



II bob

HAQIQIY SONLAR

1- §. Natural sonlar

1. Tub va murakkab sonlar. Narsalarni sanashda ishlatiladigan sonlar *natural sonlar* deyiladi. Barcha natural sonlar hosil qilgan cheksiz to'plam N harfi bilan belgilanadi: $N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$.

Natural sonlar to'plamida eng katta son (element) mavjud emas, lekin eng kichik son (element) mavjud, u 1 soni. 1 soni faqat 1 ta bo'luvchiga ega (1 ning o'zi). 1 dan boshqa barcha natural sonlar kamida ikkita bo'luvchiga ega (sonning o'zi va 1).

1 dan va o'zidan boshqa natural bo'luvchiga ega bo'lmagan 1 dan katta natural son *tub son* deyiladi. Masalan, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 sonlar 20 dan kichik bo'lgan barcha tub sonlardir. 1 dan va o'zidan boshqa natural bo'luvchiga ega bo'lgan 1 dan katta natural son *murakkab son* deyiladi. Masalan, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18 sonlar 20 dan kichik bo'lgan barcha murakkab sonlardir.

Tub va murakkab sonlarga berilgan ta'riflardan 1 soni na tub, na murakkab son ekanligi ma'lum bo'ladi. Bunday xossaga ega natural son faqat 1 ning o'zidir.

Natural sonlarning ayrim xossalari ni qaraymiz.

1- xossa. Har qanday $p > 1$ natural sonining 1 ga teng bo'lmagan bo'luvchilarining eng kichigi tub son bo'ladi.

Isbot. $p > 1$ natural sonning 1 ga teng bo'lmagan eng kichik bo'luvchisi q bo'lsin. Uni murakkab son deb faraz qilaylik. U holda murakkab sonning ta'rifiga ko'ra, q soni $1 < q_1 < q$ shartga bo'ysunuvchi q_1 bo'luvchiga ega bo'ladi va q_1 soni p ning ham bo'luvchisi bo'ladi. Bunday bo'lishi esa mumkin emas. Demak, q — tub son.

2- xossa. Murakkab p sonining 1 dan katta eng kichik bo'luvchisi $\sqrt{p}$ dan katta bo'lmagan tub sonidir.

I s b o t . p — murakkab son, q esa uning 1 dan farqli eng kichik bo‘luvchisi bo‘lsin. U holda $p = q \cdot q_1$ (bunda q_1 bo‘linma) va $q_1 \geq q$ bo‘ladigan q_1 natural son mavjud bo‘ladi. Bu munosabatlardan $p = q \cdot q_1 \geq q \cdot q$ yoki $\sqrt{p} \geq q$ ni olamiz. 1- xossaga ko‘ra q soni tub sonidir.

3- x o s s a (Yevklid teoremasi). Tub sonlar cheksiz ko‘pdir.

I s b o t . Barcha tub sonlar n ta va ular $q_1, q_2, \dots, q_n$ sonlaridan iborat bo‘lsin deb faraz qilaylik. U holda $b = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n + 1$ soni murakkab son bo‘ladi, chunki $q_1, q_2, \dots, q_n$ sonlardan boshqa tub son yo‘q (farazga ko‘ra). b ning 1 ga teng bo‘lmagan eng kichik bo‘luvchisi q bo‘lsin. 1- xossaga ko‘ra, q tub son va $q_1, q_2, \dots, q_n$ sonlarining birortasidan iborat. b va $q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n$ sonlarining har biri q ga bo‘linganligi uchun 1 soni ham q ga bo‘linadi. Bundan, $q = 1$ ekanligi kelib chiqadi. Bu esa $q \neq 1$ ekanligiga zid. Farazimiz noto‘g‘ri. Demak, tub sonlar cheksiz ko‘p.

Biror n sonidan katta bo‘lmagan tub sonlar jadvalini tuzishda *Eratosfen g‘alviri* deb ataladigan oddiy usuldan foydalanadilar. Uning mohiyati bilan tanishamiz. Ushbu:

$$1, 2, 3, \dots, n \quad (1)$$

sonlarini olaylik.

(1) ning 1 dan katta birinchi soni 2; u faqat 1 ga va o‘ziga bo‘linadi, demak, 2 tub son. (1) da 2 ni qoldirib, uning karralisi bo‘lgan hamma murakkab sonlarni o‘chiramiz; 2 dan keyin turuvchi o‘chirilmagan son 3; u 2 ga bo‘linmaydi, demak, 3 faqat 1 ga va o‘ziga bo‘linadi, shuning uchun u tub son. (1) da 3 ni qoldirib, unga karrali bo‘lgan hamma sonlarni o‘chiramiz; 3 dan keyin turuvchi o‘chirilmagan birinchi son 5 dir; u na 2 ga va na 3 ga bo‘linadi. Demak, 5 faqat 1 ga va o‘ziga bo‘linadi, shuning uchun u tub son bo‘ladi va h.k.

Agar p tub son bo‘lib, p dan kichik tub sonlarga bo‘linadigan barcha sonlar yuqoridagi usul bilan o‘chirilgan bo‘lsa, p^2 dan kichik barcha o‘chirilmay qolgan sonlar tub son bo‘ladi.

Haqiqatan, bunda p^2 dan kichik har bir murakkab a son, o‘zining eng kichik tub bo‘luvchisining karralisi bo‘lgani uchun o‘chirilgan bo‘ladi. Shunday qilib:

a) tub son p ga bo'linadigan sonlarni o'chirishni p^2 dan boshlash kerak;

b) n dan katta bo'lmagan tub sonlar jadvalini tuzish, $\sqrt{n}$ dan katta bo'lmagan tub sonlarga bo'linuvchilarini o'chirib bo'lingandan keyin tugallanadi.

1- misol. 827 sonining eng kichik tub bo'luvchisini toping.

Yechish. $\sqrt{827}$ dan kichik bo'lgan tub sonlar 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 ekanligini aniqlab, 827 ni shu sonlarga bo'lib chiqamiz. 827 u sonlarning hech qaysisiga bo'linmaydi, bundan 827 ning tub son ekanligi kelib chiqadi.

2- misol. 15 va 50 sonlari orasida joylashgan tub sonlarni aniqlang.

Yechish. 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50 sonlarni olib, 2, 3, 5, 7 ga karrali sonlarning tagiga chizamiz. 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 47 sonlari izlangan tub sonlardir.

Natural sonlar qatorida tub sonlar turlicha taqsimlangan. Ba'zan qo'shni tub sonlar bir-biridan 2 gagina farq qiladi, masalan, 11 va 13, 101 va 103 va hokazo. Bu sonlar *egizak tub sonlar* deyiladi. Egizak tub sonlar to'plamining chekli yoki cheksizligi hozirgacha noma'lum.

Hisoblash mashinalari yordami bilan juda katta tub sonlar topilgan. Masalan, 25000 xonali $2^{86243} - 1$ son tub sonidir.

Tub sonlar haqidagi ko'p ma'lumotlar juda katta sonlar uchun tekshirilgan, lekin isbotlangan emas. Masalan, istalgan juft sonni ikki tub sonning ayirmasi (masalan, $14 = 127 - 113$, $20 = 907 - 887$ va hokazo) ko'rinishida yozish mumkinmi yoki yo'qmi, buni biz bilmaymiz. Har qanday juft son uchun bunday tasvirlanishlar cheksiz ko'p bo'ladi, deyilgan taxminlar ham bor.

1- t e o r e m a (arifmetikaning asosiy teoremasi). ***Har qanday murakkab son tub sonlar ko'paytmasiga yoyiladi va agar ko'paytuvchilarning yozilish tartibi nazarga olinmasa, bu yoyilma yagonadir.***

I s b o t. a_1 — murakkab son, q_1 esa uning eng kichik tub bo'luvchisi bo'lsin. a_1 ni q_1 ga bo'lamiz: $a_1 = q_1 \cdot a_2$ ($a_2 < a_1$).

Agar a_2 tub son bo'lsa, a_1 son tub ko'paytuvchilarga yoyilgan bo'ladi. Aks holda, a_2 ni o'zining eng kichik tub bo'luvchisi q_2 ga bo'lamiz:

$$a_2 = q_2 \cdot a_3 \quad (a_3 < a_2).$$

Agar a_3 tub son bo'lsa, $a_1 = q_1 \cdot q_2 \cdot a_3$ bo'ladi. q_1, q_2, a_3 sonlari tub sonlar bo'lgani uchun, a_1 soni tub ko'paytuvchilarga yoyilgan bo'ladi. Agar a_3 murakkab son bo'lsa, yuqoridagi jarayon davom ettiriladi.

$a_1 > a_2 > a_3 > \dots$ ekanligidan ko'rinadiki, bir necha qadamdan so'ng albatta a_n tub soni hosil bo'ladi va a_1 soni $a_1 = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n$ shaklni oladi. Demak, har qanday natural son tub ko'paytuvchilarga yoyiladi.

a soni ikki xil ko'rinishdagi tub ko'paytuvchilar yoyilmasiga ega bo'ladi, deb faraz qilaylik:

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k, \quad (2)$$

$$a = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n. \quad (3)$$

U holda

$$q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k. \quad (4)$$

(4) tenglikning ikki tomonida hech bo'lmaganda bittadan tub son topiladiki, u sonlar bir-biriga teng bo'ladi. $p_1 = q_1$ deb faraz qilaylik. Tenglikning ikkala tomonini $p_1 = q_1$ ga qisqartirsak $q_2 \cdot \dots \cdot q_n = p_2 \cdot \dots \cdot p_k$ bo'ladi. Bu tenglik ustida ham yuqoridagidak mulohaza yuritsak, $q_3 \cdot \dots \cdot q_n = p_3 \cdot \dots \cdot p_k$ bo'ladi va hokazo. Bu jarayonni davom ettirsak, $n - 1$ qadamdan so'ng $1 = p_{n+1} \cdot \dots \cdot p_k$ tenglikni olamiz. Bundan $p_{n+1} = 1, \dots, p_k = 1$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, yoyilma yagona ekan.

a sonini tub ko'paytuvchilarga yoyishda ba'zi ko'paytuvchilar takrorlanishi mumkin. $q_1, q_2, \dots, q_n$ ko'paytuvchilarning takrorlanishlarini mos ravishda $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ orqali belgilasak, $a = q_1^\alpha \cdot q_2^\beta \cdot \dots \cdot q_n^\gamma$ hosil bo'ladi. Bu a sonining *kanonik yoyilmasidir*. Masalan,

$$105840 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2.$$

Natural sonlarning kanonik yoyilmasidan foydalanib, uning bo'luvchilarini va bo'luvchilar sonini topish mumkin.

2- teorema. ***a natural sonining kanonik yoyilmasi***
 $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$ ***bo'lsin. U holda a ning har qanday bo'-***
luvchisi $d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\beta_n}$ ***ko'rinishda bo'ladi, bunda*** $0 \leq \beta_k \leq \alpha_k$ ***(k = 1, n).***

Isbot. a soni d ga bo'linsin. $a = dq$. U holda a ning hamma tub bo'luvchilari mavjud va ularning darajalari d ning kanonik yoyilmasidagi darajalaridan kichik bo'lmaydi. Shunga ko'ra, d bo'luvchi $d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\beta_n}$ yoyilmaga ega va a ning d ga bo'linishi ayon.

Misol tariqasida 48 ning bo'luvchilarini topaylik. $48 = 2^4 \cdot 3$ bo'lganligidan, uning bo'luvchilari quyidagicha topiladi: $2^0 \cdot 3^0$, $2^1 \cdot 3^0$, $2^2 \cdot 3^0$, $2^3 \cdot 3^0$, $2^4 \cdot 3^0$, $2^0 \cdot 3^1$, $2^2 \cdot 3^1$, $2^3 \cdot 3^1$, $2^4 \cdot 3^1$, $2^1 \cdot 3^1$.

a natural sonining natural bo'luvchilari soni $\tau(a)$ bilan belgilanadi.

3- teorema. ***Agar a natural sonining kanonik yoyilmasi***
 $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$ ***bo'lsa,*** $\tau(a) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1)$ ***tenglik o'rinli bo'ladi.***

Isbot. 2- teoremaga asosan $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$ sonining har bir bo'luvchisi $p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\beta_n}$ ko'rinishda bo'ladi. β_1 ifoda $0; 1; 2; \dots; \alpha_1$ qiymatlarni qabul qiladi. Shu kabi β_2 ifoda $\alpha_2 + 1$ ta qiymatni qabul qiladi va hokazo. $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ qiymatlarning ixtiyoriy kombinatsiyasi a sonining biror bo'luvchisini aniqlaydi.

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ qiymatlarning mumkin bo'lgan kombinatsiyalarining va demak, a ning natural bo'luvchilarining soni $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1)$ ga teng.

Ba'zi hollarda natural son bo'luvchilarining yig'indisini topishga to'g'ri keladi. Bunday hollarda, natural son bo'luvchilarining yig'indisi

$\delta(a)$ ni hisoblash formulasi $\delta(a) = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} \dots \frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}$

dan foydalanish mumkin.

3- misol. 20 ning bo'luvchilari sonini va bo'luvchilari yig'indisini toping.

Y e c h i s h. $20 = 2^2 \cdot 5^1$ bo'lgani sababli, 20 ning bo'luvchilari soni $\tau(20) = (2 + 1)(1 + 1) = 6$, bo'luvchilarining yig'indisi esa

$$\delta(20) = \frac{2^{2+1}-1}{2-1} \cdot \frac{5^{1+1}-1}{5-1} = 7 \cdot 6 = 42$$

bo'ladi.



M a s h q l a r

$k \in N$ soniga bo'linadigan barcha natural sonlar to'plamini A_k bilan belgilaymiz [2.1 – 2.7].

2.1. Tasdiq to'g'rimi:

- | | | |
|---------------------|-----------------------|-------------------------------|
| a) $2 \in A_3$; | f) $25 \notin A_5$; | j) $15\,342\,749 \in A_9$; |
| b) $2 \in A_4$; | g) $36 \in A_2$; | k) $15\,342\,724 \in A_4$; |
| d) $6 \notin A_5$; | h) $41 \in A_3$; | l) $15\,342\,824 \in A_8$; |
| e) $11 \in A_9$; | i) $422 \notin A_9$; | m) $4\,343\,242 \in A_{11}$? |

2.2. $11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16$ soni $A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}$ to'plamlarining qaysilariga tegishli?

2.3. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 8 \cdot 9 \notin A_k$ bo'lsa, $k = 2431$ bo'lishi mumkinmi?

$k \in \{15; 18\}$ bo'lishi mumkinmi?

2.4. $3 \cdot 5 \cdot 7 \in A_k$ bo'lsa, k ning qabul qilishi mumkin bo'lgan barcha qiymatlarini toping.

2.5. $A_2 \cap A_6, A_2 \cap A_3, A_3 \cap A_5$ larni toping.

2.6. $A_2 \cup A_3 = A_6$ tenglik to'g'rimi?

2.7. $a \in A_3, a \in A_4$ bo'lsa, $a + b \notin A_7$ bo'lishi mumkinmi?

2.8. Sonlarni tub ko'paytuvchilarga ajrating:

10; 100; 1 000; 10 000; 100 000; 1 000 000. Qanday xulosaga kelish mumkin?

2.9. Sonlarni tub ko'paytuvchilarga ajrating:

250; 300; 340; 3 700; 48 950; 4 725 000.

2.10. Sonlarni kanonik shaklda yozing:

- | | | | |
|--------|---------|-----------|------------|
| a) 36; | f) 125; | j) 946; | n) 13 860; |
| b) 72; | g) 36; | k) 1 001; | o) 2 431; |
| d) 81; | h) 512; | l) 3 125; | p) 6 783; |
| e) 96; | i) 680; | m) 4 500; | q) 36 363. |

2.11. Sonlarni kanonik shaklda yozing:

- | | | |
|--|--|----------------------------------|
| a) $2 \cdot 3^2 \cdot 2^4 \cdot 6^2$; | f) $18 \cdot 18 \cdot 15 \cdot 5$; | j) $15^2 \cdot 17 \cdot 21^3$; |
| b) $4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$; | g) $17 \cdot 19 \cdot 25$; | k) $27^3 \cdot 11 \cdot 3^4$; |
| d) $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$; | h) $3^4 \cdot 4^3 \cdot 53$; | l) $33 \cdot 34 \cdot 43^2$; |
| e) $13 \cdot 13 \cdot 27$; | i) $31^2 \cdot 33 \cdot 37^2 \cdot 39$; | m) $117 \cdot 118 \cdot 119^2$. |

2.12. Quyidagilarni toping:

- | | |
|--------------------------------|-------------------------------------|
| a) $\tau(81)$, $\delta(81)$; | f) $\tau(2^3 \cdot 6 \cdot 7)$; |
| b) $\tau(91)$, $\delta(91)$; | g) $\tau(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5)$; |
| d) $\tau(400)$; | h) $\tau(11 \cdot 13 \cdot 17)$; |
| e) $\tau(680)$; | i) $\tau(19^2 \cdot 23 \cdot 29)$. |

2.13. Quyidagilarni toping:

- | | |
|--|------------------------------------|
| a) $\tau(512)$, $\delta(512)$; | f) $\tau(4^2 \cdot 6 \cdot 15)$; |
| b) $\tau(1\,001)$, $\delta(1\,001)$; | g) $\tau(13 \cdot 100 \cdot 55)$; |
| d) $\tau(13\,860)$, $\delta(13\,860)$; | h) $\tau(121 \cdot 11^2)$; |
| e) $\tau(13\,800)$, $\delta(13\,800)$; | i) $\tau(144 \cdot 11^3)$. |

2. Eng katta umumiy bo'luvchi. Eng kichik umumiy karrali. Yevklid algoritmi. $a, b \in N$ sonlarning har biri bo'linadigan son shu sonlarning *umumiy bo'luvchisi* deyiladi. Masalan, $a = 12$; $b = 14$ bo'lsin. Bu sonlarning umumiy bo'luvchilari 1; 2 bo'ladi. $a, b \in N$ sonlar umumiy bo'luvchilarining eng kattasi shu sonlarning *eng katta umumiy bo'luvchisi* deyiladi va $B(a; b)$ orqali belgilanadi.

Masalan, $B(12; 14) = 2$.

Agar $B(a; b) = 1$ bo'lsa, a va b sonlar *o'zaro tub sonlar* deyiladi.

Masalan, $B(16; 21) = 1$ bo'lgani uchun 16 va 21 o'zaro tub sonlardir.

$a, b \in N$ sonlarning *umumiy karralisi* deb, a ga ham, b ga ham bo'linuvchi natural songa aytiladi.

a va b sonlarning umumiy karralisi ichida eng kichigi mavjud bo'lib, u a va b sonlarining *eng kichik umumiy karralisi* deyiladi va $K(a; b)$ orqali belgilanadi.

Masalan, $K(6; 8) = 24$.

Natural sonlarning kanonik yoyilmalari bir nechta sonning eng katta umumiy bo'luvchi va eng kichik umumiy karralilarini topishda ham qo'llaniladi.

a , b va c sonlari berilgan bo'lib,

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}, \quad b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\beta_n}$$

$$\text{va } c = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\gamma_n}$$

bo'lsin. t_k deb α_k , β_k va γ_k larning eng kichik qiymatini, s_k deb α_k , β_k va γ_k larning eng katta qiymatini olaylik. U holda:

$$B(a, b, c) = p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdot \dots \cdot p_n^{t_n}; \quad K(a, b, c) = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \dots \cdot p_n^{s_n}$$

bo'ladi.

Misol. $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$, $540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$ va $630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ bo'lgani uchun

$$B(126; 540; 630) = 2 \cdot 3^2 = 18,$$

$$K(126; 540; 630) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 3780 \text{ larga ega bo'lamiz.}$$

$a, b \in N$ va $a \geq b$ bo'lsin. U holda a va b sonlari uchun $a = bq + r$ ($0 \leq r < b$) tenglik o'rinli bo'ladigan $q \in N$, $r \in N$ sonlari mavjud va q , r sonlari bir qiymatli aniqlanadi.

1-teorema. *Agar $a \geq b$ bo'lib, $a = bq + r$ ($0 \leq r < b$) bo'lsa, a va b sonlarining barcha umumiy bo'luvchilari b va r sonlarining ham umumiy bo'luvchilari bo'ladi va, aksincha, $a = bq + r$ ($0 \leq r < b$) bo'lsa, b va r sonlarining barcha umumiy bo'luvchilari a va b sonlarining ham umumiy bo'luvchilari bo'ladi.*

Isbot. $a = bq + r$ bo'lib, c soni a va b sonlarining biror umumiy bo'luvchisi bo'lsin.

$r = a - bq$ bo'lganligidan r ham c ga bo'linadi, ya'ni c soni b va r sonlarining umumiy bo'luvchisi. Aksincha, c' soni b va r sonlarining umumiy bo'luvchisi bo'lsin, unda $a = bq + r$ ham c' ga bo'linadi, ya'ni c' soni a va b sonlarining umumiy bo'luvchisi. Shunday qilib, a va b ning umumiy bo'luvchisi bir xil ekan.

Natija: $a = bq + r$ bo'lsa, $B(a; b) = B(b; r)$ bo'ladi.

Isbotlangan teorema va uning natijasi asosida, $B(a; b)$ ni topishning Yevklid algoritmi deb ataluvchi quyidagi usuliga ega bo'lamiz.

$a, b \in N$, $a > b$ bo'lsin. a ni b ga qoldiqli bo'lamiz:

$$a = bq_1 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < b.$$

Agar $r_2 = 0$ bo'lsa, $B(a; b) = b$ bo'ladi. $r_2 \neq 0$ bo'lsa, natijaga ko'ra $B(a; b) = B(b; r_2)$ (1) bo'ladi.

b ni r_2 ga qoldiqli bo'lamiz: $b = r_2 q_2 + r_3$, $0 \leq r_3 < r_2$.

