
SO‘ZBOSHI

„Algebra va matematik analiz asoslari“ darsligi ikki qismdan iborat bo‘lib, akademik litseylar va kasb-hunar kollejlari uchun mo‘ljallangan hamda shu fan bo‘yicha akademik litseylar va kasb-hunar kollejlari o‘quv rejasiga asosan, aniq fanlar yo‘nalishi, tabiiy fanlar yo‘nalishi, shuningdek, matematika umumta‘lim fani sifatida o‘rganiladigan guruhlarining „Algebra va matematik analiz asoslari“ kursining o‘quv dasturidagi barcha materiallarni o‘z ichiga oladi. Mualliflarning SamDU akademik litseyida to‘plagan ish tajribalari asosida yaratilgan ushbu darslikning I qismi sakkiz bobdan iborat bo‘lib, unda quyidagi mavzular yoritilgan:

- to‘plamlar nazariyasi va matematik mantiq elementlari;
- haqiqiy sonlar;
- kompleks sonlar va ular ustida amallar;
- ko‘phadlar;
- algebraik ifodalar;
- algebraik tenglamalar va tengsizliklar;
- funksiyalar;
- ko‘rsatkichli va logarifmik funksiyalar.

Har bir bob paragraflarga, paragraflar esa bandlarga bo‘lingan.

Materiallar bayonida mualliflar nazarida zarur deb hisoblangan o‘rinlarda to‘plamlar nazariyasi va matematik mantiq elementlari tilidan foydalanilgan.

Darslikning yaratilish jarayonida o‘zlarining qimmatli maslahatlarini ayamagan SamDU akademik litseyining matematika o‘qituvchilari R. Narzullayeva va F. Xo‘jayevaga, Samarqand viloyati Ishtixon tumani 21- o‘rta maktabning oliy toifali matematika o‘qituvchisi, O‘zbekiston Respublikasida xizmat ko‘rsatgan Xalq ta‘limi xodimi A. A. Nasimovga hamda uni nashrga tayyorlashda katta yordam bergan I.H. Nasimovga o‘z minnatdorchiligimizni bildiramiz.

Mualliflar



I bob

TO‘PLAMLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK MANTIQ ELEMENTLARI

1- §. To‘plamlar nazariyasining asosiy tushunchalari

1. To‘plam haqida tushuncha. To‘plam tushunchasi matematikaning boshlang‘ich (ta’riflanmaydigan) tushunchalaridan biridir. U chekli yoki cheksiz ko‘p obyektlar (narsalar, buyumlar, shaxslar va h.k.) ni birgalikda bir butun deb qarash natijasida vujudga keladi.

Masalan, O‘zbekistondagi viloyatlar to‘plami; viloyatdagi akademik litseylar to‘plami; butun sonlar to‘plami; to‘g‘ri chiziq kesmasidagi nuqtalar to‘plami; sinfdagi o‘quvchilar to‘plami va hokazo. To‘plamni tashkil etgan obyektlar uning *elementlari* deyiladi.

To‘plamlar odatda lotin alifbosining bosh harflari bilan, uning elementlari esa shu alifboning kichik harflari bilan belgilanadi. Masalan, $A = \{a, b, c, d\}$ yozuvi A to‘plam a, b, c, d elementlardan tashkil topganligini bildiradi.

x element X to‘plamga *tegishli* ekanligi $x \in X$ ko‘rinishda, *tegishli emasligi* esa $x \notin X$ ko‘rinishda belgilanadi.

Masalan, barcha natural sonlar to‘plami N va $4, 5, \frac{3}{4}, \pi$ sonlari uchun $4 \in N, 5 \in N, \frac{3}{4} \notin N, \pi \notin N$ munosabatlar o‘rinli.

Biz, asosan, yuqorida ko‘rsatilganidek buyumlar, narsalar to‘plamlari bilan emas, balki sonli to‘plamlar bilan shug‘ullanamiz. Sonli to‘plam deyilganda, barcha elementlari sonlardan iborat bo‘lgan har qanday to‘plam tushuniladi. Bunga N – natural sonlar to‘plami, Z – butun sonlar to‘plami, Q – ratsional sonlar to‘plami, R – haqiqiy sonlar to‘plami misol bo‘la oladi.

To‘plam o‘z elementlarining to‘liq ro‘yxatini ko‘rsatish yoki shu to‘plamga tegishli bo‘lgan elementlarga qanoatlantiradigan shartlar sistemasini berish bilan to‘liq aniqlanishi mumkin. To‘plamga tegishli bo‘lgan elementlarga qanoatlantiradigan shartlar sistemasi shu to‘plamning *xarakteristik xossasi* deb ataladi.

Barcha x elementlari biror b xossaga ega bo'lgan to'plam $X = \{x | b(x)\}$ kabi yoziladi. Masalan, ratsional sonlar to'plamini $Q = \{r | r = \frac{p}{q}, p \in Z, q \in N\}$ ko'rinishda, $ax^2 + bx + c = 0$ kvadrat tenglama ildizlari to'plamini esa $X = \{x | ax^2 + bx + c = 0\}$ ko'rinishda yozish mumkin.

Elementlari soniga bog'liq holda to'plamlar chekli va cheksiz to'plamlarga ajratiladi. Elementlari soni chekli bo'lgan to'plam *chekli to'plam*, elementlari soni cheksiz bo'lgan to'plam *cheksiz to'plam* deyiladi.

1- misol. $A = \{x | x \in N, x^2 > 7\}$ to'plam 2 dan katta bo'lgan barcha natural sonlardan tuzilgan, ya'ni $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots\}$. Bu to'plam – cheksiz to'plamdir.

Birorta ham elementga ega bo'lmagan to'plam *bo'sh to'plam* deyiladi. Bo'sh to'plam $\emptyset$ orqali belgilanadi. Bo'sh to'plam ham chekli to'plam hisoblanadi.

