



VII B O B

DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

1-§. Eng sodda differensial tenglamalar

1. Differensial tenglama haqida tushuncha. Differensial tenglamalarga olib keluvchi masalalar. Biz shu paytgacha noma'lumlarning qiymati sonlar bo'lgan tenglamalar bilan ish ko'rgan edik. Matematikaning ko'pgina tatbiqiy masalalari o'rganilayotgan jarayonlarni ifodalovchi noma'lum funksiyalar va ularning hosillarini bog'lovchi munosabatlarga keladi.

Bunday munosabatlarni ifodalovchi tenglamalar *differensial tenglamalar* deyiladi. Agar bunday tenglamadagi noma'lum funksiya bir argumentli bo'lsa, tenglamani *oddiy differensial tenglama* deb ataymiz. Biz asosan oddiy differensial tenglamalar bilan shug'ullanamiz.

Misol 1. Agar $v(t)$ tezlik ma'lum bo'lsa, $s(t)$ yo'lni topish masalasi $s'(t) = v(t)$ differensial tenglamani yechishga keladi.

Jumladan, $v(t) = 8t - 5$ bo'lsa, u holda $s(t)$ ni topish masalasi $s'(t) = 8t - 5$ differensial tenglamani yechishga keltiriladi.

Umuman, fizika, texnika, biologiya, kimyo, tibbiyot va iqtisodiyotning ko'pgina amaliy masalalari

$$y'(t) = k \cdot y(t) \quad (1)$$

differensial tenglamani qanoatlantiruvchi $y(t)$ funksiyani topishga keladi, bu yerda k — berilgan biror o'zgarmas son. (1) tenglamaning yechimlari esa $y(t) = ce^{kx}$ ko'rinishdagi har qanday funksiyadan iborat ekanligini ko'rish qiyin emas. c o'zgarmas ixtiyoriy son, shunga ko'ra (1) differensial tenglamaning yechimi cheksiz ko'p.

Misol 1.1:

1. Boshlang'ich temperaturasi T ga teng bo'lgan jism temperaturasi 0 ga teng bo'lgan muhitga joylashtirilgan bo'lsin. Temperaturaning Δt vaqt ichida ΔT qadar pasayishi $\Delta T = -kT \cdot \Delta t$ bilan

ifodalanadi, bunda $k = \text{const}$, $\Delta T = T(t + \Delta t) - T(t)$. $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} = T'$ munosabatdan, $T'(t) = -kT(t)$ tenglama hosil bo'ladi, unda $T'(t)$

hosila temperatura pasayishining oniy tezligini ifodalaydi. Birinchi tartibli differensial tenglama hosil bo'ldi.

2. Nyutonning ikkinchi qonuni bo'yicha moddiy nuqtaning t vaqt momentidagi tezlanishi $a = \frac{F}{m}$ ga teng, bunda F – nuqtaga ta'sir etayotgan kuch, m – nuqta massasi. a tezlanish x nuqta koordinatasining vaqt bo'yicha olingan ikkinchi tartibli hosilasiga teng ekanligidan ushbu ikkinchi tartibli differensial tenglamaga ega bo'lamiz:

$$F(t) = mx''(t). \quad (2)$$

3. Muhitning unda harakat qilayotgan nuqtaga F qarshilik kuchi nuqtaning v tezligiga proporsional va shu tezlikka qarshi yo'nalgan, ya'ni $F(t) = -kv(t)$ yoki (2) tenglikka asosan $mx''(t) = -kv(t)$, yoki $v(t) = x'(t)$ bo'lganligidan $mx''(t) = -kx'(t)$ va shu kabi $x''(t) = -(x'(t))' = v'(t)$ bo'lganligidan $mv'(t) = -kv(t)$.

4. m massali nuqta F tortilish kuchining ta'siri ostida yerga tushmoqda, ya'ni

$$F(t) = -\gamma \frac{M \cdot m}{x^2(t)},$$

bunda γ – gravitatsiya doimiysi, M – Yer massasi, x – nuqtadan Yer markazigacha masofa (tenglikdagi „minus“ ishorasi F kuch koordinatalar o'qida manfiy yo'nalganligi sababli qo'yilgan).

Tenglikni (2) munosabatdan foydalanib, $mx''(t) = -\gamma \frac{M \cdot m}{x^2(t)}$ ko'rinishda, yoki $x = R$ va $F = -mg$ ekanligidan $\gamma \frac{M \cdot m}{R^2} = mg$ yoki $\gamma M = R^2 g$ bo'lgani uchun $x''(t) = -\frac{R^2 \cdot g}{x^2(t)}$ ko'rinishda yozish mumkin.

