4. Modul belgisi qatnashgan tengsizliklarni yechish.

1- m i s o l. $|x-2|<1$ tengsizlikni yeching.

Y e c h i s h.

1- *usul.* Tengsizlikning ikkala tomonini kvadratga ko‘taramiz: $(x-2)^2<1$ yoki $x^2-4x+3<0$. Hosil bo‘lgan kvadrat tengsizlikning chap tomonini ko‘paytuvchilarga ajratib, oraliqlar usulini tatbiq etsak, berilgan tengsizlikning barcha yechimlari to‘plami $(1;\ 3)$ oraliqdan iborat ekanligini ko‘ramiz.

2- *usul.* Tengsizlikning chap tomonidagi modul belgisi ostida qatnashgan $x-2$ ikkihad $x=2$ da nolga aylanadi. $x=2$ nuqta son to‘g‘ri chizig‘ini $(-\infty;\ 2)$ va $(2;\ +\infty)$ oraliqlarga ajratadi. Bu oraliqlarning har birida $x-2$ ikkihad o‘z ishorasini saqlaydi. Berilgan tengsizlikni shu oraliqlarning har birida alohida-alohida yechamiz:

$$\begin{cases} x\ge 2, \\ x-2<1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x<2, \\ -(x-2)<1. \end{cases}$$

Birinchi sistemadan $2\le x\le 3$, ikkinchi sistemadan $1<x<2$. Bu ikkala yechimlarni birlashtirsak: $(1;2)\cup[2;\ 3)=(1;3)$.

2- m i s o l. $|2x-1|\le|3x+1|$ tengsizlikni yeching.

Y e c h i s h. Tengsizlikning ikkala tomonini kvadratga ko‘tarsak: $(2x-1)^2\le(3x+1)^2$ yoki $x(x+2)\ge 0$. Bundan $(-\infty;\ -2]\cup[0;\ +\infty)$.

3- m i s o l. $|x|+1\le 2|x-1|+3x$ tengsizlikni yeching.

Y e c h i s h. Modul ishorasi ostida turgan ifodalar $x=0$ va $x=1$ da nolga aylanadi. Bu nuqtalar son o‘qini $(-\infty;\ 0]$, $[0;\ 1]$, $[1;\ +\infty)$ oraliqlarga ajratadi. Ifodalarning bu intervallardagi ishoralari jadvalini tuzamiz:

Ifodalar	$(-\infty;0)$	$(0;1)$	$(1;+\infty)$
x	–	+	+
$x-1$	–	–	+

Berilgan tengsizlik birinchi $(-\infty;\ 0]$ oraliqda $-x + 1 \leq -2(x - 1) + 3x$ ko'rinishga keladi. Ixchamlashtirishlardan so'ng, $-2x \leq 1$ tengsizlik hosil bo'ladi, bundan $-0{,}5 \leq x \leq 0$ ni topamiz. Ikkinchi intervalda berilgan tengsizlik $x + 1 \leq -2(x - 1) + 3x$ ga yoki ayniy almashtirishlardan so'ng $0 \leq x \leq 1$ ko'rinishga keladi. Bu oraliqda ham tengsizlik bajariladi. Uchinchi intervalda tengsizlik $x + 1 \leq 2(x - 1) + 3x$ yoki $x \geq 0{,}75$ ko'rinishga keladi. Lekin uchinchi interval $(1; +\infty)$ edi. $[0{,}75;\ +\infty) \cap [1;\ +\infty) = [1;\ +\infty)$. Topilgan uchta natijani umumlashtirib, berilgan tengsizlikning yechimini yozamiz: $0{,}5 \leq x < +\infty$.

Mashqlar

Modul qatnashgan tengsizliklarni yeching:

6.308. $|a| < 1$.

6.309. $|a| \leq 1$.

6.310. $|a| > 1$.

6.311. $|a| \geq 1$.

6.312. $|a| < 0$.

6.313. $|a| \leq 0$.

6.314. $|a| < -3$.

6.315. $|a| > -1$.

6.316. $|a| \geq -1$.

6.317. $|a| \leq -3$.

6.318. $|x - 1| \leq 0$.

6.319. $|2x - 3| \leq 0$.

6.320. $-3|x - 4| < 0$.

6.321. $3|x - 4| \leq 0$.

6.322. $3|x - 4| \geq 0$.

6.323. $13|x - 4| > 0$.

6.324. $|x^2 - 1| \leq 0$.

6.325. $|x^2 - 1| > 0$.

6.326. $|x^3 - 8| > 0$.

6.327. $\sqrt{x^2} \leq 1$.

6.328. $2|x + 10| > x + 4$.

6.329. $3|x - 1| \leq x + 3$.

6.330. $x^2 - 7x + 12 < |x - 4|$.

6.331. $x^2 - 5x + 9 > |x - 6|$.

6.332. $|x^2 + 3x| \geq 2 - x^2$.

6.333. $|x^2 - 6x + 8| < 5x - x^2$.

6.334. $|x - 2| < 2x - 10$.

6.335. $|x^2 - x - 3| < 9$.

6.336. $\left|\dfrac{x^2 - 3x - 1}{x^2 + x + 1}\right| < 3$.

6.337. $\left|\dfrac{x^2 - 1}{x} + 12\right| < 3x - 1$.

6.338. $|2x-7|\le 5.$

6.339. $|2x-1|\le|x-1|.$

6.340. $\left|\frac{x+4}{x+2}\right|\le 1.$

6.341. $|13-2x|\ge|4x-9|.$

6.342. $|x+1|+4\ge 2|x|.$

6.343. $|2x+3|>|x|-4x-1.$

6.344. $|x-2|+|3-x|\ge 2+x.$

6.345. $|x-1|>|x+2|-3.$

6.346. $|5-x|<|x-2|+|7-2x|.$

6.347. $|x-6|\le|x^2-5x+9|.$

6.348. $|x^3-1|>1-x.$

6.349. $\frac{2x-5}{|x-3|}>-1.$

6.350. $\frac{|4-x|}{x+6}<3.$

6.351. $\frac{|x-2|}{x^2-5x+6}\ge 3.$

6.352. $\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|\le 1.$

6.353. $\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right|\ge 1.$

6.354. $\frac{x^2-|x|-6}{x-2}\ge 2x.$

6.355. $\frac{4x-1}{|x-1|}\ge|x+1|.$

6.356. $\frac{2x}{|x-3|}\le|x|.$

6.357. $x^2\le\left|1-\frac{2}{x^2}\right|.$

6.358. $\frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}\ge 1.$

6.359. $\frac{|x^2-2x|+4}{x^2+|x+2|}\ge 1.$

6.360. $|x-1|-|x-2|+|x+1|>|x+2|+|x|-3.$

6.361. $|x-1|-|x-2|+|x-3|\le 3+|x-4|-|x-5|.$

6.362. $|x+2|-|x+1|+|x|\ge\frac{5}{2}+|x-1|-|x-2|.$

5. Ayniyatlar va tengsizliklarni isbotlash. Ayniyat va tengsizliklarni isbotlashning umumiy usuli mavjud emas. Ayniyat va tengsizliklarni isbotlashda qo‘llaniladigan eng samarali usullardan biri matematik induksiya metodidir.

$A(n)=B(n)$ ayniyatni matematik induksiya metodi yordamida isbotlash uchun dastlab $A(1)=B(1)$ ekaniga ishonch hosil qilish va $A(n+1)-A(n)=B(n+1)-B(n)$ yoki $\frac{A(n+1)}{A(n)}=\frac{B(n+1)}{B(n)}$ ayniyatni isbot qilish yetarli.

1-misol. Barcha $n \in N$ larda quyidagi ayniyatning o'rinli bo'lishini isbot qiling:

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}.$$

Isbot. $A(n)=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$, $B(n)=\frac{n}{3n+1}$ belgilashlarni kiritib, matematik induksiya metodini qo'llaymiz:

$n=1$ da $A(1)=\frac{1}{4}$, $B(1)=\frac{1}{3\cdot 1+1}=\frac{1}{4}$, ya'ni $A(1)=B(1)$ tenglik to'g'ri;

$A(k+1)=A(k)+\frac{1}{((3k+1)-2)((3k+1)-1)}=A(k)+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$ va

$B(k+1)=B(k)+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$ munosabatlarga egamiz.

Bu tengliklardan

$$A(k+1)-A(k)=\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}=B(k+1)-B(k)$$

ekanini ko'ramiz. Demak, ayniyat barcha $n \in N$ larda to'g'ri.

2-misol. $\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(i+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2(n+1)}$ ayniyatni isbotlang.

Isbot. Tenglikning chap qismini $A(n)$, o'ng qismini $B(n)$ orqali belgilaylik. U holda, $A(1)=B(1)=\frac{3}{4}$ va $\frac{A(k+1)}{A(k)}=\frac{B(k+1)}{B(k)}=$ $=\frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2}$ tengliklarga ega bo'lamiz.

Demak, barcha $n \in N$ lar uchun $A(n)=B(n)$.

3-misol. Barcha $x>-1$ va $n \in N$ sonlar uchun $(1+x)^n \geq$ $\geq 1+nx$. (1) *Bernulli tengsizligini* isbot qiling.

Isbot. a) $n=1$ da $1+x \geq 1+x$, ya'ni (1) tengsizlik o'rinli;

b) tengsizlik $n=k$ uchun to'g'ri deb faraz qilaylik: $(1+x)^k \geq$ $\geq 1+kx$;

d) (1) tengsizlik $n=k+1$ uchun ham to'g'ri ekanligini isbotlaymiz: $x+1>0$ va $(1+x)^k \geq 1+kx$ tengsizliklarga asosan, $(1+x)^{k+1}=(1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x)=1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+$

$+ (k+1) \cdot x$ tengsizlikka ega bo'lamiz. Demak, (1) tengsizlik $n = k+1$ uchun ham to'g'ri.

Matematik induksiya aksiomasiga ko'ra, (1) tengsizlik n ning barcha natural qiymatlarida to'g'ri.

$P(x) \le Q(x)$ tengsizlikni isbotlashning yana bir usuli, to'g'riligi oldindan ma'lum bo'lgan $P_1(x) \le Q_1(x)$ tengsizlikda ayniy shakl almashtirishlar bajarib, isbotlanishi kerak bo'lgan $P(x) \le Q(x)$ tengsizlikni hosil qilishdan iborat.

4 - m i s o l. $x^2 + \frac{1}{x^2} \ge 2$ bo'lishini isbot qiling, bunda $x \ne 0$.

I s b o t. $x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2x \cdot \frac{1}{x} = \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^2$ tenglikka egamiz. Bu tenglikning o'ng tomoni barcha $x \ne 0$ larda nomanfiydir: $\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2 \ge 0$.

Oxirgi tengsizlikda ayniy almashtirishlar (chap tomonidagi qavslarni ochish, o'xshash qo'shiluvchilarni ixchamlash va hokazo) bajarib, $x^2 + \frac{1}{x^2} \ge 2$ tengsizlikni hosil qilamiz. Shu bilan tengsizlik isbotlandi.

5 - m i s o l. Ixtiyoriy $x \ge 0$, $y \ge 0$ sonlarining o'rta arifmetik qiymati o'rta geometrik qiymatidan kichik emasligini, ya'ni $\frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy}$ tengsizlik o'rinli ekanini isbot qiling.

I s b o t. Ixtiyoriy $x \ge 0$, $y \ge 0$ sonlar uchun $(x - y)^2 \ge 0$ tengsizlik bajarilishi ravshan. Bu tengsizlikda shakl almashtirishlar bajaramiz: $(x - y)^2 \ge 0 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 \ge 0 \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 - 4xy \ge$ $\ge 0 \Rightarrow (x + y)^2 \ge 4xy \Rightarrow \frac{(x+y)^2}{4} \ge xy$.

Oxirgi tengsizlikning ikki tomoni ham nomanfiy son bo'lganligi uchun tengsizlikning har ikki tomonidan kvadrat ildiz chiqarish mumkin. Ildiz chiqarish natijasida isbotlanishi kerak bo‘lgan $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ tengsizlik hosil bo‘ladi.

Isbot qilingan bu tengsizlik *Koshi tengsizligi* (Ogyusten Lui Koshi, 1789—1857, fransuz matematigi) deb ataluvchi quyidagi tengsizlikning xususiy holidan iborat:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2...a_n} \ . \qquad (2)$$

Bu tengsizlik har qanday $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$, ..., $a_n \geq 0$ sonlar uchun o‘rinli va undagi tenglik ishorasi $a_1 = a_2 = ... = a_n$ bo‘lganda o‘rinli bo‘ladi.