2- misol. $x^2 + 3x + 2 = 0$ tenglamaning ildizlari $X = \{-2; -1\}$ chekli to'plamni tashkil etadi. $x^2 + 3x + 3 = 0$ tenglama esa haqiqiy ildizlarga ega emas, ya'ni uning haqiqiy yechimlar to'plami $\emptyset$ dir.

Ayni bir xil elementlardan tuzilgan to'plamlar *teng to'plamlar* deyiladi.

3- misol. $X = \{x | x \in N, x \leq 3\}$ va $Y = \{x | (x-1)(x-2)(x-3) = 0\}$ to'plamlarning har biri faqat 1, 2, 3 sonlaridan tuzilgan. Shuning uchun bu to'plamlar tengdir: $X = Y$.

Agar B to'plamning har bir elementi A to'plamning ham elementi bo'lsa, B to'plam A to'plamning *qism-to'plami* deyiladi va $B \subset A$ ko'rinishida belgilanadi. Bunda $\emptyset \subset A$ va $A \subset A$ hisoblanadi. Bu qism-to'plamlar *xosmas qism-to'plamlar* deyiladi. A to'plamning qolgan barcha qism-to'plamlari *xos qism-to'plamlar* deyiladi. Masalan: $N \subset Z \subset Q \subset R$. Agar $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{x | x^2 - 7x + 12 = 0\}$ bo'lsa, $B \subset A$ bo'ladi.

4- misol. A – ikki xonali sonlar to'plami, B – ikki xonali juft sonlar to'plami bo'lsin. Har bir ikki xonali juft son A to'plamda ham mavjud. Demak, $B \subset A$.

$A = B$ bo'lsa, $A \subset B$, $B \subset A$ va aksincha, $A \subset B$, $B \subset A$ bo'lsa, $A = B$ bo'lishini tushunish qiyin emas.

5- m i s o l. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, \frac{4}{2}, \sqrt{9}, 2^2\}$ bo'lsa,
 $B = \{1, \frac{4}{2}, \sqrt{9}, 2^2\} = \{1, 2, 3, 4\} = A$. Bundan ko'rinadiki, $A \subset B$,
 $B \subset A$ bo'ladi.

X chekli to'plam elementlari sonini $n(X)$ orqali belgilaymiz.
 k ta elementli X to'plamni k elementli to'plam deb ataymiz.

6- m i s o l. X to'plam 10 dan kichik tub sonlar to'plami bo'lsin:
 $X = \{2; 3; 5; 7\}$. Demak, $n(X) = 4$.



M a s h q l a r

1.1. O'zbekiston Respublikasining Davlat gerbi qabul qilingan yilni ifodalovchi sonda qatnashgan raqamlar to'plamini tuzing.

1.2. $B = \{10; 12 \frac{3}{4}; 17,3; -7; 136\}$ to'plam berilgan. Qaysi natural sonlar bu to'plamga kiradi? Shu to'plamga tegishli bo'lmagan uchta son ayting. Javobni $\in, \notin$ belgilari yordamida yozing.

1.3. S to'plam $-3; -2; -1; 4$ elementlaridan tuzilgan. Shu to'plamni yozing. Shu sonlarga qarama-qarshi sonlarning S_1 to'plamini tuzing.

1.4. „Bo'sh vaqtdan unumli foydalan“ jumlasidagi harflar to'plamini tuzing.

1.5. Quyidagi yozuvlarni o'qing va har bir to'plamning elementlarini ko'rsating:

- | | |
|--|--|
| a) $E = \{x \mid x \in N, -1 < x < 5\};$ | b) $F = \{x \mid 5x = x - 7\};$ |
| d) $Q = \{x \mid x(x - 12) = 0\};$ | e) $U = \{x \mid x \in R, x^2 = 2\};$ |
| f) $V = \{x \mid x \in N, x^2 < 9\};$ | g) $W = \{x \mid x \in N, x^2 \leq 9\}.$ |

1.6. Quyidagi to'plamlarni son o'qida belgilang:

- | | |
|---|---|
| a) $\{x \mid x \in N, x \leq 3\};$ | b) $\{x \mid x \in Z, -2 \leq x \leq 2\};$ |
| d) $\{x \mid x \in R, x > 4, 1\};$ | e) $\{x \mid x \in R, -2, 7 \leq x \leq 1\};$ |
| f) $\{x \mid x \in R, x < 6\};$ | g) $\{x \mid x \in R, 3, 4 < x \leq 8\};$ |
| h) $\{x \mid x \in R, -3 \frac{1}{4} \leq x \leq -1\};$ | i) $\{x \mid x^2 = 4\};$ |
| j) $\{x \mid (x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0\}.$ | |

- 1.7.** Quyidagi to'plam qaysi elementlardan tuzilgan:
- a) 1 va 3 bilangina yoziladigan barcha uch xonali sonlar to'plami;
 - b) 1, 3, 5 raqamlaridan (faqat bir marta) foydalanib yoziladigan barcha uch xonali sonlar to'plami;
 - d) raqamlarining yig'indisi 5 ga teng bo'lgan uch xonali sonlar to'plami;
 - e) 100 dan kichik va oxirgi raqami 1 bo'lgan barcha natural sonlar to'plami?
- 1.8.** Quyidagi to'plamlardan qaysilari bo'sh to'plam:
- a) simmetriya markaziga ega bo'lmagan kvadratlar to'plami;
 - b) $\{x \mid x^2 + 1 = 0\}$;
 - d) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, |x| = 3\}$;
 - e) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x^3 = 1\}$?
- 1.9.** Quyidagi to'plamning nega bo'sh to'plam ekanligini tushuntiring:
- a) $\{x \mid x \in \mathbb{N}, x < -1\}$;
 - b) $\{x \mid x \in \mathbb{N}, 15 < x < 16\}$;
 - d) $\{x \mid x \in \mathbb{N}, x = \frac{3}{5}\}$;
 - e) $\{x \mid x > 7, x < 5\}$.
- 1.10.** Tenglamaning haqiqiy ildizlari to'plamini toping. Bu to'plamlarning qaysilari bo'sh to'plam ekanligini aniqlang:
- a) $3x + 15 = 4(x - 8)$; b) $2x + 4 = 4$;
 - d) $2(x - 5) = 3x$; e) $x^2 - 4 = 0$;
 - f) $x^2 + 16 = 0$; g) $(2x + 7)(x - 2) = 0$.
- 1.11.** Quyidagi to'plam elementlarini va elementlar sonini ko'rsating:
- a) $\{l, f, g\}$; b) $\{a\}$; d) $\{\{a\}\}$; e) $\emptyset$; f) $\{\emptyset\}$; g) $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$; h) $\{\{a, b, c\}, a\}$.
- 1.12.** 5 ta elementi bor bo'lgan to'plam tuzing.
- 1.13.** 5 ta natural son qatnashgan sonli to'plam tuzing.
- 1.14.** $A = \{a, b, c, d, e, f, g, k\}$, $B = \{a, l, k\}$, $C = \{b, d, g, k, t\}$, $D = \{a, l\}$, $E = \{e, f, k, g\}$ to'plamlar berilgan.

