



III B O B

SONLI KETMA-KETLIKLER VA ULARNING LIMITI

1-§. Cheksiz sonli ketma-ketliklar

1. Ketma-ketlik tushunchasi. Har bir natural son n ($n \in \mathbb{N}$) ga biror qoida bo'yicha x_n haqiqiy son mos qo'yilgan bo'lsin. U holda

$$x_1; x_2; x_3; \dots; x_n; \dots \quad (1)$$

sonli ketma-ketlik berilgan deyiladi va bu ketma-ketlik $\{x_n\}$ ko'rinishda belgilanadi.

x_1, x_2, x_n sonlar, mos ravishda, (1) ketma-ketlikning birinchi hadi, ikkinchi hadi va n - hadi deyiladi.

x_n ketma-ketlikning *umumiy hadi* deb ataladi.

Ketma-ketlikning aniqlanishidan ko'rinadiki, ketma-ketlik natural sonlar to'plamida berilgan $y = f(n)$ funksiyadir. Shuning uchun ketma-ketlik *natural argumentli funksiya* deb ham yuritiladi.

1 - misol. Umumiy hadi $x_n = \frac{1}{n^2}$ bo'yicha sonli ketma-ketlik tuzish uchun unga tartib bilan $n = 1; 2; 3; \dots$ qo'yamiz. Natijada quyidagi ketma-ketlik hosil bo'ladi:

$$1; \frac{1}{4}; \frac{1}{9}; \frac{1}{16}; \dots; \frac{1}{n^2}; \frac{1}{(n+1)^2}; \dots$$

2 - misol. Har bir toq natural songa 3 ni, har bir juft natural songa esa 5 ni mos keltiramiz:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
x_n	3	5	3	5	3	5	3	5	...

Natijada 3; 5; 3; 5; 3; 5; 3; 5; ... cheksiz sonli ketma-ketlikka ega bo'lamiz. Uning umumiy hadini bir necha formula bilan, masalan, $a_n = 4 + (-1)^n$ yoki $a_n = 4 + (-1)^n + \sin \pi n$ formula bilan berish mumkin.

Cheksiz sonli ketma-ketliklar turli xil usullarda berilishi mumkin. Shu usullardan ayrimlarini keltiramiz.

1. Ketma-ketlikning *umumiy had formulasi* bilan berilishi. Bu usulda n -hadning qiymatini shu hadning tartib nomeri bilan bog'lovchi formula beriladi (1-misol). Umumiy had formulasi yordamida ketma-ketlikning istalgan hadini topish mumkin, ya'ni bu formula ketma-ketlikni to'la aniqlaydi.

2. Ketma-ketlik *o'z hadining tartib nomeri* bilan shu hadning qiymati orasidagi moslikni so'zlar orqali ifodalash yordamida berilishi mumkin (2-misol).

3. Ketma-ketlikning *rekurrent* usulda berilishi. Agar ketma-ketlikning dastlabki bitta yoki bir nechta hadlari berilgan bo'lib, keyingi hadlarni shu berilgan hadlar yordamida topish imkonini beruvchi formula (rekurrent formula) ko'rsatilgan bo'lsa, ketma-ketlik rekurrent usulda berilgan deyiladi. (Rekurrent so'zi lotin tilida qaytish degan ma'noni beradi.)

3-misol. $a_1 = 3$, $a_n = 2^n \cdot a_{n-1} - 4$ ($n \geq 2$) bo'lsa, $\{a_n\}$ ketma-ketlikning a_2 , a_3 , a_4 hadlarini topamiz.

Yechish. Bu yerda $\{a_n\}$ ketma - ketlik rekurrent usulda berilgan. $a_1 = 3$ bo'lgani uchun rekurrent formula $a_n = 2^n \cdot a_{n-1} - 4$ ga asosan

$$\begin{aligned} a_2 &= 2^2 \cdot a_1 - 4 = 4 \cdot 3 - 4 = 8, \\ a_3 &= 2^3 \cdot a_2 - 4 = 8 \cdot 8 - 4 = 60, \\ a_4 &= 2^4 \cdot a_3 - 4 = 8 \cdot 60 - 4 = 476 \end{aligned}$$

ekanligini topamiz.

Ketma-ketlik jadval yoki grafik ko'rinishida berilishi ham mumkin. Ketma-ketlikning grafigi diskret nuqtalar to'plamidan iborat bo'ladi (lotincha — *discretus* — uzlukli, alohida qismlardan iborat).

Agar ketma-ketlikning dastlabki bir nechta hadlari berilgan bo'lib, keyingi hadlarni berilgan hadlar orqali ifodalash usuli aytilmagan bo'lsa, bu hadlarning berilishi ketma-ketlikning to'liq aniqlanishi uchun yetarli bo'lmaydi. Masalan, 3; 5; 7; . . . ketma-ketlikni 2 dan katta toq sonlar yoki 2 dan katta tub sonlar ketma-ketligi sifatida, shuningdek, $x_n = 2n + 1 + \sin \pi n$ formula bilan berilgan ketma-ketlik sifatida ham qarash mumkindir.

Dastlabki hadlariga ko'ra ketma-ketlik uchun biror umumiy had tanlash usullaridan birini keltiramiz.

4 - m i s o l . Ushbu jadval bilan berilgan sonli ketma-ketlikning umumiy hadini topamiz:

n	2	4	6	8
a_n	-6	6	26	54

Jadvalda ketma-ketlikning 2, 4, 6, 8- hadlari berilgan.

Yechish. Bu holda jadvalni oddiy kuzatishning o'zi yetarli emas.

Shuning uchun chekli ayirmalar usuli, ya'ni $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ dan foydalanamiz:

n	2	4	6	8
a_n	-6	6	26	54
Δa_n	12	20	28	
$\Delta^2 a_n$	8	8		

Birinchi Δa_n chekli ayirmalar a_n ning ketma-ket joylashgan qiymatlari ayirmasidan iborat: $6 - (-6) = 12$, $26 - 6 = 20$, $54 - 26 = 28$.

Shu kabi, $\Delta^2 a_n$ ikkinchi ayirmalar Δa_n ning ketma-ket joylashgan qiymatlaridan iborat: $20 - 12 = 8$, $28 - 20 = 8$.

$\Delta^2 a_n$ ayirmalar bir xil. Demak, (a_n) ketma-ketlik $y = ax^2 + bx + c$ kvadrat funksiya qiymatlaridan iborat. Formulada a , b , c — noma'lum. Ularni topish uchun jadvaldan ixtiyoriy (n, a_n) juftlik bo'yicha tenglamalar sistemasini tuzamiz. Masalan, $(2; -6)$, $(4; 6)$, $(6; 26)$ juftliklar bo'yicha:

$$\begin{cases} -6 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c, \\ 6 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c, \\ 26 = a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c, \end{cases}$$

bundan $a = 1$, $b = 0$, $c = -10$.

Demak, izlanayotgan umumiy had formulasi $a_n = n^2 - 10$ dan iborat bo'ladi.



Mashqlar

3.1. Umumiy hadi formulasi bilan berilgan ketma-ketlikning dastlabki bir nechta hadlarini toping:

1) $x_n = 2n^3 + 1$;

2) $x_n = 2^n + 3$;

- 3) $x_n = \sqrt{n^2 + 1}$; 4) $x_n = \sin \frac{\pi n}{2}$;
 5) $x_n = \ln n + \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right)$; 6) $x_n = \cos n^2$;
 7) $x_n = \operatorname{tg} n + \sin(\pi n)$; 8) $x_n = 1 - \sin^2 \pi n - \cos^2 \pi n$.

3.2. Rekurrent formula bilan berilgan ketma-ketlikning dastlabki 5 ta hadini toping.

- 1) $a_1 = 1, a_{m+1} = 3a_m - 1, (m \geq 1)$;
 2) $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + n, (n \geq 1)$;
 3) $a_1 = -1, a_n = 3^{a_{n-1}}, (n \geq 2)$;
 4) $a_1 = 2, a_2 = 3, a_{n+1} = a_n - a_{n-1} + a_n a_{n-1}, (n \geq 2)$.

3.3. Ketma-ketlikning berilgan dastlabki hadlariga ko'ra, uning n -hadi uchun mumkin bo'lgan biror formula tanlang:

- 1) $\frac{1}{2}; \frac{2}{2^2}; \frac{3}{2^3}; \frac{4}{2^4}; \dots$; 5) $\frac{1}{3}; \frac{4}{9}; \frac{9}{27}; \frac{16}{81}; \dots$;
 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^2; \left(\frac{2}{5}\right)^2; \left(\frac{3}{7}\right)^2; \left(\frac{4}{9}\right)^2; \dots$; 6) $1; \frac{5}{6}; \frac{5}{6}; \frac{17}{20}; \frac{13}{15}; \dots$;
 3) $1; \frac{2}{101}; \frac{4}{201}; \frac{8}{301}; \dots$; 7) $\frac{1}{2}; \frac{2}{5}; \frac{3}{10}; \frac{4}{17}; \dots$;
 4) $1; \frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{3\sqrt{3}}; \frac{1}{4\sqrt{4}}; \dots$; 8) $0; \frac{1}{2}; \frac{8}{3}; \frac{15}{4}; \frac{24}{5}; \dots$.