Bu tengsizlikdan quyidagi ikkita muhim natija kelib chiqadi:

1) yig‘indisi o‘zgarmas bo‘lgan musbat qo‘shiluvchilarning ko‘paytmasi, bu sonlar o‘zaro teng bo‘lganda eng katta bo‘ladi;

2) ko‘paytmasi o‘zgarmas bo‘lgan musbat ko‘paytuvchilarning yig‘indisi, bu ko‘paytuvchilar o‘zaro teng bo‘lganda eng kichik bo‘ladi.

6 - m i s o l. $y = \frac{x^5+8}{x}$ funksiyaning $(0; +\infty)$ intervaldagi eng kichik qiymatini toping.

Y e c h i s h. Funksiyani $y = x^4 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x} + \frac{2}{x} + \frac{2}{x}$ elementar qo‘shiluvchilar yig‘indisi ko‘rinishida yozaylik. Bu qo‘shiluvchilarning ko‘paytmasi doimiy: $x^4 \cdot \frac{2}{x} \cdot \frac{2}{x} \cdot \frac{2}{x} \cdot \frac{2}{x} = 16$. Shu sababli $x^4 = \frac{2}{x}$ yoki $x = \sqrt[5]{2}$ bo‘lganda ularning yig‘indisi eng kichik bo‘ladi. Demak, $x = \sqrt[5]{2}$ bo‘lganda berilgan funksiya o‘zining $(0; +\infty)$ oraliqdagi eng kichik qiymati $y(\sqrt[5]{2}) = \frac{(\sqrt[5]{2})^5+8}{\sqrt[5]{2}} = \frac{10\sqrt[5]{16}}{2} = 5\sqrt[5]{16}$ ga erishadi.

7 - m i s o l. $y(x) = x^4(27 - x^4)$ funksiyaning eng katta qiymatini toping.

Y e c h i s h. Funksiya $x < \sqrt[4]{27}$, $x \neq 0$ bo‘lganda musbat qiymatlar qabul qiladi. Shu sababli funksiya o‘zining eng katta qiymatiga x ning $x < \sqrt[4]{27}$, $x \neq 0$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi biror qiymatida erishishi mumkin. x ning $x < \sqrt[4]{27}$, $x \neq 0$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida funksiya ifodasidagi ko‘paytuvchilarning har biri doimiy: $x^4 + (27 - x^4) =$ $=27$. Shu sababli ularning ko‘paytmasi $x^4 = (27 - x^4)$ yoki $x = \sqrt[4]{\frac{27}{2}}$ bo‘lganda eng katta bo‘ladi. Demak, $x = \sqrt[4]{\frac{27}{2}}$ bo‘lganda berilgan funksiya o‘zining eng katta qiymati $y = \left(\sqrt[4]{\frac{27}{2}}\right) = \left(\frac{27}{2}\right)^2$ ni qabul qiladi. Izlanayotgan eng katta qiymat: $\left(\frac{27}{2}\right)^2$.

8 - m i s o l. Teng perimetrli uchburchaklar ichida teng tomonli uchburchak eng katta yuzga ega bo‘lishini isbot qiling.

I s b o t. Perimetri $2p$ (p = const) bo‘lgan barcha uchburchaklarni qaraymiz. Bu uchburchaklarning yuzini Geron formulasi $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ orqali ifodalaymiz, bu yerda a, b, c lar uchburchakning tomonlari.

Ildiz ostidagi ko‘paytuvchilar musbat va ularning yig‘indisi $(p - a) + (p - b) + (p - c) = 3p - (a + b + c) = p =$ const bo‘lgani uchun, $p(p - a)(p - b)(p - c)$ ko‘paytma $p - a = p - b = p - c$ bo‘lganda eng katta bo‘ladi. Bu yerda $a = b = c$ bo‘lganda yuz eng katta bo‘lishi kelib chiqadi. Isbot bo‘ldi.

M a s h q l a r

6.363. Ayniyatlarni isbot qiling:

a) $\frac{1}{1\cdot5} + \frac{1}{5\cdot9} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$;

b) $\frac{1}{1\cdot3\cdot5} + \frac{1}{3\cdot5\cdot7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$;

d) $\frac{1^2}{1\cdot3} + \frac{2^2}{3\cdot5} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$;

e) $x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n = \frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$, bunda $x \neq 1$.

6.364. Agar $a > b > 0$ bo‘lsa, $a^n > b^n$ bo‘lishini isbot qiling.

6.365. Har qanday $n \in N$ da: 1) $2^n > n$; 2) $2^n > 2n + 1$ bo‘lishini isbot qiling:

a) $s = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots +$
$+ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot n} < 2{,}75,\ n \in N$;

b) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3,\ n \in N$;

d) $(m + 1)^m < m^{m+1},\ m \geq 3,\ m \in N$;

e) $99^{66} < 66^{99}$;

f) $x^4 + x^2 + 1 \geq \frac{1}{3}(x^2 + x + 1)^2,\ x \in R$;

g) $a^n + b^n \geq \frac{(a+b)^n}{2^{n-1}},\ a > 0,\ b > 0,\ n \in N$.

6.366. Tengsizliklarni isbotlang:

a) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} > 1$;

b) $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 3,\ n \in N$;

d) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n}$;

e) $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 3\sqrt{n}$, bunda $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$;

f) $\frac{a^6+b^6}{2} \geq a^3b^3$;

g) $(1 + x)^n > 1 + nx$, bu yerda $1 + x > 0,\ n \in N$;

h) $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$, bu yerda $a + b + c = 1,\ a, b, c \in R$;

i) $(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8\ abc$, bu yerda $a,\ b,\ c > 0$;

j) $a^2 + ab + b^2 \geq 0$, bu yerda $a,\ b \in R$;

k) $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$ $(a,\ b \in R)$;

l) $(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8$ $(a,\ b,\ c > 0)$;

m) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ $(a,\ b,\ c > 0)$;

n) $a + b + c \geq \sqrt{ab + ac + bc}$ $(a,\ b,\ c > 0)$;

o) $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c)$ $(a,\ b,\ c > 0)$;

p) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^8 \geq 64ab(a+b)^2$ $(a,\ b \geq 0)$.

6.367. Ko‘rsatilgan oraliqda funksiyaning eng katta qiymatini toping:

a) $y = 25x^3 - 8x^4,\ 0 < x < 5$;

b) $y = 100x^3 - 3x^4,\ 0 < x < 33\frac{1}{3}$;

d) $y = 4x^3 - x^4,\ 0 < x < 4$.

6.368. Funksiyaning eng kichik qiymatini toping:

a) $y = \frac{x+a}{x}$, $a > 0,\ x > 0$; b) $y = x + \frac{20}{x-3}$, $x > 3$;

d) $y = 7x + \frac{100}{x-3}$, $x > 3$; e) $y = \frac{(x+2)(x+18)}{x}$, $x > 0$.

4- §. Tenglamalar sistemasi

1. Tenglamalar sistemalari va majmualari. x va y o‘zgaruvchili

$$\begin{cases} f_1(x, y) = \varphi_1(x, y), \\ f_2(x, y) = \varphi_2(x, y) \end{cases} \qquad (1)$$

sistemani yechish — bu shunday $x = a$ va $y = b$ sonlarini topishki, ular sistemaga qo‘yilganda to‘g‘ri tengliklar hosil bo‘lsin. Agar sistemaning yechimi $(a_1;\ b_1),\ (a_2;\ b_2),\ \ldots,\ (a_n;\ b_n)$ sonlar juftlari bo‘lsa, javob $\{(a_1;\ b_1),\ (a_2;\ b_2),\ \ldots,\ (a_n;\ b_n)\}$ yoki $x_1 = a_1,\ y_1 = b_1;\ \ldots;\ x_n = a_n,\ y_n = b_n$ ko‘rinishda yoziladi. Bu ko‘p o‘zgaruvchili tenglamalar sistemalariga ham taalluqli. Odatda sistema tenglamalari soni o‘zgaruvchilar soniga teng bo‘ladi.

O‘zgaruvchilar sistemani qanoatlantiruvchi qiymatlarga ega bo‘lmasligi mumkin. Masalan, $\begin{cases} x + y = 7, \\ 3x + 3y = 8 \end{cases}$ sistema yechimga ega emas. Yagona yechimga ega sistema *aniq sistema*, yechimlar soni cheksiz ko‘p bo‘lsa, *aniqmas sistema*, yechimga ega bo‘lmasa (ya’ni yechimlarning bo‘sh to‘plamiga ega bo‘lsa), *birgalikda bo‘lmagan* (*noo‘rindosh*) *sistema* deyiladi. Ko‘pincha tenglamalari soni o‘zgaruvchilari sonidan ko‘p bo‘lgan tenglamalar sistemasi noo‘rindosh bo‘ladi.

1 - m i s o l . Ikki o‘zgaruvchili uch tenglamadan iborat ushbu $\begin{cases} x + y = 7, \\ x - y = 1, \\ x^2 + y^2 = 12 \end{cases}$ sistemaning noo‘rindosh ekanini isbot qiling.

Y e c h i s h . Oldingi ikki tenglamadan ($x = 4$; $y = 3$) ni topamiz. U uchinchi tenglamaga qo‘yilsa, $4^2 + 3^2 \neq 12$ bo‘ladi, ya’ni uchinchi tenglama qanoatlanmaydi. Geometrik ma’nosi: $x^2 + y^2 = 12$ aylana $x + y = 7$ va $x - y = 1$ to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi $A(4;\ 3)$ dan o‘tmaydi.

Tenglamalari soni o‘zgaruvchilari sonidan kam bo‘lgan sistemalar ko‘p hollarda noo‘rindosh yoki aniqmas bo‘ladi. Masalan, $\begin{cases} x + y + 2z = 1, \\ 2x + 2y + 4z = 5 \end{cases}$ sistema noo‘rindosh sistemadir.

2 - m i s o l . Ushbu sistemaning aniqmas sistema ekanligini ko‘rsating: $\begin{cases} x^2 + 4y = 10, \\ x^2 + y - 2z = 3. \end{cases}$

Y e c h i s h . Birinchi tenglamadan $x^2 = 10 - 4y$ ni topib, ikkinchi tenglamaga qo‘ysak: $-3y - 2z = -7$ yoki $z = -1{,}5y + 3{,}5$. O‘zgaruvchi y ga ixtiyoriy qiymat berilib, x va z ning mos qiymatlari topiladi. Sistema cheksiz ko‘p yechimga ega. $x^2 = 10 - 4y \geq 0$, demak, y ning qiymatlari $(-\infty;\ 2{,}5]$ oraliqdan olinadi.

Tenglamalari soni o‘zgaruvchilari soniga teng yoki undan ortiq bo‘lgan tenglamalar sistemalari ham aniqmas sistema bo‘lishi mumkin. Masalan, $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5, \\ 3x^2 - 3y^2 = 15 \end{cases}$ va $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5, \\ 3x^2 - 3y^2 = 15, \\ 6x^2 - 6y^2 = 30 \end{cases}$ sistemalar cheksiz ko‘p yechimga egadir.

Agar tenglamalar sistemasi *simmetrik* bo‘lsa (o‘zgaruvchilarni o‘rin almashtirish, bir yoki bir necha o‘zgaruvchi oldida turgan ishoralarni almashtirishdan sistema tarkibidagi tenglamalar o‘zgarmasa), uning *yechimlar to‘plami* ham *simmetrik* bo‘ladi.

3-misol. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41, \\ xy = 20 \end{cases}$ sistemaning yechimlaridan biri (4; 5). O‘zgaruvchilarning simmetriyasiga ko‘ra (5; 4) ham sistemani qanoatlantiradi. O‘zgaruvchilar ishoralari almashtirilsa, tenglamalar o‘zgarmaydi. Demak, (–4; –5) va (–5; –4) ham yechim.

Javob: {(4; 5), (5; 4), (–4; –5), (–5; –4)}.

$f_1(x, y) = 0$ va $f_2(x, y) = 0$ tenglamalar berilgan bo‘lsin, ularning kamida bittasini qanoatlantiradigan barcha $(x; y)$ juftlarni topish masalasi qo‘yilgan bo‘lsin. Bunday holda $f_1(x, y) = 0$ va $f_2(x, y) = 0$ tenglamalardan tuzilgan tenglamalar majmuasi berilgan deyiladi. *Tenglamalar majmuasi* tenglamalar sistemasidan farqli ravishda $\left[\begin{array}{l} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0 \end{array}\right.$ yoki $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 0$ ko‘rinishda yoziladi. Majmua tenglamalardan aqalli birini qanoatlantiruvchi $(a; b)$ sonlar juftlarini topish talab qilinayotganini anglatadi. Agar har qaysi tenglama biror chiziqni bersa, majmua shu chiziqlar birlashmasini, ularning $\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases}$ sistemasi shu chiziqlarning kesishmasini (umumiy qismini) beradi,

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f_1(x,\ y) = 0, \\ \varphi_1(x,\ y) = 0; \end{cases} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \begin{cases} f_n(x,\ y) = 0, \\ \varphi_n(x,\ y) = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

majmua barcha

$\begin{cases} f_k(x,\ y) = 0, \\ \varphi_k(x,\ y) = 0, \end{cases}$ $1 \le k \le n$ sistemalarni yechish va yechimlarini birlashtirish kerakligini anglatadi.