- a) Ularning qaysilari A to'plamning xoc qism-to'plami bo'ladi?
- b) D to'plam C to'plamning qism-to'plamimi?
- d) B to'plam qaysi to'plamning qism-to'plami bo'ladi?
- e) $n(A)$, $n(B)$, $n(C)$, $n(D)$, $n(E)$ sonlarni o'sish tartibida joylashtiring.
- 1.15.** $A = \{3, 6, 9, 12\}$ to'plamning barcha qism-to'plamlarini tuzing.
- 1.16.** To'plamlar jufti berilgan:
- a) $A = \{\text{Navoiy, Bobur, Furqat, Nodirabegim}\}$ va B – barcha shoir va shoirlar to'plami;
- b) C – qavariq to'rtburchaklar to'plami va D – to'rtburchaklar to'plami;
- d) E – Samarqand olimlari to'plami, F – O'zbekiston olimlari to'plami;
- e) K – barcha tub sonlar to'plami, M – manfiy sonlar to'plami.
Juftlikdagi to'plamlardan qaysi biri ikkinchisining qism-to'plami bo'lishini aniqlang.
- 1.17.** Quyidagi to'plamlar uchun $A \subset B$ yoki $B \subset A$ munosabatlardan qaysi biri o'rinli:
- a) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, c, d\}$;
- b) $A = \{c, b\}$, $B = \{a, c, b\}$;
- d) $A = \emptyset$, $B = \emptyset$;
- e) $A = \emptyset$, $B = \{a, b, c\}$;
- f) $A = \emptyset$, $B = \{\emptyset, \{a, b\}\}$;
- g) $A = \{\{a\}, a, \emptyset\}$, $B = \{a\}$;
- h) $A = \{\{a, b\}, \{c, d\}, c, d\}$, $B = \{\{a, b\}, c\}$;
- i) $A = \{\{0\}, 0\}$, $B = \{\emptyset, \{\{0\}, 0\}\}$?
- 1.18.** Munosabatning to'g'ri yoki noto'g'ri ekanligini aniqlang:
- a) $\{1; 2\} \subset \{\{1; 2; 3\}; \{1; 3\}; 1; 2\}$;
- b) $\{1; 2\} \in \{\{1; 2; 3\}; \{1; 3\}; 1; 2\}$;
- d) $\{1; 3\} \subset \{\{1; 2; 3\}; \{1; 3\}; 1; 2\}$;
- e) $\{1; 3\} \in \{\{1; 2; 3\}; \{1; 3\}; 1; 2\}$.
- 1.19.** Quyidagi to'plamlar tengmi:
- a) $A = \{2; 4; 6\}$ va $B = \{6; 4; 2\}$;

- b) $A = \{1; 2; 3\}$ va $B = \{1; 11; 111\}$;
 d) $A = \{\{1; 2\}, \{2; 3\}\}$ va $B = \{2; 3; 1\}$;
 e) $A = \{\sqrt{256}; \sqrt{81}; \sqrt{16}\}$ va $B = \{2^2; 3^2; 4^2\}$?

1.20. $x = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$ va $A = \{2; 3\}$ to'plamlar haqida nima deyish mumkin?

2. To'plamlar ustida amallar. A va B to'plamlarning ikkalasida ham mavjud bo'lgan x elementga shu to'plamlarning *umumiy elementi* deyiladi. A va B to'plamlarning *kesishmasi* (yoki *ko'paytmasi*) deb, ularning barcha umumiy elementlaridan tuzilgan to'plamga aytiladi. A va B to'plamlarning kesishmasi $A \cap B$ ko'rinishda belgilanadi: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ va } x \in B\}$. 1- rasmda Eyer – Venn diagrammasi nomi bilan ataladigan chizmada A va B shakllarning kesishmasi $A \cap B$ ni beradi (chizmada shtrixlab ko'rsatilgan).

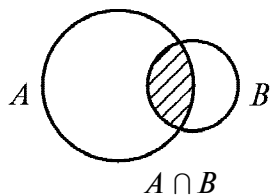
A va B to'plamlarning *birlashmasi* (yoki *yig'indisi*) deb, ularning kamida bittasida mavjud bo'lgan barcha elementlardan tuzilgan to'plamga aytiladi. A va B to'plamlarning birlashmasi $A \cup B$ ko'rinishida belgilanadi: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ yoki } x \in B\}$ (2- rasm).

A va B to'plamlarning *ayirmasi* deb, A ning B da mavjud bo'lmagan barcha elementlaridan tuzilgan to'plamga aytiladi. A va B to'plamlarning ayirmasi $A \setminus B$ ko'rinishda belgilanadi: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ va } x \notin B\}$ (3- rasm).

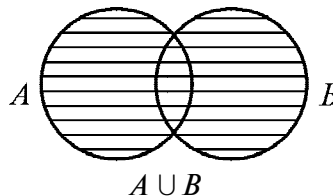
Topshiriq: 3- a rasmda $B \setminus A$ ni ko'rsating.