3.4. $a_n = 3^n + 5 \cdot 2^n$ ketma-ketlik quyidagi rekurrent formula yordamida berilishi mumkinligini isbotlang:

$$a_1 = 13; a_2 = 29; a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \quad (n \geq 1).$$

3.5. $a_1 = 0, a_2 = 1, a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \quad (n \geq 3)$ rekurrent formula bilan berilgan ketma-ketlik *Fibonachchi ketma-ketligi*, uning hadlari esa *Fibonachchi sonlari* deyiladi. Fibonachchi ketma-ketligining dastlabki bir nechta hadlarini toping. Fibonachchi ketma-ketligining n -hadi uchun formula toping.

2. Chegaralangan ketma-ketliklar. $\{x_n\}$ cheksiz ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun shunday bir a haqiqiy son topilib, barcha n natural sonlar uchun $x_n \geq a$, $(x_n \leq a)$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik *quyidan (yuqoridan) chegaralangan* deyiladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun ikkita a va b haqiqiy sonlar topilib, barcha n natural sonlar uchun $a \leq x_n \leq b$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik *chegaralangan* ketma-ketlik deyiladi.

Bunda a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning *quyi chegarasi*, b son esa *yuqori chegarasi* deyiladi.

1 - m i s o l. $x_n = \frac{n-1}{n+1}$ ketma-ketlik chegaralangan ketma-ketlik ekanligini isbot qilamiz.

I s b o t. Barcha n natural sonlar uchun quyidagi tengsizliklar to'g'ridir:

$$x_n = \frac{n-1}{n+1} \geq \frac{n-n}{n+1} = 0;$$

$$x_n = \frac{n-1}{n+1} \leq \frac{n+1}{n+1} = 1.$$

Demak, $0 \leq x_n \leq 1$ tengsizlik barcha n natural sonlarda o'rinli. Bu esa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning chegaralanganligini ko'rsatadi.

T e o r e m a. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lsa, u holda shunday $M \geq 0$ son topiladiki, barcha n natural sonlar uchun $|x_n| \leq M$ tengsizlik bajariladi va aksincha, $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun shunday bir $M \geq 0$ son topilib, barcha n natural sonlarda $|x_n| \leq M$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'ladi.

I s b o t. $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lsin. U holda shunday a va b haqiqiy sonlar topiladiki, barcha n natural sonlarda $a \leq x_n \leq b$ tengsizlik bajariladi. $|a|$ va $|b|$ sonlarning eng kattasini M bilan belgilaymiz: $M = \max(|a|; |b|)$.

U holda $a \geq -|a| \geq -M$, $b \leq |b| \leq M$ bo'lgani uchun barcha n natural sonlarda $-M \leq x_n \leq M$ yoki $|x_n| \leq M$ bo'ladi.

Endi $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun shunday bir $M \geq 0$ son topilib, barcha n natural sonlarda $|x_n| \leq M$ tengsizlik o'rinli bo'lsin. U holda, $-M \leq x_n \leq M$ tengsizlikka ega bo'lamiz. $a = -M$, $b = M$ deb olsak, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning chegaralangan bo'lishligini ko'ramiz.

2 - m i s o l. $x_n = (-1)^n + \frac{n^2}{n^2+1}$ ketma-ketlikning chegaralangan ketma-ketlik ekanligini isbotlang.

I s b o t .

$$|x_n| = \left| (-1)^n + \frac{n^2}{n^2+1} \right| \leq \left| (-1)^n \right| + \left| \frac{n^2}{n^2+1} \right| = 1 + \frac{n^2}{n^2+1} \leq 1 + \frac{n^2}{n^2} = 1 + 1 = 2$$

munosabatlardan ko‘rinadiki, barcha n natural sonlarda $|x_n| \leq 2$ tengsizlik o‘rinli. Demak, isbotlangan teorema ko‘ra $\{x_n\}$ chegaralangan ketma-ketlikdir.

Ketma-ketliklar orasida chegaralanganlik sharti bajarilmaydigan ketma-ketliklar ham mavjuddir. Ular *chegaralanmagan* ketma-ketliklar deyiladi. Quyida biz chegaralanmagan ketma-ketlikning qat’iy matematik ta’rifini beramiz.

T a’ r i f . Agar ixtiyoriy $M > 0$ son uchun, shunday bir N natural son topilib, $|x_N| > M$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralanmagan ketma-ketlik deyiladi.

3 - m i s o l . $x_n = n^2$ ketma-ketlik chegaralanmagan ketma-ketlik ekanligini isbotlaymiz.

I s b o t . M ixtiyoriy musbat son bo‘lsin. $|x_N| > M$ tengsizlikni natural son n ga nisbatan yechamiz:

$$|n^2| > M \Leftrightarrow n^2 > M \Leftrightarrow n > \sqrt{M}, \quad (n - \text{natural son}).$$

Oxirgi tengsizlikdan ko‘rinadiki, ta’rifda so‘z borgan N natural son sifatida $\sqrt{M}$ dan katta bo‘lgan har qanday natural sonni olish mumkin. Biz $N = [\sqrt{M}] + 1$ natural sonni olamiz. Bu son uchun $|x_N| = N^2 = ([\sqrt{M}] + 1)^2 > ([\sqrt{M}] + \{\sqrt{M}\})^2 = (\sqrt{M})^2 = M$, ya’ni $|x_N| > M$ bo‘ladi.

Demak, $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralanmagan ketma-ketlikdir.

Agar ketma-ketlikning hadlarini to‘g‘ri chiziqdagi nuqtalar bilan tasvirlasak, chegaralangan ketma-ketlikning hamma hadlari biror oraliqda yotishini ko‘ramiz. Masalan, $x_n = \frac{1}{n}$ ketma-ketlik chegaralangan va uning hamma hadlari $[0; 1]$ oraliqda yotadi.

Chegaralanmagan ketma-ketliklar uchun esa buning aksidir ya’ni, har qanday oraliqni olmaylik, chegaralanmagan ketma-ketlikning bu oraliqda yotmaydigan hadlari albatta mavjud bo‘ladi.



Mashqlar

3.6. Ketma-ketlikning chegaralanganligini isbotlang:

$$1) \ x_n = \frac{2n^2-1}{2+n^2}; \quad 3) \ x_n = \frac{1-n}{\sqrt{n^2+1}};$$

$$2) \ x_n = \frac{n+(-1)^n}{3n-1}; \quad 4) \ x_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}.$$

3.7. Ketma-ketlikning chegaralanmaganligini isbotlang.

$$1) \ a_n = (-1)^n \cdot n; \quad 2) \ a_n = n^2 - n; \quad 3) \ a_n = \frac{1-n}{\sqrt{n}};$$

$$4) \ a_n = n + (-1)^n \cdot n; \quad 5) \ a_n = n \cdot \sin \frac{\pi n}{2}; \quad 6) \ a_n = n^2 \cos \frac{\pi n}{2}.$$

3.8. $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar chegaralangan ketma-ketliklar bo'lsa, quyidagi ketma-ketlikni chegaralangan yoki chegaralanmaganligi haqida nima deyish mumkin:

$$1) \ x_n y_n; \quad 2) \ \frac{x_n}{y_n}; \quad 3) \ x_n + y_n; \quad 4) \ x_n - y_n?$$

3.9. 1) Agar $x_n \leq y_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) bo'lib, $\{y_n\}$ chegaralangan ketma-ketlik bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lishi shartmi?

$$2) \ |x_n| \leq |y_n| \text{ bo'lsa-chi?}$$

3.10. 1) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, ($n \geq 1$) rekurrent formulalar bilan berilgan ketma-ketliklarning chegaralanganligini isbotlang;

2) a) yuqoridan chegaralangan, lekin quyidan chegaralanmagan;

b) quyidan chegaralangan, lekin yuqoridan chegaralanmagan;

d) quyidan ham, yuqoridan ham chegaralanmagan ketma-ketlik tuzing.

3) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ ketma-ketlikning chegaralanmaganligini isbotlang.