4-misol. $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3 \end{cases} \end{array}\right.$ tenglamalar sistemalari majmuasini yeching.

Yechish. Birinchi sistema yechimi $\{(2;\ 1),\ (1;\ 2)\}$, ikkinchisiniki $\{(3;\ 1),\ (1;\ 3),\ (-1;\ -3),\ (-3;\ -1)\}$.

Javob: $\{(2;\ 1),\ (1;\ 2),\ (3;\ 1),\ (1;\ 3),\ (-1;\ -3),\ (-3;\ -1)\}$.

Agar chiziqli tenglamalar sistemasida ozod hadlardan aqalli biri noldan farqli bo‘lsa, u *bir jinsli bo‘lmagan tenglamalar sistemasi,* ozod hadlarning hammasi nolga teng bo‘lsa, *bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi* deyiladi.

Mashqlar

Tenglamalar sistemalari majmualarini yeching:

6.369. $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - y = 3, \\ xy = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - y^2 = 8, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases} \end{array}\right.$

6.370. $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 = 4x + 5y, \\ y^2 = 5x + 4y; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = 2. \end{cases} \end{array}\right.$

6.371. $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x + y - 3z + 2u = 0,\\ 3x + 3y - 3z + u = 0;\end{cases}\\ \begin{cases}4x - 3y + 3z - u = 0,\\ 5x + 2y - 4z + 2u = 0.\end{cases}\end{array}\right.$

6.372. $\left[\begin{array}{l}x + 8y = 25,\\ x - y = 1,\\ x + y^2 = 15\end{array}\right.$ sistemaning noo'rindosh ekanini isbot qiling.

6.373. Sistemalar bitta yechimi bilan berilgan. Sistemalarning simmetrikligidan foydalanib, ularning qolgan yechimlarini toping:

a) $\begin{cases}x^4 + y^4 = 82,\\ x + y = 4,\end{cases}$ $(1;\ 3)$; b) $\begin{cases}\dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = \dfrac{29}{6},\\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6},\end{cases}$ $(2;\ 3)$.

d) $\begin{cases}x + y = 1,\\ x^3 + y^3 = 7,\end{cases}$ $(2;\ -1)$; e) $\begin{cases}x^3 + y^3 = 35,\\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6},\end{cases}$ $(2;\ 3)$;

f) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^4 + y^4 = 17,\\ x^2 + y^4 = 5;\end{cases}\\ \begin{cases}x + y = 5,\\ x^5 + y^5 = 275.\end{cases}\end{array}\right.$ $(1;\ 2),\ (2;\ 3)$.

2. Tenglamalar sistemalarining geometrik ma'nosi. Har qanday f uzluksiz funksiyaga Γ chiziq — uning grafigi mos keladi. Lekin har qanday chiziq ham biror funksiyaning grafigi bo'lavermaydi. Masalan, markazi koordinatalar boshida bo'lgan R radiusli aylana hech bir funksiyaning grafigi bo'la olmaydi, chunki aylanada ayni bir x abssissali ikkita $(x;\ \sqrt{R^2 - x^2})$ va $(x;\ -\sqrt{R^2 - x^2})$ nuqta mavjud. Bu esa x ning har bir joiz qiymatiga

y ning ikkita $+\sqrt{R^2 - x^2}$, $-\sqrt{R^2 - x^2}$ qiymati to‘g‘ri kelishini ko‘rsatadi.

$y = +\sqrt{R^2 - x^2}$ va $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ funksiyalarning grafiklari markazi koordinatalar boshida bo‘lgan R radiusli aylanani hosil qiladi. Bu aylananing tenglamasi $x^2 + y^2 = R^2$ dan iborat.

Markazi $A(a;\, b)$ nuqtada bo‘lgan R radiusli aylanani qaraymiz. Uning ixtiyoriy $M(x;\, y)$ nuqtasidan A markazgacha bo‘lgan masofa ham R ga, ham $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ ga teng. Shuning uchun, $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R.$ Bu tenglikdan, aylana tenglamasi

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \qquad (1)$$

ni hosil qilamiz. (1) tenglama markazi $A(a;\, b)$ nuqtada bo‘lgan R radiusli aylananing *kanonik* (sodda) *tenglamasi* deyiladi. Bu tenglamani quyidagi ko‘rinishda ham yozish mumkin:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = C. \qquad (2)$$

Bu yerda, $C = R^2 - a^2 - b^2$.

1 - m i s o l. Markazi $M(-2;\, 3)$ va radiusi $R = 8$ bo‘lgan aylananing tenglamasini tuzing.

Y e c h i s h. (1) yoki (2) formula bo‘yicha:

$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 64$ yoki $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 51 = 0$.

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = 0$ tenglama «nol radiusli» aylanani, ya’ni $A(a;\, b)$ nuqtani ifodalaydi.

Har biri biror chiziqning tenglamasi bo‘lgan tenglamalar sistemasini yechish, geometrik jihatdan, shu tenglamalar ifodalagan chiziqlarning kesishish nuqtalarini topishni anglatadi.

2 - m i s o l. $\begin{cases} \left(x + \frac{7}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{85}{16}, \\ y = 0{,}5x + 2 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini qaraymiz.

Birinchi tenglama markazi $\left(-\frac{7}{4}; \frac{1}{2}\right)$ nuqtada bo‘lgan $R = \sqrt{\frac{85}{16}}$ radiusli aylananing, ikkinchi tenglama esa to‘g‘ri chiziq tenglamasidir. Bu sistemani yechish, geometrik jihatdan, eslatilgan chiziqlar kesishish nuqtalarini topish demakdir.

Chiziqlar $A(0; 2)$, $B(-4; 0)$ nuqtalarda kesishadi. Shuning uchun berilgan sistema $(0; 2)$, $(-4; 0)$ yechimlarga ega.

Tekislikning koordinatalari $f(x;\ y)\cdot\varphi(x;\ y) = 0$ tenglamani qanoatlantiruvchi barcha $(x;\ y)$ nuqtalarining geometrik o‘rni tekislikning koordinatalari $f(x;\ y) = 0$ yoki $\varphi(x;\ y) = 0$ tenglamani qanoatlantiruvchi barcha $(x;\ y)$ nuqtalaridan tashkil topadi.

3-misol. Tenglamasi $(x-8)(y+9) = 0$ bo‘lgan geometrik o‘rinni toping. Buning uchun $\left[\begin{array}{l} x-8=0, \\ y+9=0 \end{array}\right.$ tenglamalar majmuasidan foydalanamiz. $x-8=0$ tenglamaning yechimi $x = 8$ dan, $y+9=0$ ning yechimi $y = -9$ dan iborat. Geometrik jihatdan majmua $A(8; 0)$ nuqtadan o‘tuvchi va Oy o‘qqa parallel bo‘lgan $x = 8$ to‘g‘ri chiziq hamda $B(0; -9)$ nuqtadan o‘tuvchi va Ox o‘qiga parallel bo‘lgan $y = -9$ to‘g‘ri chiziqlarga tegishli nuqtalar to‘plamini ifodalaydi.

Mashqlar

6.374. a) Shunday tenglamani tuzingki, uni faqat uchta $A(1; 1)$, $B(-2; 2)$, $C(0; 0)$ nuqtalar qanoatlantiradigan bo‘lsin;

b) aylananing markazini va radiusini toping:

1) $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 3$; 2) $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 1 = 0$;

3) $x^2 + y^2 + 12x - 6y = 4$; 4) $x^2 + y^2 + 10x - 6 = 0$;

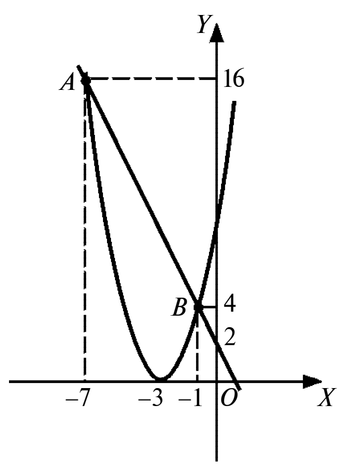
d) markazi $A(a;\ b)$ va radiusi R bo‘lgan aylananing tenglamasini tuzing:

1) $a = 2$, $b = -1$, $R = 4$; 2) $a = -5$, $b = 4$, $R = 8$.

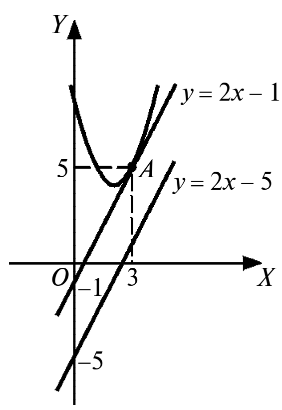
3. Tenglamalar sistemasini grafik usulda yechish. Geometrik jihatdan ikki o'zgaruvchili $\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yechish $f(x; y) = 0$ va $\varphi(x; y) = 0$ tenglamalar bilan berilgan Γ_1 va Γ_2 chiziqlarning kesishish nuqtalari koordinatalarini izlashdan iborat. Grafik usuldan yechimni taqribiy baholashda foydalaniladi. Chizmalar mumkin qadar aniq chizilishi kerak. Millimetrli qog'ozlardan foydalangan ma'qul.

1 - m i s o l. $\begin{cases} x^2 + 6x - y = -9, \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini grafik usulda yeching.

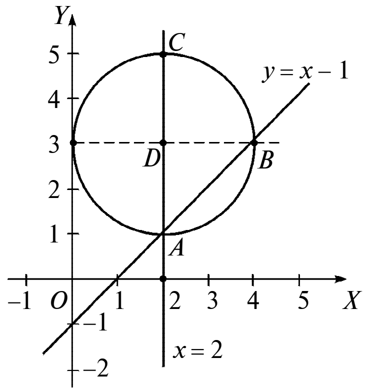
Y e c h i s h. Birinchi tenglama $y = x^2 + 6x + 9$, ya'ni $y = (x + 3)^2$ parabolani (Γ_1 ni), ikkinchi tenglama esa $y = -2x + 2$ to'g'ri chiziqni (Γ_2 ni) beradi (25- rasm). Bu chiziqlar $A(-7;\ 16)$ va $B(-1;\ 4)$ nuqtalarda kesishadi. Sistemaning yechimi: $\begin{cases} x_1 = -7, \\ y_1 = 16 \end{cases}$ va $\begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = 4. \end{cases}$



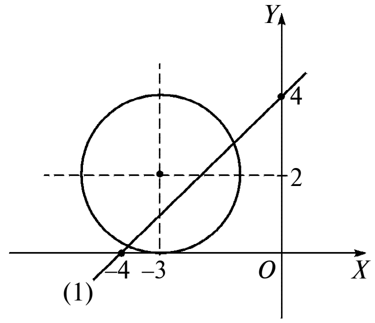
25- rasm.



26- rasm.



27- rasm.



28- rasm.

2 - m i s o l. 26- rasmda $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 8, \\ y = 2x - 1 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini grafik yechish tasvirlangan. $y = 2x - 1$ to'g'ri chiziq $A(3; 5)$ nuqtada $y = x^2 - 4x + 8 = (x - 2)^2 + 4$ parabolaga urinadi. Demak, sistema yagona yechimga ega: $x = 3$, $y = 5$.

3 - m i s o l. $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 8, \\ y = 2x - 5 \end{cases}$ sistemani grafik usulda yeching.

Y e c h i s h. Yechim 26- rasmda tasvirlangan. $y = x^2 - 4x + 8$ parabola va $y = 2x - 5$ to'g'ri chiziq kesishmaydi. Sistema yechimga ega emas.

4 - m i s o l. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0, \\ x^2 - xy - 3x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini grafik usulda yeching.

Y e c h i s h. Birinchi tenglamani $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$ ko'rinishga keltiramiz. Uning grafigi markazi $D(2; 3)$ nuqtada bo'lgan $R = 2$ radiusli aylanadan iborat.

Ikkinchi tenglama chap qismini ko'paytuvchilarga ajratish bilan $(x - 2)(x - y - 1) = 0$ tenglamaga keladi. Uning grafigi $x = 2$ va $y = x - 1$ tenglamalar bilan aniqlangan to'g'ri chiziqlar birlashmasidan iborat.

Ayni bir koordinatalar tekisligida yuqorida aytilgan aylanani va to‘g‘ri chiziqlarni yasaymiz (27- rasm). Ular $A(2; 1)$, $B(4; 3)$ va $C(2; 5)$ nuqtalarda kesishadi. Demak, berilgan sistema uchta yechimga ega: (2; 1), (4; 3), (2; 5).