Agar $r_3 = 0$ bo'lsa, $B(a; b) = B(b; r_2) = r_2$ bo'ladi. $r_3 \neq 0$ bo'lsa, natijaga ko'ra $B(a; b) = B(b; r_2) = B(r_2; r_3)$ (2) bo'ladi.

r_2 ni r_3 ga qoldiqli bo'lamiz: $r_2 = r_3 q_3 + r_4$, $0 \leq r_4 < r_3$.

Agar $r_4 = 0$ bo'lsa, $B(a; b) = B(b; r_2) = B(r_2; r_3) = r_3$ bo'ladi. $r_4 \neq 0$ bo'lsa, natijaga ko'ra $B(a; b) = B(b; r_2) = B(r_2; r_3) = B(r_3; r_4)$ bo'ladi va yuqoridagi jarayonni davom ettiramiz. Bu jarayonda qoldiqlar natural sonlar bo'lib, kichiklashib boradi ($r_2 > r_3 > r_4 > \dots$). Shu sababli, biror qadamdan so'ng qoldiq 0 ga teng bo'ladi, ya'ni biror n natural son uchun $r_{n+1} = 0$ bo'ladi va $r_{n-1} = r_n \cdot q_n + 0 = r_n \cdot q_n$ tenglik bajariladi. Bu holda $B(r_{n-1}; r_n)$ va $r_n \neq 0$, $r_{n-1} \neq 0$, $r_{n-2} \neq 0$, ..., $r_2 \neq 0$ munosabatlarga ega bo'lamiz. Yuqoridagi mulohazalardan, $B(a; b) = B(b; r_2) = B(r_2; r_3) = B(r_3; r_4) = \dots = B(r_{n-1}; r_n) = r_n$ bo'lishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, $B(a; b)$ ni topish uchun qoldiqli bo'lish jarayoni 0 ga teng qoldiq hosil bo'lguncha davom ettiriladi, 0 dan farqli eng oxirgi qoldiq, a va b sonlarining eng katta umumiy bo'luvchisi bo'ladi.

Mis o l. $B(1515; 600)$ ni topamiz.

$$\begin{array}{r}
 1515 \overline{)600} \\
 \underline{-1200} \quad 2 \\
 600 \overline{)315=r_2} \\
 \underline{-315} \quad 1 \\
 315 \overline{)285=r_3} \\
 \underline{-285} \quad 1 \\
 285 \overline{)30=r_4} \\
 \underline{-270} \quad 9 \\
 30 \overline{)15=r_5} \\
 \underline{-30} \quad 2 \\
 0 = r_6
 \end{array}$$

Demak, $B(1515; 600) = 15$.

Ikkitadan ortiq $a_1, a_2, \dots, a_n$ sonlarining eng katta umumiy bo'luvchisi va eng kichik umumiy karralisini topish quyidagicha amalga oshiriladi. $B(a_1, a_2) = d_2$; $B(d_2, a_3) = d_3, \dots, B(d_{n-1}, a_n) = d_n$. Bu yerda $d_n = B(a_1, a_2, \dots, a_n)$ bo'ladi. Xuddi shunday $K(a_1, a_2) = k_2$, $K(k_2, a_3) = k_3, \dots, K(k_{n-1}, a_n) = k_n$ bo'lib, $K(a_1, a_2, \dots, a_n) = k_n$ bo'ladi.

Endi $B(a; b)$ va $K(a; b)$ orasidagi bog'lanishni ko'ramiz.

2- teorema. **$B(a; b) \cdot K(a; b) = a \cdot b$.**

Isbot. M soni a va b sonlarining biror umumiy karralisi bo'lsin. U holda

$$M = ak \quad (k \in N) \quad (1)$$

bo'ladi. Bundan ak soni b ga bo'linadi, degan xulosaga kelamiz. $B(a; b) = d$ va $a = a_1 d$; $b = b_1 d$ bo'lsa, $B(a_1; b_1) = 1$ bo'ladi.

ak soni b ga bo'linganligidan $a_1 k d$ soni ham $b_1 d$ soniga bo'linishi, bundan esa $a_1 k$ ning b_1 ga bo'linishi kelib chiqadi. Ammo $B(a_1; b_1) = 1$ bo'lgani uchun k soni b_1 ga bo'linadi.

Demak,

$$k = b_1 t = \frac{b}{d} \cdot t, \quad t \in N. \quad (2)$$

(2) ni (1) ga qo'ysak,

$$M = \frac{ab}{d} \cdot t \quad (3)$$

hosil bo'ladi. (3) ko'rinishdagi har bir son a va b sonlarining umumiy karralisi bo'ladi.

$K(a; b)$ ni topish uchun $t = 1$ deb olish yetarli.

Demak, $K(a; b) = \frac{a \cdot b}{d}$ yoki $a \cdot b = K(a; b) \cdot B(a; b)$.



Mashqlar

2.14. Sonning bo'luvchilarini toping:

- a) 209; b) 143; d) 2 431; e) 2 717.

2.15. Sonlarning umumiy bo'luvchilarini toping:

- | | |
|------------------|--------------------|
| a) 209 va 143; | d) 143 va 2 717; |
| b) 209 va 2 431; | e) 2 431 va 2 717. |

2.16. Sonlarning eng katta umumiy bo'luvchisini toping:

- | | |
|-------------------|------------------------------|
| a) 40 va 45; | h) 84, 63 va 42; |
| b) 130 va 160; | i) 72, 48 va 36; |
| d) 121 va 143; | j) 63, 130, 143 va 1 001; |
| e) 31 va 93; | k) 74, 60, 84 va 480; |
| f) 50, 75 va 100; | l) 750, 800, 865 va 1 431; |
| g) 74, 45 va 60; | m) 143, 209, 1 431 va 2 717. |

2.17. Quyidagi sonlar o'zaro tubmi:

- | | |
|------------------|-------------------------------------|
| a) 15 va 95; | h) 14, 16 va 19; |
| b) 144 va 169; | i) 63, 130 va 800; |
| d) 143 va 144; | j) 169 va 1 443; |
| e) 250 va 131; | k) 111 va 121; |
| f) 121 va 143; | l) $n, n+1$ va $n+2$ ($n \in N$); |
| g) 11, 12 va 25; | m) $n, n+2$ va $n+4$ ($n \in N$)? |

2.18. Sonlarning eng kichik umumiy karralisini toping.

- | | |
|---------------------|---------------------|
| a) 84, 42 va 21; | h) 11, 12 va 13; |
| b) 70, 80 va 90; | i) 50, 125 va 175; |
| d) 17, 51 va 289; | j) 48, 92 va 75; |
| e) 10, 21 va 3 600; | k) 100, 150 va 250; |
| f) 18, 19 va 24; | l) 80, 240 va 360; |
| g) 33, 36 va 48; | m) 34, 51 va 65. |

2.19. Sonlarning eng katta umumiy bo'luvchisini va eng kichik umumiy karralisini toping (natijani kanonik ko'rinishda yozing):

- | | |
|-------------------------|--|
| a) $2^3, 3^2$ va 15; | f) $7^2 \cdot 3; 46$ va 15; |
| b) $2^3, 3^4$ va 7; | g) $3^2 \cdot 4; 3 \cdot 6$ va $7 \cdot 9$; |
| d) 8, 13^2 va 5^2 ; | h) $3^4, 11^2$ va 13^3 ; |
| e) $12^2, 15$ va 1; | i) $11^4, 13^5$ va 100^4 . |

2.20. Sonlarning umumiy bo'luvchisi nechta:

- | | |
|---------------|-------------------|
| a) 18 va 54; | f) 63 va 72; |
| b) 42 va 56; | g) 120 va 96; |
| d) 96 va 92; | h) 102 va 170; |
| e) 84 va 120; | i) 26, 65 va 130; |

- m) 40, 60 va 100 ?

2.21. Tenglamalar sistemasini yeching:

$$\text{b) } \begin{cases} xy = 20, \\ K(x, y) = 10. \end{cases}$$

2.22. Hisoblang:

- e) $\tau(18 \cdot 91 + 15(B(10; 21))) \cdot \tau(142)$.

2.23. Sonlarning eng katta umumiy bo'luvchisini toping:

- m) 1 000 va 999.

2.24. Quyidagi sonlar o‘zaro tubmi:

- e) 111 va 11 ?

2.25. $B(a; b) \cdot K(a; b) = a \cdot b$ ($a \in N$, $b \in N$) tenglikdan foydalanib, quyidagi sonlarning eng kichik umumiy karralisini toping:

- m) 875 va 1 346.

2.26. Sonlarning o‘zaro tub ekanligini isbotlang:

- b) 811 va 10 403.

2.27. Hisoblang: $\tau(B(911; 659; 647; 367))$.

3. Sonlarning bo‘linish belgilari. Matematikada sonlarning bo‘linish belgilari juda muhim ahamiyatga ega. Bu belgilar asosida

sonlarning bo'luvchilarini, bo'linuvchilarini topish, ularning xossalari o'rganish mumkin.

$$a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_1 10 + a_0 \quad (1)$$

natural sonning berilgan b natural songa bo'linish-bo'linmasligini aniqlash kerak bo'lsin. 10 ning darajalarini b ga qoldiqli bo'lamiz:

$$10 = bq_1 + r_1; 10^2 = bq_2 + r_2; \dots; 10^n = bq_n + r_n.$$

Bu tengliklarni (1) ga qo'yib, shakl almashtirsak,

$$a = Ab + B \quad (2)$$

hosil bo'ladi. Bu yerda

$$A = a_n q_n + a_{n-1} q_{n-1} + \dots + a_1 q_1, \quad B = a_0 + a_1 r_1 + \dots + a_n r_n.$$

Hosil bo'lgan (2) tenglikdan ko'rinib turibdiki, B soni b ga bo'linganda va faqat shu holda a soni b ga bo'linadi.

Bu xulosadan sonlarning bo'linish belgilarini topishda foydalaniladi.

1. 2 ga bo'linish belgisi. 10^k ($k = 1, 2, \dots, n$) ni $b = 2$ ga bo'lishdan chiqadigan qoldiqlar nolga teng. Shuning uchun $B = a_0$ bo'ladi. Bundan a sonning oxirgi raqami 2 ga qoldiqsiz bo'linsa, bu son 2 ga qoldiqsiz bo'linadi, degan xulosaga kelimiz.

2. 3 va 9 ga bo'linish belgisi. 10 ning darajalarini $10^n = (9 + 1)^n = 9A_n + 1$ ko'rinishda ifodalasak (bu yerda $A_n \in \mathbb{N}$), 10^n darajalarni $b = 9$ (yoki $b = 3$) ga bo'lishdan chiqadigan qoldiqlar 1 ga tengligi kelib chiqadi. Shuning uchun $B = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ hosil bo'ladi. Bu yerdan ushbu qoida kelib chiqadi: *agar berilgan a sonning raqamlari yig'indisi 9 ga (3 ga) qoldiqsiz bo'linsa, u holda bu son 9 ga (3 ga) qoldiqsiz bo'linadi.*

3. 5 ga bo'linish belgisi. 10^k ($k = 1, 2, \dots, n$) darajalar $b = 5$ ga qoldiqsiz bo'linadi: $r_1 = r_2 = \dots = r_n = 0$. $B = a_0$ bo'lgani uchun ushbu qoida kelib chiqadi: *oxirgi raqami 5 ga qoldiqsiz bo'linadigan sonlar va faqat shunday sonlar 5 ga qoldiqsiz bo'linadi.*

4. 4 va 25 ga bo‘linish belgilari. $b = 4$ bo‘lganda $10 = 2b + 2$, $10^2 = 25b + 0$, $10^3 = 250b + 0$, ..., $r_1 = 2$, $r_2 = r_3 = \dots = r_n = 0$ bo‘lib, $B = a_0 + 2a_1$ bo‘ladi, ya’ni sonning 4 ga bo‘linishi uchun, uning birlik raqami bilan o‘nlik raqami ikkilanganining yig‘indisi 4 ga bo‘linishi zarur va yetarlidir. $B = a_0 + 2a_1$ ifodani bunday yozamiz:

$$B_1 = a_0 + 2a_1 + 8a_1 = B + 8a_1 = 10a_1 + a_0 = \overline{a_1a_0}.$$

$B = a_0 + 2a_1 = (a_0 + 10a_1) - 8a_1 = \overline{a_1a_0} - 8a_1$ yoki $B + 8a_1 = a_1a_0$ bo‘lgani uchun B son $\overline{a_1a_0}$ soni 4 ga bo‘linganda va faqat shu holdagina 4 ga qoldiqsiz bo‘linadi. Bundan, *oxirgi ikkita raqamidan tuzilgan son 4 ga bo‘linadigan sonlar va faqat shunday sonlar 4 ga bo‘linishi kelib chiqadi.*

Masalan, 14 024 sonining oxirgi 2 va 4 raqamlaridan tuzilgan 24 soni 4 ga bo‘linadi, demak, 14 024 soni ham 4 ga bo‘linadi.

Xuddi shunday *oxirgi ikki raqamidan tuzilgan son 25 ga bo‘linadigan sonlar va faqat shunday sonlar 25 ga bo‘linadi.*

Masalan, 1 350 sonida oxirgi ikki raqamidan iborat son 50, bu 25 ga qoldiqsiz bo‘linadi. Demak, 1 350 ham 25 ga qoldiqsiz bo‘linadi. 2^2 va 5^2 uchun olingan xulosani 2^m , 5^m ($m \in N$) sonlari uchun ham umumlashtirish mumkin.

Agar berilgan sonning oxirgi m ta raqamidan tuzilgan son 2^m ga (5^m ga) qoldiqsiz bo‘linsa, berilgan son ham 2^m ga (5^m ga) qoldiqsiz bo‘linadi.

5. 7 ga bo‘linish belgisi. Bizda $b = 7$ va

$$10 = 7 + 3, \quad r_1 = 3;$$

$$10^2 = 7 \cdot 14 + 2, \quad r_2 = 2;$$

$$10^3 = 7 \cdot 142 + 6, \quad r_3 = 6;$$

$$10^4 = 7 \cdot 1\,428 + 4, \quad r_4 = 4;$$

$$10^5 = 7 \cdot 14\,285 + 5, \quad r_5 = 5;$$

$$10^6 = 7 \cdot 142\,857 + 1, \quad r_6 = 1.$$

10^7 da $r_7 = 3 = r_1$ qoldiqlar qaytadan takrorlanyapti. Topilgan natijalarni (1) ga qo‘ysak, u holda $a = A \cdot 7 + B$ da $B = a_0 + 3a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 4a_4 + 5a_5 + a_6 + 3a_7 + a_8 + \dots$ yoki koefitsiyentlarni 7 ga nisbatan yozsak:

$B = a_0 + 3a_1 + 2a_2 + (7a_3 - a_3) + (7a_4 - 3a_4) + (7a_5 - 2a_5) + \dots =$
 $= 7(a_3 + a_4 + a_5 + a_9 + a_{10} + a_{11} + \dots) +$
 $+ (a_0 + 3a_1 + 2a_2 + a_6 + 3a_7 + 2a_8 + \dots) -$
 $- (a_3 + 3a_4 + 2a_5 + a_9 + 3a_{10} + 2a_{11} + \dots)$ ni hosil qilamiz. Oxirgi
 ifodada $a_0 + 3a_1 + 2a_2 + a_6 + 3a_7 + 2a_8 + \dots = B_2$, $a_3 + 3a_4 + 2a_5 +$
 $+ a_9 + 3a_{10} + 2a_{11} + \dots = B_1$ deb belgilasak, $a = 7 \cdot A + B_2 - B_1$ ga ega
 bo'lamiz. Shunday qilib, $B_2 - B_1$ ayirma 7 ga qoldiqsiz bo'linsa,
 berilgan a son ham 7 ga qoldiqsiz bo'linishi kelib chiqadi.

1- misol. 675 056 742 sonining 7 ga bo'linishi yoki bo'linmasligini aniqlang.

Yechish.

$\begin{array}{r} 742 \\ \hline 231 \\ \hline 14 + 12 + 2 = 28 \end{array}$	$\begin{array}{r} 056 \\ \hline 231 \\ \hline 0 + 15 + 6 = 21 \end{array}$	$\begin{array}{r} 675 \\ \hline 231 \\ \hline 12 + 21 + 5 = 38 \end{array}$
---	--	---

$38 + 28 - 21 = 66 - 21 = 45$ soni 7 ga bo'linmaydi.

Demak, berilgan son 7 ga bo'linmaydi.

6. 11 ga bo'linish belgisi. Berilgan a sonda qatnashayotgan 10 ning darajalarini 11 ga bo'lishdagi qoldiq har doim 10 yoki 1 bo'ladi. Demak, berilgan sonning juft o'rinda turgan raqamlari yig'indisidan toq o'rinda turgan raqamlari yig'indisi ayirilganda hosil bo'ladigan ayirma 11 ga bo'linsa, son 11 ga qoldiqsiz bo'linadi.

2- misol. 4 788 sonining 11 ga bo'linishini aniqlang.

$(7 + 8) - (4 + 8) = 15 - 12 = 3$ soni 11 ga bo'linmaydi, demak, berilgan son ham 11 ga bo'linmaydi.

3- misol. 3 168 ning 11 ga bo'linishini tekshiring.

$(1 + 8) - (3 + 6) = 0$. Demak, son 11 ga bo'linadi.

Natija. Agar $B(p, q) = 1$ bo'lib, a soni ham p ga, ham q ga bo'linsa, u pq ga bo'linadi.

Masalan, biror son ham 2 ga, ham 3 ga bo'linsa, u 6 ga bo'linadi, 3 ga va 4 ga bo'linadigan sonlar 12 ga ham bo'linadi va hokazo.

Qadimgi Samarqand madrasalarida a sonni biror b (masalan, 9) ga bo'lishdan chiqadigan qoldiq r ni shu sonning *mezoni* (o'lchami) deb ataganlar va undan sonlar ustida amallar to'g'ri

bajarilganini tekshirishda foydalanilganlar. Masalan, $378 \cdot 4\,925 = 1\,861\,650$ dagi natija to'g'ri hisoblanganligini tekshiramiz.

Mezonlar (9 ga bo'linish belgisi bo'yicha):

378 uchun: $3 + 7 + 8 = 18$, $1 + 8 = 9$;

4 925 uchun: $4 + 9 + 2 + 5 = 20$, $2 + 0 = 2$.

Mezonlar ko'paytmasi: $9 \cdot 2 = 18$, $1 + 8 = 9$.

1 861 650 uchun: $1 + 8 + 6 + 1 + 6 + 5 + 0 = 27$, $2 + 7 = 9$.

Mezonlar va berilgan sonlar ko'paytmalarining mezonlari teng, ya'ni $9 = 9$. Demak, topilgan ko'paytma to'g'ri.



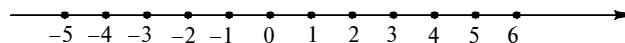
M a s h q l a r

- 2.28.** 1 dan 25 gacha bo'lgan natural sonlar qatoridagi 6 ga bo'linmaydigan natural sonlar to'plamini tuzing.
- 2.29.** 1 dan 25 gacha bo'lgan natural sonlar qatoridagi 7 ga bo'linadigan natural sonlar to'plamini tuzing.
- 2.30.** 15 121, 117 342, 1 897 524, 2 134 579, 31 445 698 sonlari orasidan 6 ga bo'linadigan natural sonlar to'plamini tuzing.
- 2.31.** Ikkita ketma-ket toq sonlarning yig'indisi 4 ga bo'linishini isbotlang.
- 2.32.** $\overline{1234xy}$ soni 8 ga va 9 ga bo'linsa, x va y raqamlarni toping.
- 2.33.** 13 ga bo'linish belgisini chiqaring.

2- §. Ratsional sonlar

1. Butun sonlar. Oddiy kasrlar. Nol sonini natural sonlar to'plamiga kiritib, butun *manfiy mas sonlar to'plami* deb ataladigan yangi sonli to'plam hosil qilamiz va bu kengaytirilgan to'plamni $N_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ orqali belgilaymiz. Katta sonni kichik sondan ayirish mumkin bo'lishi uchun N_0 sonlar to'plamini sondan ayirish kiritish yo'li bilan yanada kengaytirish zarur.

To'g'ri chiziqni olib, unda yo'nalish, 0 boshlang'ich nuqta va masshtab birligini olamiz (7- rasm). Boshlang'ich nuqtaga 0 sonini mos qo'yamiz. Boshlang'ich nuqtadan o'ng tomonda bir, ikki, uch va h.k. masshtab birligi masofada joylashgan nuqtalarga



7- rasm.

1, 2, 3, ... natural sonlarni mos qo'yamiz, boshlang'ich nuqtadan chap tomonda bir, ikki, uch va h.k. birlik masofada joylashgan nuqtalarga $-1, -2, -3, \dots$ simvollari bilan belgilanadigan yangi sonlarni mos qo'yamiz.

Bu sonlar *butun manfiy sonlar* deb ataladi. Sonlar belgilangan bu to'g'ri chiziq *son o'qi* deb ataladi. O'qning strelka bilan ko'rsatilgan yo'nalishi *musbat yo'nalish*, bunga qarama-qarshi yo'nalish esa *manfiy yo'nalish* deb ataladi. Natural sonlar son o'qida boshlang'ich nuqtadan musbat yo'nalishda qo'yiladi, shuning uchun ular *musbat butun sonlar* deb ataladi.

Butun manfiy mas sonlar to'plami bilan butun manfiy sonlar to'plamining birlashmasi yangi sonli to'plamni hosil qiladi, bu to'plam *butun sonlar to'plami* deb ataladi va Z simvoli bilan belgilanadi:

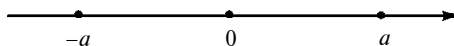
$$Z = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

a va $-a$ sonlar *qarama-qarshi* sonlar deb ataladi. Son o'qida bu sonlarga mos keladigan nuqtalar nolga nisbatan simmetrik joylashadi (8- rasm).

