

**O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA
O`RTA MAXSUS TA`LIM VAZIRLIGI**

TOSHKENT MOLIYA INSTITUTI

“STATISTIKA” KAFEDRASI

STATISTIKA FANIDAN

REFERAT

Mavzu: Variatsiya ko'rsatkichlari

BAJARDI: KBI-65-guruh talabasi
Sanginova A.

TEKSHIRDI: o`q. Jamaldinova A.

TOSHKENT-2014

VARIATSIYA KO'RSATKICHLARI

1. Variatsiya to'g'risida tushuncha va variatsiya ko'rsatkichlari

Statistikaning muhim vazifalaridan biri faqatgina umumlashtiruvchi ko'rsatkichlarni (o'rtachalarni) hisoblash bilan cheklanmasdan, balki to'plam birliklarining o'rtachadan tafovutini, farqini, chetlanishini ham o'rganishdir. Bu ishni statistika variatsiya ko'rsatkichlari yordamida bajaradi.

“**Variatsiya**” so'zi lotincha “variatio” so'zidan kelib chiqqan bo'lib, o'zgarish, farq, tebranishni bildiradi. Ammo har qanday farq ham variatsiya bo'lavermaydi.

Statistikada variatsiya deganda, o'zaro qarama-qarshi omillar ta'sirida bo'lgan, bir turli birlikdan tashkil topgan miqdoriy o'zgarishlarga tushuniladi. O'rganilayotgan belgining tasodifiy va surunkali (sistematik) variatsiyalari bo'lishi mumkin.

Tasodifiy variatsiyani boshqarib bo'lmaydi. Surunkali variatsiyaga qisman bo'lsada, ta'sir o'tkazish mumkin. Surunkali variatsiyani tahlil qilish asosida o'rganilayotgan belgida o'zgarishni unga ta'sir qiluvchi omillarga qanchalik bog'liqligini baholash mumkin. Masalan, ajratilgan to'plam birliklari variatsiyasining kuchi va xarakterini o'rganishda, ular miqdoriy, ayrim vaqtlarda sifat tomondan qanchalik turdosh ekanligini va shu vaqtning o'zida aniqlangan o'rtacha ular uchun xarakterli ekanligini statistik baholash mumkin.

Shunday qilib, o'rtalashtirilgan birliklar (x_i) o'rtachadan har xil farqda (uzoqlikda, yaqinlikda) bo'ladi va ular variatsiyaning turli ko'rsatkichlari orqali baholanadi.

Variatsion kenglik (R) deganda belgining eng katta va kichik hadlari orasidagi farq (tafovut) tushuniladi va u quyidagicha aniqlanadi:

$$R = X_{\max} - X_{\min},$$

bu erda: R- variatsion kenglik; $X_{\max}$ - belgining eng katta darajasi;

$X_{\min}$ – belgining eng kichik darajasi.

Variatsion kenglik ayrim kamchiliklarga esa: birinchidan,

birinchidan, ikki chetki hadga asoslangan, ular tasodifiy bo'lishi mumkin; ikkinchidan - hadlar o'rtacha bilan taqqoslanmaydi. Shu sabablar orqali, bu ko'rsatkichdan qatorning hadlari bir-biridan unchalik katta miqdorda farq qilmaydigan sharoitlarda foydalanish mumkin.

O'rtacha chiziqli chetlanish ($\bar{d}$) variantalar bilan o'rtacha farqining variantalar soniga nisbatidir.

Oddiy qatorlar uchun u quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$\bar{d} = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{n}$$

Tortilgan qatorlar uchun u quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$\bar{d} = \frac{\sum |x - \bar{x}| f}{\sum f}$$

Biz yuqorida, o'rtacha arifmetikning xossalari ko'rib chiqqanimizda $\sum (x - \bar{x}) = 0$ ekanligiga ishonch hosil qilgan edik. Lekin bu erda shu qoidaga rioya qilinmasdan, mutlaq qiymatlarning yig'indisi ($\sum |x - \bar{x}|$ eku $\sum |x - \bar{x}| f$) olinadi. Natijada umumiy olingan yig'indi iqtisodiy, real ma'noga ega bo'lmaydi, shu sababli bu ko'rsatkich amaliyotda deyarli qo'llanilmaydi va uning o'rniga dispersiya ishlatiladi.