3. Monoton ketma-ketliklar. $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Agar ketma-ketlikning ikkinchi hadidan boshlab, har bir hadi o'zidan oldingi haddan katta (kichik) bo'lsa, ya'ni $x_{n+1} > x_n$

$(x_{n+1} < x_n)$ shart barcha natural n sonlar uchun bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi (*kamayuvchi*) ketma-ketlik deyiladi.

1 - m i s o l . $x_n = 3n^3$ ketma-ketlik o'suvchi ekanini isbotlang.

I s b o t . $x_{n+1} - x_n$ ayirmani qaraymiz:

$$x_{n+1} - x_n = 3(n+1)^3 - 3n^3 = 3(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 3n^3 = 3(3n^2 + 3n + 1).$$

Bu ayirma n ning istalgan natural qiymatida musbatdir. Shu sababli, barcha n natural sonlarda $x_{n+1} > x_n$, ya'ni $\{x_n\}$ ketma-ketlik o'suvchidir.

2 - m i s o l . $x_n = \frac{1}{n^2}$ ketma-ketlikning kamayuvchi ekanligini isbotlang.

I s b o t . Bu ketma-ketlikning hamma hadlari bir xil ishorali bo'lgani uchun $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ nisbatni baholaymiz:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} < 1.$$

$x_n > 0$ bo'lgani uchun, barcha natural n larda $x_{n+1} < x_n$ tengsizlikka egamiz. Demak, $\{x_n\}$ kamayuvchi ketma-ketlikdir.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning ikkinchi hadidan boshlab, har bir hadi o'zidan oldingi haddan kichik (katta) bo'lmasa, ya'ni $x_{n+1} \geq x_n$ ($x_{n+1} \leq x_n$) tengsizlik barcha n natural sonlarda bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik *kamaymaydigan* (*o'smaydigan*) ketma-ketlik deyiladi.

Masalan, 1; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 4; 4; 4; . . . ketma-ketlik kamaymaydigan, 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}$; ... ketma-ketlik esa o'smaydigan ketma-ketlikdir.

Har qanday o'suvchi ketma-ketlik kamaymaydigan ketma-ketlik bo'lishini, har qanday kamayuvchi ketma-ketlik esa o'smaydigan ketma-ketlik bo'lishini eslatib o'tamiz.

O'smaydigan ketma-ketliklar va kamaymaydigan ketma-ketliklar (umumiy nom bilan) *monoton* ketma-ketliklar deb ataladi.

3 - m i s o l . $x_n = \frac{n+1}{2n-1}$ ketma-ketlikni monotonlikka tekshiramiz.

Yechish. $x_{n+1} - x_n = \frac{n+2}{2n+1} - \frac{n+1}{2n-1} = -\frac{3}{4n^2-1} < 0$ tengsizlik n ning barcha natural qiymatlarida o‘rinli. Demak, ixtiyoriy n natural son uchun $x_{n+1} < x_n$ tengsizlik to‘g‘ridir. Bu yerdan, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning monotonligi kelib chiqadi.

4 - misol. $n \geq 2$ bo‘lsa, $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ketma-ketlikni monotonlikka tekshiramiz.

Yechish.

$$\begin{aligned} \frac{x_n}{x_{n-1}} &= \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n-1}} \right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n^4}\right)^n < 1 \end{aligned}$$

tengsizlikdan, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning kamayuvchi ekanligi kelib

chiqadi (Eslatma: $1 + \frac{1}{n} < 1 + n \cdot \frac{1}{n^2} + \dots = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$).

Demak, $\{x_n\}$ ketma-ketlik monoton ketma-ketlikdir.

5 - misol. $x_n = \begin{cases} -(2k-1), & \text{agar } n = 2k-1, k = 1, 2, 3, \dots; \\ 2, & \text{agar } n = 2k, k = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$

ketma-ketlikni monotonlikka tekshiring.

Yechish. Ketma-ketlikni, uning hadlarini ko‘rsatish orqali beraylik:

$$-1; 2; -3; 2; -4; 2; \dots$$

Bu ketma-ketlik monoton ketma-ketlik emas, chunki juft nomerli har qanday hadi o‘zidan oldingi haddan ham, shuningdek o‘zidan keyingi haddan ham katta.



Mashqlar

3.11. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ketma-ketlik kamayuvchi ekanligini isbotlang.

3.12. Ketma-ketlik monoton ekanligini isbotlang:

$$1) a_n = \frac{1-n}{\sqrt{n}}; \quad 2) a_n = 2^n - 1.$$

3.13. a, b, c va d sonlar orasida qanday munosabat bajarilsa, $a_n = \frac{an+b}{cn+d}$ ketma-ketlik: 1) o'suvchi; 2) kamayuvchi bo'ladi?

4. Progressiyalar. Ketma-ketliklarning muhim xususiy holi bo'lgan progressiyalarni qaraymiz. $\{x_n\}$ cheksiz sonli ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun shunday o'zgarmas d son topilib, barcha n natural sonlar uchun $x_{n+1} = x_n + d$ tenglik o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik *arifmetik progressiya* deyiladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun shunday $q \neq 0$ o'zgarmas son topilib, barcha n natural sonlarda $x_{n+1} = x_n \cdot q$ tenglik bajarilsa va $x_1 \neq 0$ bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik *geometrik progressiya* deyiladi.

d son arifmetik progressiyaning *ayirmasi*, q son esa geometrik progressiyaning *maxraji* deyiladi.

1 - m i s o l. $a_n = kn + m$ (bu yerda k, m — o'zgarmas haqiqiy sonlar) ketma-ketlikning arifmetik progressiya, $b_n = ca^{kn+m}$ (bu yerda $c \neq 0, a > 0, k \geq 0, m \geq 0$) ketma-ketlikning esa geometrik progressiya bo'lishligini isbotlang.

I s b o t. n ning istalgan natural qiymatida

$$a_{n+1} - a_n = (k(n+1) + m) - (kn + m) = k \text{ va } \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{c \cdot a^{k(n+1)+m}}{c \cdot a^{kn+m}} = a^k,$$

ya'ni $a_{n+1} = a_n + k$, $b_{n+1} = b_n a^k$ tengliklar o'rinli. Demak, $\{a_n\}$ ketma-ketlik ayirmasi $d = k$ bo'lgan arifmetik progressiya, $\{b_n\}$ ketma-ketlik esa maxraji $q = a^k$ bo'lgan geometrik progressiyadir.

1 - t e o r e m a. *Ayirmasi d ga teng bo'lgan $\{a_n\}$ arifmetik progressiyaning umumiy hadi uchun*

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad (1)$$

maxraji q ga teng bo'lgan $\{b_n\}$ geometrik progressiyaning umumiy hadi uchun esa

$$b_n = b_1 q^{n-1} \quad (2)$$

tenglik o'rinlidir.

I s b o t . Arifmetik va geometrik progressiyalarning ta'rifidan quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$(n-1) \text{ ta } \begin{cases} a_2 = a_1 + d, \\ a_3 = a_2 + d, \\ a_4 = a_3 + d, \\ a_5 = a_4 + d, \\ \dots, \\ a_{n-1} = a_{n-2} + d, \\ a_n = a_{n-1} + d, \end{cases} \quad (3) \quad (n-1) \text{ ta } \begin{cases} b_2 = b_1 \cdot q, \\ b_3 = b_2 \cdot q, \\ b_4 = b_3 \cdot q, \\ b_5 = b_4 \cdot q, \\ \dots, \\ b_{n-1} = b_{n-2} \cdot q, \\ b_n = b_{n-1} \cdot q. \end{cases} \quad (4)$$

(3) dagi tengliklarni hadma-had qo'shib, (4) dagi tengliklarni esa hadma-had ko'paytirib,

$$(a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_{n-1}) + a_n = a_1 + (a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1}) + (n-1)d$$

va

$$(b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_{n-1}) \cdot b_n = b_1 \cdot (b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_{n-1}) \cdot q^{n-1}$$

tengliklarni hosil qilamiz. Bu tengliklardan teoremaning tasdig'i o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

2 - m i s o l . (a_n) ketma-ketlik ayirmasi d bo'lgan arifmetik progressiya, (b_n) ketma-ketlik esa maxraji q bo'lgan geometrik progressiya bo'lsin. U holda ixtiyoriy n va k natural sonlar uchun,

$$a_n = a_k + (n-k)d \quad (5)$$

$$b_n = b_k \cdot q^{n-k} \quad (6)$$

tengliklar o'rinli bo'lishini isbotlaymiz.

I s b o t . 1-teoremaga ko'ra, $a_n = a_1 + (n-1)d$ va $a_k = a_1 + (k-1)d$ tengliklar o'rinli. Bu tengliklarning ikkinchisidan, $a_1 = a_k - (k-1)d$ ni topib, birinchisiga qo'ysak va ixchamlashni bajarsak, isbotlanishi kerak bo'lgan (5) tenglik hosil bo'ladi.