O'lchash natijasi butun sonlarda, o'nli yoki oddiy kasrlarda ifodalanadi. Agar miqdor qarama-qarshi (o'sish-kamayish, yuqoriga-quyiga, foyda-zarar, issiq-sovuq va hokazo) ma'noga ham ega bo'lsa, uning qiymatlari oldiga mos ravishda musbatlik («+») yoki manfiylik («-») ishorasi qo'yiladi: $x = -8, y = 8, t = +5^\circ$.

$\frac{m}{n}$ ifoda oddiy kasr deb ataladi, bunda $m \in Z, n \in N$.

$$a > 0$$



8- rasm.

Agar $\frac{p}{q}$ va $\frac{m}{n}$ kasrlar uchun $pn = mq$ sharti bajarilsa, u holda

bu oddiy kasrlar *teng* deyiladi va $\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$ ko'rinishida yoziladi.

Oddiy kasrlar uchun quyidagi xossalar o'rinalidir:

1. Har qanday kasr o'z-o'ziga teng: $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$, chunki $ab = ba$.

2. Agar $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ bo'lsa, u holda $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ bo'ladi.

3. Agar $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ bo'lib, $\frac{c}{d} = \frac{l}{n}$ bo'lsa, u holda $\frac{a}{b} = \frac{l}{n}$ bo'ladi.

4. Agar $\frac{p}{q}$ kasrning surat va maxraji $m \neq 0$ songa ko'paytirilsa

yoki bo'linsa, uning qiymati o'zgarmaydi, ya'ni $\frac{p}{q} = \frac{p \cdot m}{q \cdot m} \Rightarrow$

$\Rightarrow p \cdot q \cdot m = q \cdot p \cdot m$ yoki $\frac{p}{q} = \frac{p \cdot m}{q \cdot m}$ bo'ladi.

Ko'paytmasi birga teng bo'lgan ikkita sonlar *o'zaro teskari* sonlar deb ataladi. Bular $\frac{m}{n}$ va $\frac{n}{m}$ ko'rinishidagi sonlardir.

Bir necha kasrni umumiy maxrajga keltirish deb, bu kasrlarning qiymatlarini o'zgartirmasdan ularni bir xil maxrajga olib keluvchi almashtirishga aytiladi.

$\frac{a}{b}$ va $\frac{c}{d}$ kasrlarni qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish amallari quyidagi tengliklar bilan aniqlanadi:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}; \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}; \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Natural son bilan musbat to'g'ri kasrning yig'indisini «+» ishorasiz yozish qabul qilingan. Masalan,

$$45 + \frac{1}{2} = 45\frac{1}{2}, \quad 58 + \frac{3}{7} = 58\frac{3}{7} \quad \text{va hokazo.}$$



M a s h q l a r

2.34. Amallarni bajaring:

$$\text{a) } \frac{8}{45} + \frac{16}{45}; \quad \text{b) } \frac{17}{48} - \frac{7}{48}; \quad \text{d) } \frac{17}{35} + \frac{18}{35};$$

$$\begin{array}{lll}
\text{e)} \quad \frac{18}{69} + \frac{59}{69}; & \text{f)} \quad \frac{1112}{150} - \frac{338}{150}; & \text{g)} \quad \frac{17}{18} + \frac{13}{36}; \\
\text{h)} \quad \frac{32}{15} - \frac{17}{148}; & \text{i)} \quad \frac{15}{17} - \frac{7}{18}; & \text{j)} \quad \frac{37}{113} - \frac{9}{131}; \\
\text{k)} \quad \frac{1}{151} + \frac{9}{153}; & \text{l)} \quad \frac{8}{15} \cdot \frac{19}{151}; & \text{m)} \quad \frac{12}{121} \cdot \frac{11}{144}; \\
\text{n)} \quad \frac{9}{113} \cdot \frac{15}{101}; & \text{o)} \quad \frac{19}{38} : \frac{15}{49}; & \text{p)} \quad \frac{121}{49} : \frac{11}{7}.
\end{array}$$

2.35. Ifodaning qiymatini toping:

$$\begin{array}{ll}
\text{a)} \quad \left(45\frac{1}{2} - 2\frac{3}{8}\right) - \left(5\frac{5}{6} + 6\frac{3}{4}\right) + \left(10\frac{2}{3} - 5\frac{5}{8}\right); & \\
\text{b)} \quad \left(36\frac{4}{5} - 12\frac{3}{10}\right) - \left(4\frac{2}{15} + 1\frac{1}{30}\right) - \left(20\frac{11}{12} - 10\frac{3}{8} - \frac{3}{16} - 3\frac{1}{48}\right); & \\
\text{d)} \quad \left(12\frac{1}{2} - 3\frac{5}{6}\right) - \left(2\frac{8}{9} + 1\frac{4}{5}\right) - \left(5\frac{5}{8} - 4\frac{3}{4}\right) - \left(6\frac{9}{40} - 5\frac{11}{90}\right); & \\
\text{e)} \quad 56\frac{2}{21} - \left\{\left(1\frac{5}{6} + 2\frac{13}{14}\right) + \left[27\frac{13}{30} - \left(15\frac{5}{12} - 12\frac{13}{20}\right)\right]\right\}; & \\
\text{f)} \quad \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}; & \text{g)} \quad 3\frac{1}{3} \cdot 3\frac{13}{53} \cdot 3\frac{1}{88}; \\
\text{h)} \quad 5\frac{1}{4} : 1\frac{2}{7} : 5\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{22}; & \text{i)} \quad \left(1\frac{11}{24} + 1\frac{13}{56}\right) \cdot 9 : 1\frac{2}{5}; \\
\text{j)} \quad \frac{8\frac{1}{2}}{15 : \frac{5}{17}}; & \text{k)} \quad \frac{\frac{28}{29} : \frac{7}{29}}{\frac{7}{9} : \frac{1}{9}}; & \text{l)} \quad \frac{4\frac{4}{5} : \frac{4}{17}}{3\frac{2}{5}}; \\
\text{m)} \quad 8\frac{13}{16} \cdot \frac{47}{64} : 1\frac{1}{35} : 3\frac{1}{2}. &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{2.36. a)} \quad 2 : \frac{3}{5} + \frac{3}{5} : 2 + 1\frac{1}{2} : 6 + 6 : \frac{1}{2}; & \\
\text{b)} \quad 6\frac{1}{4} \cdot 8 - 3\frac{2}{3} \cdot 5\frac{1}{2} + 2\frac{2}{5} \cdot 4\frac{7}{12}; & \\
\text{d)} \quad 2\frac{1}{2} \cdot 48 - 3\frac{3}{8} : \frac{1}{18} + 5\frac{5}{12} : \frac{7}{36}; & \\
\text{e)} \quad 13\frac{1}{2} : 1\frac{1}{3} + 16\frac{1}{2} \cdot 1\frac{5}{11} + 19\frac{1}{4} : \frac{4}{25}. &
\end{array}$$

$$\text{2.37. a)} \quad \left(3\frac{1}{2} - 2\frac{2}{3} + 5\frac{5}{6} + 4\frac{3}{5}\right) \cdot 24;$$

$$\text{b)} \left(5\frac{5}{8} + 18\frac{1}{2} - 7\frac{5}{24} \right) : 16\frac{2}{3};$$

$$\text{d)} \left(12\frac{5}{12} + 1\frac{2}{3} - 3\frac{5}{6} + 2\frac{2}{3} \right) : \left(2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} - \frac{7}{9} \right);$$

$$\text{e)} 48\frac{3}{8} \cdot 6\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{12} - 2\frac{5}{6} + 1\frac{75}{94} \cdot \left(1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - 13 : 26 \right).$$

$$\mathbf{2.38.} \text{ a)} \left(\frac{5}{7} \cdot 2\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} - 1 \right) : \left(1 - \frac{7}{8} \cdot 1\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{14} \right);$$

$$\text{b)} \left(8\frac{7}{15} - 3\frac{3}{4} + 4\frac{2}{3} - 8\frac{7}{60} \right) : \left(4\frac{1}{4} - 2\frac{3}{4} \right);$$

$$\text{d)} \left(1\frac{8}{13} \cdot \frac{13}{42} + 5\frac{5}{7} : \frac{8}{21} \right) : \left(8\frac{1}{8} + 3\frac{1}{3} \right);$$

$$\text{e)} 2\frac{3}{5} : 6\frac{1}{15} + 1\frac{1}{14} - 1\frac{39}{73} \cdot \left(5\frac{5}{7} - 5\frac{5}{16} \right).$$

$$\mathbf{2.39.} \text{ a)} \frac{12\frac{4}{5} \cdot 3\frac{3}{4} - 4\frac{4}{11} \cdot 4\frac{1}{8}}{11\frac{2}{3} : 4\frac{4}{7}};$$

$$\text{b)} \frac{28\frac{4}{5} : 13\frac{5}{7} + 6\frac{3}{5} : \frac{2}{3}}{1\frac{11}{16} : 2\frac{1}{4}};$$

$$\text{d)} \frac{2\frac{3}{8} : \frac{3}{4} + 24\frac{7}{9}}{7\frac{1}{8} - 175\frac{4}{8} : 24};$$

$$\text{e)} \frac{\left(1\frac{1}{2} + 2\frac{2}{3} + 3\frac{3}{4} \right) \cdot 3\frac{3}{5}}{14 - 15\frac{1}{8} : 2\frac{1}{5}};$$

$$\text{f)} \frac{14\frac{4}{5} - 6\frac{11}{12} + 12\frac{3}{4} - 7\frac{2}{15}}{1\frac{11}{16} : 2\frac{1}{4}};$$

$$\text{g)} \frac{1\frac{9}{16} \cdot 3\frac{1}{5} + 16\frac{2}{3} - 9 : 2\frac{2}{5}}{17\frac{7}{12} - 6\frac{1}{3}} + \frac{12\frac{2}{3} - 61\frac{1}{2} : 6\frac{3}{4}}{2\frac{2}{3}}.$$

2. O‘nli kasrlar. Agar oddiy kasrning maxraji 10 ning biror natural ko‘rsatkichli darajasiga teng bo‘lsa, u holda bunday kasr o‘nli kasr deyiladi.

Masalan, $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{11}{100}$, $\frac{125}{1000}$ va hokazo kasrlar o‘nli kasrlardir. O‘nli kasrlarni maxrajsiz yozish qabul qilingan. Masalan, yuqoridagi kasrlarni mos ravishda 0,1; 0,2; 0,11; 0,125 ko‘rinishda yozish mumkin. Bunday o‘nli kasrlar *chekli o‘nli kasrlardir*.

Agar $\frac{a}{b}$ qisqarmas kasrning maxrajini $2^m \cdot 5^n$ ($m, n \in N_0$) ko'rinishda tasvirlash mumkin bo'lsa, u holda bu kasr chekli o'nli kasrga aylanadi.

Masalan,

$$\frac{3}{40} = \frac{3}{2^3 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{75}{10^3} = 0,075$$

yoki

$$\frac{8}{625} = \frac{8}{5^4} = \frac{7 \cdot 2^4}{5^4 \cdot 2^4} = \frac{112}{10^4} = 0,0112.$$

Agar $\frac{a}{b}$ qisqarmas kasr maxrajini $2^m \cdot 5^n$ ($m, n \in N_0$) ko'rinishda tasvirlash mumkin bo'lmasa, u holda $\frac{a}{b}$ kasr chekli o'nli kasrga aylanmaydi. Masalan, $\frac{4}{9}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{11}$ va $\frac{35}{44}$ kasrlarni chekli o'nli kasrlar ko'rinishida yozish mumkin emas. Oddiy kasrni o'nli kasrga aylantirish kasrning suratini uning maxrajiga bo'lish bilan ham bajarilishi mumkin. Bundan kelib chiqadiki, agar a va b lar o'zaro tub bo'lsa, a ni b ga bo'lish jarayoni b sonini $2^m \cdot 5^n$ ko'rinishida tasvirlash mumkin bo'lgan holdagina cheklidir.

Ta'rif. $\frac{m}{n}$ ko'rinishida yozish mumkin bo'lgan har qanday son ratsional son deb ataladi, bunda $m \in Z$ va $n \in N$. Ratsional sonlar to'plamini Q bilan belgilaymiz: $Q = \{a \mid a = \frac{m}{n}, m \in Z, n \in N\}$. Ratsional sonlar to'plami barcha butun va kasr sonlardan tashkil topgan bo'lib, uni manfiy ratsional sonlarning Q_- , faqat 0 dan iborat bir elementli $\{0\}$ va musbat ratsional sonlarning Q_+ to'plamlari birlashmasi (yig'indisi) ko'rinishda tasvirlash mumkin:

$$Q = Q_- \cup \{0\} \cup Q_+.$$

Har qanday ratsional sonni cheksiz o'nli kasr ko'rinishida yozish mumkin. $\frac{m}{n}$ sonini shunday yozish uchun m ni n ga «burchakli» bo'lish kerak. Masalan, 1 ni 3 ga bo'lib, 0,333 ... 3 ...

cheksiz oʻnli kasrni hosil qilamiz. Demak, $\frac{1}{3} = 0,333 \dots 3 \dots$. Shu kabi $\frac{1}{7} = 0,14857142857\dots$ va $\frac{8}{45} = 0,1777\dots$ boʻlishiga ishonch hosil qilamiz.

Bu misollarning har birida, biror joydan boshlab, biror raqami yoki raqamlari maʼlum bir tartibda takrorlanadigan cheksiz oʻnli kasr hosil boʻldi.

Agar cheksiz oʻnli kasrning biror joyidan boshlab, biror raqam yoki raqamlar guruhi maʼlum bir tartibda cheksiz takrorlansa, bunday oʻnli kasr *davriy oʻnli kasr* deyiladi. Takrorlanuvchi raqam yoki raqamlar guruhi shu kasrning *davri* deb ataladi.

Odatda, davriy oʻnli kasrning davri qavs ichiga olingan holda bir marta yoziladi: $0,666\dots = 0,(6)$; $0,131131131131\dots = 0,(131)$; $0,1777\dots 7\dots = 0,1(7)$.

Shunday qilib, har qanday oddiy kasr va demak, har qanday ratsional son *davriy oʻnli kasr* bilan ifodalanadi.



M a s h q l a r

Ifodaning qiymatini toping.

- 2.40.** a) $4,735 : 0,5 + 14,95 : 1,3 - 2,121 : 0,7$;
 b) $589,72 : 16 - 18,305 : 7 + 0,0567 : 4$;
 d) $3,006 - 0,3417 : 34 - 0,875 : 125$;
 e) $22,5 : 3,75 + 208,45 - 2,5 : 0,004$.

- 2.41.** a) $(0,1955 + 0,187) : 0,085$;
 b) $15,76267 : (100,6 + 42697)$;
 d) $(86,9 + 667,6) : (37,1 + 13,2)$;
 e) $(9,09 - 900252) \cdot (25,007 - 12,507)$.

- 2.42.** a) $(0,008 + 0,992) \cdot (5 \cdot 0,6 - 1,4)$;
 b) $(0,93 + 0,07) \cdot (0,93 - 0,805)$;
 d) $(50\,000 - 1\,397,3) : (20,4 + 33,603)$;
 e) $(2\,779,6 + 8\,024) : (1,98 + 2,02)$.

- 2.43.** a)
$$\frac{4,06 \cdot 0,0058 + 3,3044895 - (0,7584 : 2,37 + 0,0003 : 8)}{0,03625 \cdot 80 - 2,43};$$

$$b) \frac{2,045 \cdot 0,033 + 10,518395 - 0,464774 : 0,0562}{0,00309 : 0,0001 - 5,188};$$

$$d) \frac{57,24 \cdot 3,55 + 430,728}{2,7 \cdot 1,88 - 1,336} + \frac{127,18 \cdot 4,35 + 14,067}{18 + 2,1492 : 3,582};$$

$$e) 52 : \left(\frac{6 : (0,4 - 0,2)}{2,5 \cdot (0,8 + 1,2)} + \frac{(34,06 - 33,81) \cdot 4}{6,48 : (28,57 - 25,15)} \right) - 8.$$

2.44. Oddiy kasr maxrajini tub ko'paytuvchilarga ajratish bilan uni o'nli kasrga aylantiring:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{5}{16}, \frac{7}{25}, \frac{23}{25}, \frac{6}{125}, \frac{9}{40}, 11\frac{7}{80}, 4\frac{3}{200}, 7\frac{31}{500}.$$

2.45. Oddiy kasrni uning suratini maxrajiga bo'lish yordamida kasrni o'nli kasrga aylantiring:

$$a) \frac{9}{15}, \frac{18}{252}, \frac{11}{28}, \frac{39}{65}, \frac{30}{75}, \frac{6}{48}, 2\frac{3}{48}, 5\frac{192}{575}, 12\frac{177}{1500};$$

$$b) \frac{8}{5}, \frac{25}{16}, \frac{47}{32}, \frac{263}{250}, \frac{312}{125}, 1\frac{711}{625}, 5\frac{2541}{2000}, 4\frac{7359}{5000}, 3\frac{23}{25000}.$$

3. Davriy o'nli kasrlarni oddiy kasrlarga aylantirish. Chek-siz o'nli davriy kasrlarni 10, 100, 1000 va h.k. larga ko'paytirish amalini chekli o'nli kasrlardagi kabi vergulni ko'chirish bilan bajarish mumkin. Bundan foydalanib, har qanday davriy kasrni oddiy kasrga aylantirish mumkin.

Masalan, $x = 0,(348) = 0,348348348\dots$ davriy kasrni oddiy kasrga aylantiraylik. Davr uch raqamli bo'lganligi uchun kasrni 1000 ga ko'paytiramiz: $1000x = 348,348348\dots = 348 + x$. Bundan $999x = 348$ yoki $x = \frac{348}{999} = \frac{116}{333}$.

$0,00(348)$ o'nli kasr esa $0,(348)$ dan 100 marta kichik, shunga ko'ra $0,00(348) = \frac{348}{99\,900}$ bo'ladi. $0,96(348)$ kasrni esa $0,96 + 0,00(348)$ yig'indi ko'rinishida yozish mumkin, u holda

$$\frac{96}{100} + \frac{348}{99\,900} = \frac{96 \cdot 999 + 348}{99\,900} = \frac{96\,000 + 348 - 96}{99\,900} = \frac{96\,348 - 96}{99\,900}.$$

Davriy oʻnli kasrlarni oddiy kasrlarga aylantirishning umumiy qoidasini taʼriflaymiz.

Sof davriy kasr shunday oddiy kasrga tengki, uning surati davrdan, maxraji esa davrda nechta raqam boʻlsa, shuncha marta takrorlanadigan 9 raqami bilan ifodalanadigan sondan iborat.

$$\text{Masalan, } 0,(5) = \frac{5}{9}; \quad 0,(45) = \frac{45}{99}.$$

Aralash davriy kasr shunday oddiy kasrga tengki, uning surati ikkinchi davrgacha turgan son bilan birinchi davrgacha boʻlgan son ayirmasidan, maxraji esa davrda nechta raqam boʻlsa, shuncha marta takrorlangan 9 raqami va buning oxiriga vergul bilan birinchi davr orasida nechta raqam boʻlsa, shuncha marta yozilgan nollar bilan ifodalanadigan sondan iborat.

$$\text{Masalan, } 0,3(45) = \frac{345 - 3}{990} = \frac{342}{990} = \frac{171}{495}.$$



M a s h q l a r

2.46. Quyidagi sonlar berilgan:

$$\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \frac{1}{12}; \frac{3}{32}; \frac{4}{21}; \frac{5}{54}; \frac{11}{90}; 12\frac{7}{50}; \frac{3}{6}; \frac{15}{45}; \frac{9}{27};$$

- chekli oʻnli kasrga aylanadigan sonlar toʻplamini tuzing;
- cheksiz oʻnli kasrga aylanadigan sonlar toʻplamini tuzing.

2.47. Quyidagi sonlarni davriy oʻnli kasr koʻrinishida yozing:

$$1; 1,4; \frac{7}{8}; \frac{13}{26}; \frac{81}{243}; \frac{15}{43}; \frac{71}{16}; \frac{1}{25}; \frac{15}{39}; \frac{41}{43}; 19.$$

2.48. Davriy oʻnli kasrni oddiy kasrga aylantiring:

- | | | |
|--------------|--------------|------------------|
| a) 0,(3); | f) 13,0(48); | j) 2,(123); |
| b) 0,3(2); | g) 0,(4); | k) 2,333(45); |
| d) 0,71(23); | h) 0,(45); | l) 41,8519(504); |
| e) 11,(75); | i) 3,1(44); | m) 35,73(4845). |

2.49. Ifodaning qiymatini toping:

$$\text{a) } \frac{0,8333 \dots - 0,4(6)}{1\frac{5}{6}} \cdot \frac{1,125 + 1,75 - 0,41(6)}{0,59},$$

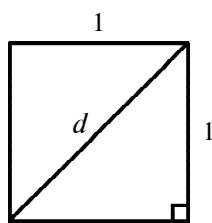
$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \frac{\left(\frac{5}{8} + 2,708333 \dots\right) : 2,5}{(1,3 + 0,7(6) + 0,(36)) \cdot \frac{110}{401}} \cdot \frac{1}{2}; \\ \text{d)} \quad & \frac{\left(2\frac{38}{45} - \frac{1}{15}\right) : 13\frac{8}{9} + 3\frac{3}{65} \cdot 0,(26)}{(18,5 - 13,777 \dots) \cdot \frac{1}{85}} \cdot 0,5; \\ \text{e)} \quad & \frac{\frac{3}{4} + 0,8(5) \cdot \frac{1}{2}}{9 : (0,9(23) - 0,7(9))} + \frac{41}{43}. \end{aligned}$$

3- §. Haqiqiy sonlar va ular ustida amallar

1. Irratsional sonlar. Qisqarmas kasr shaklida ifodalab bo'lmaydigan sonlar, ya'ni *irratsional sonlar* ham uchraydi.

1- misol. Tomoni 1 ga teng bo'lgan kvadratning d diagonalini hech qanday ratsional son bilan ifodalanmasligini isbot qilamiz (9- rasm).