5. Nuqta uning muvozanat holatidan chetlanishiga proporsional va shu holat tomon yo'nalgan kuch ta'siri ostida harakat qilmoqda. Muvozanat holatini koordinatalar boshi sifatida qabul qilamiz. U holda $F(t) = -kx(t)$ bo'ladi va (2) tenglik $mx''(t) = -kx(t)$ ko'rinishga keladi.

6. *Radioaktiv parchalanish masalasi.* Radioaktiv modda massasi o'zgarishining oniy tezligi berilgan vaqt momentida shu massaga proporsional, ya'ni $v(t) = -km(t)$ (minus ishorasining qo'yilishi

massaning kamayib borishi sababidan). Lekin $v(t) = m'(t)$ bo'lganligi uchun tenglama quyidagicha yoziladi: $m'(t) = -km(t)$. Bu yerda k – moddaning radioaktivligiga bog'liq o'zgarmas son.

Bu tenglamaning yechimlari $m(t) = ce^{-kt}$ funksiyalardan iborat bo'ladi.

Agar vaqtning boshlang'ich $t = 0$ momentida radioaktiv moddaning massasi $m(0) = m_0$ bo'lsa, u holda $m(0) = ce^{-0} = c$ bo'ladi.

Bundan:

$$m(t) = m_0 e^{-kt} \quad (3)$$

ekanligi kelib chiqadi.

Radioaktiv moddaning massasi ikki marta kamayadigan vaqt oralig'i T radioaktiv moddaning *yarim yemirilish davri* deyiladi. Agar bizga T ma'lum bo'lsa, k ni topish mumkin. Haqiqatan, $t = T$ da (3) dan $\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-kt}$ ni olamiz. Bundan $k = \frac{\ln 2}{T}$; k ning topilgan qiymatini (3) ga qo'ysak, u quyidagi ko'rinishni oladi:

$$m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}.$$

Masalan, radiy uchun $T \approx 1550$ yil. Shunga ko'ra

$$k = \frac{\ln 2}{1550} \approx 0,000447.$$

Million yildan keyin radiyning boshlang'ich massasidan

$$m(10^6) \approx m_0 e^{-447} \approx 0,6 \cdot 10^{-194} \cdot m_0$$

qoladi.

Ko'pgina amaliy masalalar davriy jarayonlarni o'rganishga keladi. Masalan, matematik mayatnik yoki torning harakati, o'zgaruvchan tok, magnit maydon bilan bog'liq bo'lgan jarayonlar. Bunday jarayonlar *garmonik tebranishlar* deyiladi. Garmonik tebranishlar

$$y''(t) = \omega^2 y(t) \quad (5)$$

differensial tenglamani yechishga keltiriladi, bu yerda ω – berilgan musbat son. Bu tenglamaning yechimlari

$$y(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (6)$$

ko'rinishdagi funksiyalardan iborat, A va φ o'zgarmas sonlar masalaning shartlari bo'yicha aniqlanadi.

Masalan, agar $y(t)$ erkin tebranayotgan tor nuqtasining t momentdagi muvozanat holatidan chetlanishi bo'lsa, u holda $y(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ bo'ladi, bu yerda A – tebranish amplitudasi, ω – chastota, φ – boshlang'ich faza.

Garmonik tebranishlarning grafiklari sinusoida ko'rinishida bo'ladi.

Yuqorida qaralgan misollar mazmunida nuqta koordinatasidan iborat $x(t)$ kabi noma'lum (izlanayotgan) funksiyalar, ularning $x'(t)$, $x''(t)$ kabi hosilalari va t erkli o'zgaruvchilar qatnashadi. Demak, ulardan tuzilgan tenglamalar differensial tenglamalardir. Tenglama tarkibidagi hosilaning eng yuqori tartibi shu *tenglama-ning tartibi* deyiladi. 2–5- misollarda ikkinchi tartibli, 1, 6- misollarda birinchi tartibli differensial tenglamalar qaraldi.



Mashqlar

7.1. $y = 3e^{-7x}$ funksiya $y' = -7y$ tenglamani qanoatlantirishini isbotlang.