(6) tenglik ham shu tarzda isbotlanadi.

N a t i j a . (a_n) arifmetik progressiyaning ayirmasi d uchun $d = \frac{a_n - a_k}{n-k}$, $(n \neq k)$ tenglik, (b_n) geometrik progressiya maxraji q

$$\text{uchun esa } |q| = \begin{cases} \left| \frac{b_n}{b_k} \right|, & \text{agar } n = k + 1, \\ n-k \sqrt{\left| \frac{b_n}{b_k} \right|}, & \text{agar } n - k \geq 2 \end{cases} \quad \text{munosabat o'rinli}$$

(Mustaqil isbotlang).

2 - t e o r e m a . $\{a_n\}$ ketma-ketlik ayirmasi d bo'lgan arifmetik progressiya, $\{b_n\}$ ketma-ketlik esa maxraji q bo'lgan geometrik progressiya bo'lsin. Agar m, n, p, k natural sonlar uchun $m + n = p + k$ tenglik bajarilsa,

$$a_m + a_n = a_p + a_k, \quad (7)$$

$$b_m \cdot b_n = b_p \cdot b_k \quad (8)$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

I s b o t . m, n, p, k natural sonlar uchun $m + n = p + k$ bo'lsin. U holda, 1-teoremaga ko'ra

$$a_m + a_n = 2a_1 + (m + n - 2)d = 2a_1 + (p + k - 2)d = a_p + a_k$$

va

$$b_m \cdot b_n = b_1^2 \cdot q^{m+n-2} = b_1^2 \cdot q^{p+k-2} = b_p \cdot b_k$$

tengliklarga ega bo'lamiz.

3 - m i s o l . (a_n) arifmetik progressiyada $a_{17} = 310$, $a_{23} = 418$ bo'lsa:

a) progressiya ayirmasi d ni; b) a_{41} ni; d) $a_9 + a_{31}$ ni; e) a_{20} ni; f) a_5 ni topamiz.

$$\text{Y e c h i s h . a) } d = \frac{a_{23} - a_{17}}{23 - 17} = \frac{418 - 310}{6} = \frac{108}{6} = 18;$$

$$\text{b) } a_{41} = a_{17} + (41 - 17)d = 310 + 24 \cdot 18 = 742;$$

$$\text{d) } 9 + 31 = 17 + 23 \text{ bo'lgani uchun 2-teoremaga ko'ra}$$

$$a_9 + a_{31} = a_{17} + a_{23} = 728;$$

$$\text{e) } 20 + 20 = 17 + 23 \text{ bo'lgani uchun } 2a_{20} = a_{17} + a_{23} = 728, \\ a_{20} = 364.$$

$$\text{f) } a_5 = a_{17} + (5 - 17)d = 310 - 12 \cdot 18 = 94.$$

4 - m i s o l. Barcha hadlari musbat bo'lgan (b_n) geometrik progressiyada $b_6 = 320$, $b_{10} = 5120$ bo'lsa, quyidagilarni topamiz:

a) geometrik progressiya maxraji q ni; b) b_{13} ni; d) b_4 ni; e) $b_7 b_9$ ni; f) b_8 ni.

$$\text{Y e c h i s h : } a) \quad |q| = \sqrt[10-6]{\frac{b_{10}}{b_6}} = \sqrt[4]{\frac{5120}{320}} = \sqrt[4]{16} = 2, \quad b_n > 0$$

($n = 1, 2, 3, \dots$) bo'lgani uchun $q > 0$ va, demak, $q = 2$;

$$b) \quad b_{13} = b_6 \cdot q^{13-6} = 320 \cdot 2^7 = 320 \cdot 128 = 40960;$$

$$d) \quad b_4 = b_6 \cdot b^{4-6} = 320 \cdot 2^{-2} = \frac{320}{4} = 80;$$

$$e) \quad 7 + 9 = 6 + 10 \quad \text{bo'lgani uchun} \quad b_7 \cdot b_9 = b_6 \cdot b_{10} = 320 \cdot 5120 = 1638400;$$

$$f) \quad 8 + 8 = 6 + 10 \quad \text{bo'lgani uchun} \quad b_8^2 = b_8 \cdot b_8 = b_6 \cdot b_{10} = 1638400, \\ |b_8| = 1280. \quad b_8 > 0 \quad \text{bo'lgani uchun} \quad b_8 = 1280 \quad \text{ga ega bo'lamiz.}$$

Endi arifmetik progressiya dastlabki n ta hadlarining yig'indisi $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ uchun formula hosil qilamiz:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-2} + a_3) + \\ + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Bu tenglikning o'ng tomonida n ta qo'shiluvchi mavjud bo'lib, $1 + n = 2 + (n - 1) = 3 + (n - 2) = \dots = (n - 2) + 3 = (n - 1) + 2 = n + 1$ tengliklar o'rinli. Shu sababli 2-teoremaga ko'ra qo'shiluvchilarning hammasi $a_1 + a_n$ ga tengdir.

$2S_n = (a_1 + a_n)n$ tenglikka ega bo'ldik. Bundan,

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

formula hosil bo'ladi.

5 - m i s o l. (a_n) arifmetik progressiyada $a_{20} = 364$ bo'lsa, S_{39} ni toping.

$$\text{Y e c h i s h . } S_{39} = \frac{a_1 + a_{39}}{2} \cdot 39 = \frac{a_{20} + a_{20}}{2} \cdot 39 = 364 \cdot 39 = 14196.$$

Geometrik progressiya dastlabki n ta hadining yig'indisi uchun formula chiqaramiz. (b_n) geometrik progressiya, q esa uning max-

raji bo'lsin. (b_n) geometrik progressiya dastlabki n ta hadining yig'indisini S_n bilan belgilaymiz.

Agar $q = 1$ bo'lsa, $S_n = nb_1$ bo'ladi.

$q \neq 1$ holni qaraymiz.

$$\begin{aligned} S_n - S_n q &= (b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n) - (b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n)q = \\ &= b_1 - b_n q \end{aligned}$$

tenglikdan S_n ni topamiz:

$$S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1 - q}, \quad (q \neq 1).$$

6 - misol. (b_n) geometrik progressiyada $b_1 = 3$, $q = 2$ bo'lsa, S_{11} ni toping.

Yechish. $b_{11} = b_1 \cdot q^{11-1} = 3 \cdot 2^{10} = 3 \cdot 1024 = 3072$ bo'lgani uchun

$$S_{11} = \frac{3-3072 \cdot 2}{1-2} = \frac{3-6144}{-1} = 6141.$$



Mashqlar

3.14. (a_n) arifmetik progressiyaning ayirmasi d bo'lsin.

- 1) Agar $d > 0$ bo'lsa, (a_n) ning o'suvchi;
- 2) agar $d < 0$ bo'lsa, (a_n) ning kamayuvchi;
- 3) agar $d = 0$ bo'lsa, (a_n) ning o'smaydigan ketma-ketlik bo'lishini isbotlang.

3.15. Arifmetik progressiyaning 2- hadidan boshlab, har bir hadi o'zidan oldingi va keyingi hadlarning o'rta arifmetigi bo'lishini isbotlang.

3.16. 1) Ayirmasi noldan farqli bo'lgan arifmetik progressiyaning chegaralanmagan ketma-ketlik ekanligini isbotlang.

2) $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$ formulani mustaqil isbotlang.

3.17. $\{b_n\}$ ketma-ketlik maxraji q bo'lgan geometrik progressiya bo'lsin. Quyidagilarni isbotlang:

- 1) $q < 0$ bo'lsa, $\{b_n\}$ ketma-ketlik monoton bo'lmaydi.
- 2) $b_1 > 0$, $q > 1$ bo'lsa, $\{b_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi bo'ladi.
- 3) $b_1 > 0$, $0 < q < 1$ bo'lsa, $\{b_n\}$ ketma-ketlik kamayuvchi bo'ladi.
- 4) $b_1 < 0$, $q > 1$ bo'lsa, $\{b_n\}$ ketma-ketlik kamayuvchi bo'ladi.

5) $b_1 < 0$, $0 < q < 1$ bo'lsa, $\{b_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi bo'ladi.

6) $S_n = \frac{1-q^n}{1-q} \cdot b_1$, ($q \neq 1$).