I s b o t . Pifagor teoremasiga muvofiq $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Diagonalni $\frac{m}{n}$ qisqarmas kasr ko'rinishida yozish mumkin, deb faraz qilaylik. U holda $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ yoki $m^2 = 2n^2$. Bunga ko'ra m — juft son, $m = 2k$. Shuningdek, $(2k)^2 = 2n^2$ yoki $2k = n$, ya'ni n ham juft son. $\frac{m}{n}$ kasrning surat va maxraji 2 ga qisqarmoqda, bu esa qilingan farazga zid. Demak, d ning uzunligi, ya'ni $\sqrt{2}$ soni ratsional son emas.



9- rasm.

2- misol. $0,101001000100001000001\dots$ soni irratsional son ekanini isbotlang (birinchi birdan keyin bitta nol, ikkinchi birdan keyin ikkita nol va hokazo).

I s b o t . Berilgan kasr davriy va uning davri n ta raqamdan iborat deb faraz qilaylik (teskari faraz). $2n + 1$ -birni tanlaymiz. Bu birdan keyin $2n + 1$ ta ketma-ket nollar keladi:

$$\dots 1 \underbrace{00\dots 0}_{n \text{ ta}} \boxed{0} \underbrace{0\dots 00}_{n \text{ ta}} 1\dots$$

Shu o'rtada turgan 0 ni qaraymiz. Bu nol biror davrning yo boshida, yoki ichida, yoki oxirida keladi. Bu hollarning hammasida bu davr ajratilgan nollardan tuzilgan «kesma»da to'la joylashadi. Demak, davr faqat nollardan tuzilgan. Bunday bo'lishi esa sonning tuzilishiga zid. Demak, qilingan faraz noto'g'ri.

Barcha ratsional va irratsional sonlar birgalikda *haqiqiy sonlar* deyiladi.

Haqiqiy sonlar to'plami R orqali belgilanadi. Manfiy va musbat haqiqiy sonlar to'plamlarini mos ravishda R_- , R_+ lar bilan belgilab, $R = R_- \cup \{0\} \cup R_+$ tenglikka ega bo'lamiz.

Sonlarning ildiz ishorasi orqali yozilishi ularning kattaligini aniq bilishga yetarli emas. Masalan, hisoblashlarsiz $\sqrt{2}$ va $\sqrt[3]{3}$ lardan qaysi birining kattaligini aytish qiyin. Bu holda $\sqrt[3]{3} = 1,442\dots$, $\sqrt{2} = 1,4142\dots$ kabi *davriy bo'lmagan cheksiz o'nli kasr* ko'rinishdagi yozuv oydinlik kiritadi, lekin hisoblashlarni qiyinlashtiradi. Shunga ko'ra irratsional sonni unga yaqin ratsional son orqali taqribiy ifodalashga harakat qilinadi. Chunonchi:

1) α irratsional sonni undan kichik a_1 (quyi chegara) va undan katta a_2 (yuqori chegara) ratsional sonlar orqali $a_1 < \alpha < a_2$ ko'rinishda yozish. Bu holda vujudga keladigan xato $\varepsilon \leq |a_2 - a_1|$ dan oshmaydi. Masalan, $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$, $\varepsilon \leq |1,42 - 1,41| = 0,01$;

2) ba'zan α uchun $a = (a_2 + a_1)/2$ o'rta qiymat olinadi, $\alpha \approx a$. O'rta qiymatdagi *absolut xato* $\Delta a \leq (a_2 - a_1)/2$, irratsional son esa $\alpha \approx a \pm \Delta a$ ko'rinishda yoziladi. Masalan, $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ bo'lgani uchun

$$\sqrt{2} = \frac{1,42 + 1,41}{2} = 1,415, \quad \Delta = \frac{1,42 - 1,41}{2} = 0,005$$

Shunga ko'ra $\sqrt{2} \approx 1,415 \pm 0,005$. Sonni yaxlitlashdan vujudga keladigan haqiqiy xato qoldirilayotgan raqam xonasi 1 birligidan oshmaydi. $\sqrt{2} \approx 1,42$ taqribiy son xatosi $\varepsilon = 1,4142... - 1,42 = -0,0057 \approx -0,6 \cdot 10^{-2}$.

$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ bo'lganidan $\sqrt{2}$ ning $(1,41; 1,42)$ dan olinadigan qiymatlari to'plami *chegaralangandir*. Shu kabi, uzunligi C ga teng bo'lgan aylana ichiga chizilgan barcha qavariq n - burchaklarning $p = p_n$ perimetrlari C dan kichik, ya'ni $P = \{p \mid p = p_n, n = 3, 4, 5, \dots, p_n < C\}$ to'plam chegaralangan va son ko'rinishda beriladi.

3- misol. π soni kattami yoki $\sqrt{10}$ mi?

Yechish. Masala $\pi = 3,14159...$ va $\sqrt{10} = 3,16227...$ sonlarining mos xonalari raqamlarini (o'nli yaqinlashishlarini) taqqoslash orqali hal bo'ladi. Ularning butun qismlari va o'ndan birlar xonasi raqamlari bir xil, lekin 0,01 lar xonasi raqami $\sqrt{10}$ da katta. Demak, $\pi < \sqrt{10}$.

4- misol. $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ — irratsional son ekanligini isbotlang.

Isbot. $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ ratsional son deb faraz qilaylik, ya'ni

$$\sqrt{2} + \sqrt{5} = r, \quad r \in \mathbb{Q}. \quad \sqrt{5} = r - \sqrt{2} \Rightarrow 5 = r^2 - 2\sqrt{2}r + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 = r^2 - 2\sqrt{2}r \Rightarrow r^2 - 3 = 2\sqrt{2}r \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{r^2 - 3}{2r} \in \mathbb{Q};$$

lekin $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Zidlik hosil bo'ldi. Faraz noto'g'ri.

Demak, $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ irratsional son.



M a s h q l a r

2.50. Quyidagi sonlarning irratsional son ekanini isbot qiling:

- a) $\sqrt{3}$; b) $\sqrt{5}$; d) $\sqrt{7}$; e) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; f) $\sqrt[3]{2}$;
g) $\sqrt[3]{4}$; h) $\sqrt[3]{2,1}$.

- 2.51.** $5^r = 2$ tenglikni qanoatlantiruvchi hech qanday r ratsional soni mavjud emasligini isbot qiling.
- 2.52.** Agar biror a butun son boshqa hech qanday butun sonning kvadrati bo'lmasa, u hech qanday ratsional sonning kvadrati bo'lolmasligini isbot qiling.
- 2.53.** a) a va b sonlar ratsional sonlar;
 b) a va b sonlar irratsional sonlar;
 d) a ratsional son, b irratsional son bo'lsa, $a + b$ va $a \cdot b$ sonlarning ratsional yoki irratsional ekanligi haqida nima deyish mumkin?
- 2.54.** a) Agar p, q – butun sonlari uchun $p + q\sqrt{3} = 0$ bo'lsa, $p = q = 0$ bo'lishini isbotlang;
 b) agar p, q – butun sonlari uchun $p^2 - 9q^2 = 6q$ bo'lsa, $p = q = 0$ bo'lishini isbotlang;
 d) Agar p, q – butun sonlari uchun $p^2 - 4q^2 = 4pq$ bo'lsa, $p = q = 0$ bo'lishini isbotlang;
 e) a, b, c ratsional sonlari uchun $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0$ bo'lsa, $a = b = c = 0$ bo'lishini isbotlang.
- 2.55.** α, β lar irratsional sonlar, r esa ratsional son bo'lsin. Quyidagi sonlarning qaysilari ratsional son bo'lib qolishi mumkin:
 a) $\alpha + \beta$; b) $\alpha + r$; d) $\sqrt{\alpha}$; e) $\sqrt{r}$;
 f) $\alpha \cdot \beta$; g) $\sqrt{\alpha + r}$; h) $\sqrt{\alpha + \sqrt{r}}$?
- 2.56.** Ushbu sonlarning ratsional son emasligini isbot qiling:
 a) 0,81881888188881...;
 b) $-3,57557755577755557777...$.

2. Sonli to'plamlarni ajratuvchi son. X va Y sonli to'plamlar bo'sh bo'lmasin. Agar X ning $\forall x$ elementi Y ning $\forall y$ elementidan kichik bo'lsa, Y to'plam X to'plamdan o'ngda joylashgan bo'ladi, bunda $\forall$ – ixtiyoriylik belgisi. Agar $\forall x \in X$ va $\forall y \in Y$ elementlar uchun $x \leq c \leq y$ tengsizligi bajarilsa, c soni

shu to'plamlarni *ajratuvchi son* deyiladi. Bu holda Y to'plam c dan o'ngda joylashadi. Masalan, $X = \{3; 7\}$ va $Y = \{9; 12\}$ to'plamlarni $c = 8$ soni ajratadi va bunda Y to'plam c ning o'ng tomonida, X esa c ning chap tomonida joylashadi. Agar Y to'plam X to'plamdan o'ngda joylashsa, bu to'plamlarni ajratuvchi kamida bitta son mavjud bo'ladi.

Oliy matematika kursida quyidagi teorema isbot qilinadi.

T e o r e m a . *Natural sonlar to'plamida berilgan $Y = \{y_n\}$ to'plam $X = \{x_n\}$ to'plamdan o'ngda joylashgan, ya'ni $x_n < y_n$ bo'lsin. X va Y larni ajratuvchi faqat bitta c soni mavjud bo'lishi uchun $y_n - x_n$ ayirmalar har qancha kichik bo'la oladigan, ya'ni X va Y lar bir-birlariga har qancha yaqin joylasha oladigan bo'lishi zarur va yetarli.*

1- m i s o l . $(3; 5)$ va $(7; 9)$ oraliqlar $(5; 7)$ oraliqqa qarashli ixtiyoriy son bilan ajraladi. $(3; 5)$ va $(7; 9)$ oraliqlarning nuqtalaridan tuzilgan ixtiyoriy oraliq uzunligi $(5; 7)$ oraliq uzunligidan, ya'ni $7 - 5 = 2$ dan kichik bo'lolmaydi.

2- m i s o l . $[2; 5]$ va $[5; 8]$ kesmalar faqat 5 soni bilan ajraladi, chunki ixtiyoriy n natural son uchun $\left[5 - \frac{1}{n}; 5 + \frac{1}{n}\right]$ oraliq uzunligi $\frac{2}{n}$ ga teng. n ning yetarlicha katta qiymatlarida bu uzunlik har qancha kichik bo'ladi.



M a s h q l a r

2.57. X va Y to'plamlar juftlarini ajratuvchi barcha sonlarni toping:

a) $X = \{\text{«}R \text{ radiusli aylanaga ichki chizilgan qavariq ko'pburchaklar perimetrlari}\text{»}\}$, $Y = \{\text{«}Shu aylanaga tashqi chizilgan qavariq ko'pburchaklar perimetrlari}\text{»}\}$;

b) $X = \{\text{«}r < R \text{ radiusli aylanaga ichki chizilgan qavariq ko'pburchaklar perimetrlari}\text{»}\}$, $Y = \{\text{«}r < R \text{ radiusli aylanaga tashqi chizilgan qavariq ko'pburchaklar perimetrlari}\text{»}\}$;

d) $X = \left\{3 - \frac{1}{n} \mid n \in N\right\}$, $Y = \left\{3 + \frac{1}{n} \mid n \in N\right\}$;

e) $X = \left\{6 - \frac{10}{n} \mid n \in N\right\}$, $Y = \left\{6 + \frac{10}{n} \mid n \in N\right\}$.

3. Haqiqiy sonlar ustida arifmetik amallar. $\sqrt{2}$ sonining 10^{-n} gacha kami (quyi chegara) va ortig'i (yuqori chegara) bilan olingan bir necha yaqinlashishlarini kuzataylik: $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$, $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$, $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$. Kami bilan olingan o'nli yaqinlashishlar o'suvchi, ortig'i bilan olinganlari esa kamayuvchi ketma-ketlik tashkil etmoqda. Uning hadlaridan iborat ikki to'plamni yagona $\sqrt{2}$ soni ajratib turadi. Arifmetik amallarni bajarish va topilgan natijalarni baholashda sonlarning bu xususiyati e'tiborga olinadi.

Agar A , B va hokazo sonlar $a_n < A < a'_n$ kabi ko'rinishda berilgan bo'lsa, ular ustida amallarni bajarishda tengsizliklarning ma'lum xossalariidan foydalanamiz, bunda a_n va a'_n lar A ning 10^{-n} gacha kami va ortig'i bilan olingan o'nli yaqinlashishlari, $n \in \mathbb{N}$. Natija $x_n < X < x'_n$ qo'shtengsizlik yoki $X = x \pm \Delta x$, yoki $X \approx x$ ko'rinishida yoziladi. Bu yozuvlarning biridan ikkinchisiga o'tish mumkinligini bilamiz. Xususan, $x_n < X < x'_n$ bo'yicha X

ning $x = \frac{x_n + x'_n}{2}$ o'rtacha (taqribiy) qiymati va uning $\Delta x = \frac{x'_n - x_n}{2}$ chegaraviy (eng katta) absolut xatosini hisoblash orqali $X = x \pm \Delta x$ ga o'tish va aksincha, $X = x \pm \Delta x$ bo'yicha $x - \Delta x < X < x + \Delta x$ qo'shtengsizlikka o'tish mumkin. $X \approx x$ yozuvda x ning qanday aniqlikda berilganligi nazarga olinadi. Masalan, $\pi \approx 3,14$ soni $3,14 < \pi < 3,15$, $\pi \approx 3,145 \pm 0,005$ ko'rinishda yozilishi mumkin. Shuni esda tutish kerakki, taqribiy son quyi chegara qiymati faqat kami bilan, yuqori chegara qiymati esa ortig'i bilan yaxlitlanishi mumkin.

1) qo'shish:

$$\begin{array}{r} a_n < \alpha < a'_n \\ + \quad b_m < \beta < b'_m \\ \hline \dots\dots\dots \\ x < X < x' \end{array}$$

yoki qisqaroq

$$\begin{array}{c|c} + \quad a_n & a'_n \\ b_m & b'_m \\ \hline \dots & \dots \\ \hline x & x' \end{array}$$

Bunda $x = a_n + b_m + \dots$, $x' = a'_n + b'_m + \dots$.

α va β sonlarining $\alpha + \beta$ yig'indisi deb ularning kami bilan olingan ketma-ket o'suvchi α_n va β_n ($n \in N$) yaqinlashishlari yig'indilari A to'plami va ortig'i bilan olingan a'_n va b'_n ketma-ket kamayuvchi o'nli yaqinlashishlarining yig'indilari B to'plamini ajratuvchi $\alpha + \beta$ songa aytiladi: $a_n + b_n < \alpha + \beta < a'_n + b'_n$.

2- band (qisqacha b.) teoremasiga ko'ra A va B to'plamlarni ajratuvchi kamida bitta son mavjud. Lekin u yagona. Haqiqatan,

$$a'_n = a_n + \frac{1}{10^n}, \quad b'_n = b_n + \frac{1}{10^n}, \quad \varepsilon = (a'_n + b'_n) - (a_n + b_n) = \frac{2}{10}$$

bo'ladi va n ning katta qiymatlarida ε istalgancha kichrayadi.

2) qarama-qarshi ma'noda yozilgan α va β sonlarni ayirish:

$$\begin{array}{r} a_n < \alpha < a'_n \\ - \quad b'_n > \beta > b_n \\ \hline a_n - b'_n < \alpha - \beta < a'_n - b_n \end{array}$$

3) α va β musbat sonlarning $\alpha\beta$ ko'paytmasi deb, $a_n b_n$ ko'paytmalar A to'plami va $a'_n b'_n$ ko'paytmalarning B to'plamini ajratuvchi $\alpha\beta$ songa aytiladi, ya'ni $a_n b_n < \alpha\beta < a'_n b'_n$, $n \in N$.

4) α musbat haqiqiy songa *teskari* son deb, $a_n \neq 0$, $a'_n \neq 0$ bo'lganda $\frac{1}{a'_n}$ sonlarning A to'plami va $\frac{1}{a_n}$ sonlarning B to'plamini ajratuvchi $\frac{1}{\alpha}$ songa aytiladi: $\frac{1}{a'_n} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{a_n}$. Bunday son mavjud va yagona. Haqiqatan, $0 < \alpha_n < \alpha'_n$, bundan $\frac{1}{a'_n} < \frac{1}{\alpha_n}$, bu esa B to'plamning A to'plamdan o'ngda joylashganligini bildiradi.

Demak, A va B ni ajratuvchi son mavjud. U yagona hamdir.

Haqiqatan, $a'_n = a_n + \frac{1}{10}$, $0 < a_n < a'_n$ ekanidan $\frac{1}{a'_n} - \frac{1}{a_n} =$

$$= \frac{a_n - a_n}{a_n a_n} = \frac{1}{10^n a_n a_n} < \frac{1}{10^n a_1^2} \text{ bo'ladi va } n \text{ kattalashgan sari kasr kich-}$$

rayadi. Demak, $\frac{1}{\alpha}$ – yagona ajratuvchi son.

5) α ni $\beta \neq 0$ ga bo'lishdan hosil bo'ladigan *bo'linma* deb, $\alpha \frac{1}{\beta}$ ko'paytmaga aytiladi, ya'ni $a_n \cdot \frac{1}{b'_n} < \frac{\alpha}{\beta} < a'_n \cdot \frac{1}{b_n}$.

$\alpha = a \pm \Delta a$ ko'rinishdagi sonlar ustida amal ikki usulda bajariladi:

1- u s u l: sonlar qo'shtengsizlik ko'rinishda qaytadan yoziladi, so'ng amal bajariladi.

2- u s u l: oldin amal $a, b, \dots$ taqribiy qiymatlar ustida bajarilib, x , so'ng alohida formulalar bo'yicha Δx xato qiymati topiladi:

1) yig'indi xatosi: $\Delta(a+b) = \Delta a + \Delta b$, chunki $\alpha + \beta = (a \pm \Delta a) + (b \pm \Delta b) = (a+b) \pm (\Delta a + \Delta b)$;

2) ayirma xatosi: $\Delta(a-b) = \Delta a + \Delta b$, chunki $\alpha - \beta = (a \pm \Delta a) - (b \pm \Delta b) = (a-b) \pm (\Delta a + \Delta b)$;

3) ko'paytma xatosi: $\Delta(ab) \approx b\Delta a + a\Delta b$, chunki $\alpha\beta = (a \pm \Delta a)(b \pm \Delta b) = ab \pm (b\Delta a + a\Delta b)$, bunda nisbatan kichik bo'lganligidan $\Delta a\Delta b$ ko'paytma tashlab yuboriladi. Xususan,

$$\Delta(a^n) = na^{n-1} \cdot \Delta a \text{ va } \Delta\left(\sqrt[n]{a^m}\right) = \frac{m}{n} \cdot a^{\frac{m}{n}-1} \cdot \Delta a;$$

4) bo'linmadagi xato $\Delta\left(\frac{a}{b}\right) \approx \frac{b \cdot \Delta a + a \cdot \Delta b}{b^2}$ (mustaqil isbot qiling!).

Agar α taqribiy sonning ε chetlanishi (xatosi) shu sonning biror xonasi 1 birligidan katta bo'lmasa, shu xonada turgan raqam va undan chapda joylashgan barcha raqamlar *ishonchli raqamlar*, o'ng tomonda turgan raqamlar esa *ishonchsiz raqamlar* deyiladi. Ishonchsiz raqamlar yaxlitlab tashlanadi va ular o'rniga 0 lar yoziladi. Son $\alpha \approx a$ ko'rinishida yoziladi. Masalan, $\alpha \approx 28,8569 \pm$

$\pm 0,01$ sonida 28,85 ishonchli raqamlardan iborat, 5, 6, 9 lar esa ishonchsizdir. Shunga ko'ra $\alpha \approx 28,86$.

Ratsional sonlar ustida bajariladigan arifmetik amallarning barcha xossalari haqiqiy sonlar holida ham o'z kuchida qoladi. Ularni eslatib o'tamiz:

$$\begin{array}{lll} 1) \alpha + \beta = \beta + \alpha; & 2) \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma; & 3) \alpha + 0 = \alpha; \\ 4) \alpha + (-\alpha) = 0; & 5) \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma. \end{array}$$

$$\text{Shu kabi: } 1') \alpha\beta = \beta\alpha; \quad 2') \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma; \quad 3') \alpha \cdot 1 = \alpha;$$

$$4') \frac{\alpha}{\alpha} = 1, \quad \alpha \neq 0.$$

1- m i s o l . Kuchlanishi 215 ± 15 V bo'lgan elektr tarmog'iga tok kuchi 5 A dan oshmaslik sharti bilan $44 \pm 0,5 \, \Omega$ qarshilikni ulash mumkinmi?

$$\text{Y e c h i s h . } I = \frac{U}{R} = \frac{215 \pm 15}{44 \pm 0,5} = \dots = 4,896\dots \pm 0,293\dots \approx$$

$\approx 4,89 \pm 0,30$ A yoki $4,59 < I < 5,2$ A , ya'ni I ning yuqori chegara qiymati 5 A dan oshmoqda, demak, ulash mumkin emas.

2- m i s o l . ABC uchburchak tomonlari: $AB = \sqrt{58}$, $BC = \sqrt{85}$, $AC = 9$, uning p perimetrini 0,01 aniqlikda topamiz.

