuqtada funksiya hosilasi nolga teng bo'lishi yoki funksiya hosilasi mavjud bo'lmasligi zarur.

Funksiya hosilasi nolga teng bo'lgan nuqtalar, ya'ni $f'(x) = 0$ tenglama yechimlari va hosila mavjud bo'lmagan nuqtalar, funksiyaning kritik (yoki statsionar) nuqtalari deyiladi.

Demak, funksiyaning ekstremum nuqtalarini uning kritik nuqtalari orasidan izlashimiz kerak.



Chizmadagi $y = f(x)$ funksiya uchun x_1, x_2, x_3, x_4 nuqtalar kritik nuqtalar bo'lib, ($f'(x_1)$ mavjud emas, $f'(x_2) = \infty$, $f'(x_3) = 0$, $f'(x_4) = 0$) faqat, x_1 va x_3 nuqtalari ekstremum nuqtalari bo'ladi.

Funksiya ekstremumining birinchi yetarli sharti

8-teorema. Agar x_0 kritik nuqta atrofida x nuqta chapdan o'ngga qarab o'zgarganda, $f(x)$ funksiya hosilasi o'z ishorasini musbatdan manfiyga o'zgartirsa, bu x_0 nuqta lokal maksimum nuqta (lokal minimum) bo'ladi.

Isbot. Agar $(x_0 - \delta, x_0)$ ($\delta > 0$) intervalda $f'(x) > 0$ bo'lsa, funksiya bu oraliqda o'suvchi bo'lganligidan istalgan $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ uchun $f(x) \leq f(x_0)$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Agar $(x_0, x_0 + \delta)$ intervalda $f'(x) < 0$ bo'lsa, bu oraliqda $f(x)$ funksiya kamayuvchi bo'lib, barcha $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ lar

uchun $f(x) \leq f(x_0)$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak, istalgan $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ uchun $f(x) \leq f(x_0)$, ya'ni x_0 nuqtada $f(x)$ funksiya lokal maksimumga erishar ekan. Demak, hosila x_0 kritik nuqta atrofida ishorasini musbatdan manfiyga o'zgartirsa x_0 nuqta, uning maksimum nuqtasi bo'lar ekan.

Shunga o'xshash, x_0 atrofida hosila ishorasi manfiydan musbatga o'zgargan holda, x_0 nuqta lokal minimum ekanligini isbotlash mumkin.

$y = f(x)$ funksiyaning ekstremumga tekshirishni quyidagi algoritm bo'yicha bajarish mumkin:

1. $y' = f'(x)$ hosilani topish.

2. $f'(x) = 0$ tenglama yechimlarini topish va $f'(x)$ mavjud bo'lmagan nuqtalarni aniqlash, ya'ni barcha kritik nuqtalarni topish.

3. $f'(x) > 0$ va $f'(x) < 0$ tengsizliklarni yechib, $f'(x)$ hosilaning kritik nuqta atrofidagi ishoralarini aniqlash lozim.

Agar kritik nuqtadan chapda va o'ngda hosila turli ishoralarga ega bo'lsa, funksiya shu nuqtada ekstremumga erishadi, aks holda bu kritik nuqta ekstremum nuqta bo'lmaydi. Kritik nuqta atrofida funksiya hosilasi ishorasi chapda + va o'ngda - bo'lsa bu nuqta lokal maksimum, chapda - va o'ngda + bo'lsa, bu nuqta lokal minimum nuqta bo'ladi.

4. Funksiyaning ekstremum qiymatlarini topish.

Funksiya ekstremumining ikkinchi yetarli sharti

9-teorema. Agar x_0 nuqta atrofida $f(x)$ funksiya hosilaga ega va $f'(x_0) = 0$, hamda x_0 nuqtada funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi mavjud bo'lib, $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$) bo'lsa, u holda x_0 nuqtada $f(x)$ funksiya lokal minimumga (lokal maksimumga) erishadi.

Isbot. $f'(x_0) = 0$ va $f''(x_0) > 0$ bo'lsin, u holda

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} = f''(x_0) > 0.$$

Bundan $f'(x_0) = 0$ va $\Delta x < 0$ ekanligidan, $f'(x_0 + \Delta x) < 0$ kelib chiqadi, ya'ni x_0 nuqtadan chapda hosila manfiy ekan. Shunga o'xshash

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} = f''(x_0) > 0$$

va $\Delta x > 0$ bo'lgani uchun $f'(x_0 + \Delta x) > 0$ kelib chiqadi, ya'ni x_0 nuqtadan o'ngda hosila musbat ekan. Demak, hosila x_0 nuqta atrofida chapdan o'ngga o'z ishorasini manfiydan musbatga o'zgartirar ekan, u holda x_0 nuqta funksiyaning lokal minimum nuqtasi bo'ladi.

$f''(x_0) < 0$ bo'lgan hol shunga o'xshash isbot qilinadi. Teorema isbot bo'ldi.

Bu teoreмага ko'ra, x_0 kritik nuqta uchun $f''(x_0) \neq 0$ bo'lsada ekstremum mavjudligi ta'minlanadi. Lekin $f''(x_0) = 0$ ekanligidan ekstremum mavjud emas deya olmaymiz. Masalan, $y = x^4$ funksiya uchun, $x = 0$ nuqta ekstremum nuqta bo'lib, $y'' = 12x^2$ ikkinchi tartibli hosila esa nolga teng.

Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsa, bu oraliqda $f(x)$ funksiya o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga, ya'ni global ekstremumiga erishadi. Global ekstremumga $f(x)$ funksiya oraliqning chegaraviy nuqtalarida erishish mumkinligini e'tiborga olib, ularni topish uchun quyidagi algoritmni keltiramiz:

1. $f'(x)$ hosilani topish.

2. $f(x)$ funksiyaning kritik nuqtalarini topish

3. $f(a)$, $f(b)$ qiymatlarini aniqlash va barcha kritik nuqtalarda $f(x)$ funksiya qiymatlarini topib, bu qiymatlar orasidan eng kattasi va eng kichigini topish.

Funksiya qavariqligi va botiqligi. Egilish nuqtalari

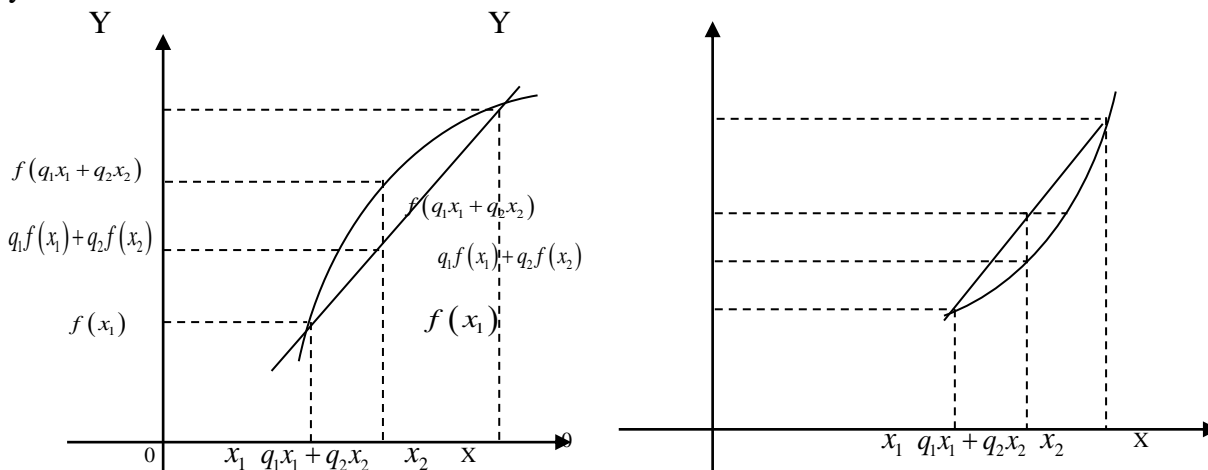
Funksiya grafigini chizishda, grafikning qaysi oraliqlarda qavariqligi va botiqligini bilish muhimdir.