O'rtacha kvadrat chetlanish yoki dispersiya (σ^2) deb variantlar bilan o'rtachani farqi kvadratlari yig'indisining variantlar soni nisbatiga aytiladi.

Dispersiyani quyidagi formulalar bilan hisoblaymiz:

$$\text{Oddiy qatorlar uchun } \sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}$$

$$\text{Tortilgan qatorlar uchun } \sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{\sum f}$$

Bu erda ham o'rtacha arifmetikning xossalari buzildi, ya'ni $(x - \bar{x})$ kvadratga ko'tarilib, ikki baravarga ko'paytirildi. Ularni o'z holiga olib kelish uchun kvadrat ildizdan chiqariladi, ya'ni o'rtacha kvadratik chetlanish hisoblaniladi.

O'rtacha kvadratik chetlanish (σ) deb o'rtacha kvadrat chetlanishning kvadrat ildizdan chiqarilgan miqdoriga aytiladi va quyidagi formulalar bilan aniqlanadi:

$$\text{Oddiy qatorlar uchun } \sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}}$$

$$\text{Tortilgan qatorlar uchun } \sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{\sum f}}$$

Yuqorida ko'rib chiqilgan variatsiya ko'rsatkichlari o'rganilayotgan hodisa va voqealar qanday birliklarda (so'm, tonna, metr va h.k.) ifodalangan bo'lsa, ular ham shu birliklarda ifodalanadi. Bu esa turli xildagi hodisa va voqealar uchun hisoblangan ko'rsatkichlarni taqqoslashga imkon bermaydi. Ushbu muammo statistikada variatsiya koeffitsientini hisoblash bilan hal etiladi.

Variatsiya koeffitsienti (V) deganda, o'rtacha kvadratik tafovutning (σ) o'rtacha miqdorga ($\bar{x}$) nisbati tushuniladi. Bu ko'rsatkich foizda ifodalanadi va quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100$$

2. Dispersiyaning asosiy xossalari

O'rtacha kvadrat chetlanish bir qancha matematik xossalarga ega, ular uni hisoblashni soddalashtiradi yoki engillashtiradi.

1. Agar belgining alohida miqdorlaridan qandaydir bir "A" sonni ayirsak yoki qo'shsak bunda o'rtacha kvadrat chetlanish o'zgarmaydi:

$$\sigma^2_{(x \pm A)} = \sigma^2$$

Demak, dispersiyaning faqat belgilangan variantlar asosida emas, balki shu variantlarning qandaydir bir o'zgarmas "A" sonidan bo'lgan chetlanishi asosida hisoblash ham mumkin.

$$\sigma^2 = \sigma^2_{(x \pm A)}$$

2. Agar belgining alohida miqdorlarini qandaydir o'zgarmas "A" songa bo'lsak yoki ko'paytirsak, unda o'rtacha kvadrat chetlanish A^2 ga, o'rtacha kvadratik chetlanish esa A marta kamayadi yoki ko'payadi:

$$\sigma^2 \frac{x}{A} = \sigma^2 : A^2 \quad \sigma^2_{x \times A} = \sigma^2 \times A^2$$

ëku

$$\sigma_{\frac{x}{A}} = \sigma : A \quad \sigma_{x \times A} = \sigma \times A$$

Demak, belgining alohida miqdorini dastlab «A» songa (masalan, interval oralig'iga) bo'lib dispersiyaning hisoblashi mumkin, so'ngra esa olingan natijani o'sha o'zgarmas «A» sonning kvadratiga ko'paytirib, dispersiyaning haqiqiy qiymati (xuddi shunga o'xshash o'rtacha kvadratik chetlanish) aniqlanadi.