Y e c h i s h . 1- u s u l . Qo'shiluvchilarning aniq qiymatini 0,001 gacha aniqlik bilan olamiz va natijani 0,01 gacha aniqlikda yaxlitlaymiz:

$$\begin{aligned} p &= AB + BC + AC = \sqrt{58} + \sqrt{85} + 9 \approx \\ &\approx 7,615 + 9,219 + 9 = 25,834 \approx 25,83. \end{aligned}$$

2- u s u l . Qo'shtengsizliklar usuli. Sonlarni quyi va yuqori chegara qiymatlari bo'yicha yozamiz va amalni bajaramiz:

$$\begin{array}{r} 7,61 < \sqrt{58} < 7,62 \\ + \quad 9,21 < \sqrt{85} < 9,22 \\ \hline 9 \quad \quad 9 \quad \quad 9 \\ 25,82 < p < 25,84. \end{array}$$

3- u s u l . Δ absolut xato (yoki nisbiy xato) kattaligini ham hisoblash:

$p = AB + BC + AC = (7,612 \pm 0,005) + (9,220 \pm 0,001) + 9 =$
 $= 25,832 \pm 0,006 \approx 25,83 \pm 0,01$. Agar 2- usul natijalari bo'yicha
o'rtacha qiymatlar topilishi talab qilinsa, u holda:

$$p = \frac{25,84 + 25,82}{2} = 25,83, \quad \Delta p = \frac{25,84 - 25,82}{2} = 0,01,$$

$$p \approx 25,83 \pm 0,01.$$

3- m i s o l . Qadimgi Samarqand madrasalari darsliklarida
 $\pi \approx \frac{22}{7}$ taqribiy son uchraydi. Undagi xato kattaligini baholaylik.

Y e c h i s h . $\varepsilon = \left| \pi - \frac{22}{7} \right| = |3,1415 \dots - 3,1428 \dots| = 0,0013 \dots$
 $\dots < 0,002$.

4- m i s o l . $\alpha \approx 3,2 \pm 0,08$ berilgan. $\sqrt[3]{\alpha^2}$ ni hisoblaymiz.

Y e c h i s h . 1) $\sqrt[3]{3,2^2} = \sqrt[3]{10,24} \approx 2,172$;

$$2) \Delta = \frac{2}{3} \cdot \frac{0,08}{\frac{1}{3,2^3}} \approx 0,04.$$

J a v o b : $2,17 \pm 0,04$.



M a s h q l a r

- 2.58.** $a = \sqrt{3,87}$, $b = \sqrt{3,86}$ bo'lsa, $a + b$, $a - b$, ab , $\frac{a}{b}$ larni
0,01 gacha aniqlikda toping. Ayirmada aniqlikning yo'qolishiga
sabab nima?
- 2.59.** Hajmi $710 < V < 720$ (sm³), zichligi $8,4 < \rho < 8,7$ (kg/m³)
bo'lgan moddaning massasini toping.
- 2.60.** Kubning qirrasini $12,8 < a < 12,9$ (sm). Uning to'liq sirti va
hajmini toping. Javobni qo'shtengsizliklar va taqriban 0,1
gacha aniqlikda yozing.
- 2.61.** Kubning hajmi $1\,450 < V < 1\,460$ (sm³). Uning qirrasini
toping.
- 2.62.** Haqiqiy sonlar quyidagi xossalarga ega ekanligini isbot qiling:
a) agar $b - a > 0$ bo'lsa va faqat shu holdagina $a < b$ bo'ladi;

- b) hech qanday a soni uchun $a < a$ tengsizligi bajarilmaydi;
- d) agar $a < b$ va $b < c$ bo'lsa, $a < c$ bo'ladi;
- e) ixtiyoriy ikkita a va b sonlari uchun $a = b$, $a < b$, $a > b$ munosabatlardan faqat biri bajariladi;
- f) agar $a < b$ bo'lsa, $a + c < b + c$ bo'ladi; agar $a < b$ va $c < d$ bo'lsa, $a + c < b + d$ bo'ladi;
- g) agar $a < b$ va $c > 0$ bo'lsa, $ac < bc$ bo'ladi; agar $a < b$ va $c < 0$ bo'lsa, $ac > bc$ bo'ladi;
- h) agar $0 < a < b$ va $0 < c < d$ bo'lsa, $ac < bd$ bo'ladi;
- i) agar $a < b$ bo'lsa, $-a > -b$ bo'ladi;
- j) agar $0 < a < b$ bo'lsa, $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ bo'ladi.

2.63. Ko'p bosqichli raketa birinchi bosqich dvigatelining tortish kuchi $10^6 \pm 10^4$ N ga teng. Shu bosqich ishining oxirida raketa 3000 ± 15 m/s tezlik bilan uchayotgan bo'lsin. O'sha onda dvigatel qanday quvvatga ega bo'lgan? Javobni mln. kW larda bering.

4. Haqiqiy sonning moduli. a haqiqiy sonning moduli deb,

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{agar } a \geq 0 \text{ bo'lsa,} \\ -a, & \text{agar } a < 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

munosbat bilan aniqlanadigan $|a|$ soniga aytiladi. Uning asosiy xossalari keltiramiz:

- 1) $\alpha \leq |\alpha|$; 2) $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$; 3) $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$;
- 4) $\left|\frac{1}{\alpha}\right| = \frac{1}{|\alpha|}$; 5) $|\alpha - \beta| \geq |\alpha| - |\beta|$.

1- xossaning to'g'riligi modulning ta'rifidan kelib chiqadi.

2- xossani isbot qilamiz:

$$\begin{aligned} \alpha \leq |\alpha|, \beta \leq |\beta| &\Rightarrow |\alpha + \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \leq \\ &\leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \Rightarrow |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|. \end{aligned}$$

Tenglik belgisi $\alpha\beta \geq 0$ bo'lgandagina o'rinlidir.



M a s h q l a r

2.64. Haqiqiy son a ning moduli nomanfiy son ekanini isbotlang.

2.65. Taqqoslang:

- | | |
|---|--------------------------|
| a) $ 8,7 $ va 8 ; | f) $- -3,2 $ va $-3,2$; |
| b) $ 0 $ va 0 ; | g) $ a $ va 0 ; |
| d) $ -15,2 $ va $15,2$; | h) $-5 a $ va 0 ; |
| e) $ -6\frac{3}{4} $ va $-6\frac{3}{4}$; | i) $ a $ va a . |

2.66. Harflarning ko'rsatilgan qiymatlarida ifodaning qiymatini hisoblang:

- a) $|a| + 2|b|$, $a = -3$, $b = 5$;
- b) $|-a| - 2|b|$, $a = -1$, $b = -2$;
- d) $\frac{-1 - |-3a| + 4|b|}{2|a| + |b|}$, $a = -4$, $b = 0$;
- e) $\frac{4 - |a| + 2|b+1|}{|-a| \cdot |b+3| \cdot |b+1|}$, $a = 2$, $b = -4$;
- f) $(-|-a|)^3 + 2|-b|^3$, $a = 1$, $b = 2$.

2.67. Agar a) $|a| = b$, b) $|a| = -b$ bo'lsa, b soni haqida nima deyish mumkin?

2.68. Agar a) $|a| = |b|$, b) $|a| = a$, d) $|b| = -b$ bo'lsa, a va b sonlari haqida nima deyish mumkin?

2.69. Modulning quyidagi xossalarini isbotlang:

- | | |
|-----------------------------|---------------------------------|
| a) $a \leq a $; | f) $ a + b \leq a + b $; |
| b) $-a \leq a $; | g) $ a - b \leq a + b $; |
| d) $ -a = a $; | h) $ a + b \geq a - b $; |
| e) $- a \leq a \leq a $; | i) $ a - b \geq a - b $. |

2.70. Tenglikni isbotlang:

a) $|a \cdot b| \leq |a| \cdot |b|$; d) $|a^2| = |a|^2 = a^2$;
b) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} (b \neq 0)$; e) $|a^{2n}| = |a|^{2n} = a^{2n}, n \in N$.

2.71. Ifodani modul belgisisiz yozing:

a) $|x - 2|$; f) $|3x + 7|$; j) $a + |a|$;
b) $|x + 2|$; g) $|-3x + 7|$; k) $2x + |a - 1|$;
d) $|-x + 3|$; h) $|-3x - 9|$; l) $3|xy| + a$;
e) $|-x - 4|$; i) $|4x|$; m) $2|x - y| + y$.

2.72. Ifodani modul belgisisiz yozing:

a) $|x + 1| + |x - 1|$; f) $|4x - 8| + |x - 2| + |x|$;
b) $|x - 1| - 2|x + 2|$; g) $|7x - 5| + |2x - 1| + |x - 2|$;
d) $|2x - 1| - |x - 2|$; h) $|7x + 5| - |3x - 2| + |x - 3|$;
e) $|3x - 7| + |4x - 5|$; i) $|3x - 6| + |8x - 4| - |13x - 20|$.

2.73. Ifodani modul belgisisiz yozing:

a) $||x| - 2|$; f) $||6x - 1| - |4x + 1||$;
b) $||x - 3| - x|$; g) $||x - 3| - |x|| - |x - 1|$;
d) $|x - 3 - |x||$; h) $|x^2 - |x|^2 + |x| - |x - 3||$;
e) $||x - 3| - |x||$; i) $||3x - 1| - |x|| - |x - 2|$.

2.74. a, b, c, d haqiqiy sonlar bir vaqtda nolga teng emasligini modul belgisidan foydalanib qanday yozish mumkin?

2.75. a, b, c sonlaridan kamida ikkitasi o'zaro teng emasligini modul belgisi yordamida qanday yozish mumkin?

2.76. a, b, c lar o'zaro teng ekanini modul qatnashgan tengsizlik bilan ifodalang.

5. Haqiqiy sonning butun va kasr qismi. a sonining *butun qismi* deb, a dan katta bo'lmagan butun sonlarning eng kattasiga aytiladi va $[a]$ yoki $E(a)$ orqali belgilanadi. O'qilishi: « a ning butun qismi» yoki «*antye a* » (fransuzcha *entiere* – butun).

1- misol. $[3,2]=[3,8]=3$; $[0,2]=[0,99]=[0]=0$; $[-1,2]=[-1,5]=-2$; shu kabi $10\frac{4}{5}+5\frac{2}{5}=16\frac{1}{5}$ bo'lgani uchun $[10\frac{4}{5}+5\frac{2}{5}]=[16\frac{1}{5}]=16$; $28\cdot[0,7]=28\cdot 0=0$; $8:[2\frac{4}{5}]=4$; $[\pi]=3$; $[-\pi]=-4$.

Sonning butun qismi quyidagi xossalarga ega:

1- x o s s a. $a, b \in Z$ bo'lganda, $[a+b]=[a]+[b]$ bo'ladi.

2- x o s s a. $a, b \in R$ bo'lganda, $[a+b] \geq [a]+[b]$ bo'ladi.
 $[9+10]=[9]+[10]=19$; $[9,8]+[9,9]=9+9=18$. $[9,8+9,9]=[19,7]=19$. $18 < 19$.

$a-[a]$ ayirma a sonining *kasr qismi* deyiladi va $\{a\}$ orqali belgilanadi: $\{a\}=a-[a]>0$, $0 \leq \{a\} < 1$, bunda $a=[a]+\{a\}$.

2- misol. $\{16\frac{1}{5}\}=\frac{1}{5}$, $\{-1,5\}=\{-2+0,5\}=0,5$; $\{\pi\}=0,14\dots$

3- misol. Agar $[a]=[b]$ bo'lsa, $-1 < a-b < 1$ bo'lishini isbot qilamiz.

I s b o t. $a=[a]+\{a\}$ va $b=[b]+\{b\}$ bo'lganidan $a-b=([a]+\{a\})-([b]+\{b\})=([a]-[b])+(\{a\}-\{b\})=\{a\}-\{b\}$. Lekin $0 \leq \{a\} < 1$, $0 \leq \{b\} < 1$.

Shunga ko'ra (va qarama-qarshi ma'nodagi tengsizliklarni hadlab ayirish mumkinligiga asoslansak):

$$\begin{array}{r} 0 \leq \{a\} < 1 \\ - \\ 1 > \{b\} \geq 0 \\ \hline -1 \leq \{a\} - \{b\} < 1. \end{array}$$

4- m i s o l. Agar a soni butun va nomanfiy bo'lsa, $[na] \geq n[a]$ bo'lishini isbotlang.

I s b o t. $[na] = [n([a] + \{a\})] = n[a] + n\{a\}$, bunda $n\{a\} \geq 0$.

Demak, $[na] \geq n[a]$.

5- m i s o l. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2001$ ko'paytma nechta nol bilan tugaydi?

Y e c h i s h. Berilgan ko'paytmaning kanonik shakli $2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot p^{\alpha_n}$ bo'lsin. α_1 va α_3 natural sonlarni topamiz.

α_3 soni 1 dan 2001 gacha bo'lgan natural sonlar orasidagi 5, 25, 125, 625 sonlariga bo'linuvchi barcha natural sonlarning soniga teng:

$$\alpha_3 = \left[\frac{2001}{5} \right] + \left[\frac{2001}{25} \right] + \left[\frac{2001}{125} \right] + \left[\frac{2001}{625} \right] = 400 + 80 + 16 + 3 = 499.$$

Xuddi shu kabi

$$\alpha_1 = \left[\frac{2001}{2} \right] + \left[\frac{2001}{4} \right] + \left[\frac{2001}{16} \right] + \dots + \left[\frac{2001}{1024} \right] = 1880$$

ekanini aniqlaymiz.

$2^{1880} \cdot 5^{499}$ ko'paytma 499 ta nol bilan tugagani sababli, berilgan ko'paytma ham 499 ta nol bilan tugaydi.

6- m i s o l. $\left[\frac{x-1}{3} \right] = x$ tenglamani yechamiz.

Y e c h i s h. Tushunarliki, $x \in Z$ va $x \leq \frac{x-1}{3} < x+1$ bo'lishi zarur. $x \leq \frac{x-1}{3} < x+1$ tengsizlik $x = -1$ dan iborat yagona butun yechimga ega va bu yechim berilgan tenglamani qanoatlantiradi. Shunday qilib, berilgan tenglama $x = -1$ dan iborat yagona yechimga ega.



M a s h q l a r

2.77. Hisoblang:

a) $[2, 8]$; b) $[2]$; d) $[0]$; e) $[0, 9]$; f) $[-1, 5]$;

g) $[-0,2]$; h) $[\pi]$; i) $[-\pi]$; j) $[\sqrt{15}]$; k) $\left[\frac{100}{7}\right]$.

2.78. Hisoblang:

a) $100 \cdot \left[\frac{1}{7}\right]$; f) $8 \cdot \left[3\frac{2}{3}\right]$;

b) $\left[12\frac{2}{7} + 5\frac{3}{7}\right]$; g) $\left[\frac{100}{7}\right] \cdot 7$;

d) $\left[12\frac{2}{7} + 5\frac{6}{7}\right]$; h) $\left[\frac{100}{7^2}\right] \cdot 7$;

e) $\left[12\frac{2}{7}\right] + \left[5\frac{6}{7}\right]$; i) $\left[\frac{490}{100}\right]^2$.

2.79. Tenglamani yeching:

a) $\left[\frac{3x-1}{4}\right] = 5$; d) $[2x + 4] = -5$;

b) $\left[\frac{3x}{4} - 1\right] = 15$; e) $[3x - 1] = -4$.

2.80. Tenglamani yeching:

a) $\left[\frac{x-1}{2}\right] = x$; d) $\left[\frac{2x-1}{3}\right] = 2x$;

b) $\left[\frac{3x+1}{2}\right] = -x$; e) $[3x + 1] = \frac{x}{4}$.

2.81. 1, 2, 3, ..., n natural sonlar ketma-ketligida p natural songa bo'linuvchi $\left[\frac{n}{p}\right]$ ta had bo'ladi. Isbot qiling.

2.82. $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ bo'lsa, $600!$ soni nechta nol bilan tugaydi?

2.83. $600!$ yoyilmasida har qaysi 2, 5, 7 tub soni va ularning darajalariga bo'linuvchilarning umumiy soni topilsin.

2.84*. $n!$ soni tub ko'paytuvchilari yoyilmasida p tub soni

$$x = \left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \left[\frac{n}{p^3} \right] + \dots + \left[\frac{n}{p^m} \right] \text{ marta qatnashadi, bunda}$$

$p^m < n < p^{m+1}$. Shuni isbot qiling.

6. Proporsiya. $a \in R, b \in R \setminus \{0\}$ bo'lsa, $\frac{a}{b}$ ifoda *nisbat* deyiladi.

Ikki nisbatning tengligi *proporsiya* deyiladi. Proporsiya umumiy holda

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (1)$$

ko'rinishda yoziladi, bunda $b \neq 0, d \neq 0$. a, d lar proporsiyaning *chetki* hadlari, b, c lar esa *o'rta* hadlari deyiladi.

Proporsiya quyidagi xossalarga ega:

1. $ad = bc$;

$$2. \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, & \frac{d}{c} = \frac{b}{a}; \\ \frac{d}{b} = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

$$3. \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{am}{b} = \frac{cm}{d}; \\ \frac{a}{bn} = \frac{c}{dn}, \end{cases} \quad m, n \neq 0.$$

(1) proporsiyadan hosilaviy proporsiyalar deb ataluvchi quyidagi proporsiyalarni hosil qilish mumkin.

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \quad (2); \quad \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} \quad (3);$$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \quad (4); \quad \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c} \quad (5);$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \quad (6).$$

I s b o t. (2) ni isbotlaymiz $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$. Bu esa (2) proporsiyadan iborat.

Misol. $\frac{3+x}{3-x} = \frac{5}{6}$, $x = ?$

(6) dan foydalansak, $\frac{3+x+3-x}{3+x-3-x} = \frac{5+6}{5-6}$, $\frac{6}{2x} = \frac{11}{-1}$;
 $x = -\frac{3}{11}$.



M a s h q l a r

2.85. Quyidagi nisbatlardan proporsiya tuzish mumkinmi:

- a) $42 : 14$ va $72 : 24$; d) $3,5 : 21$ va $2\frac{1}{4} : 13\frac{1}{2}$;
b) $78 : 13$ va $60 : 12$; e) $0,1 : 0,02$ va $4 : 0,8$?

2.86. Proporsiyaning noma'lum hadini toping.

- a) $x : 12 = 4\frac{3}{4} : 7\frac{1}{8}$; f) $13\frac{1}{2} : 0,4 = x : 1\frac{1}{7}$;
b) $x : 1\frac{1}{7} = 1\frac{3}{15} : 1\frac{1}{3}$; g) $10,4 : 3\frac{5}{7} = x : \frac{5}{11}$;
d) $6\frac{1}{2} : x = 6\frac{5}{6} : 4,1$; h) $15,6 : 2,88 = 2,6 : x$;
e) $0,38 : x = 4\frac{3}{4} : 1\frac{7}{8}$; i) $1,25 : 1,4 = 0,75 : x$.

2.87. Proporsiyadan x ni toping:

- a) $7x : 42 = 45 : 27$; h) $4x : 31 = 44 : 11$;
b) $84 : 6x = 28 : 14$; i) $85 : 17x = 105 : 84$;
d) $21 : 7 = 2\frac{1}{2} : x$; j) $\frac{1}{6} : 2\frac{1}{3} = 3\frac{1}{4}x : 13$;
e) $13\frac{1}{3} : 1\frac{1}{3} = 26 : 0,2x$; k) $3,3 : 7\frac{1}{3}x = 4\frac{2}{7} : 1\frac{3}{7}$;
f) $3\frac{1}{3}x : 1,5 = 4\frac{2}{7} : \frac{3}{14}$; l) $3\frac{7}{19} : 1\frac{1}{2} = 2\frac{3}{8} : 0,8x$;
g) $11\frac{1}{3} : 1\frac{8}{9} = 5\frac{1}{3}x : \frac{5}{8}$; m) $6\frac{2}{3} : 1\frac{7}{9}x = 0,48 : 1,2$.

2.88. Quyidagi tengliklar yordamida proporsiyalar tuzing:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad 15 \cdot 42 = 35 \cdot 18; & \text{d)} \quad 2,5 \cdot 0,018 = 0,15 \cdot 0,3; \\ \text{b)} \quad 54 \cdot 55 = 66 \cdot 45; & \text{e)} \quad 2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{2}{7} = \frac{5}{7} \cdot 4\frac{1}{2}. \end{array}$$

2.89. Proporsiyadan x ni toping:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad \frac{(4 - 3,5(2\frac{1}{7} - 1\frac{1}{5})) \cdot 0,16}{x} = \frac{3\frac{2}{7} - \frac{3}{14} \cdot \frac{1}{6}}{41\frac{23}{84} - 40\frac{49}{60}}; \\ \text{b)} \quad \frac{1,2 \cdot 0,375 - 0,2}{6\frac{4}{25} \cdot 15\frac{2}{5} + 0,8} = \frac{0,016 \cdot 0,12 + 0,7}{x}; \\ \text{d)} \quad \frac{0,125x}{(\frac{19}{24} - \frac{21}{40}) \cdot 8\frac{7}{16}} = \frac{(1\frac{28}{63} - \frac{17}{21}) \cdot 0,7}{0,675 \cdot 2,4 - 0,02}; \\ \text{e)} \quad \frac{x}{10,5 \cdot 0,24 - 15,15 \cdot 7,5} = \frac{9 \cdot (1\frac{11}{20} - 0,945 \cdot 0,9)}{1\frac{3}{40} - 4\frac{3}{8} \cdot 7}. \end{array}$$

7. Protsent (foiz)lar. Turmushda ko‘p ishlatiladigan $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ kasr sonlarning maxsus nomlari mavjud. $\frac{1}{2}$ —yarim, $\frac{1}{4}$ — chorak, $\frac{1}{8}$ — yarim chorak. Xuddi shunday kasrlardan biri $\frac{1}{100}$ dir.

Berilgan sonning bir protsenti (foizi) deb, uning yuzdan bir qismiga aytiladi va % bilan belgilanadi.

Masalan, p sonning 1% i $\frac{p}{100}$ kasrni bildiradi.

Demak, $1\% = \frac{1}{100}$, $15\% = \frac{15}{100}$, $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.

Sonning $\frac{1}{1000}$ qismiga «promille» deyiladi va ‰ bilan belgilanadi. 2000 ning 5‰ si $\frac{2000}{1000} \cdot 5 = 10$, $1\% = 10\text{‰}$.

Protsentlarga doir 4 xil masala uchraydi:

- 1) sonning protsentini topish;
- 2) protsentiga ko'ra sonni topish;
- 3) ikki sonning protsent nisbatini topish;
- 4) murakkab protsentga doir masalalar.