7.2. To'g'ri chiziqli harakat qilayotgan jismning tezligi $v(t) = 3t - 2t^2$ ga teng. Harakat boshlangandan to to'xtaguncha o'tgan yo'lni toping.

7.3. Quyidagilardan qaysilari differensial tenglama va qanday tartibli:

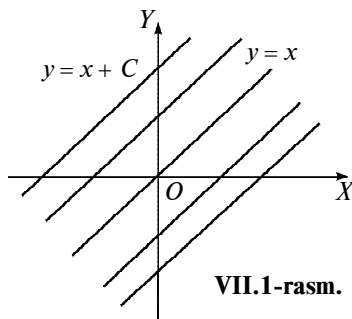
- 1) $(y'')^4 = y^3 + x - 3$;
- 2) $y' = \frac{3x^2}{x-y}$;
- 3) $\operatorname{tgy} = \sin x + 1$;
- 4) $y''' - 5y'' + 4 = \cos x$?

7.4. Massasi m bo'lgan moddiy nuqta og'irlik kuchi ta'sirida erkin tushmoqda. Havo qarshiligini hisobga olmasdan nuqtaning harakat qonunini toping.

7.5. Qarshilik ko'rsatuvchi muhitda jismning erkin tushish differensial tenglamasini tuzing, bunda muhitning qarshiligi jism tezligi kvadratiga proporsional.

7.6. $y = F(x)$ egri chiziq $A(0; 1)$ nuqtadan o'tib, uning har bir nuqtasidan o'tgan urinmaning burchak koeffitsiyenti urinish nuqtasining koordinatalari ko'paytmasining ikkilanganiga teng. Shu egri chiziqni toping.

2. Eng sodda differensial tenglamalarni yechish. Differensial tenglamaning *yechimi* deb, shu tenglamaga qo'yilganda uni ayniyatga aylantiruvchi ixtiyoriy funksiyaga aytiladi. Yechimning



VII.1-rasm.

grafigi tenglamaning *integral egri chizig'i* deyiladi.

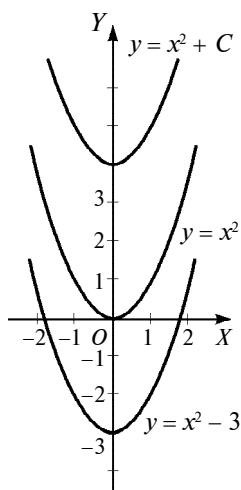
Biz 1-bandda differensial tenglamani cheksiz ko'p funksiyalar qanoatlantirishi haqida fikr yuritgan edik. Bu yechimlar majmuasi *umumiy yechim* deyiladi. Umumiy yechimdan birortasini ajratib ko'rsatish uchun funksiyaning argumentni birorta qiy-

matiga mos keladigan qiymatini ko'rsatish lozim, ya'ni $x = x_0$ da $y = y_0$ bo'ladigan shart berilishi kerak. Bu shart *boshlang'ich shart* deyiladi va $y(x_0) = y_0$ ko'rinishida yoziladi.

Differensial tenglamaning boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi uning *xususiy yechimi* deb ataladi.

1 - misol. $y' = 1$ differensial tenglamaning umumiy yechimi $y = x + C$ funksiyadan iborat, bunda C — ixtiyoriy son. Buni tekshiramiz.

Yechish. $y' = (x + C)' = 1$. Topilgan natija berilgan tenglamaga qo'yilsa, $1 = 1$ ayniyat hosil bo'ladi. C ning turli qiymatlariga tenglamaning turli xususiy yechimlari mos keladi. Ular koordinatalar tekisligida $y = x$ bissektrisaga ($C = 0$ holi) parallel to'g'ri chiziqlar to'plamini tashkil etadi (VII.1- rasm).



VII.2-rasm.

Umuman, $y' = F(x)$ (1) ko'rinishdagi tenglamalar eng *sodda differensial tenglamalardir*. (1) tenglamani yechish uchun uni $\frac{dy}{dx} = f(x)$ ko'rinishga, so'ngra $dy = f(x)dx$ ko'rinishga keltiramiz. Endi tenglikning ikkala qismini integrallasak $\int dy = \int f(x)dx$ yoki $y = \int f(x)dx$ ga ega bo'lamiz. Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyalaridan biri bo'lsa, izlanayotgan umumiy yechim quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C. \quad (2)$$

Differensial tenglamani yechish uni *integrallash* deyiladi. Odatda differensial

tenglamaga o'zgarmas C ni aniqlaydigan boshlang'ich shartlar qo'yiladi.