M a s h q l a r

6.375. Quyidagi tenglamalar sistemalarini grafik usulda yeching, topilgan javoblarni o‘rniga qo‘yish usuli bilan tekshiring:

a) $\begin{cases} x^2 = y - 4, \\ y^2 = x + 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - 4x - 9y = 14, \\ y^2 + 6y - x = -10; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ xy = 1; \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2 + 6x - 3y = -14, \\ x^2 + 4y = 13; \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2 + y^2 = -8, \\ x^2 + (y-9)^2 = 125; \end{cases}$ g) $\begin{cases} x^2 - (y-1)^2 = -1, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$

6.376. 28- rasmda tasvirlangan (1) to‘g‘ri chiziq koordinata o‘qlarini $x=-4$ va $y=4$ nuqtalarda kesadi, aylana Ox o‘qqa $x=-3$ nuqtada urinadi. Ularning tenglamalarini tuzing va kesishish nuqtalari koordinatalarini toping.

4. Teng kuchli sistemalar. Ko‘paytuvchilarga ajratish usuli. Tenglamalar sistemalarini yechishda ularni $\begin{cases} x = a, \\ y = b \end{cases}$ ko‘rinishdagi eng oddiy tenglamalar sistemasiga yoki sistemalar majmuasiga kelguncha teng kuchli sistemalar bilan almashtiriladi. Agar ikki tenglamalar sistemasi bir xil yechimga ega bo‘lsa, ular *teng kuchli sistemalar* deyiladi. Agar ularning X_1 va X_2 yechimlari har xil, lekin bu yechimlarning biror Y to‘plam bilan kesishmalari bir xil bo‘lsa, ular *Y to‘plamda teng kuchli bo‘lgan sistemalar* deyiladi. Har qanday ikki noo‘rindosh sistema ham o‘zaro teng kuchlidir, chunki ularning ikkalasi ham bo‘sh to‘plamdan iborat yechimga ega. Odatda teng kuchlilik « ~ » belgi orqali belgilanadi.

Tenglamalar sistemalarini yechishda bir o‘zgaruvchili tenglamalarni yechishdagi kabi ko‘paytuvchilarga ajratish ham qo‘llaniladi. Bu usul quyidagi teoremaga asoslanadi:

T e o r e m a . ***Biror X to‘plamda aniqlangan $f_1(x; y)$, ..., $f_n(x; y)$ funksiyalar qatnashgan***

$$\begin{cases} f_1(x, y) \cdot \ldots \cdot f_n(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

tenglamalar sistemasi shu to‘plamda

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0; \end{cases} \ldots; \begin{cases} f_n(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

tenglamalar sistemalari majmuasiga teng kuchlidir.

I s b o t . (a; b) sonlar jufti (1) sistemani qanoatlantirsin. U holda ko‘payuvchilar orasida hech bo‘lmaganda bittasi nolga teng bo‘lishi kerak, $f_k(a,\ b) = 0,\ 1 \le k \le n$. Shunga ko‘ra, ($a$; b) juft $\begin{cases} f_k(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini, demak, (2) tenglamalar sistemalari majmuasini ham qanoatlantiradi. Aksincha, agar (a; b) sonlar jufti (2) majmuani qanoatlantirsa, u holda shunday k – ko‘paytuvchi mavjud bo‘ladiki, unda bu sonlar jufti $\begin{cases} f_k(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0, \end{cases}$ $1 \le k \le n$, sistemani ham qanoatlantiradi, ya’ni $f_k(a,\ b) = 0$, $\varphi(a;\ b) = 0$ bo‘ladi. Barcha f_k funksiyalar X to‘plamda aniqlanganligidan, ular $M(a,\ b)$ nuqtada ham aniqlangandir va shuning uchun $f_1 \cdot \ldots \cdot f_n$ ko‘paytma ham nolga aylanadi. Demak, (a; b) juft (2) sistemani qanoatlantiradi.

1- m i s o l .

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 - 13)(x + y - 7) = 0, \\ xy = 6 \end{cases} \tag{3}$$

sistemani yeching.

Yechish. (3) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + y^2 - 13 = 0, \\ xy = 6; \end{cases} \\ \begin{cases} x + y - 7 = 0, \\ xy = 6 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \{(2;\ 3),\ (3;\ 2),\ (-2;\ -3),\ (-3;\ -2)\}; \\ \{(1;\ 6),\ (6;\ 1)\}. \end{array}\right.$$

Javob: $\{(2;\ 3),\ (3;\ 2),\ (-2;\ -3),\ (-3;\ -2),\ (1;\ 6),\ (6;\ 1)\}$ yoki

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 3; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 2; \end{cases} \begin{cases} x_3 = -2, \\ y_3 = -3; \end{cases} \begin{cases} x_4 = -3, \\ y_4 = -2; \end{cases} \begin{cases} x_5 = 1, \\ y_5 = 6; \end{cases} \begin{cases} x_6 = 6, \\ y_6 = 1. \end{cases}$$

Agar sistema $\begin{cases} f_1(x,y) \cdot \ldots \cdot f_n(x,y) = 0, \\ \varphi_1(x,y) \cdot \ldots \cdot \varphi_n = 0 \end{cases}$ ko‘rinishda berilsa, uni yechish $\begin{cases} f_k(x,y) = 0, \\ \varphi(x;y) = 0 \end{cases}$ sistemalar majmuasini yechishga keladi, $1 \le k \le n,\ 1 \le l \le m.$

Ushbu $\begin{cases} f(x,y) = 0, \\ g(x;y) = 0 \end{cases}$ sistemada f va g ko‘phadlardan biri, masalan, $f(x;\ y)$ x va y ga nisbatan bir jinsli bo‘lsin va uning barcha hadlari x^k ga bo‘linsin. U holda x^k umumiy ko‘paytuvchi qavsdan tashqariga chiqariladi, ko‘phad $f(x,\ y) = x^k \cdot f_1(x,\ y)$ ko‘paytma ko‘rinishiga keladi va berilgan sistemani yechish masalasi $\begin{cases} x^k = 0, \\ g(x;y) = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} f_1(x,y) = 0, \\ g(x;y) = 0 \end{cases}$ majmuani yechishga keladi.

2-misol. $\begin{cases} 2x^3 + 3x^2y - 2xy^2 = 0, \\ x^2 + 2y^2 = 9 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

Y e c h i s h . Sistemaning birinchi tenglamasi bir jinsli, chap qismi x ga bo‘linadi. x ni qavsdan tashqariga chiqaramiz. Masala ushbu majmuani yechishga keladi:

$$\begin{cases} x = 0, \\ x^2 + 2y^2 = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 + 3xy - 2y^2 = 0, \\ x^2 + 2y^2 = 9. \end{cases}$$

Birinchi sistema $x = 0,\ y^2 = \frac{9}{2}$ sistemaga teng kuchli, undan $x_1 = 0,\ y_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ yoki $x_2 = 0,\ y_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ni topamiz. Ikkinchi sistema yechimi: (1; 2), (–1; –2).

Ikkala sistema yechimlari majmuasi $\left\{\left(0;\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\right);\ \left(0;\ -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right);\ (1;\ 2);\ (1;\ -2)\right\}$ berilgan sistema yechimini beradi.

Mashqlar

6.377. Sistemalarni teng kuchlilikka tekshiring va ularni yeching:

a) $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ 3x - 4 = 1 \end{cases}$ va $\begin{cases} (2x + y)(x^2 + y^2) = 7(x^2 + y^2), \\ (3x - 4)(x - y) = x - y; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ 3x - 4 = 1 \end{cases}$ va $\begin{cases} \frac{2x+7}{x^2+y^2} = \frac{7}{x^2+y^2}, \\ \frac{3x-4}{x-y} = \frac{1}{x-y}; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2 = y + 2, \\ x - 2 = 0 \end{cases}$ va $\begin{cases} x^2 = 4, \\ y = -\sqrt{x}; \end{cases}$

e) $\begin{cases} \sqrt{x} = y^2, \\ \sqrt{y} = x^2 \end{cases}$ va $\begin{cases} x^2 = y^4, \\ y^2 = x^4. \end{cases}$

5. Tenglamalar sistemasini algebraik qo'shish usuli yordamida yechish. Bu usul bizga tanish. Uning asosida ushbu teorema yotadi.

T e o r e m a . ***(a; b) sonlar juftlarida aniqlangan $\psi(x;\ y)$, $f(x;\ y)$, $\varphi(x;\ y)$ funksiyalarning***

$$\begin{cases} f(x;\ y) = 0, \\ \varphi(x;\ y) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

sistemasi

$$\begin{cases} f(x;\ y) = 0, \\ \varphi(x;\ y) + \psi(x;\ y)f(x;\ y) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

sistemaga teng kuchlidir.

I s b o t . Agar $(a;\ b)$ sonlar jufti (1) sistemani qanoatlantirsa, ya'ni $f(a;\ b) = 0$, $\varphi(a;\ b) = 0$ bo'lsa, $\psi(a;\ b)\times f(a;\ b)=0$ bo'ladi, bundan $\varphi(a;\ b)+\psi(a;\ b)\cdot f(a;\ b)=0$ kelib chiqadi. Demak, $(a;\ b)$ juft (2) tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi. Aksincha, $(a;\ b)$ sonlar jufti (2) sistemani qanoatlantirsa, ya'ni $f(a;\ b) = 0$, $\varphi(a;\ b) + \psi(a;\ b)\cdot f(a;\ b)=0$ bo'lsa, $\varphi(a;\ b) = 0$ tenglik ham to'g'ri bo'ladi. Shunga ko'ra $(a;\ b)$ juft (1) sistemani qanoatlantiradi. Teorema isbot qilindi.

M i s o l . $\begin{cases} x^2 + 3y^2 + 2x - y = 7, \\ 2x^2 + 6y^2 - 2x + 4y = 2 \end{cases}$ (3) tenglamalar sistemasini yechamiz.

Y e c h i s h . Ikkinchi tenglamani -2 ga bo'lib, birinchi tenglamaga hadlab qo'shamiz va almashtirishlarni bajaramiz:

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3y^2 + 2x - y = 7, \\ -x^2 - 3y^2 + x - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3y^2 + 2x - y = 7, \\ 3x - 3y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3(x-2)^2 + 2x - (x-2) = 7, \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 11x + 7 = 0, \\ y = x - 2. \end{cases}$$

Bundan $(1; -1)$, $\left(1\frac{3}{4}; -\frac{1}{4}\right)$ yechimlarni hosil qilamiz.

Mashqlar

6.378. Sistemalarni yeching:

a) $\begin{cases} x^2 + xy + 2y^2 = 7, \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + xy = 12, \\ xy - y^2 = 2. \end{cases}$

6. Noma'lumlarni chiqarish usuli. Gauss usuli. Bu usul asosida tenglamalar sistemasi yoki majmuasini ayniy almashtirishlar bilan o'zgaruvchilar soni bitta kam bo'lgan teng kuchli tenglamalar sistemasi yoki majmuasiga keltirish haqidagi fikr yotadi: $\begin{cases} y = f(x), \\ \varphi(x; y) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x), \\ \varphi(x; f(x)) = 0. \end{cases}$ Masala $\varphi(x; f(x)) = 0$ tenglamadan x ni aniqlash, so'ng $y = f(x)$ bo'yicha y ni topish bilan hal bo'ladi. $\begin{cases} f(x) = 0, \\ \varphi(x; y) = 0 \end{cases}$ ko'rinishdagi sistemani yechish uchun, oldin tenglamalardan biri o'zgaruvchilardan biriga nisbatan yechiladi.

1-misol. $\begin{cases} xy = 8, \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Birinchi tenglamadan $y = \frac{8}{x}$ ni topib, ikkinchi tenglamaga qo'ysak: $x^2 + \frac{64}{x^2} = 20$ yoki soddalashtirishlardan so'ng $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$ bikvadrat tenglama olinadi. Uning ildizlari: $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 2$, $x_4 = -4$. Bu ildizlarga $y_1 = 4$, $y_2 = 2$, $y_3 = -4$, $y_4 = -2$ mos keladi.

2-misol. Uch noma'lumli ikki tenglamadan iborat $\begin{cases} x + y = 6, \\ xy - z^2 = 9 \end{cases}$ (1) sistemani yeching.

Y e c h i s h . $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - x, \\ xy = 9 + z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - x, \\ xy \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - x, \\ x(6 - x) \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - x, \\ x^2 - 6x + 9 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - x, \\ (x - 3)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - x, \\ (x - 3)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{x = 3,\ y = 3,\ z = 0\}.$$

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda, xususan, tenglamalar soni ko‘p bo‘lgan holda, *Gaussning noma’lumlarni ketma-ket chiqarish usulidan* foydalanish ma’qul (Karl Fridrix Gauss (1777—1855), buyuk nemis matematigi). Usulning mohiyatini misol yordamida tushuntiramiz.