1- m a s a l a. a sonining p % i bo'lgan x sonini toping.

$$p\% = \frac{p}{100}, \quad x = \frac{ap}{100}.$$

Masalan, 340 ning 15% i quyidagicha topiladi:

$$x = \frac{340 \cdot 15}{100} = \frac{102}{2} = 51.$$

2- m a s a l a. Sonning p % i P ga teng. Shu sonni toping.

$$\frac{p}{100} \text{ bo'lagi } P \text{ ga teng bo'lgan } x \text{ son } x = \frac{P \cdot 100}{p} \text{ dir.}$$

$$\text{Sonning } 60 \% \text{ i } 24 \text{ bo'lsa, sonning o'zi } x = \frac{24 \cdot 100}{60} = 40.$$

3- m a s a l a. m soni a sonining necha protsentini tashkil etadi. Bu yerda m sonining a soniga nisbatini protsentlarda ifoda qilish kerak: $x = \frac{m}{a} \cdot 100$.

Akademik litseyda 600 nafar o'quvchi bo'lib, 120 nafari qizlar. Qizlar akademik litsey o'quvchilarining necha protsentini tashkil etadi?

$$x = \frac{120 \cdot 100}{600} = 20\%.$$

4- m a s a l a. Xalq banki mijozlarga p % foyda beradi. Mijoz xalq bankiga a so'm pul topshirsa, n yildan so'ng necha so'mga ega bo'ladi?

Y e c h i s h . Xalq bankiga a so'm qo'ygan mijoz 1 yildan so'ng

$$N_1 = a + \frac{a}{100} \cdot p = a(1 + \frac{p}{100})$$

soʻmga, 2 yildan soʻng

$$N_2 = N_1 + \frac{N_1}{100} \cdot p = a(1 + \frac{p}{100})^2$$

soʻmga, 3 yildan soʻng

$$N_3 = N_2 + \frac{N_2}{100} \cdot p = a(1 + \frac{p}{100})^3$$

soʻmga ega boʻladi.

Shu jarayonni davom ettirib, mijoz n yildan soʻng

$$N_n = a(1 + \frac{p}{100})^n \quad (1)$$

soʻmga ega boʻlishiga ishonch hosil qilamiz. (1) tenglik odatda *murakkab protsentlar formulasi* deb ataladi.



M a s h q l a r

2.90. Kasr koʻrinishida ifodalang:

- | | | |
|-----------|-----------------------|-------------------------|
| a) 7%; | f) 6,8%; | j) $1\frac{1}{4}\%$; |
| b) 0,75%; | g) 0,48%; | k) $4\frac{3}{7}\%$; |
| d) 255%; | h) 29%; | l) $225\frac{3}{4}\%$; |
| e) 300%; | i) $4\frac{3}{7}\%$; | m) 0,099%. |

2.91. Protsentlarda ifodalang:

- | | | |
|----------|----------------------|-----------------------|
| a) 0,5; | f) $4\frac{3}{7}$; | j) 15,2; |
| b) 2,15; | g) $14\frac{1}{5}$; | k) $4\frac{17}{43}$; |
| d) 1,75; | h) 43; | l) $8\frac{5}{9}$; |
| e) 3; | i) 5,7; | m) 0,79. |

2.92. a) 1 ning 4 ga; d) 5 ning 2 ga;
b) 3 ning 5 ga; e) 12,5 ning 50 ga;

- f) 3,2 ning 1,28 ga; h) 0,43 ning 5 ga;
 g) 15 ning 18 ga; i) $\frac{1}{7}$ ning $\frac{3}{8}$ ga protsent nisbatini
 toping.

2.93. a ning $p\%$ va $q\%$ ini toping:

- a) $a = 75$; $p = 4$, $q = 3$;
 b) $a = 84$; $p = 15$, $q = 20$;
 d) $a = 330$; $p = 18\frac{1}{3}$, $q = 15$;
 e) $a = 82,25$; $p = 160$, $q = 13$.

2.94. $p\%$ i a ga teng bo'lgan sonni toping:

- a) $p = 1,25$; $a = 55$; d) $p = 0,8$; $a = 1,84$;
 b) $p = 40$; $a = 12$; e) $p = 15$; $a = 1,35$.

2.95. Pol sirtining 72% ini bo'yash uchun 4,5 kg bo'yoq ketdi. Polning qolgan qismini bo'yash uchun qancha bo'yoq kerak bo'ladi?

2.96. To'g'ri to'rtburchakning eni 20% uzaytirildi, bo'yi esa 20% qisqartirildi. Uning yuzi o'zgaradimi? Agar o'zgarsa, qanchaga o'zgaradi?

2.97. Ishchi ish kunida 360 ta detal tayyorladi va kunlik rejani 150% ga bajardi. Ishchi reja bo'yicha bir kunda nechta detal tayyorlashi kerak edi?

2.98. Meva quritilganda o'z og'irligining 82% ini yo'qotadi. 36 kg quritilgan meva olish uchun necha kg ho'l meva olish kerak?

2.99. 10% ga arzonlashtirilgan tovar 18 so'mga sotildi. Tovar-ning dastlabki narxini toping.

2.100. Shaxmat turnirida 16 o'yinchi ishtirok etdi va har bir o'yinchilar juftligi faqat bir partiya shaxmat o'ynadi. O'ynalgan partiyalarning 40% ida durang qayd etildi. Nechta partiyada g'alaba qayd etilgan?

2.101. Mahsulot narxi a so'm edi. Avval uning narxi $p\%$ ga tushirildi, so'ngra $q\%$ ga oshirildi. Mahsulotning keyingi narxini toping.

- 2.102.** Uzunligi 19,8 m bo'lgan arqon ikki bo'lakka bo'lindi. Bo'laklardan birining uzunligi ikkinchisidan 20% ortiq bo'lsa, har bir bo'lakning uzunligini toping.
- 2.103.** To'g'ri to'rtburchakning katta tomoni 10% ga kamaytirilib, kichik tomoni 10% ga orttirilsa, to'g'ri to'rtburchakning yuzi qanday o'zgaradi?
- 2.104.** Xalq banki yiliga 20% foyda to'laydi. Omonatchi kassaga 15 000 so'm qo'ydi. Ikki yildan keyin uning kassadagi puli necha so'm bo'ladi?
- 2.105.** Xalq banki yiliga 30% foyda to'laydi. Omonatga qo'yilgan pul necha yildan keyin 1,69 marta ko'payadi?

8. Taqqoslamalar. a va b butun sonlarini m natural soniga bo'lishda bir xil r ($0 \leq r < m$) qoldiq hosil bo'lsa, a va b sonlari m modul bo'yicha taqqoslanadigan (teng qoldikli) sonlar deyiladi va $a \equiv b \pmod{m}$ ko'rinishda belgilanadi. a soni b soniga m modul bo'yicha taqqoslanishini ifodalovchi $a \equiv b \pmod{m}$ bog'lanish taqqoslama deb o'qiladi.

Misol. $27 = 5 \cdot 5 + 2$, $12 = 5 \cdot 2 + 2$ bo'lgani uchun $27 \equiv 12 \pmod{5}$.

1- teorema. $a \equiv b \pmod{m}$ taqqoslama $a - b$ ayirma m ga qoldiqsiz bo'lingandagina o'rinli bo'ladi.

Isbot. $a \equiv b \pmod{m}$ taqqoslama o'rinli bo'lsin, ya'ni a va b sonlarini m soniga bo'lishda ayni bir xil r qoldiq hosil bo'lsin. U holda $a = mq + r$, $b = mq' + r$ tengliklar o'rinli bo'ladi, bu yerda $q, q' \in \mathbb{Z}$. Bu tengliklarni hadma-had ayirib, $a - b = mq - mq' = m(q - q')$ ga ega bo'lamiz. Demak, $a - b$ soni m ga bo'linadi.

Aksincha, $a - b$ soni m ga bo'linsin, ya'ni

$$a - b = km, k \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

bo'lsin. b sonini m soniga qoldikli bo'lamiz:

$$b = mq + r, 0 \leq r < m. \quad (2)$$

(1) va (2) lardagi tengliklarni hadma-had qo'shib, $a = (k + q)m + r$ tenglikka ega bo'lamiz, bu yerda $0 \leq r < m$. Bundan

a sonini m soniga bo'lishdagi qoldiq b ni m soniga bo'lishdagi qoldiqqa tengligi kelib chiqadi. Demak, $a \equiv b \pmod{m}$ taqqoslama o'rinli.

2- teorema. Har biri c soni bilan taqqoslanadigan a va b sonlari bir-biri bilan ham taqqoslanadi.

I s b o t. $a \equiv c \pmod{m}$ va $b \equiv c \pmod{m}$ bo'lsin. U holda 1- teorema ko'ra $a - c = mq_1$, $b - c = mq_2$ tengliklar o'rinli bo'ladi, bu yerda $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$. Bu tengliklardan $a - b = m(q_1 - q_2)$ ni olamiz. Demak, $a \equiv b \pmod{m}$ taqqoslama o'rinli.

3- teorema. Moduli bir xil taqqoslamalarni hadma-had qo'shish mumkin.

$$\text{I s b o t. } \begin{cases} a_1 \equiv b_1 \pmod{m}, \\ a_2 \equiv b_2 \pmod{m}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 - b_1 = mq_1, \\ a_2 - b_2 = mq_2, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) = m(q_1 + q_2) \Rightarrow a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \pmod{m}.$$

3- teoremadan qo'shiluvchini taqqoslamaning bir qismdan ikkinchi qismga qarama-qarshi ishora bilan o'tkazish mumkin ekanligi kelib chiqadi.

Haqiqatan, $a + b \equiv c \pmod{m}$ ga ayon $-b \equiv -b \pmod{m}$ taqqoslamani qo'shsak, $a \equiv c - b \pmod{m}$ hosil bo'ladi.

4- teorema. Taqqoslamaning ixtiyoriy bir qismiga taqqoslamaning moduliga bo'linadigan har qanday butun sonni qo'shish mumkin.

I s b o t. $a \equiv b \pmod{m}$ va $mk \equiv 0 \pmod{m}$ bo'lsin. Bu taqqoslamalarni hadma-had qo'shsak, $a + mk \equiv b \pmod{m}$ hosil bo'ladi.

Masalan, $27 \equiv 12 \pmod{5} \Rightarrow 27 + 35 \equiv 12 \pmod{5} \Rightarrow 62 \equiv 12 \pmod{5}$.

5- teorema. Bir xil modulli taqqoslamalarni hadlab ko'paytirish mumkin.

Haqiqatan, $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$ taqqoslamalar o'rinli bo'lsa, ulardan mos ravishda $a - b = mq_1$ va $c - d = mq_2$ tengliklar kelib chiqadi. Bu tengliklar asosida $ac - bd = ac -$

$-bc + bc - bd = m(cq_1 + bq_2)$ tenglikni hosil qilamiz. Demak, $ac \equiv bd \pmod{m}$ taqqoslama o'rinli (1- teorema).

5- teoremadan taqqoslamaning har ikkala qismini bir xil natural ko'rsatkichli darajaga ko'tarish mumkinligi kelib chiqadi, ya'ni $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$.

Taqqoslamalarning amaliyotda keng qo'llaniladigan quyidagi xossalari isbotsiz keltiramiz:

a) taqqoslamaning ikkala qismini biror butun songa ko'paytirish mumkin;

b) taqqoslamaning ikkala qismini va modulni biror natural songa ko'paytirish mumkin;

d) taqqoslamaning ikkala qismi va modulini ularning umumiy bo'luvchilariga bo'lish mumkin;

e) agar a va b sonlari $m_1, m_2, \dots, m_n$ modullar bo'yicha taqqoslansa, u holda ular $K(m_1, m_2, \dots, m_n)$ modul bo'yicha ham taqqoslanadi;

f) agar d soni m ning bo'luvchisi bo'lib, $a \equiv b \pmod{m}$ bo'lsa, u holda $a \equiv b \pmod{d}$ bo'ladi.

1- misol. 3^{30} ni 8 ga bo'lishdan chiqadigan qoldiqni topamiz.

Yechish. $3^2 = (9 - 8) \pmod{8} \Rightarrow (3^2)^{15} = 1^{15} \pmod{8} \Rightarrow 3^{30} \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow 3^{30} = 8q + 1$. Demak, izlanayotgan qoldiq $r = 1$.

2- misol. $\Sigma = 30^{n+2} + 23^{n+1} + 9^n$ ($n \in N$) sonining 7 ga bo'linishini isbot qiling.

$$\text{Yechish. } \begin{cases} 30 \equiv 2 \pmod{7}, \\ 23 \equiv 2 \pmod{7}, \\ 9 \equiv 2 \pmod{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 30^{n+2} \equiv 2^{n+2} \pmod{7}, \\ 23^{n+1} \equiv 2^{n+1} \pmod{7}, \\ 9^n \equiv 2^n \pmod{7}, \end{cases}$$

$$\Rightarrow 30^{n+2} + 23^{n+1} + 9^n \equiv 2^{n+2} + 2^{n+1} + 2^n \pmod{7} \Rightarrow \Sigma \equiv 2^n(2^2 + 2^1 + 2^0) \pmod{7} \Rightarrow (\Sigma \text{ yig'indi } 7 \text{ ga bo'linadi}).$$

3- misol. 2222^{5555} sonini 7 ga bo'lishda hosil bo'ladigan qoldiqni toping.

Y e c h i s h. 2222 ni 7 ga qoldiqli bo‘lamiz: $2222 = 7 \cdot 317 + 3$. Bundan $2222 \equiv 3 \pmod{7}$ ni olamiz. Hosil bo‘lgan taqqoslama-ning har ikki tomonini 5555- darajaga ko‘taramiz: $2222^{5555} \equiv 3^{5555} \pmod{7}$.

Bu taqqoslama izlanayotgan qoldiq 3^{5555} ni 7 ga bo‘lishdan hosil bo‘ladigan qoldiq bilan bir xil ekanligini ko‘rsatadi. 3^{5555} ni 7 ga bo‘lishda hosil bo‘ladigan qoldiqni topamiz. Buning uchun 3 ning dastlabki bir nechta darajalarini 7 ga bo‘lishda qanday qoldiqlar hosil bo‘lishini kuzataylik:

$3^1 \equiv 3 \pmod{7}$; $3^2 \equiv 3 \cdot 3 \equiv 9 \equiv 2 \pmod{7}$; $3^3 \equiv 2 \cdot 3 \equiv 6 \pmod{7}$; $3^4 \equiv 6 \cdot 3 \equiv 18 \equiv 4 \pmod{7}$; $3^5 \equiv 4 \cdot 3 \equiv 12 \equiv 5 \pmod{7}$; $3^6 \equiv 5 \cdot 3 \equiv 15 \equiv 1 \pmod{7}$; $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$ ga ega bo‘ldik. Bundan $3^{6k} \equiv 1^k \pmod{7}$, $k \in N$ (2) ni olamiz.

Endi 5555 ni 6 ga bo‘lamiz: $5555 = 6 \cdot 925 + 5$.

U holda $3^{5555} = 3^{6 \cdot 925 + 5} = 3^{6 \cdot 925} \cdot 3^5 \equiv 1 \cdot 3^5 \equiv 5 \pmod{7}$.

Shunday qilib, izlanayotgan qoldiq 5 ga teng .

4- m i s o l. $2^{60} + 7^{30}$ soni 13 ga bo‘linadi. Isbotlang.

I s b o t. $2^4 = 13 + 3$ va $7^2 = 49 = 13 \cdot 4 - 3$ bo‘lgani uchun $2^4 \equiv 3 \pmod{13}$, $7^2 \equiv -3 \pmod{13}$ larga egamiz. Oxirgi har bir taqqoslamani 15- darajaga ko‘tarib, ularni hadma-had qo‘shamiz: $2^{60} + 7^{30} \equiv 0 \pmod{13}$.

Demak, $2^{60} + 7^{30}$ soni 13 ga bo‘linadi.

5- m i s o l. 7^{77} ning oxirgi raqamini toping.

Y e c h i s h. 7 ning dastlabki bir nechta darajalarining oxirgi raqamini kuzatamiz:

$7^1 = 7$	$7^5 = *7$
$7^2 = 49$	$7^6 = *9$
$7^3 = *3$	$7^7 = *3$
$7^4 = *1$	$7^8 = *1$

Takrorlanish sodir bo‘ldi (qadam 4 ga teng). Kuzatuv quyidagi xulosani chiqarishga imkon beradi:

$$7^n = \begin{cases} *7, & \text{agar } n \equiv 1(\text{mod } 4) \\ *9, & \text{agar } n \equiv 2(\text{mod } 4) \\ *3, & \text{agar } n \equiv 3(\text{mod } 4) \\ *1, & \text{agar } n \equiv 0(\text{mod } 4) \end{cases} \quad (3)$$

Endi $n = 7^{77}$ ni 4 ga bo'lishda hosil bo'ladigan qoldiqni aniq-
laymiz:

$$7^1 \equiv 3 \pmod{4}; \quad 7^2 \equiv 3 \cdot 7 \equiv 1 \pmod{4}; \quad 7^{2k} \equiv 1 \pmod{4}; \\ 7^{77} \equiv 7^{2 \cdot 38 + 1} \equiv 7^{2 \cdot 38} \cdot 7 \equiv 1 \cdot 7 \equiv 3 \pmod{4}.$$

$7^{77} \equiv 3 \pmod{4}$ bo'lgani uchun, (3) ga asosan $7^{77} = *3$.
Shunday qilib, oxirgi raqam 3 ekan.

6- misol. Ixtiyoriy n natural son uchun $n^5 - n$ soni 5 ga
bo'linishini isbotlang.

Isbot. n — ixtiyoriy natural son bo'lsin. n ni 5 ga bo'lamiz.

Agar $n \equiv 0 \pmod{5}$ bo'lsa, $n^5 - n \equiv 0^5 - 0 \equiv 0 \pmod{5}$ bo'-
ladi.

Agar $n \equiv 1 \pmod{5}$ bo'lsa, $n^5 - n \equiv 1^5 - 1 \equiv 0 \pmod{5}$ bo'ladi.

Agar $n \equiv 2 \pmod{5}$ bo'lsa, $n^5 - n \equiv 2^5 - 2 \equiv 30 \equiv 0 \pmod{5}$
bo'ladi.

Agar $n \equiv 3 \pmod{5}$ bo'lsa, $n^5 - n \equiv 3^5 - 3 \equiv 240 \equiv 0 \pmod{5}$
bo'ladi.

Agar $n \equiv 4 \pmod{5}$ bo'lsa, $n^5 - n \equiv 4^5 - 4 \equiv 1020 \equiv 0 \pmod{5}$
bo'ladi.

n ning har qanday qiymatida, $n^5 - n \equiv 0 \pmod{5}$ ekanini
ko'ramiz. Demak, $\forall n \in \mathbb{N}$ uchun $n^5 - n$ soni 5 ga qoldiqsiz bo'li-
nadi.



M a s h q l a r

2.106. a ni b ga qoldikli bo'ling:

- | | |
|----------------------|-----------------------|
| a) $a = 70, b = 3;$ | d) $a = 200, b = 17;$ |
| b) $a = 180, b = 9;$ | e) $a = 76, b = 9.$ |

2.107. a ni b ga qoldiqli bo'ling:

- | | |
|-----------------------|----------------------|
| a) $a = 5, b = 9$; | d) $a = 9, b = 18$; |
| b) $a = 11, b = 23$; | e) $a = 4, b = 75$. |

2.108. a ni b ga qoldiqli bo'ling:

- | | |
|------------------------|------------------------|
| a) $a = -81, b = 75$; | h) $a = -6, b = 48$; |
| b) $a = -5, b = 9$; | i) $a = -8, b = 24$; |
| d) $a = -41, b = 7$; | j) $a = 15, b = 43$; |
| e) $a = -35, b = 7$; | k) $a = 27, b = 9$; |
| f) $a = -33, b = 7$; | l) $a = 33, b = 32$; |
| g) $a = -48, b = 6$; | m) $a = 108, b = 36$. |

2.109. $a \in N, b \in N$ bo'lib, $a = bq + r$ ($q \in Z, r \in N, 0 \leq r < b$) bo'lsin. $-a$ ni b ga bo'lishda hosil bo'ladigan to'liqsiz bo'linma q_1 ni va qoldiq r_1 ni toping.

2.110. a ni b ga bo'lishdagi qoldiqni toping:

- | | |
|---------------------------|-------------------------|
| a) $a = 81\,932, b = 9$; | h) $a = -15, b = 11$; |
| b) $a = 25, b = 75$; | i) $a = -13, b = 35$; |
| d) $a = -4, b = 49$; | j) $a = 111, b = 11$; |
| e) $a = -49, b = 4$; | k) $a = -11, b = 111$; |
| f) $a = 4\,341, b = 3$; | l) $a = -9, b = 3$; |
| g) $a = 144, b = 6$; | m) $a = -3, b = 9$. |

2.111. Quyidagi tenglik qoldiqli bo'lishni ifodalaydimi:

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| a) $21 = 3 \cdot 4 + 9$; | h) $-49 = 7 \cdot 8 + (-7)$; |
| b) $-18 = 9 \cdot 2 - 36$; | i) $84 = 2 \cdot 42$; |
| d) $35 = 2 \cdot 17 + 1$; | j) $81 = 81 \cdot 0 + 81$; |
| e) $11 = 2 \cdot 4 + 3$; | k) $-40 = 4 \cdot (-11) + 4$; |
| f) $26 = 4 \cdot 5 + 6$; | l) $-35 = (-7) \cdot 8 + 21$; |
| g) $-15 = 11 \cdot (-2) + 7$; | m) $49 = 4 \cdot 11 + 5$? |

2.112. Taqqoslama to'g'rimi:

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------|
| a) $125 \equiv -35 \pmod{4}$; | f) $113 \equiv 13 \pmod{100}$; |
| b) $44 \equiv -32 \pmod{25}$; | g) $842 \equiv 42 \pmod{-5}$; |
| d) $-58 \equiv 11 \pmod{5}$; | h) $31 \equiv -20 \pmod{17}$; |
| e) $111 \equiv 13 \pmod{}$; | i) $1 \equiv 18 \pmod{0}$? |

2.113. $n \in \{3, 5, 9\}$ bo'lsin. n ning qaysi qiymatlarida taqqoslama to'g'ri bo'ladi:

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| a) $33 \equiv 3 \pmod{n}$; | f) $43 \equiv -2 \pmod{n}$; |
| b) $134 \equiv -25 \pmod{n}$; | g) $-121 \equiv 13 \pmod{n}$; |
| d) $-223 \equiv 41 \pmod{n}$; | h) $155 \equiv 11 \pmod{n}$; |
| e) $34 \equiv 72 \pmod{n}$; | i) $-48 \equiv 11 \pmod{n}$? |

2.114. 5^{20} ni 24 ga bo'lishda hosil bo'ladigan qoldiqni toping.