4-ta'rif. Agar (a, b) intervaldan olingan istalgan x_1 va x_2 lar va $q_1 + q_2 = 1$ munosabatni qanoatlantiruvchi istalgan $q_1 \geq 0$ va $q_2 \geq 0$ sonlar uchun

$$\begin{aligned} f(q_1x_1 + q_2x_2) &\geq q_1f(x_1) + q_2f(x_2) \\ (f(q_1x_1 + q_2x_2) &\leq q_1f(x_1) + q_2f(x_2)) \end{aligned}$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda qavariq (botiq) deyiladi.

Bu ta'rifning geometrik ma'nosi shundan iboratki, agar funksiya (a, b) oraliqda qavariq (botiq) bo'lsa, (a, b) oraliqdan olingan istalgan x_1 va x_2 lar uchun grafikning $(x_1; f(x_1))$ va $(x_2; f(x_2))$ nuqtalarini tutashtiruvchi kesma funksiya grafigidan ordinatalar o'qining yo'nalishiga nisbatan quyida (yuqorida) yotadi.



10-teorema. (a, b) intervalda hosilaga ega bo'lgan $f(x)$ funksiya, bu oraliqda qavariq (botiq) bo'lishi uchun, uning $f'(x)$ hosilasi (a, b) intervalda kamayuvchi (o'suvchi) bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Zarurligi. $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda qavariq bo'lsin, ya'ni istalgan $x_1, x_2 \in (a, b)$ va $q_1 + q_2 = 1$ tenglikni qanoatlantiruvchi musbat q_1 va q_2 sonlar uchun

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) \geq q_1f(x_1) + q_2f(x_2)$$

tenglik o'rinli bo'lsin. U holda $x_1 < x < x_2$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x lar uchun,

$$q_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad q_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

deb olsak, $q_1x_1 + q_2x_2 = x$ bo'lgani uchun quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz

$$f(x) \geq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Bundan,

$(x_2 - x_1)f(x) \geq (x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2)$, yoki $(x_2 - x)[f(x) - f(x_1)] \geq (x - x_1)[f(x_2) - f(x)]$ va nihoyat

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bu tengsizlikda avval $x \rightarrow x_1$ da, so'ngra $x \rightarrow x_2$ da limitlarni topsak, ushbu tengsizliklar kelib chiqadi

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1), \quad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2),$$

bu yerda $x_1 < \xi_1 < x$ va $x < \xi_2 < x_2$ bo'lgani uchun $\xi_1 < \xi_2$ va $f'(\xi_1) \geq f'(\xi_2)$.

Yetarliligi. $\xi_1 < \xi_2$ uchun $f'(\xi_1) \geq f'(\xi_2)$ bo'lsa ($x_1 < \xi_1 < x$, $x < \xi_2 < x_2$)

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu tengsizlikdan

$$(x_2 - x)[f(x) - f(x_1)] \geq (x - x_1)[f(x_2) - f(x)]$$

yoki

$$(x_2 - x_1)f(x) \geq (x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1) \cdot f(x_2)$$

va nihoyat

$$f(x) \geq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

tengsizlik kelib chiqadi. Bunda $\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = q_1$ va $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = q_2$ belgilashlarga asosan,

$q_1 \geq 0$, $q_2 \geq 0$, $q_1 + q_2 = 1$ va $x = q_1 x_1 + q_2 x_2$ munosabatlar o'rinli ekanligidan

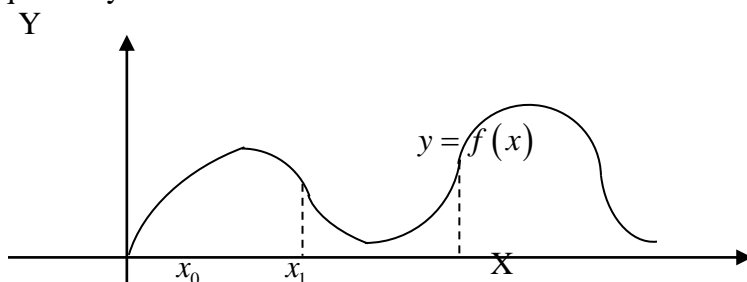
$$f(q_1 x_1 + q_2 x_2) \geq q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2)$$

tengsizlik kelib chiqadi. Demak, $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda qavariq ekan. Botiq funksiya xossasi ham shu tarzda isbotlanadi. Teorema isbot bo'ldi.

11-teorema. Agar $f(x)$ funksiyaning (a, b) intervalda ikkinchi tartibli hosilasi mavjud bo'lib, bu intervalda $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda qavariq (botiq) bo'ladi.

Isbot. $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) bo'lsa, u holda $f'(x)$ hosila (a, b) intervalda kamayuvchi ekanligi kelib chiqadi. Bundan esa 1-teoremaga asosan, $f(x)$ funksiyaning (a, b) da qavariq (botiq) bo'lishi kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

5-ta'rif. Agar x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning botiqlik va qavariqlik intervallarini ajratib turuvchi chegaraviy nuqta bo'lsa, u holda x_0 nuqta atrofida berilgan $f(x)$ funksiya uchun bu nuqta egilish nuqtasi deyiladi.



Chizmada x_0 va x_1 nuqtalar egilish nuqtalari bo'ladi.

Egilish nuqta ta'rifidan ular $f'(x)$ funksiya hosilasining ekstremum nuqtalari bo'lishi kelib chiqadi. Bularni e'tiborga olsak, quyidagi teoremlar o'rinli ekanligi ravshan bo'ladi.

12-teorema. (Egillish nuqtasining zaruriy sharti). Ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lgan $f(x)$ funksiya uchun x_0 nuqta egilish nuqtasi bo'lsa, u holda $f''(x_0) = 0$.

13-teorema. (Egillish nuqtasining yetarli sharti). Agar ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lgan $f(x)$ funksiya uchun $f''(x)$ hosila x_0 nuqta atrofida o'z ishorasini o'zgartirsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning egilish nuqtasi bo'ladi.

Berilgan $f(x)$ funksiyaning qavariqligi. Botiqlik oraliqlarini va egilish nuqtalarini topishni quyidagi algoritm bo'yicha bajarish mumkin:

1. $f''(x)$ hosilani topish;
2. $f''(x) = 0$ tenglamani yechish va $f''(x)$ hosila mavjud bo'lmagan nuqtalarni topish, ya'ni $f'(x)$ hosilaning kritik nuqtalarini topish.
3. $f'(x)$ ning kritik nuqtalari atrofida $f''(x)$ hosilaning ishoralarini aniqlash. Buning uchun $f''(x) > 0$ va $f''(x) < 0$ tengsizliklarni yechish lozim.
4. Egilish nuqtalarida funksiya qiymatini hisoblash.

Funksiya grafigining asimptotasi

Funksiya grafigini chizishda grafik asimptotasi deb nomlanuvchi to'g'ri chiziqlarning yordami kattadir.

6-ta'rif. Agar funksiya grafigining $M = (x, f(x))$ nuqtasidan berilgan to'g'ri chiziqgacha bo'lgan $d(M)$ masofa uchun $\lim_{|M| \rightarrow +\infty} d(M) = 0$ tenglik o'rinli bo'lsa, shu to'g'ri chiziq $y = f(x)$

funksiya grafigining asimptotasi deyiladi, bu yerda $|M| = \sqrt{x^2 + f^2(x)}$ - M nuqtadan koordinata boshigacha bo'lgan masofa.