3.18. 1) (b_n) geometrik progressiyaning ikkinchi hadidan boshlab, har bir hadining kvadrati qo'shni hadlar ko'paytmasiga tengligini isbotlang:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, \quad (n \geq 2).$$

2) (a_n) ketma-ketlik arifmetik progressiya ekanligini bilgan holda har qaysi satrdagi berilgan uchta ma'lumotga ko'ra qolgan noma'lum miqdorlar qiymati topilsin:

N	a_1	d	n	a_n	S_n
1	110	-10	11		
2	4	$-\frac{1}{4}$	13		
3	5		26	105	
4	$\frac{3}{4}$		26	$3\frac{7}{18}$	
5		3	12		210
6		2	15	-10	

N	a_1	d	n	a_n	S_n
7	0	0,5		5	
8	-9	$\frac{1}{2}$			-75
9	-28		9		0
10	0,2			5,2	137,2
11			30	$15\frac{3}{4}$	$146\frac{1}{4}$
12		0,3		50,3	2551,3

3) (b_n) ketma-ketlik geometrik progressiya bo'lsa, har qaysi satrdagi berilgan uchta ma'lumotga ko'ra qolgan noma'lum miqdorlar qiymati topilsin.

N	b_1	q	n	b_n	S_n
1	1	3	10		
2		$\frac{1}{2}$	8	2	
3	2		7	1458	
4		3		567	847
5	$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{128}$	$\frac{127}{128}$
6	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{6561}$	
7		-2	19	262144	
8		-3	4		30

2-§. Ketma-ketlikning limiti

Limit tushunchasi matematik analiz fanining muhim tushunchalaridan biridir. Biz dastlab ketma-ketlikning limiti tushunchasi bilan tanishib chiqamiz.

1. Ketma-ketlikning qirqimi. Cheksiz kichik ketma-ketliklar. $\{x_n\}$ cheksiz ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Uning dastlabki $N-1$ ta hadini tashlab yuborishdan hosil bo'ladigan $x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots$ cheksiz sonli ketma-ketlik $\{x_n\}$ ketma-ketlikning N - qirqimi deb ataladi va $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$ ko'rinishda belgilanadi.

$\{x_n\}$ ketma-ketlikning dastlabki bir nechta qirqimlarini keltiraylik:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots \text{ (1-qirqim, } \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{)};$$

$$x_2, x_3, x_4, x_5, \dots \text{ (2-qirqim, } \{x_n\}_{n=2}^{\infty} \text{)};$$

$$x_3, x_4, x_5, \dots \text{ (3-qirqim, } \{x_n\}_{n=3}^{\infty} \text{)}.$$

Agar barcha $n \geq N$ natural sonlar uchun $|x_n| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$ qirqim 0 ning ε - atrofida yotadi deyiladi.

1 - misol. $x_n = \frac{1}{n}$ ketma-ketlik berilgan. $a = 0$ sonning $\varepsilon = 0,01$ - atrof uchun $\{x_n\}$ ketma-ketlikning shu atrofda yotadigan biror qirqimi mavjud yoki mavjud emasligini aniqlaymiz.

Yechish. Bunday qirqimning mavjud yoki mavjud emasligi $|x_n| < 0,01$ tengsizlikning biror N natural sondan boshlab, barcha natural sonlar uchun bajarilishi yoki bajarilmasligiga bog'liqdir. Shu sababli, $|x_n| < 0,01$ tengsizlikni n natural songa nisbatan yechib olishimiz tabiiydir:

$$|x_n| < 0,01, \quad \left| \frac{1}{n} \right| < 0,01 \Leftrightarrow \frac{1}{n} < 0,01 \Leftrightarrow n > 100.$$

$N = 101$ sonini olamiz. U holda barcha $n \geq 101$ natural sonlari uchun, $|x_n| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{101} < 0,01$ bo'ladi.

Demak, $a = 0$ sonning $\varepsilon = 0,01$ - atrofi uchun $x_n = \frac{1}{n}$ ketma-ketlikning shu atrofda yotadigan qirqimi mavjud. Bunday qirqim sifatida, masalan, $\{x_n\}_{n=101}^{\infty}$ qirqimni olish mumkin. Bu qirqimdan keyingi qirqimlar ham shu atrofda yotishini eslatib o'tamiz.

Ma'lum bo'lishicha, $a = 0$ sonning ixtiyoriy ε - atrofini olmaylik, $x_n = \frac{1}{n}$ ketma-ketlikning shu atrofga tegishli bo'ladigan biror qirqimi mavjud bo'ladi, ya'ni ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N natural son mavjudki, barcha $n \geq N$ natural sonlar uchun $|x_n| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi.

2 - misol. $a = 0$ sonning ixtiyoriy ε -atrofi uchun $x_n = \frac{1}{n}$ ketma-ketlikning shu atrofga tegishli bo'ladigan biror qirqimi mavjudligini isbotlang.

Isbot. ε — ixtiyoriy musbat son bo'lsin. $|x_n| < \varepsilon$ tengsizlikni n natural songa nisbatan yechib olaylik:

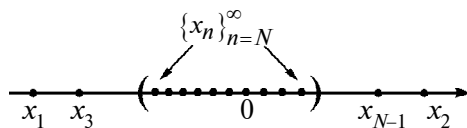
$$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

$\frac{1}{\varepsilon}$ dan katta biror natural son N ni, masalan, $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ natural sonni olamiz. U holda barcha $n \geq N$ natural sonlar uchun

$$|x_n| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} = \frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1} < \frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} = \frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon$$

bo'ladi, ya'ni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$ qirqimi 0 sonining ε - atrofida yotadi.

$\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Agar $a = 0$ nuqtaning ixtiyoriy ε - atrofi uchun, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning shu atrofda yotuvchi biror $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$ qirqimi mavjud bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik deyiladi.



III.1-rasm.

2-misoldan, $x_n = \frac{1}{n}$ ketma-ketlikning cheksiz kichik ketma-ketlik ekanligi kelib chiqadi.

Cheksiz kichik ketma-ketlikning aniqlanishidan ko‘rinadiki, agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘lsa, u holda 0 ning har qanday atrofini olmaylik, bu atrofda ketma-ketlikning biror hadidan boshlab barcha hadlari yotadi (III.1-rasm). Atrofdan tashqarida esa ko‘pi bilan chekli sondagi hadlar qolishi mumkin.

Agar 0 nuqta atrofining radiusini kattalashtirib boraversak, cheksiz kichik ketma-ketlikning hamma hadlari nolning biror atrofiga tushib qoladi. Bundan, *cheksiz kichik ketma-ketlik chegaralangan ketma-ketlikdir*, degan xulosa kelib chiqadi.



Mashqlar

3.19. Ketma-ketlikning cheksiz kichik ketma-ketlik ekanligini isbotlang:

- 1) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$; 2) $x_n = 0$; 3) $x_n = \frac{3n+1}{n^2-4}$;
 4) $x_n = \sqrt{\frac{1}{n}}$; 5) $x_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3}}$; 6) $x_n = \frac{n^3}{n^4+1}$.

3.20. Ketma-ketlikning cheksiz kichik ketma-ketlik emasligini isbotlang.

- 1) $1; 2; \frac{1}{2}; 2; \frac{1}{3}; 2; \frac{1}{4}; 2; \frac{1}{5}; \dots$; 2) $\left\{ \frac{n^2+1}{2n} \right\}$;
 3) $x_n = n+1$; 4) $x_n = 1-n$; 5) $x_n = n^2-1$.

3.21. Ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘ladimi:

- 1) $x_n = 1 - \frac{1}{n}$; 2) $x_n = 1 + (-1)^n$; 3) $x_n = \frac{n}{n^2-3}$;
 4) $x_n = \frac{13}{13n-17}$; 5) $x_n = \frac{n}{(-1)^n n^2+1}$?

2. Cheksiz kichik ketma-ketliklar haqidagi asosiy teoremlar.
 Cheksiz kichik ketma-ketliklarni grek alifbosi harflaridan foydalanib,

$\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \dots$ kabi belgilash qulaydir. Cheksiz kichik ketma-ketliklar haqidagi teoremlarni shu belgilashlarda bayon etamiz.

1 - t e o r e m a . α_n, β_n ketma-ketliklar cheksiz kichik ketma-ketliklar bo'lsa, $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n$ ketma-ketlik ham cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.

I s b o t . ε ixtiyoriy musbat son bo'lsin. 0 ning $\frac{\varepsilon}{2}$ -atrofini qaraymiz. α_n cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lgani uchun shunday N_1 natural son topiladiki, uning α_{N_1} hadidan boshlab barcha hadlari qaralayotgan atrofda yotadi, ya'ni barcha $n \geq N_1$ lar uchun $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik bajariladi. Xuddi shu kabi β_n cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lgani uchun shunday N_2 natural son topiladiki, uning β_{N_2} hadidan boshlab barcha hadlari qaralayotgan atrofda yotadi, ya'ni barcha $n \geq N_2$ natural sonlar uchun $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ bo'ladi.