2.115. 3333^{6666} ni 5 ga bo'lishda hosil bo'ladigan qoldiqni toping.

2.116. Sonning oxirgi raqamini toping.

- | | | |
|----------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| a) $8^{8^{8^7}}$; | f) $555^{222^{22}}$; | j) $10001^{9n}, n \in \mathbb{Z}$; |
| b) $113^{8^{91}}$; | g) $333^{444^{555}}$; | k) $1005^{1005n}, n \in \mathbb{Z}$; |
| d) $144^{5^{555}}$; | h) $1111^{9^{99}}$; | l) $8^{8^{95}}$; |
| e) $2002^{9^{95}}$; | i) $999^{2^{888^{999}}}$; | m) $6^{7^{89}}$. |

2.117. n ning barcha butun qiymatlarida $(n^3 + 11n)$ soni 6 ga qoldiqsiz bo'linishini isbotlang.

2.118. n ning barcha butun qiymatlarida $(n^3 - n)$ 3 ga qoldiqsiz bo'linishini isbotlang.

2.119. $n^2 + 1$ soni n ning ixtiyoriy butun qiymatida 3 ga bo'linmasligini isbotlang.

2.120. $(3299^5 + 6^{18})$ sonining 56 ga bo'linishini isbotlang.

2.121. $12^{2n+1} + 11^{2n+2}$ soni n ning har qanday natural qiymatida 133 ga bo'linishini isbotlang.

2.122. p soni 3 dan katta tub son bo'lsa, $p^2 - 1$ soni 24 ga bo'linadi. Isbotlang.

2.123. p va q sonlari 3 dan katta tub sonlar bo'lsa, $p^2 - q^2$ soni 24 ga bo'linadi. Isbotlang.

4- §. Koordinatalar o'qi va koordinatalar tekisligi

1. Yo'naltirilgan kesma, to'g'ri chiziqdagi koordinatalar. Biror l to'g'ri chiziqda yo'nalish kiritib, uni *musbat yo'nalish*, teskariyini esa *manfiy yo'nalish* sifatida qabul qilaylik (10- rasm).

Yo'naltirilgan $\vec{l}$ to'g'ri chiziqda $O, A, B, \dots$ nuqtalarni belgilaymiz. A va B nuqtalar hosil qilgan kesmaning bir uchini uning boshi, ikkinchi uchini esa uning oxiri sifatida qabul qilib, yo'naltirilgan (yo'nalishga ega bo'lgan) kesmani hosil qilamiz. Boshi

A , oxiri esa B bo'lgan yo'naltirilgan kesmani $\vec{AB}$ bilan belgilaymiz.

U holda $\vec{AB}$ va $\vec{BA}$ kesmalar qarama-qarshi yo'naltirilgan

kesmalar bo'ladi: $\vec{AB} = -\vec{BA}$. Agar $\vec{AB}$ kesmaning yo'nalishi l to'g'ri chiziq yo'nalishi bilan bir xil bo'lsa, uni musbat yo'naltirilgan, aks holda esa manfiy yo'naltirilgan kesma deb ataymiz.

Yo'naltirilgan $\vec{l}$ to'g'ri chiziqda koordinatalar boshi sifatida biror O nuqtani (10- rasm) va uzunlik o'lchov birligini tanlaylik.

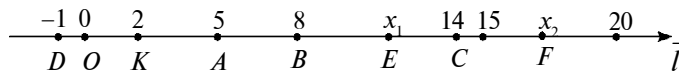
Yo'naltirilgan $\vec{AB}$ kesmaning *kattaligi* deb moduli shu kesmaning

uzunligiga teng AB songa aytiladi; agar $\vec{AB}$ ning yo'nalishi $\vec{l}$ ning

yo'nalishi bilan bir xil bo'lsa, $AB > 0$, aks holda $AB < 0$ bo'ladi.

Boshi va oxiri ustma-ust tushgan kesmaning uzunligi nolga teng bo'ladi. 10- rasmda $AB = 3$, $BA = -3$, $BC = 6$, $CA = -9$ tasvirlangan.

Unda $AB + BC + CA = 0$ bo'lishini ko'ramiz. Bu mulohaza $A_1, \dots, A_n$ nuqtalarning ixtiyoriy chekli to'plami uchun o'rinli bo'lishi



10- rasm.

tushunarli. $\overrightarrow{OA}$ kesmaning kattaligi A nuqtaning *koordinatasi* deyiladi va $A(x)$ ko'rinishida yoziladi, $\vec{l}$ to'g'ri chiziq *koordinatalar to'g'ri chizig'i* (o'qi) deyiladi.

Sonlar o'qida har bitta nuqtaga bitta aniq son mos keladi va aksincha. $\forall a, b \in R$ sonlari uchun quyidagi munosabatlardan bittasi albatta bajariladi: $a = b$; $a > b$; $a < b$.

Ta'rif. $a > b$, $a < b$ munosabatlarga sonli tengsizlik deyiladi. Sonli tengsizliklar quyidagi xossalarga ega:

1. Agar $a > b$ bo'lsa, u holda $b < a$ bo'ladi.
2. Agar $a > b$ va $b > c$ bo'lsa, u holda $a > c$ bo'ladi.
3. Agar $a > b$ bo'lsa, $\forall c \in R$ uchun $a \pm c > b \pm c$ bo'ladi.
4. Agar $a > b$ bo'lsa, $\forall c > 0$ uchun $ac > bc$ va $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ bo'ladi.
5. Agar $a < b$ bo'lsa, $\forall c < 0$ uchun $ac > bc$ va $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ bo'ladi.
- $a > b$ va $c > d$ yoki $a < b$ va $c < d$ tengsizliklar bir xil ma'noli tengsizliklar deyiladi.
6. $a > b$ va $c > d$ bo'lsa, $a + c > b + d$ bo'ladi.
7. $a > b$ va $c < d$ bo'lsa, $a - c > b - d$ bo'ladi.
8. $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$ bo'lib, $a > b$ va $c > d$ bo'lsa, $ac > bd$ bo'ladi.
9. $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$ bo'lib, $a > b$ va $c < d$ bo'lsa, $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$ bo'ladi.
10. $a > 0$, $b > 0$, $a < b$ bo'lsa, $n \in N$ uchun $a^n < b^n$ bo'ladi.
11. $a > 0$, $b > 0$ uchun $a < b$ bo'lsa, $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ bo'ladi.

$a > b$, $c < d$ tengsizliklar qat'iy tengsizliklar, $a \geq b$, $c \leq d$ tengsizliklar esa noqat'iy tengsizliklar deyiladi.

4- xossani isbotlaymiz:

$c > 0$ va $a - b > 0$ bo'lganligi uchun $c(a - b) = ac - bc > 0$ bo'ladi. Demak, $ac > bc$.

Son o'qida x o'zgaruvchi turli oraliqlarda joylashgan bo'lishi mumkin, bu oraliqlar *sonli oraliqlar* deyiladi. Sonli oraliqlar aniq bir sonli to'plamni aniqlaydi. Sonli oraliqlar $a < x < b$ yoki

boshqa ko‘rinishdagi tengsizliklarning geometrik talqinidan iborat.

Quyidagi jadvalda eng ko‘p qo‘llaniladigan sonli oraliqlar berilgan.

№	Oraliq nomi	Tengsizlik shaklida yozilishi	Simvolik belgilanishi	Geometrik talqini
1	«a» dan «b» gacha yopiq oraliq	$a \leq x \leq b$	$[a, b]$	
2	«a» dan «b» gacha ochiq oraliq	$a < x < b$	(a, b)	
3	«a» dan «b» gacha yarim ochiq oraliq	$a < x \leq b$	$(a, b]$	
4	«a» dan «b» gacha yarim ochiq oraliq	$a \leq x < b$	$[a, b)$	
5	«a» dan $+\infty$ gacha sonli nur	$x \geq a$ ($a \leq x$) $(a \leq x < +\infty)$	$[a, +\infty)$	
6	«a» dan $+\infty$ gacha ochiq oraliq	$x > a$ ($a < x$) $(a < x < +\infty)$	$(a, +\infty)$	
7	$-\infty$ dan «a» gacha sonli nur	$x \leq a$ ($a \geq x$) $(-\infty < x \leq a)$	$(-\infty, a]$	
8	$-\infty$ dan «a» gacha ochiq oraliq	$x < a$ ($a > x$) $(-\infty < x < a)$	$(-\infty, a)$	
9	Son o‘qi	$-\infty < x < +\infty$	$(-\infty, +\infty)$	

1- misol. Koordinatalar to‘g‘ri chizig‘ida $E(x_1)$ va $F(x_2)$ nuqtalar orasidagi masofani topamiz.

Yechish. Chizmaga qaraganda (10- rasm) $OE + EF + FO = 0$, bundan $EF = -FO - OE = OF - OE = x_2 - x_1$. Demak, $|EF| = |x_2 - x_1|$.

2- misol. Koordinatalar to'g'ri chizig'ida (10- rasm). $B(8)$ nuqtadan 6 birlik uzoqlikda joylashgan nuqtalarni topamiz.

Yechish. Izlanayotgan nuqtaning koordinatasi x bo'lsin. Uni topamiz:

$$|x-8|=6 \Leftrightarrow \begin{cases} x-8>0, \\ x-8=6; \\ x-8<0, \\ -x+8=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>8, \\ x=14; \\ x<8, \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=14, \\ x=2. \end{cases}$$

Javob: $K(2)$, $C(14)$.

3- misol. Koordinatalar to'g'ri chizig'ida ushbu tengsizliklar yechimini tasvirlaymiz: a) $|x-8|\leq 6$; b) $|x-8|>6$.

Yechish. a) $|x-8|$ soni $N(x)$ nuqtadan (10- rasm) $B(8)$ nuqttagacha masofaga teng va 6 dan ortiq emas. Shunga ko'ra: $|x-8|\leq 6 \Leftrightarrow -6\leq x-8\leq 6$ yoki $2\leq x\leq 14$. Izlanayotgan nuqtalar to'plami $K(2)$ va $C(14)$ nuqtalar orasidagi KC kesmadan iborat; b) koordinatalar to'g'ri chizig'ining $[2; 14]$ kesmadan tashqaridagi qismi javobni beradi: $(-\infty; 2) \cup (14; +\infty)$.

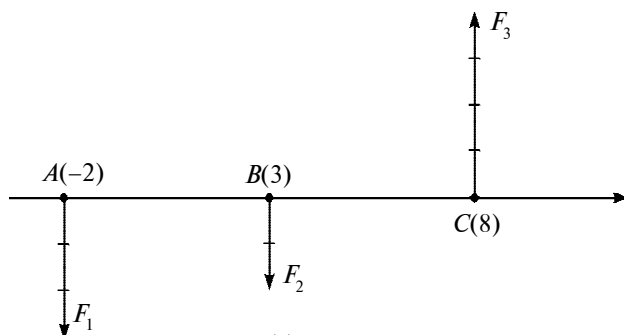
4- misol. Uchlari $A(x_1)$, $B(x_2)$ nuqtalarda bo'lgan AB kesmani $AM:MB=\lambda:1$ nisbatda bo'luvchi $M(x)$ nuqtani topamiz.

$$\text{Yechish.} \quad \frac{AM}{MB} = \frac{\lambda}{1} \Leftrightarrow \frac{x-x_1}{x_2-x} = \frac{\lambda}{1} \Leftrightarrow x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}. \quad (1)$$

Agar (1) da $\lambda=1$ desak, AB kesma o'rtasining koordinatasi:

$x = \frac{x_1+x_2}{2}$ hosil bo'ladi. Shuningdek, (1) formulaga $\lambda = m_2:m_1$ ni qo'yib, AB kesmani $m_2:m_1$ nisbatda bo'luvchi nuqta koordinatasini hosil qilish mumkin:

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$



11- rasm.

Umuman, $m_1, m_2, \dots, m_n$ massalar mos tartibda $A_1(x_1), \dots, A_n(x_n)$ nuqtalarga qo'yilgan bo'lsa, bu massalar $M(x)$ markazining koordinatasi

$$x = \frac{m_1 x_1 + \dots + m_n x_n}{m_1 + \dots + m_n} \quad (2)$$

bo'ladi.

5- misol. 2, 4, 6, 8 ga teng massalar mos tartibda $A(2), B(9), C(-6), D(3)$ nuqtalarga joylashtirilgan. Massalar markazini topamiz.

Yechish. (2) formula bo'yicha:

$$x = \frac{2 \cdot 2 + 4 \cdot 9 + 6 \cdot (-6) + 8 \cdot 3}{2 + 4 + 6 + 8} = 1,4.$$

6- misol. Koordinatalar to'g'ri chizig'ining A, B, C nuqtalariga (11- rasm) tik qo'yilgan F_1, F_2, F_3 kuchlar teng ta'sir etuvchisi qo'yilgan nuqta koordinatasini topamiz.

Yechish. Chizmada $A(-2), B(3), C(8), F_1 = -3, F_2 = -2, F_3 = 4$. (4) formula bo'yicha:

$$x = \frac{(-3) \cdot (-2) + (-2) \cdot 3 + 4 \cdot 8}{-3 - 2 + 4} = -32.$$



Mashqlar

2.124. To'plamlarni koordinatalar to'g'ri chizig'ida tasvirlang:

a) $A = \{x | -5 \leq x \leq 20\};$

d) $C = \{x | |x + 1| < 5\}.$

b) $B = \{x | -4 \leq x \leq 6\};$

2.125. a) Koordinatalar to'g'ri chizig'ida shunday nuqtalarni topingki, ulardan $A(-4)$ gacha masofa $B(6)$ gacha masofadan 4 marta katta bo'lsin.

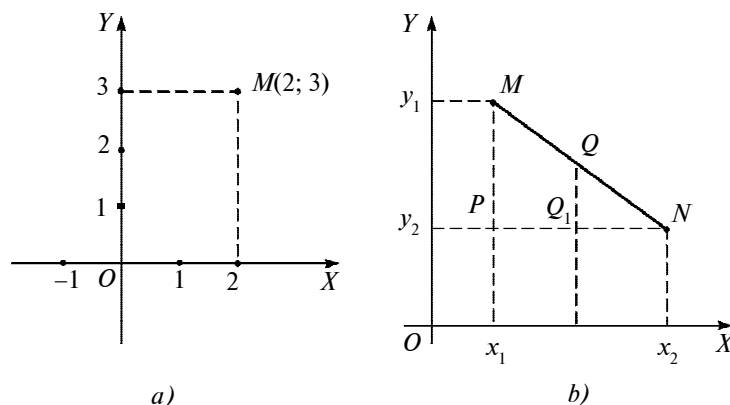
b) $A(2)$, $B(4)$, $C(5)$, $D(9)$ moddiy nuqtalarning massalari mos tartibda 3, 5, 7, 9 ga teng. Massalar markazining koordinatasini toping.

2.126. a) $A(-3)$ va $B(6)$ nuqtalarda 4 C (kulon) va 2 C elektr zaryadi joylashtirilgan. Koordinatalar o'qida shunday nuqtani topingki, unda bu zaryadlar tortishish kuchlarining teng ta'sir etuvchisi nolga teng bo'lsin.

b) $A(-4)$ va $B(2)$ nuqtalarda mos tartibda 2 C va 1 C zaryad joylashtirilgan. Son o'qining qaysi nuqtasida bu zaryadlar ta'siri tenglashadi?

2. Koordinata tekisligi. Tekislikning belgilangan O nuqtasi (sanoq boshi) orqali o'zaro perpendikular bo'lgan Ox (abssissalar) va Oy (ordinatalar) o'qlarini o'tkazamiz. O nuqta bu ikkala o'q bo'yicha ham 0 (nol) koordinataga ega: $O(0; 0)$. O nuqtadan musbat va manfiy yo'nalishlar boshlanadi. Tekislikdagi har qanday M nuqta bitta $(x; y)$ koordinatalar juftiga ega bo'ladi (12- a rasm). Tekislikda koordinatalar sistemasining kiritilishi ko'pgina geometrik masalalarni algebraik usulda yechish imkonini beradi.

1- misol. Tekislikning $M(x_1; y_1)$ va $N(x_2; y_2)$ nuqtalari orasidagi MN masofani toping (12- b rasm).



12- rasm.

Y e c h i s h. Agar $x_1 = x_2$ bo'lsa, MN kesma MP kesma bilan ustma-ust joylashgan bo'ladi va $MN = |y_2 - y_1|$ bo'lishi ayon. Shu kabi $y_1 = y_2$ da $MN = |x_2 - x_1|$ bo'ladi.

$x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ bo'lsin. Pifagor teoremasiga muvofiq $MN^2 = PN^2 + MP^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$. Demak,

$$MN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1)$$

2- m i s o l. Tekislikda yotgan $M(x_1; y_1)$ va $N(x_2; y_2)$ nuqtalar orasidagi masofani $\lambda : 1$, $\lambda > 0$ nisbatda bo'luvchi $Q(x; y)$ nuqtani toping (12- b rasm).

Y e c h i s h. Uchburchaklarning o'xshashligiga ko'ra $P_1Q_1 : Q_1N = MQ : QN = \lambda : 1$, bundan va 1- banddagi (2) formula bo'yicha:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Bu formulalar $\lambda \leq 0$, $\lambda \neq -1$ da ham o'rinli.

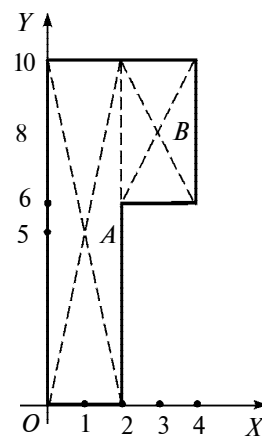
3- m i s o l. 13- rasmda tasvirlangan bir jinsli plastinkaning massalar markazini toping.

Y e c h i s h. Plastinkani ikki to'rtburchakka ajratamiz. Bir jinsli bo'lganidan plastinka yuzini massasiga mutanosib (koeffitsiyentini esa 1 ga teng) deb olamiz. U holda to'rtburchaklar massalari markazi diagonallari kesishgan nuqtada, yuzalari esa $S_1 = m_1 = 2 \cdot 10 = 20$, $S_2 = 2 \cdot 4 = 8$ bo'ladi. 1- banddagi (2) formulalar bo'yicha:

$$x = \frac{20 \cdot 1 + 8 \cdot 3}{20 + 8} = 1 \frac{4}{7},$$

$$y = \frac{20 \cdot 5 + 8 \cdot 8}{20 + 8} = 5 \frac{6}{7}.$$

Demak, massalar markazi $(1 \frac{4}{7}; 5 \frac{6}{7})$ nuqtadan iborat.

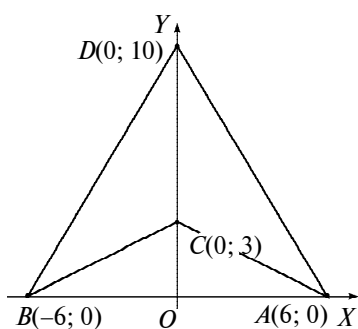


13- rasm.

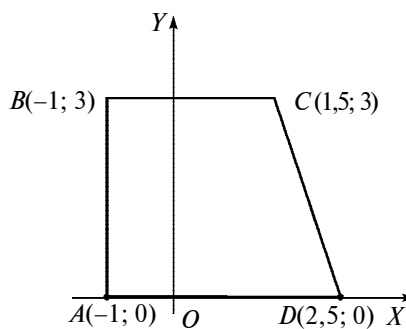


Mashqlar

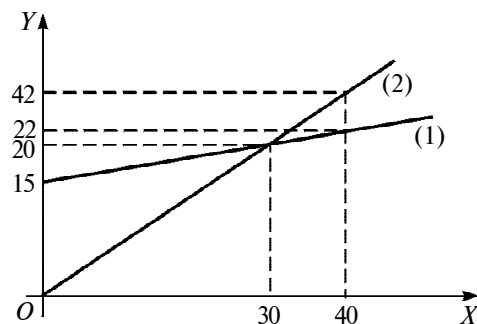
- 2.127.** a) Ordinatalar o'qida $A(1; -3)$ nuqtadan 4 birlik uzoqlikdagi Y nuqtani toping;
 b) ABC uchburchak berilgan, $A(-5; -3)$, $B(6; 2)$, $C(3; -1)$. BC va AC tomonlarining o'rtalarini tutashtiruvchi kesmaning uzunligini toping;
 d) trapetsiyaning uchlari $A(-3; 2)$, $B(8; 2)$, $C(6; 5)$, $D(-1; 5)$ nuqtalarda yotadi. Trapetsiya o'rta chizig'ining uzunligini toping;
 e) uchburchakning uchlari: $A(0; -2)$, $B(3; 0)$, $C(-1; 4)$. Uning: 1) medianalari kesishgan N nuqtani; 2) AB tomonining A uchidan boshlab $3:1$ nisbatda bo'luvchi M nuqtani toping; 3) MN to'g'ri chiziq kesmasining uzunligini toping.
- 2.128.** Agar $A(-4; -3)$, $B(-4; 4)$, $O(0; 0)$ bo'lsa, AOB uchburchakning AK bissektrisasi bilan BC tomonining kesishuv nuqtasini toping.
- 2.129.** a) 14- rasmda tasvirlangan sterjenlar sistemasining;
 b) 15- rasmda tasvirlangan shakldagi bir jinsli plastinaning massalar markazini toping.
- 2.130.** a) Yig'uvchi linza uchun $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$ tenglik o'rinli, bunda $F = 2$ m — linzaning fokus oralig'i, d va f — linzadan



14- rasm.