2 - misol. $y' = 2x$ differensial tenglamaning $y(1) = -2$ shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini topamiz.

Yechish. Dastlab umumiy yechimini topamiz:

$$dy = 2x dx, \int 2x dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + C = x^2 + C.$$

Bu yechim $y = x^2 + C$ parabolalar oilasini ifodalaydi (VII.2-rasm). C ni $y(1) = -2$ shartdan foydalanib topamiz: $-2 = 1^2 + C$, bundan $C = -3$. Demak, izlanayotgan xususiy yechim $y = x^2 - 3$ ekan.

$y' = f(x; y)$ ko'rinishdagi differensial tenglama ham $y' = f(x)$ tenglama kabi tahlil qilinadi.

3 - misol. $y' = \frac{y}{x}$ tenglamaning umumiy yechimi $y = Cx$ (C – ixtiyoriy doimiy) funksiyadan iboratligini tekshiramiz va $(x = 1, y = 1)$, $(x = 0, y = 0)$ qiymatlarga mos xususiy yechimlarini topamiz.

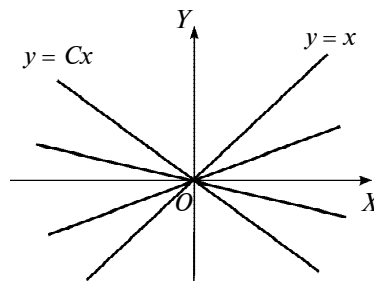
Yechish. $y = Cx$ va $y' = C$ ifodalarni berilgan tenglamaga qo'ysak, tenglama ayniyatga aylanadi: $C = C$. Demak, $y = Cx$ umumiy yechim. Xususiy yechimni topish uchun $y = Cx$ ga oldin $x = 1, y = 1$ ni qo'yamiz: $C = 1$. Bunga mos xususiy yechim $y = x$ bo'ladi (VII.3-rasm).

Endi $y = Cx$ ga $x = 0, y = 0$ ni qo'yamiz: $0 = C \cdot 0$. Bu tenglik C ning bitta emas, balki har qanday qiymatida bajariladi, ya'ni $(0; 0)$ nuqtadan cheksiz ko'p $y = Cx$ to'g'ri chiziqlar o'tadi (VII.3-rasm). $(0; 0)$ nuqta $y' = \frac{y}{x}$ differensial tenglamaning *maxsus* nuqtasidan iborat.

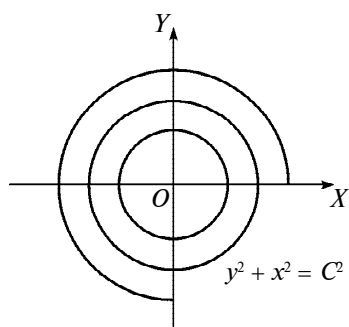
4 - misol. $y' = -\frac{x}{y}$ tenglamani yechamiz.

Yechish. Tenglama ifodasi ustida zarur almashtirishlarni bajarib, yechimni topamiz:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, y dy = -x dx, \int y dy = -\int x dx,$$



VII.3-rasm.



VII.4-rasm.

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{C^2}{2} \quad \text{ёки} \quad y^2 + x^2 = C^2,$$

C – ixtiyoriy son. Tenglamaning integral chiziqlari umumiy markazi $O(0; 0)$ koordinatalar boshida joylashgan konsentrik aylanalardan iborat (VII.4-rasm). Bu holda $O(0; 0)$ nuqta undan birorta ham aylana (integral chiziq) o'tmaydigan maxsus nuqta. Demak, yechim markazi teshilgan nuqta bo'lgan aylanalar oilasidan iborat.

Eng sodda ikkinchi tartibli $y'' = f(x)$ differensial tenglama $z = y'$ va $z' = (y')' = y''$ almashtirish orqali $z' = f(x)$ birinchi tartibli tenglama ko'rinishiga keltirib yechiladi:

$$z = \int f(x) dx = F(x) + C_1,$$

bunda F funksiya f ning boshlang'ich funksiyalaridan biri, C – ixtiyoriy son. $y' = z$ bo'lgani uchun:

$$y = \int (F(x) + C_1) dx = \Phi(x) + C_1 x + C_2,$$

bunda Φ funksiya F ning boshlang'ich funksiyalaridan biri, C_2 – ikkinchi ixtiyoriy son.