Agar

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |M| = +\infty$$

bo'lsa u holda asimptota vertikal asimptota deyiladi. Vertikal asimptota $x = x_0$ to'g'ri chiziq bilan ifodalanadi.

Agar $\lim_{x \rightarrow +\infty} |M| = +\infty$ yoki $\lim_{x \rightarrow -\infty} |M| = +\infty$ bo'lsa, asimptota og'ma asimptota deyiladi.

Og'ma asimptota $y = kx + b$ ko'rinishda bo'ladi.

Agar og'ma asimptota uchun $x = 0$ bo'lsa, ya'ni asimptota $y = b$ ko'rinishda bo'lsa, bunday asimptota gorizontaal asimptota deyiladi.

$x = x_0$ vertikal asimptota, $y = f(x)$ funksiyaning cheksizlikka aylantiruvchi x_0 nuqta bilan ifodalangan uchun, x_0 ni $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \infty$ yoki $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \infty$ tengliklarni qanoatlantiruvchi nuqta deb qarash kerak.

$y = kx + b$ og'ma asimptotani topish uchun ushbu tenglikdan

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$$

foydalanish mumkin. Bu yerdan

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0,$$

ya'ni $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ ekanligi kelib chiqadi.

U holda $b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]$

Misol sifatida $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x - 2}$ funksiya asimptotalarini topaylik. $x = 2$ to'g'ri chiziq uning vertikal asimptotasi bo'ladi. Og'ma asimptota uchun quyidagilarni hosil qilamiz

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 1}{x \cdot (x - 2)} = 3$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 1}{x - 2} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 1 - 3x^2 + 6x}{x - 2} = 6$$

Demak, $y = 3x + 6$ chiziq funksiya grafigining og'ma asimptotasi ekan.

Funksiyani tekshirish va uning grafigini chizishni quyidagi algoritm bo'yicha amalga oshirsa bo'ladi.

1. $y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasini, imkon bo'lsa o'zgarish sohasini ham topish.
2. Funksiyani juftlik, toqlik va davriylikka tekshirish.
3. $f(x) = 0$ tenglama, $f(x) > 0$ va $f(x) < 0$ tengsizliklarni yechish, ya'ni funksiya nollarini, musbatlik va manfiylik intervallarini topish.
4. Funksiyani uzluksizlikka tekshirish.
5. Funksiyaning vertikal va og'ma asimptotalarini topish.
6. $f'(x)$ hosilani topish, hosila mavjud bo'lmagan nuqtalarni aniqlash, $f'(x) = 0$ tenglama va $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$ tengsizliklarni yechish, ya'ni funksiyaning kritik nuqtalarini, o'sish va kamayish oraliqlarini topish. Funksiya ekstremumlarini topish.
7. $f''(x)$ hosilani topib, $f''(x)$ mavjud bo'lmagan nuqtalarni aniqlash, $f''(x) = 0$ tenglama va $f''(x) > 0$, $f''(x) < 0$ tengsizliklarni yechish, ya'ni funksiyaning qavariqlik, botiqlik oraliqlari va egilish nuqtalarini topish.
8. Funksiya grafigiga aniqliklar kirituvchi ayrim nuqtalarni topish.

Takrorlash uchun savollar

1. Funksiya kritik nuqtalarini qanday topiladi?
2. Funksiyaning maksimum va minimum nuqtalarini qanday aniqlanadi?

Mustaqil ish topshiriqlari:

1. Funksiyaning asimptotalari deb nimaga aytiladi?.
2. Funksiyani hosila yordamida tekshirish va uning grafigini yasashni tushuntirib bering?

M A`R U Z A 16

BOSHLANG'ICH FUNKSIYA ANIQMAS INTEGRAL XOSSALARI

Dars o'quv maqsadi: Integral tushunchasi va uning geometrik ma'nosi. Boshlang'ich funksiyaning topish. Integrallash jadvali bilan tanishtirish

Tayanch iboralar: Boshlang'ich funksiya, aniqmas integral, aniqmas integral jadvali.

Ma`ruza rejasi

1. Boshlang'ich funksiya.
2. Aniqmas integral.
3. Aniqmas integral jadvali.

Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral

1-ta'rif. Agar barcha $x \in (a, b)$ lar uchun

$$F'(x) = f(x)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $F(x)$ funksiya (a, b) intervalda $f(x)$ funksiyaga boshlang'ich funksiya deyiladi.

Berilgan $f(x)$ funksiya bir nechta boshlang'ich funksiyaga ega bo'lishi mumkin. Masalan, $F_1(x) = \frac{x^2}{2} + 1$ funksiya $f(x) = x$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi.

Umumiy holda, agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ uchun boshlang'ich funksiya bo'lsa, istalgan o'zgarmas $c = const$ uchun $F(x) + c$ funksiya ham $f(x)$ ga boshlang'ich funksiya bo'ladi, chunki

$$(F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$$

Aksincha, berilgan $f(x)$ funksiyaning istalgan ikkita boshlang'ich funksiyasi o'zgarmas songa farq qilishini ko'rsatish mumkin. Haqiqatan ham $F_1(x)$ va $F_2(x)$ funksiyalar (a, b) da $f(x)$ ga boshlang'ich funksiyasi bo'lsin, u holda

$$[F_1(x) - F_2(x)]' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad x \in (a, b)$$

U holda Lagranj teoremasi natijasiga ko'ra $F_1(x) - F_2(x) = C = const$. Xulosa qilib shuni aytish mumkinki, agar $F(x)$ funksiya (a, b) intervalda $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiyaning (a, b) intervaldagi istalgan boshlang'ich funksiyasi $F(x) + C$, ($C = const$) ko'rinishda bo'lar ekan.

2-ta'rif. $f(x)$ funksiyaning (a, b) intervaldagi barcha boshlang'ich funksiyalari

$$\int f(x) dx$$

ko'rinishda belgilanib, bu ifoda $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali deb ataladi. Bu yerda $f(x)$ integral osti funksiyasi, $f(x) dx$ - integral ostidagi ifoda deb ataladi.

Demak, agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa,

$$\int f(x) dx = \{F(x) + C : C \in R\}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglik qisqalik uchun

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

kabi ifoda etiladi. Masalan,

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

Berilgan funksiya uchun uning boshlang'ich funksiyasini, ya'ni uning aniqmas integralini topish, funksiyani integrallash deb ataladi.

Aniqmas integral xossalari va uni hisoblash usullari:

1. Aniqmas integral hosilasi integral ostidagi funksiyaga teng bo'ladi, ya'ni

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$$

Chunki, agar $F(x)$ -funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa,

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+c)' = F'(x) = f(x)$$

2. Aniqmas integralning differensial integral ostidagi ifodaga teng bo'ladi, ya'ni $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

Haqiqatan ham,

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x)+c) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$$

3. Biron bir funksiya differensialining aniqmas integrali shu funksiya o'zgarishiga teng bo'ladi, ya'ni

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

Agar biz $F(x)$ ni biron bir $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi deb qarash, ya'ni $F'(x) = f(x)$ bo'lsa, u holda $dF(x) = f(x)dx$ va $\int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + C$.