Agar $B \subset A$ bo'lsa, $A \setminus B$ to'plam B to'plamning *to'ldiruvchisi* deyiladi va B' yoki B_A' bilan belgilanadi (3- b rasm).

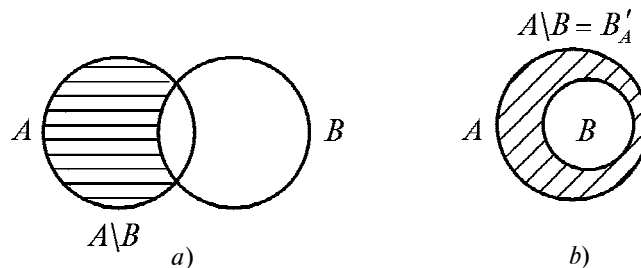
1- misol. $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ va $B = \{b, d, e, g, h\}$ to'plamlar berilgan. Ularning kesishmasi, birlashmasini topamiz va Eyer – Venn diagrammasida ko'rsatamiz.



1- rasm.



2- rasm.



3- rasm.

b, d, e elementlari A va B to'plamlar uchun umumiy, shunga ko'ra $A \cap B = \{b, d, e\}$. Bu to'plamlarning birlashmasi esa $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ dan iborat (4- a rasm).

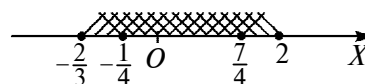
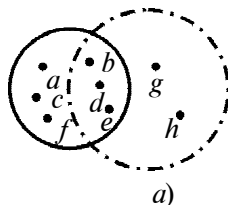
2- misol. $A = \{x \mid -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{7}{4}\}$, $B = \{x \mid -\frac{1}{4} \leq x \leq 2\}$ to'plamlarning kesishmasi, birlashmasi va ayirmasini topamiz. Buning uchun sonlar o'qida $-\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{7}{4}, 2$ nuqtalarni belgilaymiz (4- rasm). $A \cap B = \{x \mid -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{7}{4}\}$, $A \cup B = \{x \mid -\frac{2}{3} \leq x \leq 2\}$, $A \setminus B = \{x \mid -\frac{2}{3} \leq x < -\frac{1}{4}\}$.

3- misol. $A = \{0; 2; 3\}$, $C = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ to'plamlar uchun $A' = C \setminus A$ ni topamiz. $A \subset C$ bo'lgani uchun $A' = C \setminus A = \{1; 4\}$ bo'ladi.

4- misol. Agar $A \subset B$ bo'lsa, $A \cup B = B$ bo'lishini isbot qilamiz.

Isbot. $A \subset B$ bo'lsin.

a) $A \cup B \subset B$ ni ko'rsatamiz. $x \in A \cup B$ bo'lsin. U holda $x \in A$ yoki $x \in B$ bo'ladi. Agar $x \in A$ bo'lsa, $A \subset B$ ekanidan $x \in B$ ekani kelib chiqadi, ikkala holda ham $A \cup B$ ning har qanday elementi B ning ham elementidir. Demak, $A \cup B \subset B$;



4- rasm.

b) $B \subset A \cup B$ ni ko'rsatamiz. $x \in B$ bo'lsin. U holda, to'plamlar birlashmasining ta'rifiga ko'ra $x \in A \cup B$ bo'ladi. Demak, B ning har qanday elementi $A \cup B$ ning ham elementi bo'ladi, ya'ni $B \subset A \cup B$.

Shunday qilib, $A \cup B \subset B$, $B \subset A \cup B$. Bu esa $B = A \cup B$ ekanini tasdiqlaydi.

To'plamlar ustida bajariladigan amallarning xossalari sonlar ustida bajariladigan amallarning xossalariga o'xshash. Har qanday X , Y va Z to'plamlar uchun:

$$1) X \cup Y = Y \cup X;$$

$$1') X \cap Y = Y \cap X;$$

$$2) (X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Z) \cup Y;$$

$$2') (X \cap Y) \cap Z = (X \cap Z) \cap Y = X \cap (Y \cap Z);$$

$$3) (X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z);$$

$$3') (X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z) \text{ tengliklar bajariladi.}$$

Agar qaralayotgan to'plamlar ayni bir U to'plamning qism-to'plamlari bo'lsa, U to'plam *universal* to'plam deyiladi.

Universal to'plam qism-to'plamlarining kesishmasi, birlashmasi, shuningdek, U to'plam ixtiyoriy qism-to'plamining to'ldiruvchisi ham U ning qism to'plami bo'ladi. Biror X to'plamning U ga to'ldiruvchisini X'_U yoki X' shaklida belgilash mumkin.

To'ldirish amalining ayrim xossalarini ko'rsatib o'tamiz:

1) $\emptyset' = U$, 2) $U' = \emptyset$, 3) $(X')' = X$, 4) U dan olingan har qanday X va Y to'plam uchun $(X \cap Y)' = X' \cup Y'$; $(X \cup Y)' = X' \cap Y'$.

Shuningdek, agar $X \subset Y$ bo'lsa, $X \cap Y = X$, $X \cup Y = Y$ bo'ladi. Xususan, $\emptyset \subset X$ va $X \subseteq X$ bo'lganidan, $\emptyset \cap X = \emptyset$, $\emptyset \cup X = X$, $X \cap X = X$, $X \cup X = X$ bo'ladi.

5- misol. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{1, 5, 9\}$ to'plamlar berilgan. $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$ to'plam universal to'plam bo'ladimi? $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 9, 15\}$ va $M = \{1, 3, 4, 5, 9\}$ to'plamlar-chi?

$A \subset D$, $B \subset D$, $C \subset D$ bo'lgani uchun D to'plam universal to'plam bo'ladi. $D \subset E$ bo'lgani uchun E to'plam ham universal to'plam bo'ladi. $B \subset M$, $C \subset M$, lekin $A \not\subset M$ bo'lgani uchun M to'plam universal to'plam bo'la olmaydi.