5 - m i s o l. $y'' = x^2$ tenglamani yechamiz.

Y e c h i s h. Berilgan tenglama ikki marta integrallanadi:

$$y' = \int y'' dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C_1,$$

$$y = \int \left(\frac{x^3}{3} + C_1 \right) dx = \frac{x^4}{3 \cdot 4} + C_1 x + C_2 = \frac{x^4}{12} + C_1 x + C_2.$$

Birinchi tartibli tenglamaning umumiy yechimida bitta, ikkinchi tartibli tenglamada esa ikkita ixtiyoriy o'zgarmas qatnashayotganini ko'rdik. Umuman, n -tartibli differensial tenglamaning yechimi n ta ixtiyoriy songa bog'liq bo'ladi.

6 - m i s o l. Moddiy nuqta $a(t) = 10 \text{ m/min}^2$ tezlanish bilan to'g'ri chiziqli harakat qilmoqda. $t = 3 \text{ min}$ da $S = 52 \text{ m}$ masofani o'tgan va 47 m/min tezlikka erishgan. Harakat tenglamasini tuzamiz.

Y e c h i s h. Tezlikni $x'(t)$, tezlanishni $x''(t)$ orqali belgilaylik. Quyidagilarni hosil qilamiz:

$$x' = v = \int x'' dt = \int 10 dt = 10t + C_1 = 47 \text{ va } t = 3 \text{ da } 10 \cdot 3 + C_1 = 47,$$

bundan $C_1 = 17$;

$$S = x = \int x' dt = \int (10t + C_1) dt = 5t^2 + 17t + C_2,$$

$$5 \cdot 3^2 + 17 \cdot 3 + C_2 = 52, \quad C_2 = -44.$$

Izlanayotgan tenglama: $x = 5t^2 + 17t - 44$.

7 - m i s o l. $x''(t) + \omega^2(t)x = 0$, bunda $\omega^2(t) = \frac{k}{m}$, differensial tenglamaning yechimi $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ ko'rinishda ifodalanishini ko'rsatamiz, bunda C_1 va C_2 — ixtiyoriy o'zgar-maslar, va $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$ shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni topamiz.

Y e c h i s h. x yechim ifodasi bo'yicha $x' = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t$ va $x'' = -C_1 \omega^2 \cos \omega t - C_2 \omega^2 \sin \omega t$ hosilalarni topib, berilgan teng-lamaga qo'yilsa, ushbu ayniyat hosil bo'ladi:

$$-C_1 \omega^2 \cos \omega t - C_2 \omega^2 \sin \omega t + \omega^2 (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) = 0.$$

Endi $t = 0$ bo'lgan holga mos xususiy yechimni topamiz:

$$x(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0, \quad C_1 = x_0,$$

$$x'(0) = -C_1 \omega \sin 0 + C_2 \omega \cos 0 = C_2 \omega = v_0, \quad C_2 = \frac{v_0}{\omega}.$$

U holda umumiy yechim munosabati bo'yicha:

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t.$$



M a s h q l a r

7.7. f funksiya ko'rsatilgan differensial tenglamaning yechimi bo'lishini tekshiring:

$$1) \quad y' = \frac{x^5 - 1}{x^4}, \quad f = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3x^3} + C;$$

$$2) \quad xy' - 2y = 2x^4, \quad f = Cx^2 + x^4;$$

$$3) \quad y' = 1 + \cos y, \quad f = 2 \arctg(x + C);$$

$$4) \quad (x^2 + y^2)y' = 2xy, \quad f = \frac{C \pm \sqrt{C^2 + 4x^2}}{2};$$

$$5) \quad y' = y^4, \quad f = -\frac{1}{\sqrt[3]{3(x+C)}}.$$

7.8. C_1, C_2, C_3 ning ixtiyoriy qiymatlarida F funksiya quyidagi differensial tenglamaning yechimi bo'lishini isbot qiling:

$$1) \quad y''' = 2(y'' - 1)\operatorname{ctgx}, \quad 2F(x) = C_1 \cos 2x + x^2 + C_2 x + C_3;$$

$$2) \quad (y'')^2 + y' = xy'', \quad y = C_1 \frac{x^2}{2} - C_1^2 x + C_2.$$

7.9. $(3 - x)y^5 = 8(x + 2)$ funksiya $yy'' = 0,4(x + 2)(y')^2$ differensial tenglamani va $y(2) = 32, y'(2) = 40$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantirishini tekshiring.