4. Agar a o'zgarish son bo'lsa, u holda

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Hosila xossasiga ko'ra

$$\left(a \int f(x)dx\right)' = a \left(\int f(x)dx\right)' = a \cdot f(x)$$

Demak, $a \int f(x)dx$ funksiya $a \cdot f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi, ya'ni

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx$$

5. Funksiyalar yig'indisining integrali, qo'shiluvchilar integrallarining yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Hosila xossasiga ko'ra,

$$\left(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\right)' = \left(\int f(x)dx\right)' \pm \left(\int g(x)dx\right)' = f(x) \pm g(x)$$

tenglik o'rinli bo'lar ekan.

6. Agar $\int g(t)dt = G(t) + C$ o'rinli bo'lsa, u holda $t = \varphi(x)$ uchun

$$\int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = G(\varphi(x)) + C$$

Haqiqatan ham, $G'(t) = g(t)$ bo'lgani uchun va $G(x) = G(\varphi(x))$ murakkab funksiya hosilasiga asosan

$$\left(G(\varphi(x))\right)'_x = G'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = g(\varphi(x))\varphi'(x),$$

demak, $G(\varphi(x))$ funksiya $g(\varphi(x))\varphi'(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi ekan.

Bu xossadan foydalanib, aniqmas integralni yangi o'zgaruvchi kiritib yoki o'rniga qo'yish usuli bilan hisoblash mumkin. Agar $\int f(x)dx$ integralda, integral ostidagi ifodani quyidagicha ifodalash mumkin bo'lib,

$$f(x)dx = g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = g(\varphi(x))d\varphi(x), \quad \text{va} \quad \int g(t)dt = G(t) + C$$

bo'lsa, u holda

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = G(\varphi(x)) + C$$

7. Agar $\int f(t)dt = F(t) + c$ bo'lsa, u holda

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$$

Agar $t = ax + b$ deb olsak

$$f(ax+b)dx = \frac{1}{a} f(ax+b)d(ax+b) = \frac{1}{a} f(t)dt$$

tenglik o'rinli bo'ladi, u holda

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} \int f(t)dt = \frac{1}{a} F(t) + c = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$$

8. Quyidagi, bo'laklab integrallash formulasi deb nomlanuvchi formula o'rinli bo'ladi:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

Differensiallanuvchi u va v funksiyalar uchun, ko'paytmaning differensial bolgani

$$d(uv) = v du + u dv$$

uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$u dv = d(uv) - v du$$

Bundan esa

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du = uv - \int v du$$

tenglik kelib chiqadi.

Masalan, $\int x \cos x dx$ integralni bo'laklab integrallaylik. Buning uchun

$$u = x, \quad dv = \cos x dx = d(\sin x)$$

deb olsak, $du = dx$ va $v = \sin x$ bo'ladi. Bulardan

$$\int x \cos x dx = x \cdot \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c$$

Aniqmas integral ta'rifiga, elementar funksiyalar hosilasi jadvaliga asoslanib va tenglikning o'ng tarafidan hosila olish orqali quyidagi elementar funksiyalarning aniqmas integrallar jadvalini tuza olamiz:

1. $\int 0 dx = C$
2. $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + c$
3. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq -1$
4. $\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$
5. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$
6. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$
7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad \int e^x dx = e^x + c$
8. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
9. $\int \cos x dx = \sin x + c$
10. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$
11. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$

Nazorat uchun savollar

1. Boshlang'ich funksiya deb nimaga aytiladi?
2. Aniqmas integral deb nimaga aytiladi?
3. Aniqmas integralning xossalarini yozing.

Mustaqil ish topshiriqlari:

1. Aniqmas integral jadvalini keltiring va ba'zilarini isbotlang.
2. Boshlang'ich va integral osti funksiyalarni o'zaro bog'lanishini ko'rsating.
3. Differensial bilan integralning bog'liqligini ko'rsating.

M A`R U Z A 17

ANIQMAS INTEGRALNI HISOBLASH USULLARI

Dars o'quv maqsadi: Aniqmas integralni hisoblash usullari bilan tanishtirish

Tayanch iboralar: Ratsional, irratsional, trigonometrik, binominal ifodali integrallar, bo'laklab integrallash

Ma`ruza rejasi

1. O'zgaruvchini almashtirib integrallash.
2. Bo'larlab integrallas.
3. Ratsional ifodalarni integrallash.
4. Ayrim irratsional ifodalarni integrallash.
5. Trigonometrik funksiyalarni integrallash.

Aniqmas integralni yangi o'zgaruvchi kiritib yoki o'rniga qo'yish usuli bilan hisoblash mumkin.

Agar $\int f(x)dx$ integralda, integral ostidagi ifodani quyidagicha ifodalash mumkin bo'lib,

$$f(x)dx = g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = g(\varphi(x))d\varphi(x), \quad \text{va} \quad \int g(t)dt = G(t) + C$$

bo'lsa, u holda

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = G(\varphi(x)) + C$$

Misol tariqasida quyidagi aniqmas integralni hisoblaylik,

$$\int \sin^4 x \cos x dx$$

Bu yerda $t = \sin x$ deb olsak,

$$\sin^4 x \cdot \cos x dx = \sin^4 x d(\sin x) = t^4 dt$$

tenglikni hosil qilamiz va

$$\int t^4 dt = \frac{t^5}{5} + C$$

tenglikka ko'ra,

$$\int \sin^4 x \cos x dx = \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

Agar $\int f(t)dt = F(t) + c$ bo'lsa, u holda

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$$

Agar $t = ax + b$ deb olsak

$$f(ax+b)dx = \frac{1}{a} f(ax+b)d(ax+b) = \frac{1}{a} f(t)dt$$

tenglik o'rinli bo'ladi, u holda

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} \int f(t)dt = \frac{1}{a} F(t) + c = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$$

8. Quyidagi, bo'laklab integrallash formulasi deb nomlanuvchi formula o'rinli bo'ladi:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

Differensiallanuvchi u va v funksiyalar uchun, ko'paytmaning differensiali bolgani

$$d(uv) = v du + u dv$$

uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$u dv = d(uv) - v du$$

Bundan esa

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du = uv - \int v du$$

tenglik kelib chiqadi.

Masalan, $\int x \cos x dx$ integralni bo'laklab integrallaylik. Buning uchun

$$u = x, \quad dv = \cos x dx = d(\sin x)$$

deb olsak, $du = dx$ va $v = \sin x$ bo'ladi. Bulardan

$$\int x \cos x dx = x \cdot \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c$$

Aniqlas integrallarni hisoblash qoidalari va usullarini qo'llab, ayrim aniqlas integrallarni topaylik.

$$1). \int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = \ln|x-a| + \tilde{n}, \quad (x-a=t);$$

$$2). \int \frac{dx}{(x-a)^m} = \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^m} = \int (x-a)^{-m} d(x-a) = \frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1} + c = -\frac{1}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + c,$$

$m \neq 1$;

$$3). \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + \tilde{N}, \quad a > 0, \quad \left(\frac{x}{a}=t\right)$$

$$4). \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \left(\frac{x}{a}=t\right) = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + \tilde{n}$$

$$5). \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx = \frac{1}{2a} \left(\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a} \right) =$$

$$= \frac{1}{2a} (\ln|x-a| - \ln|x+a|) + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad a \neq 0$$

$$6). \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \left(\sqrt{x^2+a} = t-x \Rightarrow x^2+a = t-2tx+x^2 \Rightarrow x = \frac{t^2-a}{2t} \Rightarrow \right.$$

$$\left. \Rightarrow \sqrt{x^2+a} = t - \frac{t^2-a}{2t} = \frac{t^2+a}{2t}, dx = \frac{t^2+a}{2t^2} dt \right) = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + \tilde{N} =$$

$$= \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| + \tilde{N}$$

$$7). \int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b} \int \left[\frac{1}{x+b} - \frac{1}{x+a} \right] dx = \frac{1}{a-b} [\ln|x+b| - \ln|x+a|] +$$

$$+ \tilde{N} = \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x+b}{x+a} \right| + \tilde{N}$$

Ratsional ifodalarni integrallash

Ratsional ifoda deb ko'phadlar nisbati ko'rinishida ifodalangan funksiyaga aytiladi, ya'ni $P_n(x)$

va $Q_m(x)$ ko'phadlar bo'lsa, ratsional ifoda ushbu $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ko'rinishda bo'ladi. Agar $P_n(x)$ ko'phad

darajasi $Q_m(x)$ ko'phad darajasidan katta bo'lsa, ya'ni $n > m$ bo'lsa $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ni quyidagi ko'rinishda ifoda etish mumkin:

Demak, $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ning aniqlas integralini hisoblash uchun, bu ratsional ifodani ko'phad va to'g'ri

kasrning yig'indisi deb qarashimiz mumkin. Bundan tashqari, to'g'ri kasrni qisqarmaydigan kasr deb hisoblaymiz.