3. Agar σ^2 o'rtacha arifmetik va alohida miqdorlar asosida emas, balki o'rtachani qandaydir bir "A" son bilan almashtirib, so'ngra ular o'rtasida o'rtacha kvadrat chetlanish hisoblansa, u hamma vaqt o'rtacha arifmetik bo'yicha hisoblangan dispersiyadan katta bo'ladi:

$$\sigma_A^2 > \sigma^2$$

Anchagina farqga ega, ya'ni o'rtacha bilan shartli olingan miqdor farqining kvadratiga $(\bar{x} - A)^2$

$$\sigma_A^2 = \sigma^2 + (\bar{x} - A)^2 \quad \text{ëku} \quad \sigma_A^2 = \sigma^2 - (\bar{x} - A)^2$$

Demak, o'rtacha asosida hisoblangan dispersiya hamma vaqt boshqa dispersiyalardan kichik bo'ladi.

2-jadval

Dispersiyani $A=150$ holda aniqlash (σ_A^2)

Tovar oboroti bo'yicha guruhlar, mln.so'm.	Sotuvchilar soni (f)	Interval o'rtachasi, (x)	x-150	(x-150) ²	(x-150) ² f
100 - 120	10	110	- 40	1600	16000
120 -140	20	130	- 20	400	8000
140 - 160	60	150	0	0	0
160 - 180	30	170	+20	400	12000
180 - 200	10	190	+40	1600	16000
Jami	130	-		-	52000

Shunday qilib dispersiya σ_A^2 uchun: $\frac{52000}{130} = 400$.

3-jadval

Dispersiyani hisoblash (o'rtacha uchun)

Interval o'rtachasi (x)	Sotuvchi lar soni, (f)	xf	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})^2 f$
110	10	1100	-41,54	1725,57	17255,7
130	20	2600	-21,54	463,97	9279,4
150	60	9000	-1,54	2,37	142,2
170	30	5100	18,46	340,77	10223,1
190	10	1900	38,46	1479,17	14791,7
Jami	130	19700		-	51692,1

O'rtacha arifmetik bizni misolimizda teng:

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{19700}{130} = 151,54 \text{ млн.сўм}$$

$$\text{Дисперсия 'эса тенг: } \sigma^2 = \frac{51692,1}{130} = 397,63$$

Bu erda tafovutni o'rtacha arifmetik (151.54)dan emas, ozod son 150 dan aniqlaymiz. Unda keltirilgan formulamizga binoan, o'rtacha kvadrat chetlanish (150 dan olingani) teng:

$$397,63 + (151,54 - 150)^2 = 397,63 + 2,37 = 400,0$$

Xuddi shunday natijani 1-jadval ma'lumotlari asosida ham olishga erishgan edik.

Bu hisob-kitobni σ^2 ni aniqlash uchun ham ishlatish mumkin. Buning uchun σ_A^2 dan A va x farqining kvadratini $(151,54-150)^2=2,37$ ajratish kerak. Demak, $\sigma^2=400-2,37=397,63$.

Xuddi shunday natija 3-jadval ma'lumotlari asosida ham olingan edi.

Agar "A" ni nolga teng deb olsak, u holda dispersiya alohida miqdorlar kvadrati o'rtachasi va o'rtacha miqdor kvadrati ayirmasiga tengdir:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2 f}{\sum f} - \left(\frac{\sum x f}{\sum f} \right)^2 \quad \text{ëku} \quad \sigma^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$$

4 –jadval

Dispersiyani $\sigma^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$ bilan aniqlash

x	f	xf	x^2	$x^2 f$
110	10	1100	12100	121000
130	20	2600	16900	338000
150	60	9000	22500	1350000
170	30	5100	28900	867000
190	10	1900	36100	361000
Jami	130	19700	-	3037000

4 - jadvalda keltirilgan ma'lumotlar asosida dispersiyani hisoblaymiz:

$$\sigma^2 = \frac{3037000}{130} - \left(\frac{19700}{130} \right)^2 = 23361,54 - (151,54)^2 = 23361,54 - 22963,91 = 397,63$$

Qaysi usulni qo'llamaylik olinadigan natija bir xil.

Dispersiyani bu usulda hisoblash amaliyotda juda keng qo'llaniladi.