3- m i s o l . $\begin{cases} 2x + 7y - 4z = -13, \\ 5x + 10y - z = -7, \\ 4x - 6y + z = 12 \end{cases}$ sistemani Gauss usuli bilan yeching.

Y e c h i s h . 1-qadam: a) birinchi tenglamadagi x o‘zgaruvchi oldidagi koeffitsiyentni 1 ga aylantiramiz. Buning uchun shu tenglamani 2 ga bo‘lamiz. Natijada tenglama $x + \frac{7}{2}y - 2z = -\frac{13}{2}$ (2) ko‘rinishni oladi;

b) sistemaning ikkinchi tenglamasidan beshga ko‘paytirilgan (2) tenglamani, uchinchi tenglamasidan esa 4 ga ko‘paytirilgan (2) tenglamani ayirsak, ushbu sistema hosil bo‘ladi:

$$\begin{cases} x + \frac{7}{2}y - 2z = -\frac{13}{2}, \\ \frac{15}{2}y - 9z = -\frac{51}{2}, \\ 20y - 9z = -38. \end{cases} \qquad (3)$$

Bu sistemaning ikkinchi va uchinchi tenglamalarida x o‘zgaruvchi qatnashmaydi.

2- q a d a m : a) (3) sistema ikkinchi tenglamasini 15/2 ga bo‘lsak, bosh koeffitsiyenti 1 ga aylanadi, so‘ng tenglamani 20 ga ko‘paytirib, uchinchi tenglamadan ayiramiz. Uchinchi tenglamadan y o‘zgaruvchi chiqarilgan bo‘ladi va sistema uchburchaksimon shaklga keladi:

$$\begin{cases} x + \frac{7}{2}y - 2z = -\frac{13}{2}, \\ y - \frac{6}{5}z = -\frac{17}{5}, \\ -15z = -30. \end{cases} \tag{4}$$

b) t e s k a r i q a d a m : (4) sistemaning uchinchi tenglamasidan $z = 2$ topiladi, bu qiymat ikkinchi tenglamaga qo‘yilib, $y = -1$, so‘ng $z = 2$, $y = -1$ lar birinchi tenglamaga qo‘yilib, $x = 1$ topiladi. J a v o b : (1; –1; 2). Albatta, (3) sistemaning ikkinchi va uchinchi tenglamalarida z ning koeffitsiyentlari bir xil ekanidan foydalanib, ularning biridan ikkinchisini ayirish ham mumkin edi.

Gauss usuli qo‘llanilishi jarayonida $0 \cdot x = 5$ yoki o‘zgaruvchilarning izlanayotgan qiymatlari musbat bo‘lish sharti qo‘yilgan holda $5x + 4y = -1$ kabi zid ma’noli ifodalar hosil bo‘lsa, sistema noo‘rindosh bo‘ladi. Shuningdek, natija trapetsiyasimon sistemani hosil qilish bilan tugasa, sistema cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi.

4- m i s o l . $\begin{cases} x + y - z = 3, \\ 2x - y - 3z = -1, \\ x - 2y - 2z = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 3, \\ 3y + z = 7, \\ 3y + z = 7 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 - y + z, \\ z = 7 - 3y, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 - 4y, \\ z = 7 - 3y. \end{cases}$$

Yechim cheksiz ko‘p. Masalan, $y = 0$ bo‘lsa, $z = 7$, $x = 10$ bo‘ladi. J a v o b : $\{(10 - 4y;\ y;\ 7 - 3y) | y \in R\}$.

Mashqlar

6.379. Sistemalarni yeching:

a) $\begin{cases} x + 4y - z = -7, \\ 5x + 10y - z = -7, \\ 4x - 6y + z = 12; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 4y + 5z = 17, \\ 2x + 4y - 3z = -8, \\ x - 6y + 8z = 23; \end{cases}$

d) $\begin{cases} z + 5 = 3x, \\ 2x + 6y + 4z = 10, \\ 8y - 5x + 8 = 19; \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x + y - z = -4, \\ 3x - y + z = 4; \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y + z = 14, \\ x + 2y + t = 7, \\ y + 2z + 2t = 30, \\ x + z + t = 15; \end{cases}$ g) $\begin{cases} x + 2y - z + 2t = -7, \\ 3x - y + 2z + 6t = 1, \\ 2x + 8y - 3z + 5t = -23, \\ 4x + y + 12z - 3t = 49; \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2{,}8x + 3{,}4y + 1{,}4z = 2{,}2, \\ 3{,}6x - 1{,}8y + 2{,}9z = 1{,}8, \\ 4{,}2x + 5{,}2y - 1{,}7z = 0{,}9; \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x + 3y + z - 2t = -2, \\ 3x + 2y - 2z + 3t = 1, \\ 4x - 2y + 2z - 3t = 6. \end{cases}$

7. O‘zgaruvchilarni almashtirish usuli. Tenglamalarni yechishda bu usuldan foydalanganmiz. Usul qo‘llanilganda berilgan sistemadagi ayrim ifodalar yangi o‘zgaruvchilar sifatida qabul qilinadi. Natijada sistema nisbatan sodda sistemaga keladi. Yangi sistema yechilgach, tanlangan ifodalarning qiymatlari, so‘ng ular bo‘yicha oldingi o‘zgaruvchilarning izlanayotgan qiymatlari topiladi. Xususan, bu almashtirishlar simmetrik tenglamalar sistemalariga nisbatan bajariladi.

1-misol. Ushbu sistemani yeching:

$$\begin{cases} x^3y + xy^3 = 10, \\ xy + x^2 + y^2 = 7. \end{cases} \qquad (1)$$

Yechish. Birinchi tenglamada xy ni qavsdan tashqariga chiqarsak, $xy(x^2+y^2)=10$ tenglama hosil bo'ladi. $xy=u$, $x^2+y^2=v$ almashtirish kiritamiz. Berilgan sistemaga nisbatan sodda sistema hosil bo'ladi: $\begin{cases} uv = 10, \\ u + v = 7. \end{cases}$ Bu sistemaning yechimi: $(u=2;\ v=5)$, $(u=5;\ v=2)$.

(1) sistema $\begin{cases} xy = 2, \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ (2), $\begin{cases} xy = 5, \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ (3) tenglamalar sistemalari majmuasiga keladi:

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy = 1, \\ x^2 + 2xy + y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 = 1, \\ (x+y)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = -3; \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = -1, \\ x + y = 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = -1, \\ x + y = -3. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \{(2;\ 1),\ (-1;\ -2),\ (1;\ 2),\ (-2;\ -1)\}.$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 = -3, \\ (x+y)^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$$ Bu sistema no o'rindosh.

2-misol. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 39, \\ x + xy + y = 17 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Tenglamalarning chap qismi x va y ga nisbatan simmetrik. $u = x + y$, $v = xy$ o‘zgaruvchilarni kiritamiz, $x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy = u^2 - v$, $x + xy + y = u + v$. Sistema $\begin{cases} u^2 - v = 39, \\ u + v = 17 \end{cases}$ ko‘rinishga keladi. Bu tenglamalarni qo‘shsak, $u^2 + u - 56 = 0$ kvadrat tenglama hosil bo‘ladi. Undan $u = 7$ yoki $u = -8$ topiladi. Sistemaning ikkinchi tenglamasidan $v = 10$ yoki $v = 25$ olinadi. Natijada berilgan tenglamalar sistemasi ikki sistema majmuasiga keladi: $\begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 10; \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = -8, \\ xy = 25. \end{cases}$ Birinchi sistemani yechib, javobni olamiz: $\{(2; 5), (5; 2)\}$. Ikkinchi sistema yechimga ega emas.

Mashqlar

6.380. Sistemani o‘rniga qo‘yish usuli bilan yeching:

a) $\begin{cases} x - y = 5, \\ 2x + 3y = 5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 3x + 4y = 5; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 5, \\ 2x + 2y = 10; \end{cases}$ e) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - y = 5, \\ x - 9y = 31; \end{cases}$

f) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 6, \\ \frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 3\frac{9}{20}; \end{cases}$ g) $\begin{cases} \frac{3}{4}x - \frac{5}{7}y = \frac{23}{168}, \\ 21x - 20y = 21; \end{cases}$

h) $\begin{cases} 0{,}3x - y = \frac{4}{7}, \\ 30x - 10y = \frac{40}{7}; \end{cases}$ i) $\begin{cases} 0{,}3x - 4y = \frac{1}{3}, \\ 0{,}7x - 7y = 43. \end{cases}$

6.381. Sistemani algebraik qo‘shish usulida yeching:

a) $\begin{cases} x - y = -1, \\ 4x + y = 6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 2, \\ -2x - y = 3; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ -4x - 6y = -14; \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x + 3y = 2, \\ \frac{1}{2}x + 3y = -\frac{11}{8}; \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + 3y = \frac{281}{143}, \\ 3x + 4y = \frac{405}{143}; \end{cases}$ g) $\begin{cases} 3{,}1x + \frac{1}{13}y = 1, \\ 3{,}1x + \frac{1}{11}y = 3. \end{cases}$

6.382. Sistemani Gauss usuli bilan yeching:

a) $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2x + 3y - 2z = 7, \\ 3x + 2y + 5z = 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y - z = -1, \\ 3x - 2y + 4z = 9, \\ 2x + 3y + 2z = 1; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y + z = -1, \\ 2x + 3y + 4z = 5, \\ 3x - 2y - 2z = -7; \end{cases}$ e) $\begin{cases} x - y - z = -1, \\ 4x + 5y - 3z = 6, \\ 2x + 3y - 2z = 3; \end{cases}$

f) $\begin{cases} -x + y + z = -3, \\ 2x + 2y - 3z = 3, \\ 3x + 4y + 5z = -6; \end{cases}$ g) $\begin{cases} -x - y + z = 3, \\ 5x + 2y + 3z = -4, \\ 3x + 4y - 2z = -9. \end{cases}$

6.383. Sistemani yeching:

a) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + y^2 = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - 3xy - 2y^2 = 2, \\ x + 2y = 1; \end{cases}$

d) $\begin{cases} y - 2x = 2, \\ 5x^2 - y = 1; \end{cases}$ e) $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0, \\ 5xy + y^2 = 16; \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y = 4, \\ y + xy = 6; \end{cases}$ g) $\begin{cases} 2x^2 - xy = 33, \\ 4x - y = 17. \end{cases}$

6.384. Sistemani yeching:

a) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 3, \\ xy + 4 = 0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 12; \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - y = 5, \\ xy = -6; \end{cases}$ f) $\begin{cases} x - y = 9, \\ xy = -20; \end{cases}$ g) $\begin{cases} x - y = 10, \\ xy = -21. \end{cases}$

6.385. Sistemani yeching:

a) $\begin{cases} \frac{x}{25} + \frac{y}{9} = 1, \\ x^2 + y^2 = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 8x + 7y = 56, \\ x^2 + y^2 - 4y = 0; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 1, \\ x^2 + xy + y = 1; \end{cases}$ e) $\begin{cases} x - 2y = -3, \\ -2y^2 + xy + 3y = 0. \end{cases}$

6.386. Sistemani yeching:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ xy = 8; \end{cases}$ g) $\begin{cases} y^2 - xy = 12, \\ x^2 - xy = 28; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 68, \\ xy = 16; \end{cases}$ h) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 - 2xy, \\ y(x + y) = 10; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x(x + y) = 9, \\ y(x + y) = 16; \end{cases}$ i) $\begin{cases} 5(x + y) + 2xy = -19, \\ 15xy + 5(x + y) = -175; \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2 + xy = 15, \\ y^2 + xy = 10; \end{cases}$ j) $\begin{cases} 5(x + y) + 2xy = -19, \\ 3xy + x + y = -35; \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2 - xy = 28, \\ y^2 - xy = -12; \end{cases}$ k) $\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 2xy = 7, \\ (2x - y)y = y. \end{cases}$

6.387. Sistemani yeching:

a) $\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ x^2 + y^2 + xy = 7; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2y^2 - xy + 3x^2 = 17, \\ y^2 - x^2 = 16; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21, \\ y^2 - 2xy + 15 = 0; \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2y^2 + xy - x^2 = 0, \\ x^2 - xy - y^2 + 3x + 7y + 3 = 0; \end{cases}$

f) $\begin{cases} xy + 3y^2 - x + 4y - 7 = 0, \\ 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0; \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2xy + y^2 - 4x - 3y + 2 = 0, \\ xy + 3y^2 - 2x - 14y + 16 = 0; \end{cases}$

h) $\begin{cases} 3x^2 + xy - 2x + y - 5 = 0, \\ 2x^2 - xy - 3x - y - 5 = 0; \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + 3xy = 12, \\ 2(x + y)^2 - y^2 = 14. \end{cases}$