Misol tariqasida ushbu aniqmas integralni hisoblaylik:

$$\int \frac{3x^2 + x + 3}{(x-1)^3(x^2 + 1)} dx$$

Noma'lum koeffitsientlar usuliga ko'ra, quyidagi ayniyatni yoza olamiz

$$\frac{3x^2 + x + 3}{(x-1)^3(x^2 + 1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

Natijada $A_1 = -\frac{1}{4}$, $A_2 = 0$, $A_3 = \frac{7}{2}$, $B = \frac{1}{4}$, $C = \frac{1}{4}$ ekanligini hosil qilamiz, ya'ni

$$\frac{3x^2 + x + 3}{(x-1)^3(x^2 + 1)} = -\frac{1}{4(x-1)} + \frac{7}{2(x-1)^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{x+1}{x^2 + 1}$$

Nihoyat, quyidagi tengliklarga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 + x + 3}{(x-1)^3(x^2 + 1)} dx &= -\frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{7}{2} \int \frac{dx}{(x-1)^3} + \frac{1}{4} \int \frac{x+1}{x^2 + 1} dx = \\ &= -\frac{1}{4} \ln|x-1| + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{(-2)(x-1)^2} + \frac{1}{4} \int \frac{x dx}{x^2 + 1} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \\ &= -\frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{8} \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x + C = \\ &= -\frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{7}{4(x-1)^2} + \frac{1}{8} \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x + C = \\ &= \frac{1}{8} \ln \frac{x^2 + 1}{(x-1)^2} - \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x + C \end{aligned}$$

Ayrim irratsional ifodalarni integrallash

Irratsional ifodalarda o'zgaruvchi qandaydir darajadagi ildiz ostida qatnashishini eslatib o'tamiz.

Agar $R(u, v)$ -ifoda u va v lardan to'rt arifmetik amallar va songa ko'paytirishdan hosil bo'lgan funksiya bo'lsa u holda bu ifoda u va v o'zgaruvchilarning ratsional funksiyasi deyiladi.

Masalan,

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$$

integralni hisoblaylik. 1-holga ko'ra quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + x + 1} = t - x &\Rightarrow x^2 + x + 1 = t^2 - 2tx + x^2 \Rightarrow x = \frac{t^2 - 1}{2t + 1}, \\ dx &= \frac{2t(2t + 1) - 2 \cdot (t^2 - 1)}{(2t + 1)^2} dt = \frac{2t^2 + 2t + 2}{(2t + 1)^2} dt \end{aligned}$$

Bundan,

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} = \int \frac{2(t^2 + t + 1)}{t \cdot (2t + 1)^2} dt = \frac{3}{2(2t + 1)} + \frac{1}{2} \ln \frac{t^4}{|2t + 1|} + C =$$

$$= \frac{3}{2(2x + 2\sqrt{x^2 + x + 1} + 1)} + \frac{1}{2} \ln \frac{(x + \sqrt{x^2 + x + 1})^4}{|2x + 2\sqrt{x^2 + x + 1} + 1|^3} + C$$

Trigonometrik funksiyalarni integrallash

$R(u, v)$ -ifoda u va v o'zgaruvchilarning ratsional funksiyasi bo'lsin. $\int R(\sin x, \cos x) dx$ integralni hisoblaylik. Bunday integralda $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ universal almashtirishni bajarib $R(\sin x, \cos x) dx$ ifodani t -o'zgaruvchining ratsional ifodasiga olib kelish mumkin. Haqiqatan ham

$$\sin x = \frac{2t \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = 2 \frac{1}{1 + t^2} dt$$

bo'lgani uchun

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = 2 \int R\left(\frac{2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right) \frac{1}{1 + t^2} dt,$$

bu yerda $R\left(\frac{2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right) \cdot \frac{1}{1 + t^2}$ ifoda $-t$ ning ratsional funksiyasi bo'lgani uchun, ushbu integralni hisoblab, t ning o'rniga $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ni qo'yib, dastlabki integralni topamiz.

Shuni ta'kidlash lozimki, har doim ham berilgan integralni analitik usulda hisoblab bo'lmaydi.

$$\text{Masalan, } \int e^{-x^2} dx, \quad \int \sin x^2 dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}$$

integrallar mavjud bo'lishligiga qaramasdan, ularni analitik usulda integrallab bo'lmaydi. Buning sababi hosilasi berilgan integral ostidagi funksiyaga teng bo'lgan elementar funksiya mavjud emasligidir.

Nazorat uchun savollar

1. O'zgaruvchini almashtirib integrallash qanday amalga oshiriladi?
2. Bo'larlab integrallas fo'rmulasini yozing.
3. Ratsional ifodalarni integrallash usuli qanday?
4. Ayrim irratsional ifodalarni integrallashni tushuntiring.

Mustaqil ish topshiriqlari:

1. Trigonometrik funksiyalarni integrallash to'g'risida aytib bering.
2. $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^m}$ integral qanday hisoblanadi?
3. Binominal integrallar nazariyasini keltiring.
4. Elementar funksiyalar bilan ifodalanmaydigan integrallarga misollar keltiring

M A`R U Z A 18

ANIQ INTEGRALNING TA`RIFI, XOSSALARI, QO`LLANILISHI

Dars o`quv maqsadi: aniq integralni hisoblash va uni yuzani hisoblashda qo`llanishi bilan tanishtirish

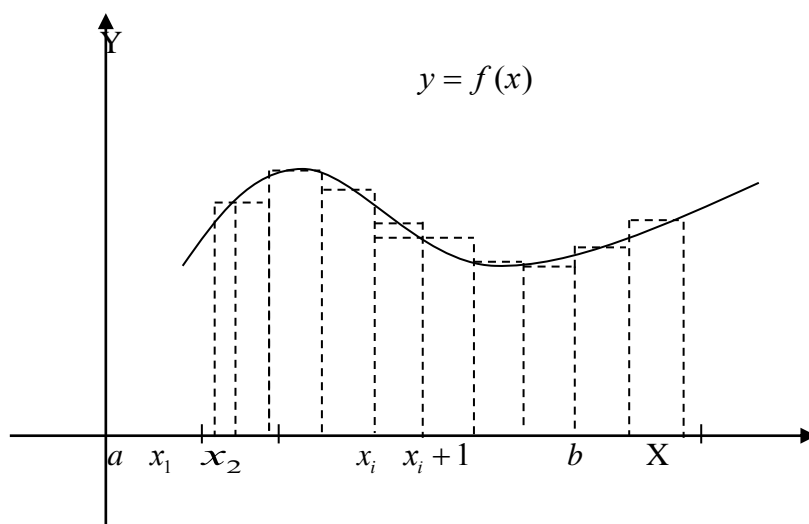
Tayanch iboralar: Aniq integral, chegara, soha yuzasi, xosmas integral, aniq integral tatbiqi.