7.10. $y(x + 2) = -x - 6$ funksiya $2y''' - 3(y')^2 = 0$ differensial tenglamani va $y(0) = -31, y'(0) = 1, y''(0) = -1$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantirishini tekshiring.

7.11. Jism $x''(t) = 2$ tenglama bo'yicha to'g'ri chiziqli harakat qilmoqda. Tenglamaning umumiy yechimini va $x(2) = 6, x'(2) = 4$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

2-§. Birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar

1. O'zgaruvchilari ajraladigan tenglamalar. Agar differensial tenglama

$$y' = \varphi(x)\psi(y) \quad (1)$$

ko'rinishda, ya'ni chap qismida y' hosila, o'ng qismida biri x ga, ikkinchisi y ga bog'liq bo'lgan ikki funksiyaning ko'paytmasi turgan bo'lsa, bunday differensial tenglamani yechishda x va y ga bog'liq ifodalar bir-birlaridan ajratiladi. Ikki hol uchraydi:

1) agar $y = y_0$ da $\psi(y_0) = 0$ bo'lsa, y_0 — yechimlardan biri bo'ladi. Haqiqatan, y_0 o'zgarmas sonligidan $(y_0)' = 0$ va $\varphi(x) \cdot \psi(y_0) = \varphi(x) \cdot 0 = 0$, ya'ni (1) tenglama $0 = 0$ dan iborat ayniyatga aylanadi;

2) $\psi(y) \neq 0$ bo'lgan sohada (1) munosabat $\frac{dy}{dx} = \varphi(x)\psi(y)$ yoki $\frac{dy}{\psi(y)} = \varphi(x)dx$ ko'rinishga keladi va

$$\int \frac{dy}{\psi(y)} = \int \varphi(x)dx \quad (2)$$

integral olinadi. Demak, $\psi(y) \neq 0$ da (1) differensial tenglama (2) munosabatni qanoatlantiruvchi yechimga ega. Shuningdek,

$\psi(y_0) = 0$ ni qanoatlantiruvchi $y = y_0$ funksiyalar ham (1) tenglamaning yechimlari bo'ladi.

Misol. $y' = (1 + y^2)(x + 1)$ differensial tenglamaning umumiy yechimini va $y(0) = 1$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini topamiz.

Yechish. $1 + y^2$ funksiya hech qanday y_0 da nolga aylanmaydi. Tenglamadagi o'zgaruvchilarni ajratamiz, so'ng integrallashni bajarimiz:

$$\frac{dy}{dx} = (1 + y^2)(x + 1), \quad \frac{dy}{1 + y^2} = (x + 1)dx, \quad \int \frac{dy}{1 + y^2} = \int (1 + x)dx,$$

$$\operatorname{arctg} y = x + \frac{x^2}{2} + C, \quad y = \operatorname{tg} \left(\frac{x^2}{2} + x + C \right),$$

bunda C ixtiyoriy son $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ oraliqdan olinadi (argumentga π ning qo'shilishi tangens qiymatini o'zgartirmaydi). Xususiy yechimni topish uchun oldin C ni topish maqsadida umumiy yechimga $x = 0, y = 1$ larni qo'yib, $\operatorname{arctg} 1 = C$ yoki $C = \frac{\pi}{4}$ ni olamiz, so'ng

$C = \frac{\pi}{4}$ ni umumiy yechimga qo'yamiz: $y = \operatorname{tg} \left(\frac{x^2}{2} + x + \frac{\pi}{4} \right)$.



Mashqlar

7.12. Differensial tenglamalarni yeching:

- 1) $y' = 9 + y^2$; 2) $y' = xy^3$; 3) $y' = -\frac{1+y}{x-1}$;
 4) $y' = \frac{x^4}{\cos 5y}$; 5) $y' = x^5 \sqrt{1-y^2}$; 6) $\sqrt{1-x^2} \cdot y' = 2\sqrt{y}$.

7.13. $y' = x^3 y^2$ differensial tenglamaning $y(1) = 2$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

7.14. Differensial tenglamalarni yeching:

- 1) $y^3 y'' = 1$; 2) $y'' = 2yy'$.

2. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar.

$$\frac{d}{dx} + a(x)y = b(x) \quad (1)$$

ko'rinishdagi tenglamalar birinchi tartibli *chiziqli differensial tenglamalar* deyiladi. Bu tenglamalarni yechishning bir necha usullari mavjud. Biz quyida *ixtiyoriy o'zgarmasni variatsiyalash usuli (Lagranj usuli)* bilan tanishamiz.