Mashqlar

- 1.21. $M = \{36; 29; 15; 68; 27\}$, $P = \{4; 15; 27; 47; 36; 90\}$,
 $Q = \{90; 4; 47\}$ to'plamlar berilgan. $M \cap P$, $M \cap Q$,
 $P \cap Q$, $M \cap P \cap Q$ larni toping.
- 1.22. A – 18 ning hamma natural bo'luvchilari to'plami, B – 24
ning hamma natural bo'luvchilari to'plami. $A \cap B$ to'plam
elementlarini ko'rsating.
- 1.23. P ikki xonali natural sonlar to'plami, S barcha toq natural
sonlar to'plami bo'lsa, $K = P \cap S$ to'plamga qaysi sonlar
kiradi?
a) $21 \in K$; b) $32 \in K$; d) $7 \notin K$; e) $17 \notin K$ deyish
to'g'rimi?
- 1.24. „Matematika“ va „grammatika“ so'zlaridagi harflar
to'plamini tuzing. Bu to'plamlar kesishmasini toping.
- 1.25. $[1; 5]$ va $[3; 7]$ kesmalarning kesishmasini toping.
- 1.26. $P = \{a, b, c, d, e, f\}$ va $E = \{a, g, z, e, k\}$ to'plamlar
birlashmasini toping.
- 1.27. $A = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n < 5\}$ va $B = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n > 7\}$ to'plamlar
birlashmasini toping. a) $4 \in A \cup B$; b) $-3 \in A \cup B$;
d) $6 \in A \cup B$ deyish to'g'rimi?
- 1.28. Agar a) $A = \{x \mid x = 8k, k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x \mid x = 8l - 4, l \in \mathbb{Z}\}$;
b) $A = \{x \mid x = 6k - 1, k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x \mid x = 6l + 4, l \in \mathbb{Z}\}$ bo'lsa,
 $A \cup B$ ni toping.
- 1.29. $A = \{2; 4; 6; 8; \dots; 40\}$, $B = \{1; 3; 5; 7; \dots; 37\}$, $C = \{\{a; b\},$
 $\{c; d\}, \{e; f\}, g, h\}$ to'plamlarning har biridagi elementlar
sonini aniqlang. $A \cup B$ da nechta element mavjud?
- 1.30. $A = \{2; 3; 4; 5; 7; 10\}$, $B = \{3; 5; 7; 9\}$, $C = \{4; 9; 11\}$
bo'lsin. Quyidagi to'plamlarda nechtdan element mavjud:
a) $A \cup (B \cup C)$; b) $(C \cup B) \cup A$; d) $A \cap (B \cup C)$;

e) $A \cup (B \cap C)$; f) $A \cap (B \cap C)$; g) $B \cap (A \cup C)$?

1.31. $A = \{x \mid -5 \leq x \leq 10\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 3 \leq x \leq 15\}$ bo'lsin. $A \setminus B$ va $B \setminus A$ to'plam elementlarini toping.

1.32. P – ikki xonali natural sonlar to'plami, Q – juft natural sonlar to'plami bo'lsin. $P \setminus Q$ va $Q \setminus P$ to'plamlarni tuzing.

1.33. C va D kesishuvchi to'plamlar bo'lsin. Eyler – Venn diagrammalari yordamida $C \setminus D$, $D \setminus C$, $(C \setminus D) \cup (D \setminus C)$ larni tasvirlang.

1.34. N' bilan natural sonlar to'plami N ning butun sonlar to'plami Z ga to'ldiruvchisini belgilaymiz. Quyidagilar to'g'rimi:

a) $-4 \in N'$; b) $0 \in N'$; d) $13 \in N'$;
e) $-8 \notin N'$; f) $-5,3 \notin N'$; g) $0 \notin N'$?

1.35. $A = \{x \mid x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$ to'plamning Z to'plamga to'ldiruvchisini toping.

1.36. $A = \{x \mid x = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$ to'plamning Z to'plamga to'ldiruvchisini toping.

1.37. Agar $A \subset U$, $B \subset U$ bo'lsa, quyidagi tengliklar o'rinli bo'lishini isbotlang:

a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$, b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

1.38. Agar A to'plam $x^2 - 7x + 6 = 0$ tenglamaning yechimlari to'plami va $B = \{1; 6\}$ bo'lsa, $A = B$ bo'lishini isbotlang.

1.39. $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ tenglikni isbotlang.

1.40. $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ tenglikni isbotlang.

1.41. $A \subset U$, $B \subset U$, $A \cap B = \emptyset$ bo'lsin. Quyidagilarni Eyler – Benn diagrammalari yordami bilan tasvirlang va ulardan tenglarini ko'rsating:

1) $(A' \cap B)'$; 2) $A' \cap B'$; 3) $A' \cap B$;
4) $A \cup B'$; 5) $(A' \cup B)'$; 6) $A' \cup B'$.

1.42. a) Munosabatlarni isbot qiling:

1) $(A \cup B) \setminus B = A$;
2) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

$$3) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

$$4) (A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C);$$

b) A va B lar U universal to'plamning qism-to'plamlari.

Isbot qiling:

$$1) (A \cap B)' = A' \cup B'; \quad 2) (A \cap B) = A \setminus (A \cap B').$$

1.43. Ifodalarni soddalashtiring:

$$1) B \cap (A \cup B); \quad 2) (A \cap B) \cap (A' \cap B).$$

3. To'plam elementlarining soni bilan bog'liq ayrim masalalar.

To'plamlar nazariyasining muhim qoidalaridan biri — jamlash qoidasidir. Bu qoida kesishmaydigan to'plamlar birlashmasidagi elementlar sonini topish imkonini beradi.

1- te o r e m a (jamlash qoidasi). *Kesishmaydigan A va B chekli to'plamlarning (5- rasm) birlashmasidagi elementlar soni A va B to'plamlar elementlari sonlarining yig'indisiga teng:*

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B).$$

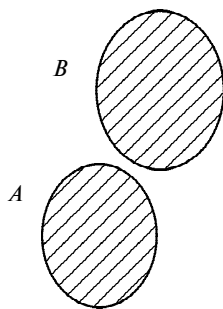
Isbot. $n(A) = k$, $n(B) = m$ bo'lib, A to'plam $a_1, a_2, \dots, a_k$ elementlardan, B to'plam esa $b_1, b_2, \dots, b_m$ elementlardan tashkil topgan bo'lsin.