Ma`ruza rejasi

1. Aniq integral tushunchasi.
2. O`zgaruvchini almashtirib integrallash.
3. Bo`larlab integrallash.
4. Ayrim ifodalarni integrallash usullari.

Aniq integral tushunchasi

Quyidagi egri chiziqli trapetsiya deb nomlanuvchi figuraning yuzasini topish masalasini ko`raylik.



Bu figura yuqoridan manfiy bo`lmagan $y = f(x)$ funksiya grafigi bilan, quyidan OX o`q, yon tomonlardan $x = a$ va $x = b$ to`g`ri chiziqlar bilan chegaralangan. Buning uchun $[a, b]$ oraliqni $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ nuqtalar bilan, $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, kichik oraliqlarga bo`lamiz. Har bir oraliqdan biron-bir $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ nuqta olib, $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, belgilash kiritib, quyidagi yig`indini tuzib olamiz.

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \quad (4)$$

Bu yig`indida $f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ qo`shiluvchini biz qaralayotgan figuraning $[x_i, x_{i+1}]$ oraliqqa mos keluvchi bo`lagining yuzasini, balandligi $f(\xi_i)$ va asosi Δx_i ga teng bo`lgan to`g`ri to`rtburchak yuzasiga taqriban teng deb qarajak, u holda yuqoridagi yig`indini biz egri chiziqli trapetsiya yuzasining taqribiy qiymati deb qarashimiz mumkin. S ni egri chiziqli trapetsiya yuzasi deb olsak,

$$S \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$$

Agar biz bu taqribiy tenglikdagi xatolikni kamaytirmoqchi bo'lsak, $[x_i, x_{i+1}]$ kesmalar uzunliklarini, ya'ni Δx_i larni yetarlicha kichik qilib olishimiz kerak. Buning uchun oraliqni bo'luvchi nuqtalar soni n ni shunday oshira borishimiz kerakki, $n \rightarrow \infty$ da $\max_{0 \leq i \leq n-1} \{\Delta x_i\} \rightarrow 0$ bo'lsin.

Demak, agar biz (4) yig'indida $\max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0$ deb qarasaq, limitda qidirilayotgan egri chiziqli trapetsiya yuzini hosil qilar ekanmiz, ya'ni

$$S = \lim_{\max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$$

1-ta'rif. $[a, b]$ oraliqda berilgan $y = f(x)$ uchun, shu oraliqni kichik bo'lakchalarga bo'luvchi $a = x_0 < x_1, \dots, < x_n = b$ va $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ nuqtalar uchun (4) yig'indi integral yig'indi deb ataladi.

2-ta'rif. $[a, b]$ oraliqda berilgan $y = f(x)$ funksiya uchun $\max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0$ da (4) integral yig'indining chekli limiti mavjud bo'lib, bu limit bo'linish nuqtalari x_0, x_1, \dots, x_n va oraliqlardan olinayotgan $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ nuqtalarga bog'liq bo'lmasa, $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi va limitning qiymati uning aniq integrali deyilib, bu limit quyidagicha belgilanadi:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$$

Bu yerda $f(x)$ integral ostidagi funksiya, $f(x) dx$ - integral ostidagi ifoda, a - integralning quyi chegarasi, b - integralning yuqori chegarasi deyiladi.

$\int_a^b f(x) dx$ integral qiymatini topish $f(x)$ funksiyani $[a, b]$ oraliqda integrallash deb ataladi.

Aniq integral xossalari

1. Istalgan o'zgarmas k son uchun

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

2. Funktsiyalar yig'indisining integrali qo'shiluvchilar integrallarining yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

3. Istalgan a, b va c ($a < c < b$) sonlar uchun

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

4. Agar $a < b$ bo'lib, $[a, b]$ oraliqda $f(x) \leq g(x)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Xususan, $[a, b]$ oraliqda $m \leq f(x) \leq M$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi.

Bu xossalar isboti to'g'ridan-to'g'ri aniq integral ta'rifidan kelib chiqadi.

N'yuton-Leybnits formulasi

$f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'lib, $F(x)$ uning istalgan boshlang'ich funksiyasi bo'lsin, u holda

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

bu tenglik N'yuton-Lebnits formulasi deyilib, ko'pincha $F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$ belgilash qo'llaniladi.

Endi aniq integralni hisoblash usullari bilan tanishamiz.

7-teorema. (Yangi o'zgaruvchi kiritib integrallash). Agar $\varphi(t)$ funksiya $[\alpha, \beta]$ oraliqda uzluksiz hosilaga ega bo'lib, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ bo'lsa, $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiya uchun

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

tenglik o'rinlidir.

Bo'laklab integrallash usuli. $u = u(x)$ va $v = v(x)$ funksiyalar $[a, b]$ oraliqda uzluksiz hosilalarga ega bo'lsa, quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

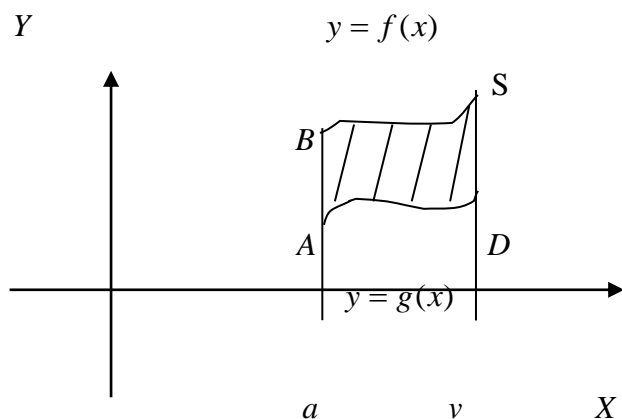
$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Endi aniq integralning ayrim tadbirlarini ko'rib chiqaylik.

$[a, b]$ oraliqda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uzluksiz bo'lib, $g(x) \leq f(x)$ tengsizlik o'rinli bo'lsin. $x = a$ va $x = b$ to'g'ri chiziqlar hamda $f(x)$ va $g(x)$ funksiya grafiklari bilan chegaralangan S -yuzani hisoblash uchun, quyidagi formula o'rinlidir:

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Ushbu formulani isbot qilaylik. Umumiylikka zarar keltirmasdan $0 \leq g(x) \leq f(x)$ deb olishimiz mumkin. U holda quyidagi chizmadan



$$S = \int_{ABCD} = \int_{aBCb} - \int_{aADb} = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

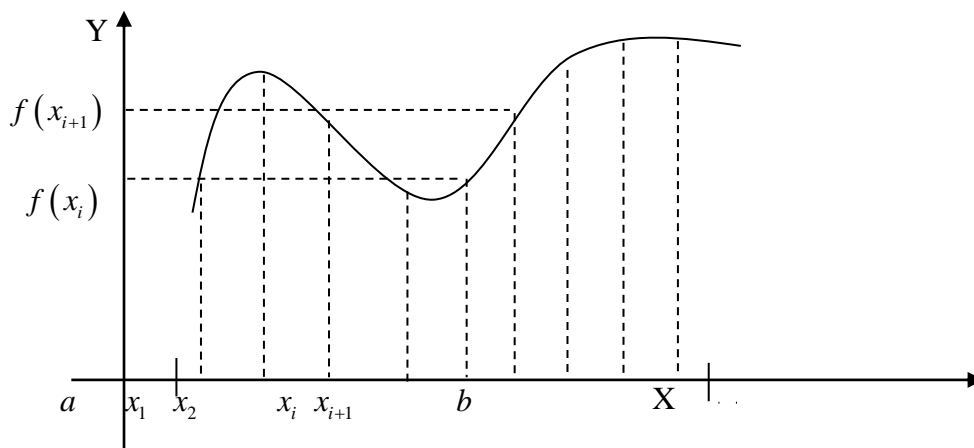
tenglikni hosil qilamiz.