Buning uchun (1) tenglamadagi $b(x) = 0$ bo'lgan quyidagi

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = 0$$

bir jinsli tenglamani qaraymiz. Bu tenglamani yechish uchun uni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx.$$

Bundan bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $y = Ce^{-\int a(x)dx}$ bo'ladi. Berilgan (1) tenglamaning umumiy yechimini topish uchun C ni $C(x)$ deb hisoblab,

$$y = C(x)e^{-\int a(x)dx} \quad (2)$$

dan y' ni topamiz:

$$y' = C'(x)e^{-\int a(x)dx} - C(x)e^{-\int a(x)dx} \cdot a(x).$$

$C(x)$ ni topish uchun y va y' ni topilgan ifodalarini (1) ga qo'yib, $C(x)$ ga nisbatan quyidagi tenglamaga ega bo'lamiz:

$$C'(x) = b(x)e^{\int a(x)dx}.$$

Bundan

$$C(x) = C + \int b(x)e^{\int a(x)dx}, \quad (3)$$

bu yerda C — ixtiyoriy o'zgarmas. (3) munosabatdagi $C(x)$ ni (2) ga qo'yib, (1) tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$y = e^{-\int a(x)dx} \left[C + \int b(x)e^{\int a(x)dx} dx \right]. \quad (4)$$

(1) tenglamaning $y(x_0) = y_0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$y = e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} \left[y_0 + \int_{x_0}^x b(\tau)e^{\int_{x_0}^{\tau} a(t)dt} d\tau \right]. \quad (5)$$

1 - m i s o l. $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ tenglamani yechamiz.

Y e c h i s h. Berilgan tenglamada $a(x) = \cos x$, $b(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$.

$y' + y \cos x = 0$ tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$\frac{dy}{dx} = -y \sin x$ yoki $\frac{dy}{dx} = -\cos x dx$. Bundan $\ln y = -\sin x + \ln C$,
 $y = Ce^{-\sin x}$. Topilgan umumiy yechimdan $C = C(x)$ deb hisoblab,
 uning hosilasini topamiz:

$$y' = C'(x)e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x} \cos x.$$

y' va $y = C(x)e^{-\sin x}$ ifodalarni berilgan tenglamaga qo'ysak,
 $C'(x) = e^{\sin x} \sin x \cos x$ ni olamiz. Bundan

$$C(x) = \int e^{\sin x} \sin x \cos x dx = \sin x \cdot e^{\sin x} - e^{\sin x} + C_1.$$

$C(x)$ ning topilgan qiymatini $y = C(x)e^{-\sin x}$ ifodaga qo'ysak,
 chiziqli tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$y = \left[e^{\sin x} (\sin x - 1) + C_1 \right] \cdot e^{-\sin x} = \sin x - 1 + C_1 \cdot e^{-\sin x}.$$

2 - m i s o l. $y' - 2xy = e^{x^2}$ tenglamani yechamiz.

Y e c h i s h. Tenglamani yechishda (4) formuladan
 foydalanamiz. $a(x) = -2x$, $b(x) = e^{x^2}$ bo'lganligi uchun berilgan
 tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha topiladi:

$$\begin{aligned} y &= e^{\int (-2x) dx} \left[C + \int e^{x^2} \cdot e^{-\int 2x dx} dx \right] = e^{x^2} \left[C + \int e^x \cdot e^{-x^2} dx \right] = \\ &= e^{x^2} [C + \int dx] = e^{x^2} [C + x + C_1] = e^{x^2} (C + x) = x + C \cdot e^{x^2}. \end{aligned}$$



M a s h q l a r

7.15. Differensial tenglamalarning umumiy yechimini toping:

$$1) \quad y' + \frac{y}{x} = x; \quad 2) \quad xy' - 3y = -x^2; \quad 3) \quad y' - \frac{y}{\sin x} = \cos x - 1.$$

7.16. $y' - y \tan x = \frac{1}{\cos x}$ differensial tenglamaning $y(0) = 1$ shartni
 qanoatlantiradigan xususiy yechimini toping.

7.17. $xy' - \frac{y}{x+1} = x$ differensial tenglamaning $y(0) = 1$ shartni
 qanoatlantiradigan xususiy yechimini toping.