N_1 va N_2 sonlaridan katta bo'lgan ixtiyoriy N natural sonni olib, $\{\alpha_n\}_{n=N}^{\infty}$ va $\{\beta_n\}_{n=N}^{\infty}$ qirqimlarni qaraylik. Ularning har biri 0 sonining qaralayotgan $\frac{\varepsilon}{2}$ - atrofida yotadi:

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}, (n \geq N); |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}, (n \geq N).$$

Shu sababli γ_n ketma-ketlikning $\{\gamma_n\}_{n=N}^{\infty}$ qirqimi 0 sonining ε - atrofida yotadi:

$$|\gamma_n| = |\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ (bu yerda } n \geq N).$$

Demak, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N natural son mavjudki, barcha $n \geq N$ natural sonlarda $\gamma_n < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli, ya'ni γ_n cheksiz kichik ketma-ketlik.

2 - t e o r e m a . $\{x_n\}$ chegaralangan ketma-ketlik, α_n esa cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lsa, $\gamma_n = x_n \cdot \alpha_n$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.

I s b o t . $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan ketma-ketlik bo'lgani uchun, shunday $M > 0$ son mavjudki, barcha n natural sonlar uchun

$$|x_n| \leq M$$

tengsizlik bajariladi.

ε ixtiyoriy musbat son bo'lsin. 0 sonining $\frac{\varepsilon}{M}$ - atrofini olamiz.

α_n cheksiz kichik bo'lgani uchun, shunday N natural son mavjudki, uning α_N hadidan boshlab barcha hadlari olingan atrofda yotadi, ya'ni barcha $n \geq N$ da $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ bo'ladi.

$\{\gamma_n\}_{n=N}^{\infty}$ qirqimni qaraymiz. $n \geq N$ larda

$$|\gamma_n| = |x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

bo'lgani uchun, bu qirqim 0 sonining ε - atrofida yotadi. Demak, γ_n cheksiz kichik ketma-ketlik.

3 - t e o r e m a . Agar α_n, β_n ketma-ketliklar cheksiz kichik ketma-ketliklar bo'lsa, $\alpha_n - \beta_n$ ketma-ketlik ham cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.

I s b o t . $x_n = -1$ chegaralangan ketma-ketlik, β_n esa cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lgani uchun $\{x_n \cdot \beta_n\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlikdir (2-teorema). Shu sababli,

$$\gamma_n = \alpha_n - \beta_n = \alpha_n + (-1) \cdot \beta_n = \alpha_n + x_n \cdot \beta_n$$

ketma-ketlik cheksiz kichikdir (1-teorema).

Isbotlangan teoremlardan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

1 - n a t i j a . Chekli sondagi cheksiz kichik ketma-ketliklarning algebraik yig'indisi ham cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi (Isbotlang).

2 - n a t i j a . Cheksiz kichik ketma-ketliklarning ko'paytmasi ham cheksiz kichik ketma-ketlikdir.

3 - n a t i j a . α_n cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lsa, $c \cdot \alpha_n$ ($c = \text{const}$) va α_n^k (k - natural son) ketma-ketliklar ham cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.



M a s h q l a r

3.22. Cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladigan bir nechta ketma-ketlik tuzing.

3.23. Ketma-ketlikning cheksiz kichik ketma-ketlik ekanligini isbotlang:

$$\begin{aligned}
1) \quad x_n &= \frac{\frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}}{18 + \frac{15}{n} + \frac{6}{n^2}}; & 2) \quad x_n &= \frac{n}{3n+1} - \frac{2n^2-1}{6n^2+1}; \\
3) \quad x_n &= 1 - \frac{3}{3n+5}; & 4) \quad x_n &= \frac{(-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{n^3}.
\end{aligned}$$

3.24. $x_n = \frac{2n+1}{4n-3}$ ketma-ketlikni o'zgarmas son bilan cheksiz kichik ketma-ketlikning yig'indisi ko'rinishida tasvirlang.

3. Cheksiz katta ketma-ketliklar. $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $E > 0$ son uchun, unga bog'liq bo'lgan shunday bir $N = N(E)$ natural son topilib, barcha $n \geq N$ natural sonlarda $|x_n| \geq E$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik *cheksiz katta ketma-ketlik* deyiladi.

1 - misol. $x_n = n^2$ ketma-ketlik cheksiz katta ketma-ketlik bo'lishligini isbotlaymiz.

Isbot. E ixtiyoriy musbat son bo'lsin. $|x_n| = |n^2| = n^2 \geq E$ tengsizlikni natural son n ga nisbatan yechib, $n \geq \sqrt{E}$ ni olamiz. $N = [\sqrt{E}] + 1$ sonni qaraylik. U holda barcha $n \geq N$ natural sonlar uchun

$$|x_n| = n^2 \geq N^2 = ([\sqrt{E}] + 1)^2 > ([\sqrt{E}] + \{\sqrt{E}\})^2 = (\sqrt{E})^2 = E,$$

ya'ni $|x_n| > E$ tengsizlik bajariladi. Demak, $x_n = n^2$ ketma-ketlik cheksiz katta ketma-ketlik.

Cheksiz katta ketma-ketlikning aniqlanishidan ko'rinadiki, agar $\{x_n\}$ cheksiz katta ketma-ketlik bo'lsa, u holda nolning har qanday atrofini olmaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning biror x_N hadidan boshlab barcha hadlari shu atrofdan tashqarida yotadi.

Cheksiz katta ketma-ketlik bilan cheksiz kichik ketma-ketlik orasidagi munosabatni ifodalovchi teoremani isbotlaymiz.

Teorema. a) Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik cheksiz katta ketma-ketlik bo'lib, $x_n \neq 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) bo'lsa, $y_n = \frac{1}{x_n}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.

b) $\{y_n\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lib, $y_n \neq 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) bo'lsa, $x_n = \frac{1}{y_n}$ ketma-ketlik cheksiz katta ketma-ketlik bo'ladi.

Isbot. a) ε – ixtiyoriy musbat son, $\{x_n\}$ esa cheksiz katta ketma-ketlik bo'lsin. Nolning $\frac{1}{\varepsilon}$ -atrofini olamiz. $\{x_n\}$ ketma-ketlik cheksiz katta ketma-ketlik bo'lgani uchun shunday $N = N\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ natural son topiladiki, barcha $n \geq N$ natural sonlar uchun $|x_n| = \frac{1}{|y_n|} > \frac{1}{\varepsilon}$, ya'ni $|y_n| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi.

Demak, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N natural son topiladiki, barcha $n \geq N$ lar uchun $|y_n| < \varepsilon$ bo'ladi. Bu esa $\{y_n\}$ ning cheksiz kichikligini bildiradi.

b) E – ixtiyoriy musbat son, $\{y_n\}$ esa cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lsin. $\{y_n\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lgani uchun $\frac{1}{E} > 0$ songa bog'liq bo'lgan shunday $N = N\left(\frac{1}{E}\right)$ natural son topiladiki, barcha $n \geq N$ natural sonlarda $|y_n| = \frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{E}$ yoki $|x_n| > E$ tengsizlik bajariladi. Bu esa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz katta ketma-ketlik ekanini bildiradi.

2 - misol. $x_n = \frac{1}{n^\alpha} > 0$ (bu yerda $\alpha > 0$) ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik ekanligini isbotlaymiz.

Isbot. $y_n = n^\alpha$ ($\alpha > 0$) ketma-ketlikning cheksiz katta ketma-ketlik ekanligini isbotlaymiz. E ixtiyoriy musbat son bo'lsin.

$|y_n| = n^\alpha \geq E$ tengsizlikdan $n \geq E^{\frac{1}{\alpha}}$ ni topamiz. $N = \left[E^{\frac{1}{\alpha}} \right] + 1$ deb

olsak, barcha $n \geq N$ larda

$$|y_n| = n^\alpha \geq N^\alpha = \left(\left[E^{\frac{1}{\alpha}} \right] + 1 \right)^\alpha > \left(\left[E^{\frac{1}{\alpha}} \right] + \left\{ E^{\frac{1}{\alpha}} \right\} \right)^\alpha = \left(E^{\frac{1}{\alpha}} \right)^\alpha = E$$

tengsizlik bajariladi. Demak, $\{y_n\}$ cheksiz katta ketma-ketlik. U

holda isbotlangan teorema ko'ra $x_n = \frac{1}{n^\alpha}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlikdir.

Cheksiz katta ketma-ketlikning aniqlanishidan uning chegaralanmaganligi kelib chiqadi. Chegaralanmagan ketma-ketlik cheksiz katta ketma-ketlik bo'lishi shart emas. Masalan, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, 0, 6, 0, 7, ... ketma-ketlik chegaralanmagan ketma-ketlik bo'lib, u cheksiz katta ketma-ketlik bo'la olmaydi.