Endi aniq integralni taqribiy hisoblash masalasini qaraymiz.

Shuni ta'kidlash lozimki, uzluksiz bo'lgan har qanday funksiya uchun N'yuton-Leybnits formulasini qo'llay olmaymiz, chunki bu formulani qo'llash uchun, $y = f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasini bilishimiz zarur. Lekin uzluksiz bo'lgan ko'pgina funksiyalarning boshlang'ich funksiyalarini, ya'ni aniqmas integrallarini har doim analitik usul bilan topa olmaymiz. Masalan, $\int \frac{\sin x}{x} dx$ shunday integrallardan biridir.

Bunday murakkab ko'rinishdagi aniq integrallarni hisoblashda taqribiy hisoblash usullaridan foydalanish mumkin. Biz quyidagida trapetsiyalar usulini keltiramiz.

$[a, b]$ oraliqda $y = f(x)$ funksiya uzluksiz va $f(x) \geq 0$ bo'lsin. U holda $\int_a^b f(x)dx$ integral qiymati $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ va $y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan egri chizikli trapetsiya yuziga teng bo'ladi.



$\int_a^b f(x)dx$ integralni hisoblashda $[x_i, x_{i+1}]$ bo'lakka mos keluvchi $y = f(x)$ egri chiziq bo'lagini, $(x_i, f(x_i))$ va $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ nuqtalarni birlashtiruvchi kesma bilan almashtirsak, $[x_i, x_{i+1}]$ oraliqqa mos keluvchi egri chizikli trapetsiya yuzini ushbu oraliqqa mos keluvchi trapetsiya bilan almashtirgan bo'lamiz. Bu trapetsiya yuzini S_i desak,

$$S_i = \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

x_i nuqtalarni shunday tanlab olaylikki $[a, b]$ oraliq bu nuqtalar bilan teng n ta bo'lakka bo'linsin, ya'ni

$$x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n} \text{ bo'lsin.}$$

U holda,

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_0 + S_1 + S_2 + \dots + S_{n-1}$$

Nazorat uchun savollar

1. Aniq integral qanday ta'riflanadi?
2. Aniq integralning iqtisodiy ma'nosini ayting
3. Aniq integralning mavjudligi va yetarli shartini ayting.
4. Aniq integral xossalari ayting.
5. N'yuton-Leybnits formulasini yozing.

Mustaqil ish topshiriqlari:

1. Aniq integral bilan yuzalarni hisoblash formulasini yozing.
2. Aniq integralni taqribiy hisoblash formulasini yozing.
3. Xos bo'lmagan integral turlarini ayting.
4. Cheksiz oraliq uchun yaqinlashuvchi bo'lgan xos bo'lmagan integralga misol keltiring.
5. Maxsus nuqtali yaqinlashuvchi xos bo'lmagan integralga misol keltiring.

MA`RUZA 19

DIFFERENSIAL TENGLAMALAR. BIRINCHI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR.

Dars o'quv maqsadi: Differensial tenglamalar haqida tushuncha. Eng sodda differensial tenglamalar bilan tanishtirish

Tayanch iboralari: Differensial tenglama va uning tartibi, yechimi, integral egri chiziq, Koshi teoremasi, boshlang'ich shart, Koshi masalasi, umumiy yechim, o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama, birinchi tartibli chiziqli tenglama, bir jinsli tenglama, o'zgarmasni variatsiyalash, chiziqli bog'liqsiz yechimlar, xarakteristik tenglama, ildizlar, Vronskiy determinanti.

Ma`ruza rejasi

1. Birinchi tartibli differensial tenglamalar.
2. Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar.
3. Yuqori tartibli chiziqli differensial tenglamalar.

Birinchi tartibli differensial tenglamalar

Differensial tenglamalar haqida umumiy ma'lumotlar.

Differensial tenglamalar matematikada alohida o'rin egallab, tabiiy jarayonlarni tekshirish, jamiyatdagi ayrim qonuniyatlarni o'rganish, differensial tenglamalarni o'z ichiga olgan matematik modellarga keladi.

1-ta'rif. Differensial tenglama deb erkli o'zgaruvchilar, noma'lum funksiya va bu funksiya hosilalari yoki differensiallarini bog'lovchi tenglamaga aytiladi.

Agar izlanayotgan funksiya bir o'zgaruvchili bo'lsa, tenglama oddiy differensial tenglama, ko'p o'zgaruvchili bo'lsa-xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi.

Differensial tenglamaning tartibi deb unda qatnashayotgan hosilalarning eng yuqori tartibiga aytiladi.

Umumiy holda n -tartibli oddiy differensial tenglama quyidagicha ifodalanadi:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Jumladan, 1- tartibli oddiy differensial tenglamalarning umumiy ko'rinishi

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1^*)$$

kabidir.

Agar (1*) tenglamani hosilaga nisbatan yechish mumkin bo'lsa, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

Bu holda tenglama hosilaga nisbatan yechilgan, deyiladi.

Misollar: $y' = 7x^3$, $(y')^3 y^2 + 5x = 0$, $y' = x^4 \cos y$.

2-ta'rif. Birinchi tartibli oddiy differensial tenglamaning yechimi deb (a, b) oraliqda (1*) (xususan (1)) tenglamani ayniyatga aylantiruvchi $y = \varphi(x)$ funksiyaga aytiladi.

Yechimning grafigi integral egri chiziq deyiladi. Differensial tenglamalar nazariyasida asosiy masala yechimning mavjudligi va yagonaligidir.

Bu masala (1) tenglama uchun Koshi teoremasi orqali ifodalanadi.

1-teorema. (Koshi teoremasi). Agar $f(x, y)$ funksiya va uning xususiy hosilasi $f'_y(x, y)$ OXY tekislikning biror D sohasida uzluksiz bo'lsa, u holda ixtiyoriy $(x_0, y) \in D$ nuqtaning biror atofida (1) tenglamaning $x = x_0$ da $y = y_0$ shartni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud va yagonadir.

(1) tenglamaning $y|_{x=x_0} = y_0$ boshlang'ich shartni (Koshi shartini) qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi Koshi masalasi deb ataladi. Buning geometrik ma'nosi integral egri chiziqlar oilasidan D sohaning berilgan (x_0, y_0) nuqtasidan o'tuvchi bittasini tanlab olinadi.

3-ta'rif. (1) tenglamaning umumiy yechimi deb c o'zgarmasning ixtiyoriy qiymatida bu tenglamani qanoatlantiruvchi $y = \varphi(x, c)$ funksiyalar majmuiga aytiladi.

4-ta'rif. $\{\varphi(x, c)\}$ -(1) tenglamaning umumiy yechimi bo'lsin. (1) tenglamaning D sohasidagi xususiy yechimi deb $c = c_0$ o'zgarmas qiymatda olingan $y = \varphi(x, c_0)$ funksiyaga aytiladi.

O'zgaruvchisi ajraladigan tenglamalar

5-ta'rif. Ushbu

$$y' = f_1(x)f_2(y) \quad (2)$$

ko'rinishdagi tenglamalar o'zgaruvchisi ajralgan differensial tenglamalar deyiladi, bu yerda $f_1(x)$, $f_2(y)$ - uzluksiz funksiyalar.