Agar A va B to'plamlar kesishmasa, ularning birlashmasi $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_m$ elementlardan tashkil topadi:

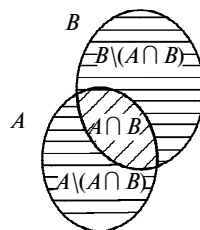
$$A \cup B = \{a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_m\}.$$

Bu to'plamda $k + m$ ta element mavjud, ya'ni

$$n(A \cup B) = k + m = n(A) + n(B).$$



5- rasm.



6- rasm.

Xuddi shu kabi, chekli sondagi $A, B, \dots, F$ juft-jufti bilan kesishmaydigan to'plamlar uchun quyidagi tenglik to'g'riligini isbotlash mumkin:

$$n(A \cup B \cup \dots \cup F) = n(A) + n(B) + \dots + n(F).$$

2- teorema. Ixtiyoriy A va B chekli to'plamlar uchun ushbu tenglik o'rinli:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B). \quad (1)$$

I s b o t. Agar $A \cap B = \emptyset$ bo'lsa, $n(A \cap B) = 0$ bo'lib, 1- teoreмага ko'ra (1) tenglik o'rinli. Agar $A \cap B \neq \emptyset$ bo'lsa, u holda $A \cup B$ to'plamni uchta juft-jufti bilan kesishmaydigan to'plamlarning birlashmasi ko'rinishida tasvirlash mumkin (6- rasm):

$$A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B). \quad (2)$$

$A \setminus (A \cap B)$, $B \setminus (A \cap B)$ va $A \cap B$ to'plamlardagi elementlari soni mos ravishda $n(A) - n(A \cap B)$, $n(B) - n(A \cap B)$, $n(A \cap B)$ ga teng.

Jamlash qoidasiga ko'ra, (2) tenglikdan

$$n(A \cup B) = (n(A) - n(A \cap B)) + (n(B) - n(A \cap B)) + n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B), \text{ ya'ni (1) tenglik hosil bo'ladi.}$$

M a s a l a . 100 kishidan iborat sayyohlar guruhida 70 kishi ingliz tilini, 45 kishi fransuz tilini, 23 kishi esa ikkala tilni ham biladi. Sayyohlar guruhidagi necha kishi ingliz tilini ham, fransuz tilini ham bilmaydi?

Y e c h i s h. Berilgan guruhdagi ingliz tilini biladigan sayyohlar to'plamini A bilan, fransuz tilini biladigan sayyohlar to'plamini B bilan belgilaymiz. U holda ham ingliz tilini, ham fransuz tilini biladigan sayyohlar to'plami $A \cap B$ to'plamdan, shu ikki tildan hech bo'lmasa bittasini biladigan sayyohlar to'plami esa $A \cup B$ to'plamdan iborat bo'ladi.

Shartga ko'ra, $n(A) = 70$, $n(B) = 45$, $n(A \cap B) = 23$. (1) tenglikka ko'ra, $n(A \cup B) = 70 + 45 - 23 = 92$.

Shunday qilib, 92 kishi ingliz va fransuz tillaridan hech bo'lmaganda bittasini biladi, $100 - 92 = 8$ kishi esa ikkala tilni ham bilmaydi.



Mashqlar

- 1.44.** Sinfdagi bir necha o'quvchi marka yig'dilar. 15 o'quvchi O'zbekiston markalarini, 11 kishi chet el markalarini, 6 kishi ham O'zbekiston markalarini, ham chet el markalarini yig'di. Sinfdagi necha o'quvchi marka to'plagan?
- 1.45.** 32 o'quvchining 12 tasi voleybol seksiyasiga, 15 tasi basketbol seksiyasiga, 8 kishi esa ikkala seksiyaga ham qatnashadi. Sinfdagi necha o'quvchi hech bir seksiyaga qatnashmaydi?
- 1.46.** 30 o'quvchidan 18 tasi matematikaga, 17 tasi esa fizikaga qiziqadi. Ikkala fanga ham qiziqadigan o'quvchilar soni nechta bo'lishi mumkin? (Ko'rsatma. Ikkala fanga ham qiziqmaydigan o'quvchilar soni $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 12\}$).
- 1.47.** 100 odamdan iborat sayyohlar guruhida 10 kishi nemis tilini ham, fransuz tilini ham bilmaydi, 75 tasi nemis tilini, 83 tasi esa fransuz tilini biladi. Ikkala tilni ham biladigan sayyohlar sonini toping.
- 1.48.** 26 o'quvchining 14 tasi shaxmatga, 16 tasi shashkaga qiziqadi. Ham shashkaga, ham shaxmatga qiziqadigan o'quvchilar nechta?

2- §. Matematik mantiq elementlari

Matematik mantiq matematikaning bir bo'limi bo'lib, unda „mulohaza“lar va ular ustidagi mantiqiy amallar o'rganiladi.

Chin yoki *yolg'on*ligi haqida fikr yuritish mumkin bo'lgan har qanday darak gap *mulohaza* deyiladi. Mulohazalar ustida bajariladigan mantiqiy amallar maxsus belgilar yordamida ifodalanadi. Bu belgilar hozirgi zamon matematikasining barcha bo'limlarida qo'llaniladi.

Bu belgilar quyidagilardir:

1) $\Rightarrow$ – agar ... bo'lsa, u holda ... bo'ladi,

$P \Rightarrow Q$ – agar P bo'lsa, Q bo'ladi (P dan Q kelib chiqadi);

2) $\Leftrightarrow$ – teng kuchlilik,

$P \Leftrightarrow Q$ – P va Q teng kuchli (P dan Q kelib chiqadi va aksincha);

- 3) $\vee$ – dizyunksiya („yoki“ amali);
- 4) $\wedge$ – konyunksiya („va“ amali);
- 5) $\forall$ – ixtiyoriy, barcha, har qanday;
- 6) $\exists$ – shunday, mavjud;
- 7) $\nexists$ – mavjud emas.