$\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz katta ketma-ketlik ekanligini $x_n \rightarrow \infty$ ko'rinishida belgilaymiz.

Agar $\{x_n\}$ cheksiz katta ketma-ketlikning biror hadidan boshlab barcha hadlari musbat (manfiy) bo'lsa, buni $x_n \rightarrow +\infty$ (mos ravishda $x_n \rightarrow -\infty$) ko'rinishida belgilaymiz.

1-misolda va 2-misolda qaralgan $\{x_n\}$ ketma-ketliklar uchun $x_n \rightarrow +\infty$ munosabat bajariladi. $x_n = -n$ ketma-ketlik uchun esa $x_n \rightarrow -\infty$ munosabatga ega bo'lamiz.

$z_n = (-1)^n \cdot n$ ketma-ketlik uchun $z_n \rightarrow \infty$ bo'lib, $z_n \rightarrow +\infty$, $z_n \rightarrow -\infty$ larning hech biri o'rinli emas.



Mashqlar

3.25. Ketma-ketlikning cheksiz katta ketma-ketlik ekanligini isbotlang:

1) $x_n = n^2 + 1$; 2) $x_n = n - 1$;

3) $x_n = 3n - 4$; 4) $x_n = \frac{n^2+1}{n-1}$.

3.26. Ketma-ketlik $+\infty$, $-\infty$ va ∞ lardan qaysi biriga intiladi:

1) $x_n = 1 - n^2$; 2) $x_n = n^2 + 3n + 1$;

3) $x_n = (-1)^n n^3$; 4) $x_n = \frac{1}{n}$?

4. Ketma-ketlikning limiti. $\{x_n\}$ ketma-ketlik va a haqiqiy son berilgan bo'lsin. Agar $\alpha_n = x_n - a$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lsa, a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning *limiti* deyiladi va $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ko'rinishida belgilanadi.

1 - misol. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n} = 2$ ekanligini isbotlaymiz.

Isbot. $\alpha_n = \frac{2n+1}{n} - 2 = \frac{1}{n}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlikdir (qarang, 1-band). Ta'rifga ko'ra $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n} = 2$.

1 - t e o r e m a . Agar $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik a son bilan cheksiz kichik ketma-ketlikning yig'indisi ko'rinishida tasvirlanadi va aksincha, agar x_n ketma-ketlikni a soni bilan cheksiz ketma-ketlikning yig'indisi ko'rinishida tasvirlash mumkin bo'lsa, u holda $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ bo'ladi.

Isbot. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ bo'lsin. U holda $\alpha_n = x_n - a$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlikdir. $\alpha_n = x_n - a$ tenglikdan $x_n = a + \alpha_n$ tenglikni hosil qilamiz. Demak, agar $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlikni a son bilan cheksiz kichik ketma-ketlikning yig'indisi ko'rinishida tasvirlash mumkin.

Endi $x_n = a + \alpha_n$ bo'lsin, bu yerda α_n — cheksiz kichik ketma-ketlik. U holda $\alpha_n = x_n - a$ tenglikka ega bo'lamiz. Ketma-ketlik limitining ta'rifiga ko'ra $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ tenglik o'rinlidir.

1 - n a t i j a . α_n ketma-ketlik cheksiz kichik bo'lsa, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ bo'ladi.

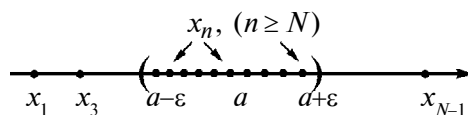
2 - n a t i j a . O'zgarmas ketma-ketlikning limiti o'ziga teng: $\lim_{n \rightarrow \infty} a = a$.

Isbot. $a = a + 0$ bo'lgani uchun 1-teoremaga ko'ra, $\lim_{n \rightarrow \infty} a = a$.

2 - m i s o l . $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n} = \frac{2}{3}$ ekanini isbotlang.

Isbot. $\frac{2n+1}{3n} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3n}$ tenglikka egamiz. $\alpha_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n}$ ketma-ketlik o'zgarmas son bilan cheksiz kichik ketma-ketlikning ko'paytmasi sifatida cheksiz kichik ketma-ketlikdir. Shu sababli isbotlangan 1-teoremaga ko'ra $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n} = \frac{2}{3}$ tenglik o'rinlidir.

2 - t e o r e m a . Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik limitga ega bo'lsa, bu limit yagonadir.



III.2-rasm.

I s b o t . $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ bo'lsin. 1-teoremaga ko'ra $x_n = a + \alpha_n$ (α_n — cheksiz kichik ketma-ketlik), $x_n = b + \beta_n$ (β_n — cheksiz kichik ketma-ketlik) tengliklar o'rinli.

Bulardan, $0 = x_n - x_n = a - b + (\alpha_n - \beta_n)$ tenglikka ega bo'lamiz. $\alpha_n - \beta_n$ ketma-ketlik cheksiz kichikdir. 1-teoremaga ko'ra oxirgi tenglikdan $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = a - b$ munosabatni hosil qilamiz. 2-natijaga ko'ra $a - b = 0$, ya'ni $a = b$.

3 - t e o r e m a . Agar ketma-ketlik limitga ega bo'lsa, u holda u chegaralangan ketma-ketlik bo'ladi.

I s b o t . $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ bo'lsin. U holda $\varepsilon = 1$ son uchun shunday N natural son topiladiki, barcha $n \geq N$ lar uchun $|x_n| - |a| \leq |x_n - a| < 1$ yoki $|x_n| < 1 + |a|$ tengsizlik bajariladi.

$|x_1|$, $|x_2|$, ..., $|x_{n-1}|$ sonlarning eng kattasini m bilan, $1 + |a|$ va m sonlarning eng kattasini esa M bilan belgilaymiz. U holda quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} |x_1| &\leq m \leq M, \\ |x_2| &\leq m \leq M, \\ &\dots \\ |x_{n-1}| &\leq m \leq M, \\ |x_n| &< 1 + |a| \leq M \quad (n \geq N). \end{aligned}$$

Demak, barcha n natural sonlar uchun $|x_n| < M$ tengsizlik bajariladi, ya'ni $\{x_n\}$ chegaralangan ketma-ketlikdir.

$\alpha_n = x_n - a$ ketma-ketlikning cheksiz kichik bo'lishligi ta'rifini yozib, ketma-ketlik limiti ta'rifining boshqacha ko'rinishiga kelamiz:

Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun, shunday bir $N = N(\varepsilon)$ natural son topilib, barcha $n \geq N$ natural sonlarda $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning *limiti* deyiladi.

$|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlikni $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ ko'rinishda yozib olish mumkin. Bu yerdan ko'rinadiki, agar $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ bo'lsa, a ning ixtiyoriy ε -atrofini olmaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning biror x_N hadidan boshlab barcha hadlari shu atrofda yotadi (III.2-rasm).



Mashqlar

3.27. Ketma-ketlikni o'zgarmas son bilan cheksiz kichik ketma-ketlikning yig'indisi shaklida tasvirlang va limitini toping:

1) $x_n = \frac{2n+5}{n+2};$

2) $x_n = \frac{n^2-n}{n^3};$

3) $x_n = \frac{3n^2-4}{n^2-1};$

4) $x_n = \frac{n^4+2n^2+1}{(n^2+1)(n^3-1)}.$

3.28. Isbotlang:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+n}{4n^2+1} = \frac{1}{2};$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{4n+2} = \frac{3}{4};$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{n^2+1} = 1;$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2};$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2;$

6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-(-1)^n}{n} = 0;$

7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0;$

8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-n^2}{2n^2+3} = -\frac{1}{2}.$

5. Limitlar haqida asosiy teoremlar. Oldingi bandlarda ketma-ketlikning limitini hisoblash haqidagi masala ochiq qolgan edi. Endi shu masalaga qaytamiz.

1 - t e o r e m a . Agar $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ bo'lsa, u holda $\{x_n + y_n\}$ ketma-ketlik ham limitga ega va $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ tenglik o'rinli.

I s b o t . $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ bo'lgani uchun $\alpha_n = x_n - a$ va $\beta_n = y_n - b$ ketma-ketliklar cheksiz kichik ketma-ketlikdir. U holda

cheksiz kichik α_n va β_n ketma-ketliklarning yig'indisi sifatida $\gamma_n = (x_n + y_n) - (a + b)$ ketma-ketlik ham cheksiz kichik ketma-ketlikdir. Shu sababli,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

2 - teorema. Agar $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ bo'lsa, u holda $\{x_n y_n\}$ ketma-ketlik limitga ega va $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = ab = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ tenglik bajariladi.