Dispersiyani moment usuli bilan aniqlash. Dispersiyani moment usulida hisoblash quyidagi formula yordamida amalga oshiriladi:

$$\sigma^2 = i^2(m_2 - m_1^2)$$

Dispersiyani aniqlash uchun oldin birinchi va ikkinchi tartibli momentlarni hisoblash zarur.

Birinchi tartibli moment quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$m_1 = \frac{\sum \left(\frac{x-A}{i} \right) f}{\sum f}$$

Ikkinchi darajali moment quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$m_2 = \frac{\sum \left(\frac{x-A}{i} \right)^2 f}{\sum f}$$

5-jadval

Dispersiyaning moment usulida aniqlash

x	f	$x_1 = \frac{x - A}{i}$	x_1^2	$x_1^2 f$	$x_1 f$
110	10	- 2	4	40	-20
130	20	- 1	1	20	-20
150	60	0	0	0	0
170	30	1	1	30	30
190	10	2	4	40	20
Jami	130	-	-	130	+10

5-jadvalda keltirilgan hisob-kitoblar asosida m_1 va m_2 ni hisoblaymiz:

$$m_1 = \frac{\sum(\frac{x-A}{i})f}{\sum f} = \frac{10}{130} = 0,0769$$

$$m_2 = \frac{\sum(\frac{x-A}{i})^2 f}{\sum f} = \frac{130}{130} = 1,000$$

Olingan natijalarni keltirib formulaga qo'yamiz va dispersiya quyidagiga teng bo'ladi:

$$\sigma^2 = i^2(m_2 - m_1^2) = 20^2[1 - (0,0769)^2] = 400(1 - 0,005914) = 400 \cdot 0,994086 = 397,63$$

Qanday usulda hisoblamaylik, natija bir xil, ya'ni dispersiya (σ^2) 397,63 ga teng.

Muqobil belgilar dispersiyasi. Bir-birini taqozo qilmaydigan belgilar muqobil belgilar deyiladi. Muqobil belgi to'plamning bir birligida uchrasa, ikkinchi birligida uchramaydi. Masalan, student a'lochi bo'lishi mumkin yoki yo'q. Bizni qiziqtiradigan belgini 1 bilan, bu belgiga ega bo'lmaganni 0 bilan, mavjud belgi salmog'i R, bo'lmagan belgi – q bilan belgilasak:

$P+q=1$ bu erdan $q=1-p$

Muqobil belgi bo'yicha o'rtacha qiymat quyidagicha hisoblaniladi:

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot P + 0 \cdot q}{p + q}$$

$0 \cdot q$ hamma vaqt 0 ga teng, $P+q$ esa 1 ga teng.

Muqobil belgi bo'yicha o'rtacha kvadrat chetlanishni quyidagi formula bilan aniqlaymiz:

$$\sigma_p^2 = \frac{(1-p)^2 + (0-p)^2 q}{p+q} = q^2 p + p^2 q = pq(q+p) = pq$$

Masalan, zavodda 10000 kishi ishlaydi. Shundan 6000 ayollar, 4000 erkaklar. Bu erdan:

$$p = \frac{4000}{10000} = 0,4 ; \quad q = \frac{6000}{10000} = 0,6$$

$$\sigma^2 = pq = 0,4 \cdot 0,6 = 0,24$$

Demak, $p+q$ birdan, $p \cdot q$ – esa 0,25 dan katta bo'lishi mumkin emas:

$$\sigma = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{0,24} = 0,49$$

Variatsiya ko'rsatkichlari nisbiy miqdorlar orqali ham ifodalanadi. Ularga variatsiya koeffitsienti, ostsillyatsiya koeffitsienti, nisbiy chiziqli chetlanish ko'rsatkichlari kiradi.

Variatsiya koeffitsienti foizda o'lchanadi. U faqat 1 bilan 100 oralig'ida bo'ladi. Variatsiya koeffitsienti aniq darajada o'rtachalarning ishonchliligi mezoni bo'lib hisoblanadi. Bu ko'rsatkich qancha 100 foizga yaqinlashib borsa, to'plam birliklari orasidagi tafovut shuncha yuqori ekanligidan dalolat beradi.