Bu amallarni (belgilarni) qo'llashga doir misollar keltiramiz.

$P = \{a \text{ soni } 15 \text{ ga bo'linadi}\}$ va $Q = \{a \text{ soni } 5 \text{ ga bo'linadi}\}$ mulohazalari quyidagicha bog'langan:

P mulohazaning chinligidan Q mulohazaning chinligi kelib chiqadi. Mulohazalarning bunday bog'lanishi *mantiqiy kelib chiqish* deyiladi va $\Rightarrow$ belgi yordamida yoziladi: $P \Rightarrow Q$.

Bu yerda „ a soni 15 ga bo'linadi“ sharti a sonining 5 ga bo'linishi uchun *yetarlidir*. Shu bilan birga, „ a soni 5 ga bo'linadi“ sharti uning 15 ga bo'linishi uchun yetarli emas, u *zaruriy* shartdir xolos, chunki a soni 5 ga bo'linmasa, uning 15 ga bo'linishi mumkin emas.

Umuman, P mulohazaning chinligidan Q mulohazaning chinligi kelib chiqsa ($P \Rightarrow Q$), P mulohaza Q mulohaza uchun yetarli shart va Q mulohaza P mulohaza uchun zaruriy shart deyiladi.

Agar $A \Rightarrow B$ va $B \Rightarrow A$ bo'lsa, B mulohaza A mulohaza uchun zaruriy va yetarli shartdir. Bu esa quyidagicha yoziladi: $A \Leftrightarrow B$. „ $\Leftrightarrow$ “ — mantiqiy teng kuchlilik belgisidir.

A — „ a soni juft son“ mulohazasi bo'lsin.

B — „ a^2 — juft son“ mulohazasi bo'lsin.

Bu mulohazalar teng kuchli mulohazalar bo'ladi, ya'ni $A \Leftrightarrow B$.

Boshqacha aytganda, sonning kvadrati juft son bo'lishi uchun sonning o'zi juft bo'lishi zarur va yetarli.

Biror A mulohazaning *inkori* deb, A chin bo'lganda yolg'on, A yolg'on bo'lganda esa chin bo'ladigan mulohazaga aytiladi va $\bar{A}$ bilan belgilanadi.

A — „yetti — murakkab son“, u holda $\bar{A}$ „yetti — murakkab son emas“. Bu yerda A — yolg'on, $\bar{A}$ — chin mulohazadir.

A va B mulohazalarning *dizyunksiyasi* deb, A va B mulohazalardan kamida bittasi chin bo'lganda chin bo'ladigan yangi mulohazaga aytiladi va $A \vee B$ bilan belgilanadi.

Masalan, A — „ $6 \cdot 4 = 24$ “, B — „ $6 \cdot 4 = 25$ “ bo'lsa, $A \vee B$ mulohaza „ $6 \cdot 4$ ko'paytma 24 yoki 25 ga teng“.

A va B mulohazalarning konyunksiyasi deb, bu ikkala mulohaza ham chin bo'lgandagina chin bo'ladigan yangi mulohazaga aytiladi va $A \wedge B$ bilan belgilanadi.

Masalan, C – „13 soni toq va tubdir“ mulohazasi quyidagi ikkita mulohazaning konyunksiyasidir. A – „13 soni – toq“, B – „13 soni – tub“. Demak, $C = A \wedge B$.

Matematik mulohazalarni yuqoridagi belgilar yordamida ifoda etishga doir misollar keltiramiz.

1- misol. Agar $a > b$ va $b > c$ bo'lsa, $a > c$ bo'ladi. $(a > b) \wedge (b > c) \Rightarrow (a > c)$.

2- misol. $a > b$ bo'lsa, $a + c > b + c$ bo'ladi. $(a > b) \Rightarrow (a + c > b + c)$.

3- misol. $a = 0$ yoki $b = 0$ bo'lsa, $ab = 0$ bo'ladi va aksincha, $ab = 0$ bo'lsa, $a = 0$ yoki $b = 0$ bo'ladi. $(ab = 0) \Leftrightarrow ((a = 0) \vee (b = 0))$.

4- misol. $a > 0$ va $b > 0$ bo'lsa, $ab > 0$ bo'ladi. $(a > 0) \wedge (b > 0) \Rightarrow (ab > 0)$.

5- misol. Ixtiyoriy x haqiqiy son uchun $|x| \geq x$. $\forall x \in \mathbb{R}: |x| \geq x$.

6- misol. Ixtiyoriy $a \geq 0$ son uchun, shunday $x \in \mathbb{R}$ son mavjudki, $x^2 = a$ bo'ladi, ya'ni $\forall a \geq 0, \exists x \in \mathbb{R}: x^2 = a$.



Mashqlar

Jumlalarni yuqoridagi belgilar yordamida yozing.

1.49. Ixtiyoriy $a \geq 0$ uchun, $\sqrt{a} = x$ tenglik o'rinli bo'ladigan x haqiqiy son mavjud bo'ladi.

1.50. $a < 0$ va $b > 0$ bo'lsa, $ab < 0$ bo'ladi.

1.51. Har qanday a, b haqiqiy sonlar uchun $a + b = b + a$ bo'ladi.

1.52. Agar a butun son 9 ga bo'linsa, u holda bu son 3 ga ham bo'linadi.

1.53. 2 ga ham, 3 ga ham bo'linadigan butun son 6 ga ham bo'linadi va aksincha, 6 ga bo'linadigan butun son 2 ga ham, 3 ga ham bo'linadi.

1.54. Agar $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ bo'lsa, $a = b = c = 0$ bo'ladi va aksincha, $a = b = c = 0$ bo'lsa, $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ bo'ladi.