6.388. Sistemani yeching:

a) $\begin{cases} xy - x + y = 1, \\ x^2y - xy^2 = 30; \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy + x - y = 3, \\ x^2y - xy^2 = 2; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + xy + x = 10, \\ y^2 + xy + y = 20; \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2 + xy + 2y^2 = 37, \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 26. \end{cases}$

6.389. Sistemani yeching:

a) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x + y = 5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 82, \\ xy = 3; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^3 - y^3 = 7; \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ x^3y^3 = -8; \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ xy(x + y) = -2; \end{cases}$ g) $\begin{cases} (x^2 + y^2)xy = 78, \\ x^4 + y^4 = 97; \end{cases}$

h) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 18, \\ x + y = 12; \end{cases}$ i) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19, \\ x - y = 5. \end{cases}$

6.390. Sistemani yeching:

a) $\begin{cases} x + y = z = 13, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 91, \\ y^2 = xz; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = 1, \\ \dfrac{xz}{x+z} = 2, \\ \dfrac{yz}{y+z} = 3; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1; \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 0; \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x^4 + y^4 + z^4 = 1; \end{cases}$

g) $\begin{cases} xy = 2, \\ yz = 3, \\ zx = 6. \end{cases}$

6.391. Sistemani yeching:

a) $\begin{cases} 2u + v = 7, \\ |u - v| = 2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x - 1 = 0, \\ |y| - x - 1 = 0; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3u - v = 1, \\ |u - 2v| = 2; \end{cases}$ e) $\begin{cases} |x - 1| + y = 0, \\ 2x - y = 1; \end{cases}$

f) $\begin{cases} |x| + 2|y| = 3, \\ 5y + 7x = 2; \end{cases}$ g) $\begin{cases} y - 2|x| + 3 = 0, \\ |y| + x - 3 = 0. \end{cases}$

8. Determinant haqida tushuncha. Chiziqli tenglamalar sistemasini determinantlar yordamida yechish. *Determinant* – matematikaning muhim tushunchalaridan biri, biror qoida yoki qonuniyat bo‘yicha tuzilgan ko‘paytmalarning algebraik yig‘indisidan iborat. Lotincha: *determinans (determinants)* – aniqlovchi. Masalan, $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ chiziqli tenglamalar sistemasini yechish talab qilinsin. Birinchi tenglamani b_2 ga, ikkinchisini – b_1 ga ko‘paytirib, hadma-had qo‘shamiz. Natijada: $x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$. Shu kabi birinchi tenglamani a_2 ga, ikkinchisini – a_1 ga ko‘paytirib, hadma-had qo‘shsak: $y = \frac{c_2a_1 - c_1a_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$. Sistemada noma’lumlar koeffitsiyentlarini ularning yozilish tartibi bo‘yicha parallel chiziqchalar yordamida kvadrat shaklda $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ko‘rinishda yozsak, determinant hosil bo‘ladi. Uni D orqali belgilaylik. a_1, a_2, b_1, b_2 sonlari determinant *elementlari.* Ular ikki satr va ikki ustunda joylashgan. Shunga ko‘ra determinant *ikkinchi tartibli* ($n = 2$) deb ataladi. Uning qiymatini topish uchun kvadratning a_1b_2 diagonalida joylashgan elementlari ko‘paytmasidan b_1a_2 diagonal elementlari ko‘paytmasini ayirish kerak. Koeffitsiyentlar va ozod hadlardan tuzilgan determinantlar ham shu kabi hisoblanadi:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - b_1c_2, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - c_1a_2.$$

$D = a_1b_2 - b_1a_2$ soni sistemaning asosiy determinanti, $D_x = c_1b_2 - b_1c_2$ va $D_y = a_1c_2 - c_1a_2$ sonlari esa sistemaning yordamchi determinantlari deyiladi. D_x determinant D da x koeffitsiyentlari ustunini va D_y determinant D da y koeffitsiyentlari ustunini ozod hadlar ustuniga almashtirish orqali hosil qilinadi.

Agar $D = 0$ bo‘lib, D_x va D_y lardan kamida bittasi noldan farqli bo‘lsa, sistema yechimga ega bo‘lmaydi. Agar $D = D_x = D_y = 0$ bo‘lsa, sistema cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi.

Agar $D \neq 0$ bo‘lsa, berilgan sistema yagona $(x;\ y)$ yechimga ega bo‘ladi va bu yechim quyidagi formulalar bo‘yicha topiladi:

$$x = \frac{D_x}{D},\ y = \frac{D_y}{D}. \qquad (1)$$

(1) formulalar *Kramer formulalari* deyiladi.

1- m i s o l. $\begin{cases} -x + 6y = 3, \\ 2x - y = 5 \end{cases}$ sistemani yeching.

Y e c h i s h: $D = \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1) - 6\cdot 2 = -11,$

$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 30 = -33,\ D_y = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -5 - 6 = -11;$

$x = \dfrac{-33}{-11} = 3,\ y = \dfrac{-11}{-11} = 1.$

Bu usul uch va undan ortiq noma’lumli sistemalarni yechishda ham qo‘llaniladi. Masalan, $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$ sistemaning asosiy determinanti kvadrat shaklida, uchinchi ($n = 3$) tartibli, ya’ni uch satr va uch ustunga ega. Hisoblash yo‘lini tushuntirish maqsadida uni quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right.$$

Strelkalar elementlarni ko‘paytirish tartibini ko‘rsatadi. Bunda chap-yuqoridan o‘ng-u pastga yo‘nalishdagi ko‘paytmalar qo‘shilib, o‘ng yuqoridan chap-u pastga yo‘nalishdagi ko‘paytmalar yig‘indisidan ayiriladi: $D = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3 - c_1b_2a_3$. $n = 2$ holidagidek, D_x determinant D da a lar ustunini, D_y determinant b lar ustunini, D_z determinant esa c lar ustunini d lar (ozod hadlar) ustuni bilan almashtirishdan hosil qilinadi:

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Natijada ushbu formulalar hosil bo‘ladi:

$$x = \frac{D_x}{D}, \; y = \frac{D_y}{D}, \; z = \frac{D_z}{D}.$$

Determinantning ayrim xossalari:

1) *agar determinantning ustunlari satrlari bilan (va teskaricha) almashtirilsa, determinantning qiymati o‘zgarmaydi.*

Masalan, $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1$;

2) *agar ikki satr (yoki ustun) elementlari bir xil yoki o‘zaro proporsional, yoki biri ikkinchisining chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘lsa, bu determinant nolga teng bo‘ladi.*

Masalan, $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0$;

3) *biror satr (ustun) elementlarining umumiy ko‘paytuvchisini determinant belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.*

Masalan, $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (3 \cdot 2 - 5 \cdot 1) = 4 \cdot 1 = 4$;

4) *bir satr elementlarini biror doimiy songa ko‘paytirilib, ikkinchi satr elementlariga birma-bir qo‘shilsa (... dan ayirilsa) determinant qiymati o‘zgarmaydi.*

Masalan, $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4-3 & 2-5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - 5 \cdot 1 = -14$;

5) *agar* n- *tartibli* (*bu yerda* $n \in \{2;\, 3\}$) *determinantning biror* k- *satr elementlari* m *ta qo‘shiluvchining yig‘indisidan iborat bo‘lsa, determinantni* m *ta* n- *tartibli determinant yig‘indisi ko‘rinishiga*

keltirish mumkin, bunda k- satr elementlari alohida qo'shiluvchilardan iborat bo'ladi.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ p_1+q_1 & p_2+q_2 & p_3+q_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Masalan, $\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (2\cdot5-3\cdot4)+(2\cdot5-3\cdot3) =$

$= -2+1 = -1.$

2- m i s o l. $\begin{cases} 2x+7y-4z=-13, \\ 5x+10y-z=-7, \\ 4x-6y+z=12 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

Y e c h i s h. $D = \begin{vmatrix} 2 & 7 & -4 \\ 5 & 10 & -1 \\ 4 & -6 & 1 \end{vmatrix} =$ (3- satrni 2- satrga qo'shamiz)

$\begin{vmatrix} 2 & 7 & -4 \\ 9 & 4 & 0 \\ 4 & -6 & 1 \end{vmatrix} =$ (3- satrni 4 ga ko'paytirib, 1- satrga qo'shamiz)

$\begin{vmatrix} 18 & -17 & 0 \\ 9 & 4 & 0 \\ 4 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 18\cdot4\cdot1+(-17)\cdot|0|\cdot4+0\cdot9\cdot(-6)-0\cdot|4|-$

$-(-17)\cdot|9|\cdot1-18\cdot0\cdot(-6) = 225;$

$$D_x = \begin{vmatrix} -13 & 7 & -4 \\ -7 & 10 & -1 \\ 12 & -6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 35 & -17 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 12 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 35\cdot4\cdot1+$$

$$+(-17)\cdot0\cdot12+0\cdot5\cdot(-6)-0\cdot|4|\cdot12-(-17)\cdot5\cdot1-$$

$-35\cdot|0|\cdot(-6) = 140+0+0-0+85-0 = 225.$ $x = \frac{D_x}{D} = \frac{225}{225} = 1.$

Shu kabi, $D_y = -225$, $D_z = 450$ va $y=-1$, $z=2$ ni aniqlaymiz.

Mashqlar

6.392. Determinantlarni hisoblang:

a) $\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$;   b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} -5 & -7 \\ 13 & -6 \end{vmatrix}$;   e) $\begin{vmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$;

f) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}$;   g) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}$;

h) $\begin{vmatrix} 1-a & -a \\ a & 1+a \end{vmatrix}$;   i) $\begin{vmatrix} x & 1 \\ x^2 & x^3 \end{vmatrix}$.

6.393. a ning qanday qiymatlarida determinantning satrlari proporsional bo‘ladi:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ a & 3a \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 6 & a \end{vmatrix}$?

6.394. Tenglamani yeching:

a) $\begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{vmatrix} = 0$; b) $\begin{vmatrix} a-1 & 3 \\ a^2 & 3a \end{vmatrix} = 0$; d) $\begin{vmatrix} a & a-1 \\ a+2 & a \end{vmatrix} = 0$.

6.395. Determinantlarni hisoblang:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;   b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}$;   e) $\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & b \end{vmatrix}$;

f) $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 0 & -a & -1 \\ a & 1 & -a \end{vmatrix}$;   g) $\begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}$.

6.396. Tenglamani yeching:

a) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$;   b) $\begin{vmatrix} x^2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$;

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & x \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$;   e) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ x^4 & x & x \end{vmatrix} = 0$.

6.397. Hisoblang:

a) $2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$, bunda $x = 3{,}1(73)$;

b) $2{,}(7) \cdot \begin{vmatrix} x & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 3{,}(13)$, bunda $x = 2{,}(71)$.

6.398. Determinantlarni hisoblang:

a) $\begin{vmatrix} 5 & 20 & 15 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}$;   b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$;   d) $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 10 & 12 & 8 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 12 & 8 \end{vmatrix}$;   f) $\begin{vmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 10 & 4 & 8 \end{vmatrix}$;   g) $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 10 & 12 & 4 \end{vmatrix}$.

6.399. Tenglamani yeching:

a) $2 \cdot \begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x^2 & x & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$;

b) $2 \cdot \begin{vmatrix} x^2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 16$;

d) $\dfrac{\begin{vmatrix} x^2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}} - \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}}{4x-6} = -\dfrac{67}{4}$; e) $\dfrac{3}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}} - x = 1$.

6.400. Sistemaning asosiy determinantini hisoblang:

a) $\begin{cases} 3x + 4y = 7, \\ 2x - 5y = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 1{,}2x - 4y = 3, \\ 3x - 5y = 7; \end{cases}$

d) $\begin{cases} ax - y = 1, \\ 5x + 2y = 2; \end{cases}$ e) $\begin{cases} ax - by = 1, \\ 13x - 4y = 2. \end{cases}$

6.401. Sistemaning yordamchi determinantlarini hisoblang:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ x - y - 7 = 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 1{,}7y = 2, \\ 4x - 4{,}3y = 1; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 5y = 2, \\ 4x + 3y = 5; \end{cases}$ e) $\begin{cases} 4x - 3y = 5, \\ 6x - 7y = 0. \end{cases}$

6.402. Sistemani Kramer formulalaridan foydalanib yeching:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = -4, \\ 3x + 8y = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 11y = 15, \\ 10x - 11y = 9; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 3y = -3, \\ x + 3y = 21; \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x - 3y = 16, \\ x + 2y = 1; \end{cases}$

f) $\begin{cases} x - 2y = 0, \\ 4x - 8y = 5; \end{cases}$ g) $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ x - 0{,}5y = 1; \end{cases}$

h) $\begin{cases} -x + 3y = -2, \\ 2x - 6y = -1; \end{cases}$ i) $\begin{cases} \frac{3}{4}x - \frac{5}{7}y = \frac{23}{168}, \\ 2x + 6y = \frac{31}{165}; \end{cases}$

j) $\begin{cases} x - y = 1, \\ 3y - 3x = -3; \end{cases}$ k) $\begin{cases} 3x - 5y = 0, \\ -15x + 25y = 0; \end{cases}$

l) $\begin{cases} 2x - 3y = -1, \\ 4x - 6y = 1; \end{cases}$ m) $\begin{cases} 7x - 2y = 16, \\ 3{,}5x - y = 8. \end{cases}$

6.403. $\begin{cases} 3x - 5y = -7, \\ 4x + 7y = 18 \end{cases}$ sistema berilgan:

1) sistemaning har bir tenglamasi nechta yechimga ega?
2) sistema nechta yechimga ega?