Bu tenglamani yechish uchun «o'zgaruvchini ajratish usuli»ni qo'llaymiz: y' hosilani uning ekvivalent formasi dy/dx ga almashtirib, tenglikning ikkala tomonini $\frac{dx}{f_2(y)}$ ga ko'paytiriladi ($f_2(y) \neq 0$):

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$$

Tenglikning ikkala tomonini integrallasak,

$$\int dy/f_2(y) = \int f_1(x)dx + C,$$

bu yerda C -o'zgarmas kattalik.

Misol: $y' = \frac{x\sqrt{y^2+1}}{y}$ tenglamaning (0,1) nuqtadan o'tuvchi xususiy yechimini toping.

Yechish: O'zgaruvchilarni ajratamiz:

$$ydy/\sqrt{y^2+1} = xdx$$

Bundan, $\int ydy/\sqrt{y^2+1} = \int xdx + C,$

$$\text{Demak, } \sqrt{y^2 + 1} = \frac{x^2}{2} + c \quad y^2 + 1 = \left(\frac{x^2}{2} + c\right)^2 \quad y = \sqrt{\left(\frac{x^2}{2} + c\right)^2 - 1}$$

(0,1) nuqtadan o'tuvchi yechim izlanayotgani uchun $C = \pm\sqrt{2}$ topiladi. Demak,

$$y = \sqrt{\left(x^2/2 + \sqrt{2}\right)^2 - 1}$$

Birinchi tartibli chiziqli tenglamalar

6-ta'rif. Birinchi tartibli chiziqli tenglama deb

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (3)$$

ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi, bu yerda $p(x), q(x)$ -uzluksiz funksiyalar. Bu tenglamani «o'zgarmasni variatsiyalash usuli» bilan yechamiz.

Dastlab, (3) ga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi topiladi:

$$y' + p(x)y = 0$$

Bu o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir. Shuning uchun $y \neq 0$ deb faraz qilib, ushbuga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= -p(x)dx \\ y &= c e^{-\int p(x)dx} \end{aligned} \quad (4)$$

C -ixtiyoriy o'zgarmas son.

Endi (4) da C ni x ning funksiyasi, deb qaraymiz:

ya'ni

$$y = c(x)e^{-\int p(x)dx}, \quad (5)$$

(«o'zgarmasni variatsiyalash» deb shu jarayon ko'zda tutiladi).

(5) ni (3) ga qo'yib soddalashtirsak,

$$c'(x) = q(x) e^{\int p(x)dx}.$$

Ushbu tenglikning ikkala tomonini integrallasak,

$$c(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + c_1, \quad (6)$$

hosil bo'ladi, bu yerda C_1 -ixtiyoriy o'zgarmas son.

(6) ni (5) ga qo'ysak, (3) tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$y(x) = c_1 e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx. \quad (7)$$

Ba'zi bir chiziqli bo'lmagan tenglamalar ayrim almashtirishlar yo'li bilan chiziqli tenglamaga keltiriladi.

Bunday tenglamalar qatoriga Bernulli tenglamasini kiritish mumkin:

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \quad n = \text{const} \quad (8)$$

Agar $n = 0$ bo'lsa, chiziqli, bir jinsli bo'lmagan, $n = 1$ da chiziqli, bir jinsli tenglama hosil bo'ladi. Shuning uchun (8) da $n \neq 0, n \neq 1$ deb faraz qilinadi.

Yangi $z(x) = z(y(x))$ funksiya kiritamiz:

$$z = y^{1-n}, \quad (9)$$

u holda,

$$z' = (1-n)y^{-n}y' \quad (10)$$

(8) tenglamaning ikkala tomonini y^n ga bo'lamiz:

$$y^{-n}y' + py^{1-n} = q \quad (11)$$

Bu tenglamaning ikkala tomonini $(1-n)$ ga ko'paytirib, (9), (10)-tengliklarni hisobga olgan holda $z(x)$ ga nisbatan chiziqli, bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamani olamiz.

$$z' + (1-n)pz = (1-n)q \quad (12)$$

1-misol.

$$y' + xy = xy^3$$

Yechish. Bu tenglama Bernulli tenglamasidir $n = 3$. $z = y^{-2}$ almashtirishni bajaramiz. U holda $z' = -2y^{-3}y'$.

(12) da asosan:

$$z' + (-2)xz = -2x$$

(7) ga ko'ra tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$z(x) = Cx^2 + 1$$

Natijada ushbu

$$y = \pm (Cx^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$$

yechimni olamiz.

Nazorat uchun savollar

1. Differensial tenglama deb qanday tenglamaga aytiladi va uning tartibi qanday aniqlanadi?
2. Differensial tenglamaning yechimi ta'rifini ayting.
3. Birinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun Koshi teoremasi.
4. Koshi teoremasining geometrik ma'nosi.
5. 1-tartibli differensial tenglama uchun umumiy va xususiy yechim tushunchalari.
6. Birinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun umumiy va xususiy integral tushunchalari.
7. O'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar.
8. O'zgarmasni variatsiyalash usuli.
9. Ikkinchi tartibli differensial tenglama.
10. O'zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli ikkinchi tartibli differensial tenglama.

Mustaqil ish topshiriqlari:

1. Chiziqli bog'liqsiz yechimlar tushunchasi.
2. Xarakteristik tenglama va uning ildizi.
3. Vronskiy determinanti.
4. Bir jinsli bo'lmagan ikkinchi tartibli differensial tenglamalarning umumiy yechimi haqida teorema.
5. Ikkinchi tartibli differensial tenglama uchun birinchi chegaraviy masala.
6. Ishlab chiqarishning tabiiy o'sish modeli.
7. Konkurensiya sharoitida ishlab chiqarishning o'sishi.
8. Keynsning dinamik modeli.
9. O'sishning noklassik modeli.
10. Oldindan aytib beriladigan narx asosida bozor modelini tuzish.

Adabiyotlar

1. Azlarov T. A., Mansurov H. Matematik analiz.- T.: 2006.

2. Xojiyev J. Algebra va sonlar nazariyasi.-T.: O‘zbekiston, 2001.
3. Jo‘rayev T.J., Sagdullaev A.S., Xudoyberganov R.X., Vorisov A.K., Mansurov X. Oliy matematika asoslari.-T.: O‘zbekiston, 1999.
4. Soatov YO.U. Oliy matematika.-T.:O‘qituvchi, 1-jild, 2-jild, 1994., 3-jild, 1996.
5. Obshiy kurs visshiy matematike dlya ekonomistov. pod. red. V. I. Yermakova. – M.: INFRA – M, 2006.
6. Visshaya matematika dlya ekonomistov. pod. red. Kramera N.Sh.–M.: YuNITI, 2006.
7. Krass M. C., Chuprinov B. P. Matematike dlya ekonomicheskogo bakalavrianta.- M.: Delo, 2006.
8. Shoraxmetov Sh., Naimjonov A. Oliy matematika. Fanidan ma’ruzalar matni: T.: TDIU, 2005.
9. Nasritdinov G‘., Abduraimov M., Iqtisodchilar uchun matematika o‘quv qo‘llanma. –T. «Universitet» 2001. 124
10. Karimov M. Oliy matematika. –T.: TMI, 2005.
11. Adigamova E. B. va boshqalar. «Oliy matematika» fanidan ma`ruzalar to‘plami. – T.: TMI, 2004. (II qism).
12. Saifnazarov Sh. A., Ortiqova M. T., Boshlang‘ich moliyaviy matematika asoslari. –T.: TDIU, 2002.
13. Obshiy kurs visshiy matematiki dlya ekonomistov. pod. red. Yermakova V. I. –M.: INFRA – M, 2006.

Internet ma'lumotlari

1. <http://images/yandex/ru>
2. www.ibz.ru