Isbot. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ bo'lgani uchun $\alpha_n = x_n - a$ va $\beta_n = y_n - b$ ketma-ketliklar cheksiz kichik ketma-ketliklardir. Shu sababli cheksiz kichik ketma-ketliklar yig'indisi bo'lgan $x_n y_n - ab = a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlikdir. Demak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = ab = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

3 - teorema. Agar $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ bo'lib, $b \neq 0$ bo'lsa, u holda $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ ketma-ketlik n ning biror qiymatidan boshlab ma'noga ega va $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$ bo'ladi.

Bu teoremaning isboti oldingi teoremlarning isbotiga qaraganda qiyinroq bo'lgani uchun uni keltirmaymiz, lekin limitlarni hisoblash jarayonida undan keng foydalanamiz.

Keltirilgan teoremlardan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

1 - natija. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$

2 - natija. $\lim_{n \rightarrow \infty} (cx_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, ($c = \text{const}$).

3 - natija. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^k = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right)^k$, (k - natural son).

4 - teorema. Agar $x_n \leq y_n \leq z_n$ bo'lib, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ bo'lsa, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ bo'ladi.

I s b o t . $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ va $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ bo'lgani uchun $x_n = a + \alpha_n$, $z_n = a + \beta_n$ tengliklar bajariladi, bu yerda α_n , β_n — cheksiz kichik ketma-ketliklardir. Shu sababli, $a + \alpha_n \leq y_n \leq a + \beta_n$ yoki $\alpha_n \leq y_n - a \leq \beta_n$ tengsizlik o'rinlidir.

ε ixtiyoriy musbat son bo'lsin. α_n cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lgani uchun shunday N_1 natural son topiladiki, barcha $n \geq N_1$ natural sonlar uchun $\alpha_n > -\varepsilon$ tengsizlik bajariladi.

β_n cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lgani uchun shunday N_2 natural son topiladiki, barcha $n \geq N_2$ natural sonlar uchun $\beta_n < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi.

N_1 va N_2 natural sonlardan katta bo'lgan N natural son olaylik. U holda barcha $n \geq N$ lar uchun $\alpha_n > -\varepsilon$, $\beta_n < \varepsilon$ tengsizliklar bir vaqtda bajariladi. Aynan shu $n \geq N$ lar uchun $-\varepsilon < \alpha_n \leq y_n - a \leq \beta_n < \varepsilon$ tengsizlikka ega bo'lamiz. Demak, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun, shunday N natural son topiladiki, barcha $n \geq N$ lar uchun $-\varepsilon < y_n - a < \varepsilon$ yoki baribir $|y_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bu esa $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ ekanligini tasdiqlaydi.

1 - m i s o l . $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3n-1}{3n^2-5n+4}$ ni hisoblang.

Y e c h i s h . Keltirilgan teoremlardan va natijalardan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3n-1}{3n^2-5n+4} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{3-\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3-\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}\right)} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2}} = \frac{2+3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{3-5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{2+3 \cdot 0 - 0}{3-5 \cdot 0 + 4 \cdot 0} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

2 - m i s o l . $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ ni hisoblaymiz.

$$\text{Y e c h i s h . } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =$$

$$\begin{aligned} \text{3-misol. } \lim_{n \rightarrow \infty} (n^6 + 2n^5 + 3n^2 + 1) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^6 \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^4} + \frac{1}{n^6} \right) \right) = +\infty. \end{aligned}$$

Isbot. $|q| = \frac{1}{1+\alpha}$ bo'lsin, bu yerda $\alpha > 0$. $x_n = 0$, $y_n = |q|^n$,

$$0 < |q|^n = \frac{1}{(1+\alpha)^n} = \frac{1}{1+n\alpha + (\text{musbat qo'sh.})} < \frac{1}{1+n\alpha} = z_n.$$

Demak, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $N = N(\varepsilon)$ natural son topiladiki, $|q|^n = |q^n| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bu esa $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ ekanligini bildiradi.

3.29. $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ ketma-ketliklar uchun $|a_n| \leq |b_n|$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) va $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ bo'lsin. U holda $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ bo'lishini isbotlang.

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1}; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3-3n^2+2}{3n^4-5n^3+8};$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} (n^5 - 21n^2 + 3n - 4); \quad 4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n}{2n^2 - 2n + 1};$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}); \quad 6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 4}{5n^3 + n^2};$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{9n^2 - 10n^2 - 8}; \quad 8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 - 5}}{\sqrt{n^2 - 5}}.$$

3.31. Ketma-ketlikning limitini toping:

$$1) x_n = \frac{1+a+a^2+\dots+a^n}{1+b+b^2+\dots+b^n}, \quad (|a| < 1, |b| < 1);$$

$$2) y_n = \frac{n\sqrt{1+3+5+\dots+(2n-1)}}{2n^2+n+1};$$

$$3) z_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n};$$

$$4) z_n = \frac{3^n + 2^n}{3^n - 2^n};$$

$$5) x_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}};$$

$$6) y_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2};$$

$$7) x_n = \frac{\sqrt[3]{n^3+n}}{n+1};$$

$$8) y_n = \sqrt[n]{1+2^n}.$$

3.32. Limitlarni toping.

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} \right); \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^n - 1}}{\frac{1}{2^n + 1}};$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n});$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[4]{n^2 + 3n} - \sqrt[3]{n-3}).$$

6. Monoton ketma-ketlikning limiti haqidagi teorema. Matematik analizning muhim teoremlaridan birini keltiramiz.

Veyershtass teoremasi. Agar kamaymaydigan (o'smaydigan) $\{x_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo'lsa, u holda bu ketma-ketlik limitga ega bo'ladi.

Bu teorema oliy matematika kursida isbotlanadi. Biz bu teoremaning tatbiqiga doir ayrim misollar qarash bilan chegaralanamiz.

1 - m i s o l. $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ketma-ketlikning limiti mavjudligini ko'rsatamiz. Shu maqsadda $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ketma-ketlikni qaraymiz. x_n ketma-ketlik quyidan chegaralangan ketma-ketlikdir: $x_n > 0$. Uning o'smaydigan ketma-ketlik ekanligi 1-§, 3-band, 4-misolda ko'rsatilgan.

Veyershtrass teoremasiga ko'ra $\{x_n\}$ ketma-ketlik limitga ega:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

tenglikdan, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ limitning ham mavjudligi kelib chiqadi.

Bu limit e harfi orqali belgilanadi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad (e \approx 2,71828), \quad (1)$$

($e = 2,7182818284\dots$).

e son irratsional son ekanligi, shuningdek, uning hech bir butun koeffitsiyentli algebraik tenglamaning ildizi bo'la olmasligi, ya'ni *transsendent* son ekanligi isbotlangan. (1) limit ko'pgina matematik tadqiqotlarning asosida yotuvchi ajoyib limitlarning biridir. e son matematikada alohida ahamiyatga egadir. Bunga siz oliy matematika bilan shug'ullanganingizda ishonch hosil qilasiz.

2 - m i s o l. Mamlakat aholisi yiliga 2 % o'sadi. 100 yilda mamlakat aholisi necha marta ortadi?

Y e c h i s h . A bilan mamlakat aholisining dastlabki sonini belgilasak, bir yildan keyin aholi soni $A + \left(\frac{A}{100}\right) \cdot 2 = \left(1 + \frac{1}{50}\right) \cdot A$ ga teng bo'ladi. Ikki yildan keyin aholi soni $A \cdot \left(1 + \frac{1}{50}\right)^2$ ga, yuz yildan keyin esa $A \cdot \left(1 + \frac{1}{50}\right)^{100}$ ga teng bo'ladi, ya'ni yuz yildan keyin aholi soni $A \cdot \left(1 + \frac{1}{50}\right)^{100} = \left(\left(1 + \frac{1}{50}\right)^{50}\right)^2$ marta ortadi.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ekanligini e'tiborga olib, $\left(1 + \frac{1}{50}\right)^{50} \approx e$ deb hisoblashimiz mumkin. Demak, mamlakat aholisi soni yuz yildan keyin taxminan $e^2 \approx 7,89$ marta ortadi.



Mashqlar

3.33. $a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}_{n \text{ ta ildiz}}$ ketma-ketlikning limitini

toping.

3.34. Rekurrent usulda berilgan ketma-ketlikning limitga ega ekanligini isbotlang va limitini toping:

1) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n}$; 2) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{2}{3-a_n}$.

3.35. Ketma-ketlik n - hadining formulasini toping va shu ketma-ketlikning limitini hisoblang:

1) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{2}$, ($n \geq 2$);

2) $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{5}{2}$, $a_n = \frac{3}{2}a_{n-1} - \frac{1}{2}a_{n-2}$, ($n \geq 3$).