Ostsillyatsiya koeffitsienti o'rtacha atrofida belgining chet hadlarini nisbiy ifodalaydi va quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$K_0 = \frac{R}{\bar{x}} \cdot 100$$

Nisbiy chiziqli chetlanish mutlaq tafovutlar qiymatini o'rtacha miqdordagi hissasini xarakterlaydi va quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$K_d = \frac{\bar{d}}{\bar{x}} \cdot 100$$

Dispersiya turlari va uning qo'shish qoidasi. Ma'lumki, to'plam birliklari o'rtasidagi tafovut bir qancha omillar o'zgarishiga bog'liq. Bu omillar ta'sirini biz statistikaning boshqa metodlari yordamida o'rganishimiz mumkin. Ulardan biri guruhlash metodidir. Guruhlash metodi yordamida to'plam birliklarini ma'lum bir belgi bo'yicha turdosh to'plamchalarga yoki bo'laklarga ajratamiz. Bu bilan birliklarning chetlanishiga ta'sir qiluvchi omillar uch guruhga: umumiy, guruhlararo va guruh ichidagi omillarga ajraladi. Endi tebranishning uch ko'rsatkichini aniqlash zarur bo'ladi: umumiy dispersiya, guruhlararo dispersiya; guruhlar ichidagi dispersiya.

Umumiy dispersiya o'rganilayotgan to'plamdagi hamma sharoitlarga bog'liq belgi variatsiyasini xarakterlaydi va quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 \cdot f}{\sum f}$$

Guruhlararo dispersiya o'rganilayotgan belgi variatsiyasini ifodalaydi. Bu variatsiya guruhlash asosi qilib olingan omil belgi ta'sirida paydo bo'ladi. Guruhlararo dispersiya umumiy o'rtacha atrofida bo'lgan guruh (shaxsiy) o'rtachalarining tebranishini xarakterlaydi va quyidagi formula bilan ifodalanadi.

$$\delta^2 = \frac{\sum (\bar{x}_i - \bar{x}_y)^2 \cdot f_i}{\sum f_i}$$

bu erda: $\bar{x}_i$ - guruhlar bo'yicha o'rtacha; $\bar{x}_y$ - umumiy o'rtacha; f_i - guruhlar bo'yicha chastotalar soni.

Guruhlar ichidagi dispersiya har bir guruhdagi tasodifiy variatsiyani baholaydi va quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$\overline{\sigma_i^2} = \frac{\sum \sigma_i^2 f_i}{\sum f_i}$$

Umumiy dispersiya guruhlararo va guruhlar ichidagi dispersiya yig'indisiga tengdir:

$$\sigma_y^2 = \delta^2 + \overline{\sigma_i^2}$$

Bu ko'rsatkichlar yordamida hodisalar o'rtasidagi bog'liqlikni o'rganish mumkin. Agar biz guruhlararo dispersiyani umumiy dispersiyaga nisbatini olsak determinatsiya (η^2) koeffitsienti kelib chiqadi. Bu koeffitsient umumiy variatsiyaning qanchasi guruhlash asosiga qo'yilgan omil belgi hisobidan amalga oshganligini xarakterlaydi va quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$\eta^2 = \frac{\delta^2}{\sigma^2}.$$

Determinatsiya koeffitsientini kvadrat ildizdan chiqarib, korrelyatsion nisbat ko'rsatkichi aniqlanadi. Korrelyatsion nisbat guruhlash belgisi (omil) va natijaviy belgi o'rtasidagi bog'liqlikning zichligini ko'rsatadi va quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$\eta = \sqrt{\frac{\delta^2}{\sigma^2}}$$

Bu ko'rsatkich 0 va 1 oralig'ida bo'ladi. Qanchalik birga yaqinlashib borsa, shuncha omil belgi bilan natijaviy belgi o'rtasidagi bog'lanish zichligidan dalolat beradi (Cheddok shkalasiga qaralsin).