15- rasm.



16- rasm.

buyumgacha va uning tasvirigacha masofalar; linza $A(6; 3)$ nuqtada, buyum $B(2; 0)$ nuqtada joylashtirilgan. Tasvirning koordinatalarini toping.

b) Absissalar o'qida (16- rasm) korxona ishlab chiqarayotgan buyumlar miqdori (tonnalarda), ordinatalar o'qida xarajat va daromad (o'n ming so'mlarda), (1) to'g'ri chiziq mahsulotni ishlab chiqarish uchun xarajat, (2) to'g'ri chiziq mahsulotni sotishdan olinadigan daromadni tasvirlaydi. Savollarga javob bering: 1) korxonada ishlab chiqarish boshlanguncha ($x = 0$ holi) qancha xarajat bo'lgan? 2) ishlab chiqarilgan mahsulotdan qanchasi sotilgandan keyin dastlabki xarajatlarni qoplangan va korxona sof foyda olish boshlagan?

d) 25 t mahsulotni tayyorlashga qancha mablag' sarf bo'ladi, sotishdan qancha foyda olinadi, sof foyda qancha bo'ladi?

5- §. Induksiya. Matematik induksiya metodi

1. Induksiya. X to'plam berilgan bo'lsin. Mulohaza yuritishning quyidagi ikki usulini qaraymiz:

a) biror tasdiq ba'zi $x \in X$ elementlar uchun to'g'ri bo'lsa, bu tasdiq barcha $x \in X$ lar uchun to'g'ri bo'ladi;

b) biror tasdiq har bir $x \in X$ elementlar uchun o'rinli bo'lsa, bu tasdiq barcha $x \in X$ lar uchun o'rinli bo'ladi.

Mulohaza yuritishning a) *usuli to'liqmas induksiya*; b) *usuli esa to'liq (mukammal) induksiya* deyiladi («induksiya» so'zi lotincha so'z bo'lib, o'zbek tilida «hosil qilish», «yaratish» ma'nosini bildiradi).

1- misol. $N\{1; 2; 3; 4; \dots\}$ natural sonlar to'plamida aniqlangan $A(n) = n^2 + n + 17$ ifodani qaraymiz. $A(1) = 19$, $A(2) = 23$, $A(3) = 29$ va $A(4) = 37$ sonlari tub sonlardir. Shuning uchun, barcha $n \in N$ sonlari uchun $A(n) = n^2 + n + 17$ ifodaning qiymati tub son bo'ladi.

Bu yerda to'liqmas induksiya yordamida xulosa chiqarildi. Chiqarilgan bu xulosa noto'g'ridir, chunki $A(16) = 289 = 17^2$ soni tub son emas.

2- misol. $X = \{10; 20; 30; 40; 50; \dots\}$ to'plam yozuvi 0 raqami bilan tugaydigan barcha natural sonlar to'plami bo'lsin. 10; 20; 30; 40; 50 sonlarining har biri 2 ga qoldiqsiz bo'linadi. Shuning uchun X to'plamning har qanday x elementi 2 ga bo'linadi. To'liqmas induksiya yordamida chiqarilgan bu xulosa to'g'ri xulosadir, chunki X to'plamning har qanday elementi juft sonidir.

3- misol. $N = \{1; 2; 3; \dots; 1\,000\,000\,001; \dots\}$ natural sonlar to'plamida aniqlangan $B(n) = 991n^2 + 1$ ifodani qaraymiz. $B(1)$, $B(2)$, ..., $B(1\,000\,000\,001)$ sonlari butun sonning kvadrati emas (bu tasdiq isbotlangan!). Shuning uchun, barcha $n \in N$ lar uchun $B(n)$ soni butun sonning kvadrati bo'la olmaydi.

To'liqmas induksiya yordamida chiqarilgan bu xulosa noto'g'ridir. Zamonaviy hisoblash mashinalari yordamida n ning $B(n)$ soni butun sonning kvadrati bo'ladigan qiymati aniqlangan (bu qiymat 29 xonali sondan iborat).

To'liqmas induksiya ba'zan noto'g'ri xulosaga olib kelsa-da (1- misol, 3- misol), uning matematikadagi va boshqa fanlar (fizika, kimyo, biologiya va h.k.)dagi, shuningdek, amaliyotdagi ahamiyati juda kattadir. U xususiy xulosalar yordamida umumiy xulosa (faraz, taxmin) qilish imkonini beradi.

To'liq induksiya hamma vaqt to'g'ri xulosaga olib keladi, lekin uni qo'llashda hisoblash ishlariga yoki to'plamdagi elementlar soniga bog'liq bo'lgan ba'zi qiyinchiliklar paydo bo'ladi.

4- misol. $X = \{1; 2; 3; 4\}$ to'plamni qaraymiz.

$C(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)(x-9)$ ifoda har bir $x \in X$ da nolga teng qiymat qabul qiladi:

$$C(1) = (1-1)(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)(1-6)(1-7)(1-8)(1-9) = 0;$$

$$C(2) = (2-1)(2-2)(2-3)(2-4)(2-5)(2-6)(2-7)(2-8)(2-9) = 0;$$

$$C(3) = (3-1)(3-2)(3-3)(3-4)(3-5)(3-6)(3-7)(3-8)(3-9) = 0;$$

$$C(4) = (4-1)(4-2)(4-3)(4-4)(4-5)(4-6)(4-7)(4-8)(4-9) = 0.$$

Demak, barcha $x \in X$ lar uchun, $C(x) = 0$ tenglik o'rinli.

Agar X to'plam cheksiz to'plam bo'lsa yoki undagi elementlar soni juda katta bo'lsa, to'plamning har bir elementi uchun berilgan tasdiqning to'g'ri ekanligini ko'rsatish mumkin bo'lmaydi yoki juda qiyin bo'ladi. Shu sababli to'liq induksiyadan juda kam hollarda foydalaniladi.

5- misol. To'liqmas induksiyadan foydalanib, «Agar m xonali $N = a_1 \cdot 10^{m-1} + a_2 \cdot 10^{m-2} + \dots + a_{m-1} \cdot 10 + a_m$ sonining oxirgi n ta (bu yerda $n \leq m$) raqamidan tuzilgan son 5^n ga bo'linsa, N soni ham 5^n ga bo'linadi» degan farazni aytish mumkinmi?

Yechish. $n=1$ bo'lib, N sonining oxirgi bitta raqamidan tuzilgan son 5 ga bo'linsin. U holda, berilgan m xonali N natural sonni $N = (a_1 \cdot 10^{m-1} + a_2 \cdot 10^{m-2} + \dots + a_{m-1} \cdot 10) + 5k$ ko'rinishda yozish mumkin. O'ng tomondagi ikkita qo'shiluvchining har biri 5 ga bo'lingani uchun, ularning yig'indisi bo'lgan N soni ham 5 ga bo'linadi.

$n=2$ bo'lib, N sonining oxirgi ikkita raqamidan tuzilgan son 25 ga bo'linsin: $a_{m-1} \cdot 10 + a_m = 25 \cdot t$.

U holda, berilgan m xonali N natural sonni

$$N = (a_1 \cdot 10^{m-1} + a_2 \cdot 10^{m-2} + \dots + a_{m-2} \cdot 100) + 25 \cdot t$$

ko‘rinishda yozish mumkin. O‘ng tomondagi ikkita qo‘shiluvchilarning har biri 25 ga bo‘lingani uchun, ularning yig‘indisi bo‘lgan N soni ham 25 ga bo‘linadi.

Yuqorida yuritilgan mulohazalardan foydalanib (to‘liqmas induksiya qo‘llanilmoqda!), «Agar berilgan m xonali natural $N = a_1 \cdot 10^{m-1} + a_2 \cdot 10^{m-2} + \dots + a_{m-1} \cdot 10 + a_m$ sonning oxirgi n ta (bu yerda $n \leq m$) raqamidan tuzilgan son 5^n ga bo‘linsa, N soni ham 5^n ga bo‘linadi» degan farazni aytish mumkin.

6- misol. 2 dan katta bo‘lgan dastlabki bir nechta juft sonlarni ikkita tub sonning yig‘indisi ko‘rinishida tasvirlash mumkin: $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $10 = 3 + 7 = 5 + 5$, ..., $50 = 13 + 37$.

To‘liqsiz induksiya yordamida «2 dan katta bo‘lgan har qanday juft sonni ikkita tub sonning yig‘indisi ko‘rinishida yozish mumkin» degan xulosaga kelamiz. Bu xulosaning to‘g‘ri yoki noto‘g‘ri ekanligi hozirgacha isbotlanmagan. Bu muammo L. Eyley – X. Goldbax muammosi deb yuritiladi.



M a s h q l a r

2.131. Quyidagi tengliklarning tuzilishidagi qonuniyatni aniqlang va uni umumlashtiring: $1^3 = 1^2$; $1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2$; $1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2$;

2.132. $a_4 + a_5 + \dots + a_n$ yig‘indini yunon harfi Σ («sigma») dan

foydalanib, $\sum_{i=4}^n a_i$ ko‘rinishda belgilash mumkin: $\sum_{i=4}^n a_i =$

$$= a_4 + a_5 + \dots + a_n.$$

Quyidagi yig‘indilarni yoyib yozing:

$$\text{a) } \sum_{i=1}^n \frac{2}{i^2}; \quad \text{b) } \sum_{i=1}^n i^3; \quad \text{d) } \sum_{i=1}^n \frac{i}{i+1}; \quad \text{e) } \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i^3}.$$

2.133. Σ belgisi yordami bilan yozing:

a) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$;

b) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + n(3n + 1)$.

2.134. $a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot \dots \cdot a_n$ ko'paytmani yunon harfi Π («pi») dan

foydalanib, $\prod_{i=4}^n a_i$ ko'rinishda belgilash mumkin:

$$\prod_{i=4}^n a_i = a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot \dots \cdot a_n.$$

Ko'paytmalarni yoyib yozing:

a) $\prod_{i=1}^4 \frac{i}{3-i+i^2}$; b) $\prod_{i=1}^5 \frac{i+1}{(i-1)i}$;

d) $\prod_{i=1}^n \left(2 - \frac{3}{i^3}\right)$; e) $\prod_{i=1}^n i^3$.

2.135. Ko'paytmalarni Π belgisi yordami bilan yozing:

a) $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$;

b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{13}{14}$.

2.136. To'liqmas induksiya yordamida « m xonali natural son K ning oxirgi n ta raqamlaridan tuzilgan son 2^n ga (3^n ga) bo'linsa, K sonining o'zi ham 2^n ga (3^n ga) bo'linadi», degan farazni aytish mumkinmi?

2.137. Qadimgi Samarqand madrasalari o'quv qo'llanmalarida sonlar ustida bajarilgan amallar natijalarini tekshirishda *mezon* usulidan foydalanganlar. *Mezon* arabcha so'z bo'lib, o'zbek tilida «o'lcham», «o'lchov» kabi ma'nolarni beradi. Eslatilgan o'quv qo'llanmalarda sonning mezoni sifatida, shu sonni 9 soniga bo'lishda hosil bo'ladigan qoldiq olingan. Masalan, 8 sonining mezoni 8 soniga,

21 sonining mezonini 3 soniga teng deb olingan. Induksiya va 9 ga bo'linish belgisidan foydalanib, quyidagi tasdiqlarni isbot qiling:

a) ko'p xonali sonning mezonini shu son tarkibidagi raqamlar yig'indisining mezoniga teng. Masalan, 467 ning mezonini $4 + 6 + 7 = 17$, $1 + 7 = 8$;

b) ikki son ko'paytmasi (ayirmasi, bo'linmasi)ning mezonini shu sonlar mezonlarining ko'paytmasiga (ayirmasiga, bo'linmasiga) teng.

2. Matematik induksiya metodi. Yuqorida biz to'liqsiz induksiya va to'liq induksiya bilan tanishdik. Ularning birinchisini tatbiq etish noto'g'ri xulosaga olib kelishi mumkin, ikkinchisini tatbiq etish esa ko'p hollarda katta qiyinchilik tug'diradi. Shu bois, ularning tatbiq doirasi tordir. Endi tatbiq doirasi birmuncha kengroq bo'lgan va *matematik induksiya metodi* deb ataluvchi isbotlash usulini qaraymiz. Bu metodning mohiyatini bayon etishdan oldin, bir necha misollar qaraymiz.

1- misol. Agar $4^n > n^2$ ($n \in N$) tengsizlik n ning $n = k$ ($k \in N$) qiymatida to'g'ri bo'lsa, u holda bu tengsizlik n ning $n = k + 1$ qiymatida ham to'g'ri bo'lishini isbotlang.

Isbot. Berilgan tengsizlik n ning $n = k$ qiymatida to'g'ri bo'lgani uchun, $4^k > k^2$ (1) to'g'ri tengsizlikka egamiz. $n = k + 1$ bo'lsa, berilgan tengsizlik $4^{k+1} > (k + 1)^2$ (2) ko'rinishini oladi.

Biz (1) tengsizlikning to'g'ri ekanligidan foydalanib, (2) tengsizlikning to'g'ri ekanligini ko'rsatamiz.

$4^k > k^2$ bo'lgani uchun

$$4^{k+1} = 4 \cdot 4^k > 4k^2 = k^2 + 2k^2 + k^2 \quad (3)$$

tengsizlikni hosil qilamiz. $k^2 \geq k$, $k^2 \geq 1$ bo'lgani uchun, (3) dan $4^{k+1} > k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$ tengsizlik hosil bo'ladi.

Demak, (1) tengsizlikning to'g'ri ekanligidan (2) tengsizlikning ham to'g'ri ekanligi kelib chiqadi, ya'ni $4^n > n^2$ tengsizlik n ning $n = k$ ($k \in N$) qiymatida to'g'ri bo'lsa, u holda bu tengsizlik n ning $n = k + 1$ qiymatida ham to'g'ri bo'ladi.

2- misol. Agar $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ tenglik n ning $n = k$ ($k \in N$) qiymatida to'g'ri bo'lsa, u holda bu tenglik n ning $n = k + 1$ qiymatida ham to'g'ri bo'lishini isbotlang.

I s b o t. Berilgan tenglik $n = k$ bo'lganda

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2 \quad (4)$$

ko'rinishni, $n = k + 1$ bo'lganda esa

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k + 1) = (k + 1)^2 \quad (5)$$

ko'rinishni oladi.

Biz (4) tenglikning to'g'ri ekanligidan, (5) tenglikning ham to'g'ri ekanligi kelib chiqishini ko'rsatamiz.

(4) tenglik to'g'ri bo'lsin. U holda, $1 + 3 + 5 + \dots + (2k + 1) = (1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1)) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$ tenglik, ya'ni (5) tenglik ham to'g'ri bo'ladi.

Demak, $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ tenglik n ning $n = k$ ($k \in N$) qiymatida to'g'ri bo'lsa, u holda bu tenglik n ning $n = k + 1$ qiymatida ham to'g'ri bo'ladi.

Endi quyidagi tasdiqlarni qaraymiz:

- 1) $4^n > n^2$, ($n \in N$);
- 2) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)^2 = n^2$, ($n \in N$).

Bu tasdiqlarning har biri natural son n ga bog'liq bo'lgan tasdiqdır. $n = 1$ bo'lganda ularning ikkalasi ham to'g'ri ekanligini ko'rish qiyin emas.

$4^n > n^2$ tengsizlik $n = k$ ($k \in N$) da to'g'ri deb faraz qilaylik. U holda bu farazdan, $4^n > n^2$ tengsizlikning $n = k + 1$ bo'lganda ham to'g'ri bo'lishi kelib chiqadi (1- misol). Xuddi shunga o'xshash, $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ tenglik $n = k$ da to'g'ri degan farazdan, bu tenglikning $n = k + 1$ uchun ham to'g'ri ekanligi kelib chiqadi (2- misol).

Qaralayotgan tasdiqlarning har biri $n = 1$ da to'g'ri va tasdiq $n = k$ uchun to'g'ri degan farazdan, uning $n = k + 1$ uchun ham to'g'ri ekanligi kelib chiqadi. Shu sababli tasdiq n ning barcha natural qiymatlarida o'rinli bo'ladi. Bunday xulosa chiqarishda matematik induksiya aksiomasi (yoki matematik induksiya prinsipi) asos qilib olinadi.

Matematik induksiya aksiomasi: agar natural son n ga bog'liq bo'lgan $A(n)$ tasdiq $n = k_0$ ($k_0 \in N$) uchun to'g'ri bo'lsa va $A(n)$ tasdiq $n = k$ da (bu yerda $k > k_0$) to'g'ri ekanligidan uning $n = k + 1$

da ham to'g'ri ekanligi kelib chiqsa, u holda $A(n)$ tasdiq barcha $n \geq k_0$ natural sonlar uchun to'g'ri bo'ladi.

Matematik induksiya aksiomasi, natural son n ga bog'liq bo'lgan $A(n)$ tasdiqning barcha natural n larda to'g'ri ekanligini isbotlashning quyidagi usulini beradi:

1) $A(n)$ tasdiqning $n = 1$ da to'g'riligini ko'rsatamiz (induksiya bazisi);

2) $A(n)$ tasdiq $n = k$ da to'g'ri deb faraz qilamiz (induksiya farazi);

3) qilingan farazdan foydalanib, $A(n)$ tasdiq $n = k + 1$ da ham to'g'ri bo'lishligini ko'rsatamiz (induksiya qadami).

$A(n)$ tasdiqning barcha natural n sonlari uchun to'g'ri ekanligini isbotlashning bu usuli *matematik induksiya metodi* deb ataladi. Bu metodning qo'llanishiga doir misol qaraymiz.

3- misol. n ning barcha natural qiymatlarida $n^3 + 11n$ ifodaning qiymati 6 ga bo'linishini isbotlang.

Isbot. Matematik induksiya metodini qo'llaymiz.

1) $n = 1$ bo'lsin. U holda $n^3 + 11n = 1^3 + 11 \cdot 1 = 12$ ga ega bo'lamiz. 12 soni 6 ga bo'linadi.

2) $n = k$ bo'lsa, $n^3 + 11n$ ifodaning qiymati $k^3 + 11k$ soniga teng bo'ladi. Bu son 6 ga bo'linadi deb faraz qilamiz.

3) $n = k + 1$ bo'lsin. U holda, $n^3 + 11n = (k + 1)^3 + 3(k + 1) = (k^3 + 11k) + 3k(k + 1) + 12$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Farazimizga ko'ra, $k^3 + 11k$ soni 6 ga bo'linadi. Ketma-ket keluvchi ikkita natural sonning ko'paytmasi bo'lgan $k(k + 1)$ soni 2 ga bo'lingani uchun, $3k(k + 1)$ soni 6 ga bo'linadi. Shuning uchun $(k^3 + 11k) + 3k(k + 1) + 12$ soni 6 ga bo'linadi.

Demak, n ning barcha natural qiymatlarida $n^3 + 11n$ ifoda 6 ga bo'linadi.

Matematik induksiya metodi biror-bir tasdiqni *hosil qilish* usuli emas, balki *berilgan (tayyor) tasdiqni* isbotlash usuli ekanligini eslatib o'tamiz.

Ba'zan bu metod noto'g'ri ham qo'llanilishi mumkin. Bir misol.

4- m i s o l. Har qanday n natural soni o‘zidan keyin keluvchi $n + 1$ natural soniga «tengdir».

«I s b o t». Har qanday k natural soni uchun tasdiq to‘g‘ri, ya’ni $k = k + 1$ bo‘ladi, deb faraz qilaylik. Agar endi bu tenglikning har ikki qismiga 1 soni qo‘shilsa, $k + 1 = k + 2$ bo‘ladi. Demak, tasdiq barcha n larda «o‘rinli». Bunda isbotning bazis qismi «unutib» qo‘yilgan. Boshidayoq $1 = 2$ bo‘lib qolayotgani ma’lum edi.



M a s h q l a r

2.138. n ning barcha natural qiymatlarida tengsizlik o‘rinli bo‘lishini isbotlang:

a) $2^n \geq n + 1$;

b) $\frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} \leq n$;

d) $(1 + a)^n \geq 1 + na$ (bu yerda $a \geq -1$).

2.139. n ning barcha natural qiymatlarida tenglik o‘rinli bo‘lishini isbotlang:

a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

d) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

e) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot n = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{3}$.

n ning barcha natural qiymatlarida a_n soni b soniga bo‘linishini isbotlang, bunda:

2.140. $a_n = 4^n + 15n - 1$, $b = 9$.

2.141. $a_n = n^3 + 5n$, $b = 6$.

2.142. $a_n = 7^n + 3n - 1$, $b = 9$.

2.143. $a_n = 6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}$, $b = 17$.

2.144. $a_n = (2n - 1)^3 - (2n - 1)$, $b = 24$.

2.145. $a_n = n^3 + 11n$, $b = 6$.

2.146. $a_n = n^2(n^2 - 1)$, $b = 4$.

2.147. $a_n = n(2n + 1)(7n + 1)$, $b = 6$.

2.148. $a_n = 2^n + 2^{n+1}$, $b = 6$.

2.149. $a_n = n^2(n^2 - 1)$, $b = 12$.

2.150. $a_n = 18^n - 1$, $b = 17$.

2.151. $a_n = 3^{3n+2} + 7^n$, $b = 10$.

2.152. $a_n = 7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$, $b = 19$.

2.153. $a_n = 5^{n+3} \cdot 2^n - 125$, $b = 45$.