6.404. Sistemani Kramer formulalari yordamida yeching:

a) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 4x_2 - 13x_3 = 0, \\ -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 4y + z = 1, \\ x - 2y + 4z = 3, \\ 3x - y + 5z = 2; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1, \\ 2x + y - z = 3, \\ 3x + 3y + 2z = 10; \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ 2x + 4y + 6z = 3, \\ 3x + y - z = 1; \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0, \\ x + 5y - 4z + 5 = 0, \\ 4x + y - 3z = -4; \end{cases}$ g) $\begin{cases} 7x + 3y + 2z = 1, \\ 3x + y + 2z = 2, \\ 10x + 12y + 8z = 4. \end{cases}$

6.405. $\begin{cases} a^2x - ay = a - 1, \\ bx + (3 - 2b)y = 3 + a \end{cases}$ sistema (1; 1) dan iborat yagona yechimga ega. *a* va *b* larni toping.

6.406. *a* va *b* larning quyidagi sistema cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladigan barcha qiymatlarini toping:

$$\begin{cases} a^2x - by = a^2 - b, \\ bx - b^2y = 2 + 4a. \end{cases}$$

6.407. *a* ning qanday qiymatlarida

$$\begin{cases} ax - 4y = a + 1, \\ 2x + (a + 6)y = a + 3 \end{cases}$$

sistema yechimga ega bo‘lmaydi?

6.408. *a* ning qanday qiymatlarida

$$\begin{cases} 2x - ay = a + 2, \\ (a + 1)x + 2ay = 2a + 4 \end{cases}$$

sistema cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi?

6.409. Sistemani yeching:

a) $\begin{cases} 5x + 2y + 3z = -7, \\ 5x + 2y + 3z = 4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 3y = 7, \\ -2x + 9y = 4, \\ 2x + 2y = -2; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x + 5z = 6, \\ y - 6z = -2; \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 3y - 2z = -1. \end{cases}$

6.410. a ning $\begin{cases} 2x + 2(a-1)y = a - 4, \\ 2|x+1| = ay + 2 \end{cases}$ sistema yagona yechimga ega bo‘ladigan barcha qiymatlarini toping. Sistemaning yechimini toping.

6.411. a ning $\begin{cases} ax + (a-1)y = 2 + 4a, \\ 3|x| + 2y = a - 5 \end{cases}$ sistema yagona yechimga ega bo‘ladigan barcha qiymatlarini toping. Sistemaning yechimini toping.

5- §. Tenglamalar tuzishga doir masalalar

1- masala. Ikki ishchi birga ishlab smena davomida 72 ta detal tayyorladi. Ishlab chiqarish unumdorligini birinchi ishchi 15% ga, ikkinchi ishchi esa 25% ga oshirgach, ular smena davomida birgalikda 86 ta detal tayyorlay boshlashdi. Mehnat unumdorligi oshgach, har bir ishchi smena davomida nechtadan detal tayyorlagan?

Yechish. Mehnat unumdorligini oshirgunga qadar birinchi ishchi smena mobaynida x ta detal, ikkinchi ishchi esa y ta detal tayyorlagan bo‘lsin. U holda mehnat unumdorligi oshgandan so‘ng, birinchi ishchi $x + 0{,}15x$ ta detal, ikkinchi ishchi esa $y + 0{,}25y$ ta detal tayyorlay boshlagan.

Quyidagi sistemaga egamiz: $\begin{cases} x + y = 72, \\ 1{,}15x + 1{,}25y = 86. \end{cases}$ Bundan $x = 40$, $y = 32$ larni topamiz. Mehnat unumdorligi oshgach, birinchi

ishchi smena mobaynida $1,15x = 1,15 \cdot 40 = 46$ ta, ikkinchi ishchi esa $1,25y = 1,25 \cdot 32 = 40$ ta
detal tayyorlagan.

J a v o b : 46 ta va 40 ta.

2- m a s a l a . Ikki sonning yug'indisi 60 ga, nisbati esa 4 ga teng. Shu sonlarni toping.

Y e c h i s h . x va y izlangan sonlar bo'lib, $x > y$ bo'lsin. Quyidagi sistemaga egamiz:

$$\begin{cases} x + y = 60, \\ x : y = 4. \end{cases}$$

Bu sistemadan, $x = 48$, $y = 12$ ni topamiz.

J a v o b : 48 va 12.

3- m a s a l a . Ikki ishchining ikkinchisi birinchisidan $1\frac{1}{2}$ kun keyin ishga tushsa, ular birgalikda bir ishni 7 kunda tamomlay oladilar. Agar bu ishni har qaysi ishchi yolg'iz o'zi bajarsa, u holda birinchi ishchi ikkinchi ishchiga qaraganda 3 kun ortiq ishlashi kerak bo'ladi. Har qaysi ishchining yolg'iz o'zi bu ishni necha kunda tamomlay oladi?

Y e c h i s h . Birinchi ishchi yolg'iz o'zi ishlab ishni x kunda, ikkinchi ishchi esa yolg'iz o'zi ishlab y kunda bajarsin. U holda birinchi ishchi bir kunda ishning $\frac{1}{x}$ qismini, ikkinchi ishchi bir kunda ishning $\frac{1}{y}$ qismini bajaradi.

Birinchi ishchi $1\frac{1}{2}$ kun ishlab, ishning $1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{2x}$ qismini bajargach, ikkinchi ishchi ishlashni boshladi. Ular birgalikda 7 kun ishlagan. Shu 7 kunda ishning $7 \cdot \frac{1}{x} + 7 \cdot \frac{1}{y} = \frac{7x+7y}{xy}$ qismi bajarilgan. $\frac{3}{2x} + \frac{7x+7y}{xy} = 1$ tenglamaga ega bo'lamiz. Yolg'iz o'zi ishlagan birinchi ishchi ikkinchisiga qaraganda 3 kun ko'p ishlab, ishni tamomlaydi. Demak, $x - 3 = y$.

$\begin{cases} \frac{3}{2x} + \frac{7x+7y}{xy} = 1, \\ x - 3 = y \end{cases}$ sistemani hosil qilamiz. Bu sistemani yechsak, $x = 17$, $y = 14$ bo‘ladi.

J a v o b : Birinchi ishchi 17 kunda, ikkinchi ishchi 14 kunda.

4- m a s a l a . Oltin va kumushdan qilingan ikki xil qotishmalarning birinchisida oltin va kumush 2 : 3 nisbatda, ikkinchisida esa 3 : 7 nisbatda ekanligi ma’lum. Oltin va kumush 5 : 11 nisbatda bo‘ladigan yangi qotishma hosil qilish uchun ko‘rsatilgan metallarni qanday nisbatda olish kerak?

Y e c h i s h . Birinchi qotishmaning $\frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$ qismi oltin va $\frac{3}{2+3} = \frac{3}{5}$ qismi kumushdan iborat. Ikkinchi qotishmaning $\frac{3}{3+7} = \frac{3}{10}$ qismi oltin va $\frac{7}{3+7} = \frac{7}{10}$ qismi esa kumushdir.

Yangi qotishma hosil qilish uchun olingan birinchi qotishmaning miqdorini x bilan va ikkinchi qotishmaning miqdorini y bilan belgilaylik (x va y lar og‘irlikni ifodalaydi).

x miqdordagi birinchi qotishmadagi oltinning va kumushning miqdori mos ravishda $\frac{2}{5}x$ va $\frac{3}{5}x$ ga teng. y miqdordagi ikkinchi qotishmadagi oltinning miqdori $\frac{3}{10}y$ ga, kumushning miqdori esa $\frac{7}{10}y$ ga teng. Yangi qotishmaga $\frac{2}{5}x + \frac{3}{10}y$ miqdorda oltin va $\frac{3}{5}x + \frac{7}{10}y$ miqdorda kumush kiradi. Shartga ko‘ra, $\frac{\frac{2}{5}x+\frac{3}{10}y}{\frac{3}{5}x+\frac{7}{10}y} = \frac{5}{11}$. Bu tenglikdan $\frac{x}{y}$ nisbatni topamiz:

$$\frac{4x+3y}{6x+7y}=\frac{5}{11}\Rightarrow 44x+33y=30x+35y\Rightarrow 14x=2y\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{1}{7}.$$

J a v o b : Qotishmalarni 1 : 7 nisbatda olish kerak.

5 - m a s a l a . Mahsulot dastlab 20 % ga arzonlashtirildi. Yangi narx yana 10 % kamaytirilgach, hosil bo‘lgan keyingi narx yana 5 % ga kamaytirildi. Mahsulotning dastlabki narxi necha foiz kamaytirildi?

Y e c h i s h . Mahsulotning dastlabki narxi x (so‘m) bo‘lsin. Bu narx 20 % kamaytirilgach, mahsulotning narxi $x-0{,}20x=$ $=0{,}80x$ (so‘m) bo‘ladi. Bu narx 10 % kamaytirilsa, $0{,}80x-0{,}10\times$ $\times 0{,}80x=0{,}72x$ so‘mdan iborat bo‘lgan yangi narx paydo bo‘ladi. Bu narx 5 % kamaytirilsa, mahsulotning oxirgi narxi $0{,}72x-$ $-0{,}05\cdot 0{,}72x=0{,}684x$ so‘m ekanligi kelib chiqadi.

Dastlabki narx x so‘m, eng oxirgi narx $0{,}684x$ so‘m bo‘ldi. Mahsulot $x-0{,}684x=0{,}316x$ so‘mga arzonlashtirildi. $0{,}316x$ so‘m x so‘mning necha foizini tashkil etishini topamiz.

Proporsiya tuzamiz: $\frac{x}{0{,}316x}=\frac{100}{p}$. Bundan, $p=31{,}6$ ekani kelib chiqadi.

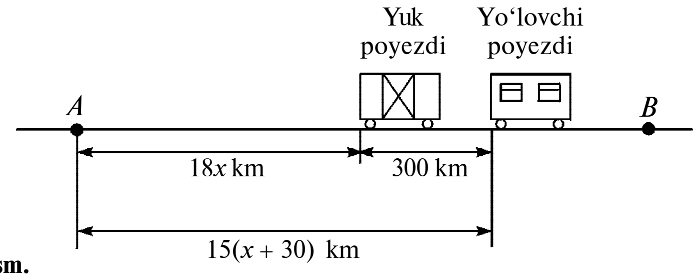
J a v o b : 31,6 %.

6- m a s a l a . Ikki xonali noma’lum son raqamlarining yig‘indisi 12 ga teng. Shu ikki xonali noma’lum songa 36 soni qo‘shilsa, noma’lum sonning raqamlarini teskari tartibda yozishdan hosil bo‘ladigan son kelib chiqadi. Noma’lum sonni toping.

Y e c h i s h . Ikki xonali noma’lum sonning raqamlari x, y bo‘lsin, ya’ni $\overline{xy}=10x+y$ izlangan son bo‘lsin. Quyidagiga egamiz:

$$\begin{cases}x+y=12,\\ \overline{xy}+36=\overline{yx}\end{cases}\text{ yoki }\begin{cases}x+y=12,\\ 10x+y+36=10y+x.\end{cases}$$ Bu sistemadan $x=4$, $y=8$ ekani kelib chiqadi. Demak, izlanayotgan son 48 ekan.

J a v o b : 48.



29- rasm.

7-masala. Yuk poyezdi A shahardan B shaharga qarab jo‘nadi. Oradan 3 soat o‘tgach, A shahardan B shaharga qarab, yo‘lovchi poyezdi yo‘lga chiqdi va oradan 15 soat o‘tgach, yuk poyezdidan 300 km o‘zib ketdi. Agar yo‘lovchi poyezdining tezligi yuk poyezdining tezligidan 30 km/soat ortiq bo‘lsa, yuk poyezdining tezligini toping (29- rasm).

Yechish. Yuk poyezdining tezligi x km/soat bo‘lsin. U holda yo‘lovchi poyezdining tezligi $(x + 30)$ km/soat bo‘ladi. Yo‘lovchi poyezdi 15 soat yurib, $15(x + 30)$ km masofani bosib o‘tadi. Yuk poyezdi 18 soatda $18x$ km masofani bosib o‘tgan.