- 1.55.** Ixtiyoriy natural son n ni olmaylik, $n = 2k - 1$ yoki $n = 2k$ bo'ladigan k natural son mavjud bo'ladi.
- 1.56.** Ixtiyoriy n natural son uchun $n^2 + n^3 \in N$ bo'ladi.
- 1.57.** Ixtiyoriy n, k natural sonlari uchun $n^2 - k^3$ soni butun son bo'ladi.
- 1.58.** $a < 0$ bo'lsa, $x^2 = a$ tenglik to'g'ri bo'ladigan haqiqiy x son mavjud emas.



Takrorlashga doir mashqlar

- 1.59.** To'plamlar kesishmasini va birlashmasini toping. Eyler — Venn diagrammasi yordamida grafik talqin qiling.
- a) $A = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $B = \{8, 9, 10, 11\}$;
- b) $A = \{x \mid x = 2n, n \in N\}$, $B = \{x \mid x = \frac{n+1}{2}, n \in N\}$;
- d) $A = \{x \mid x = 5n, n \in N\}$, $B = \{x \mid x = 2n, n \in N\}$;
- e) $A = \{x \mid x = \frac{1}{n}, n \in N\}$, $B = \{x \mid x = \frac{2}{n}, n \in N\}$.
- 1.60.** P va Q to'plamlar kesishmasi va birlashmasini sonlar to'g'ri chizig'ida tasvirlang:
- a) $P = \{x \mid \sqrt{8} < x < \frac{10}{3}\}$, $Q = \{x \mid \frac{26}{47} < x < 3,2\}$;
- b) $P = \{x \mid -\frac{1}{3} < x < \frac{5}{3}\}$, $Q = \{x \mid \sqrt{2} < x \leq \frac{40}{27}\}$;
- d) $P = \{x \mid \frac{11}{4} \leq x \leq \frac{19}{3}\}$, $Q = \{x \mid \frac{19}{7} < x \leq \frac{32}{5}\}$;
- e) $P = \{x \mid \frac{4}{11} \leq x < \frac{18}{5}\}$, $Q = \{x \mid \sqrt{2} < x < 10\}$.
- 1.61.** Quyidagi tengliklarni isbotlang:
- a) $A \cup B = B \cup A$;
- b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
- d) Agar $A \subset B$ bo'lsa, $A \cup B = B$;
- e) $A \cap \emptyset = \emptyset$;
- f) $A \cup A = A$.

1.62. Quyidagi tengliklarni isbotlang:

- a) $A \cap B = B \cap A$;
- b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
- d) $A \cap A = A$;
- e) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

1.63. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ tenglik to'plamlarni ko'paytirish amalining to'plamlarni qo'shish amaliga nisbatan distributivlik xossasini, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cap (B \cap C)$ tenglik esa to'plamlarni qo'shish amalining to'plamlarni ko'paytirish amaliga nisbatan distributivlik xossasini ifodalaydi. Bu xossalarni isbotlang.

1.64. Ayirish va to'ldirish amallarining quyidagi xossalarini isbotlang ($A \subset B$, $B \subset C$, $C \subset U$ deb hisoblang):

- a) $A' \cap A = \emptyset$;
- b) $A' \cup A = U$;
- d) $(A \cap B)' = A' \cup B'$;
- e) $\emptyset' = U$;
- f) $U' = \emptyset$;
- g) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

1.65. $\emptyset$, $\cup$, $\cap$, $\subset$ belgilardan foydalanib, to'plamlar orasidagi munosabatni yozing:

- a) $X_1 = \{-5; 6\}$, $X_2 = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -5 \leq x \leq 6\}$,
 $X_3 = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -5 < x < 6\}$,
 $X_4 = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, -5 \leq x \leq 6\}$;
- b) $A = \{1; 3; 5; 7\}$, $B = \{1; 5; 7\}$;
- d) $A = \{\{0\}; 1; 3\}$, $B = \{1; 3\}$;
- e) $A = \emptyset$, $B = \{k, l, m\}$;
- f) $A = \{x, y, z\}$, $B = \{y, z, x\}$;
- g) $A = \{0\}$, $B = \emptyset$;
- h) $A = \{\{x\}, x, \emptyset\}$, $B = \{x\}$;
- i) $A = \{\{1; 3\}; \{2; 4\}; 2; 4\}$, $B = \{\{1; 3\}, 2\}$;
- j) $A = \{\{3\}, 3, \emptyset\}$, $B = \emptyset$.

1.66. a) $A = \{2n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{4n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$, $C = \{3n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ bo'lsin. Ushbu to'plamlarni toping:

- 1) $A \cap B$; 2) $A \cap C$; 3) $A \cap B \cap C$; 4) $(A \cap B) \cup C$;
- b) quyidagi munosabatlar to'g'rimi:
- 1) $\{a, c\} \subset \{\{a, b, c\}, \{a, c\}, a, b\}$;

- 2) $\{a, b, c\} \in \{\{a, b, c, d\}, \{a, c\}, a, b\}$;
 3) $\{1, 2, 3\} \subset \{\{1, 2, 3, 4\}, \{1; 3\}, 1, 2\}$?

1.67. a) sonli to'plamlarni toping:

- 1) $\{(-1)^n - 1 | n \in \mathbb{N}\}$; 2) $\{1 - (-1)^n \cdot 2 | n \in \mathbb{N}\}$;
 b) agar $A = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$, $B = \{3; 4; 5; 6\}$,
 $C = \{-3; -2; -1; 0; 2; 3\}$, $D = \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$,
 $M = \{5 \leq x - 10 \leq 12 \mid x \in \mathbb{N}\}$, $K = \{x + 10 \leq 30 \mid x \in \mathbb{N}\}$
 bo'lsa, quyidagi to'plamlar elementlarini ko'rsatib yozing:

- 1) $(A \cup B) \cap (C \cup D)$; 2) $(A \cap B \cap C) \cup D$;
 3) $(A \cap B) \cup (C \cap D) \cup M$; 4) $(A \cup C) \cap (A \cup B)$;
 5) $(B \setminus A) \cup (A \setminus B)$; 6) $D'_B \cup (C \setminus D)$;
 7) $M \cap N$; 8) $M \cup N$.