$18x + 300 = 15(x + 30)$ tenglamaga ega bo‘lamiz. Undan $x = 50$ ekani aniqlanadi.

Javob: 50 km/soat.

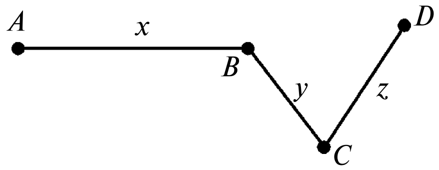
8-masala. A va D nuqtalar orasidagi masofa 75 km. Velosipedchi A nuqtadan D nuqtaga borishda AB masofani 20 km/soat, BC masofani 10 km/soat, CD masofani 5 km/soat tezlik bilan 7 soatda, qaytishda esa DC masofani 15 km/soat, CB masofani 12 km/soat, BA masofani 10 km/soat tezlik bilan 6 soat 15 minutda o‘tgan. AB, BC, CD masofalarni toping.

Yechish. $AB = x$, $BC = y$, $CD = z$ bo‘lsin (30- rasm).

Masala tahlilini jadval orqali ifodalaymiz:

1) borish:

	AB	BC	CD
masofa, km	x	y	z
tezlik, km/soat	20	10	5
vaqt, soat	$x/20$	$y/10$	$z/5$



30- rasm.

2) qaytish:

	DC	CB	BA
masofa, km	z	y	x
tezlik, km/soat	15	12	10
vaqt, soat	$z/15$	$y/12$	$x/10$

Tenglamalar sistemasini tuzamiz:

$$\begin{cases} x + y + z = 75, \\ \dfrac{x}{20} + \dfrac{y}{10} + \dfrac{z}{5} = 7, \\ \dfrac{x}{10} + \dfrac{y}{12} + \dfrac{z}{15} = 6\dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 75, \\ x + 2y + 4z = 140, \\ 6x + 5y + 4z = 400. \end{cases}$$

Bu sistemadan, $x = 40$, $y = 20$, $z = 15$ larni topamiz.
Javob: $AB = 40$ km, $BC = 20$ km, $CD = 15$ km.

Mashqlar

6.412. To‘g‘ri to‘rtburchakning balandligi asosining 75 % iga teng. Agar shu to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi 48 m^2 bo‘lsa, uning perimetrini toping.

6.413. 15 t sabzavotni tashish uchun ma’lum miqdorda yuk ortadigan bir necha mashina so‘ralgan edi. Garajda tayyor turgan mashinalar bo‘lmagani uchun, garaj so‘ralgandan bitta ortiq, lekin 0,5 t kam yuk ortadigan mashinalar yubordi. Yuborilgan mashinalarning har biriga necha tonnadan sabzavot ortilgan?

6.414. Xo‘jalik 200 ga yerga ma’lum muddatda chigit ekib bo‘lishi kerak edi, ammo u har kuni rejadagidan 5 ga ortiq chigit ekib, ishni muddatidan 2 kun oldin tugatdi. Chigit ekish necha kunda tugallangan?

6.415. Tomosha zalida 320 ta o‘rin bor edi. Har bir qatordagi o‘rinlar soni 4 ta orttirilib, yana bir qator qo‘shilgandan so‘ng 420 ta joy bo‘ldi. Tomosha zalidagi joylar endi necha qator bo‘ldi?

6.416. Kema oqimga qarshi 48 km va oqim bo‘yicha ham shuncha yo‘l bosdi, hamma yo‘lga 5 soat vaqt sarf qildi. Daryo oqimining tezligi 4 km/soat bo‘lsa, kemaning turg‘un suvdagi tezligini toping.

6.417. Ikki pristan orasidagi masofa daryo yo‘li bilan 80 km. Kema shu pristanlarning biridan ikkinchisiga borib-kelish uchun 8 soat 20 minut vaqt sarf qildi. Daryo oqimining tezligi 4 km/soat bo‘lsa, kemaning turg‘un suvdagi tezligini toping.

6.418. Qayiq daryo oqimiga qarshi 22,5 km, oqim bo‘yicha esa 28,5 km yurib, butun yo‘lga 8 soat vaqt sarfladi. Oqimning tezligi 2,5 km/soat. Qayiqning turg‘un suvdagi tezligini toping.

6.419. Daryo yoqasidagi qishloqdan sol oqizildi. Oradan 5 soat 20 minut o‘tgach, o‘sha qishloqdan motorli qayiq jo‘natildi. Motorli qayiq 20 km yo‘l bosib, solga yetib oldi. Agar motorli qayiqning tezligi solning tezligidan 12 km/soat ortiq bo‘lsa, solning tezligini toping.

6.420. Suv ikkita quvurdan kelganda suv haydash qozoni 2 soat 55 minutda to‘ladi. Birinchi quvurning yolg‘iz o‘zi suv haydash qozonini ikkinchisiga qaraganda 2 soat oldin to‘ldira oladi. Har qaysi quvurning yolg‘iz o‘zi suv haydash qozonini qancha vaqtda to‘ldiradi?

6.421. Ikki ishchi ayni bir ishni birgalashib ishlasa, 12 kunda tamom qiladi. Agar oldin bittasi ishlab, ishning yarmini tamom qilgandan keyin uning o‘rniga ikkinchisi ishlasa, ish 25 kunda tamom bo‘ladi. Shu ishni har qaysi ishchi yolg‘iz o‘zi ishlasa, necha kunda tamom qiladi?

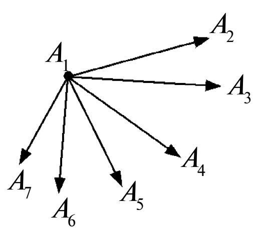
6.422. Quvvatlari har xil ikkita traktor 4 kun birga ishlab jamoa xo‘jaligi yerining $\frac{2}{3}$ qismini haydadi. Agar butun yerni birinchi traktor ikkinchisiga qaraganda 5 kun tezroq hayday olsa, butun yerni har qaysi traktor yolg‘iz o‘zi necha kunda hayday oladi?

6.423. Bandargohdagi ikki kema bir vaqtda, biri shimolga qarab, ikkinchisi sharqqa qarab jo‘nadi. 2 soatdan keyin ular orasidagi masofa 60 km bo‘ldi. Bu kemalardan birining tezligi ikkinchisinikidan 6 km/soat ortiq. Har qaysi kemaning tezligini toping.

6.424. Har qanday uchtasi bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan 7 ta nuqtadan nechta turli to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin?

Yechish. 31- rasmga qarang. Boshi A_1 nuqtada bo‘lgan 6 ta vektorga egamiz. Boshi qolgan nuqtalarda bo‘lgan vektorlar ham 6 tadan bo‘ladi. Hammasi bo‘lib $7 \cdot 6 = 42$ ta turli vektorlar hosil bo‘ladi. Bu vektorlar 21 juft qarama-qarshi vektorlardir. Qarama-qarshi vektorlar jufti bitta to‘g‘ri chiziqda yotadi (bizning misolda).
Shunday qilib, aytilgan to‘g‘ri chiziqlar $42 : 2 = 21$ ta ekan.
Topshiriq. Har qanday uchtasi bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan n ta nuqta orqali o‘tuvchi turli to‘g‘ri chiziqlar soni $\frac{n(n-1)}{2}$ ga tengligini isbotlang. Bu tasdiqdan foydalanib, [**6.425–6.429**] masalalarni yeching.

6.425. Futbol o‘yini musobaqasida hammasi bo‘lib 55 ta o‘yin o‘ynaldi. Bunda har bir komanda qolgan komandalar bilan faqat bir martadan o‘ynadi. Musobaqada nechta komanda qatnashgan?



31- rasm.

6.426. Shaxmat turnirida hammasi bo‘lib 231 partiya shaxmat o‘ynaldi. Agar har bir shaxmatchi qolgan shaxmatchilarning har biri bilan faqat bir partiya shaxmat o'ynagan bo'lsa, turnirda necha kishi qatnashgan?

6.427. Maktab bitiruvchilari bir-birlari bilan rasm almashtirishdi. Agar 870 ta rasm almashtirilgan bo'lsa, maktabni necha o'quvchi bitirgan?

6.428. Qavariq ko'pburchakning 14 ta diagonali mavjud. Uning tomonlari nechta?

6.429. Qanday ko'pburchak diagonallarining soni tomonlarining sonidan 12 ta ortiq bo'ladi?

6.430. Poyezd yo'lda 6 minut to'xtab qoldi va 20 km yo'lda tezligini soatiga jadvaldagidan 10 km oshirib, kechikishni yo'qotdi. Poyezd shu yo'lda jadvalga muvofiq qanday tezlik bilan yurishi kerak edi?

6.431. A va B stansiyalar orasidagi yo'lning o'rtasida poyezd 10 minut to'xtab qoldi. B stansiyaga kechikmasdan borish uchun, haydovchi poyezdning dastlabki tezligini 6 km/soat oshirdi. Agar stansiyalar orasidagi masofa 60 km bo'lsa, poyezdning dastlabki tezligini toping.

6.432. Perimetri 28 sm bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning qo'shni tomonlariga tashqaridan yasalgan kvadratlar yuzlarining yig'indisi 116 sm^2 ga teng. To'g'ri to'rtburchakning tomonlarini toping.

6.433. Yuzi 120 sm^2, diagonali esa 17 sm bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning tomonlarini toping.

6.434. To'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi 41 sm, yuzi 180 sm^2. Katetlarni toping.

6.435. To'g'ri burchakli uchburchakning perimetri 48 sm, yuzi 96 sm^2. Uchburchakning tomonlarini toping.

6.436. Ikki musbat sonning o'rta arifmetigi 20, o'rta geometrigi esa 12. Shu sonlarni toping.

6.437. Ikki shahar orasidagi masofa 480 km; shu masofani yo'lovchi poyezdi yuk poyezdiga qaraganda 4 soat tez bosadi. Agar yo'lovchi poyezdining tezligi 8 km/soat oshirilsa, yuk poyezdining tezligi esa 2 km/soat oshirilsa, yo'lovchi poyezdi shu masofani yuk poyezdiga qaraganda 5 soat tez o‘tadi. Har qaysi poyezdning tezligini toping.

6.438. Oralaridagi masofa 180 km bo‘lgan A va B shaharlardan ikki poyezd bir vaqtda bir-biriga qarab yo‘lga chiqdi. Ular uchrashgandan keyin A shahardan chiqqan poyezd B shaharga 2 soatda yetib boradi, ikkinchisi esa A shaharga 4,5 soatda yetib boradi. Poyezdlar tezligini toping.

6.439. Velosipedchilar poygasi uchun 6 km uzunlikdagi masofa belgilandi. Akmal Shavkatdan o‘tib ketib, marraga 2 minut oldin keldi. Agar Akmal tezligini 0,1 km/minut kamaytirib, Shavkat tezligini 0,1 km/minutga oshirsa, unda Akmal marraga Shavkatdan 2 minut oldin yetib kelardi. Akmal va Shavkatlarning tezligini toping.

6.440. Ikki ekskavatorchi birga ishlab, biror hajmdagi yer ishlarini 3 soat-u 45 minutda bajaradi. Bir ekskavatorchi alohida ishlab, bu hajmdagi ishni ikkinchisiga qaraganda 4 soat tezroq bajaradi. Shunday hajmdagi yer ishlarini bajarish uchun har bir ekskavatorchiga alohida qancha vaqt kerak bo‘ladi?

6.441. Bir kombaynchi maydondagi bug‘doy hosilini ikkinchi kombaynchidan 24 soat tezroq o‘rib olishi mumkin. Ikkala kombaynchi birgalikda ishlaganda esa hosilni 35 soatda yig‘ib olishadi. Har bir kombaynchi alohida ishlab, hosilni o‘rib olishi uchun qancha vaqt kerak bo‘ladi?

6.442. Ikkita musbat sonning yig‘indisi ularning ayirmasidan 5 marta katta. Agar shu sonlar kvadratlari ayirmasi 180 ga teng bo‘lsa, bu sonlarni toping.

6- §. Tengsizliklar sistemasi

1. Bir o‘zgaruvchili ratsional tengsizliklar sistemasi va majmuasi. Bir o‘zgaruvchili $P_1(x)\wedge_1 0,\ P_2(x)\wedge_2 0,\ \ldots,\ P_n(x)\wedge_n 0$ ratsional tengsizliklarni qaraymiz.

Bu yerda $\wedge_1$ tengsizlik belgisi bo‘lib, uning o‘rnida

$$<,\ >,\ \leq,\ \geq \qquad (*)$$

belgilarining ixtiyoriy biri turishi mumkin; $\wedge_2, \wedge_3, ..., \wedge_n$ lar o‘rnida ham (*) dagi ixtiyoriy belgi turishi mumkin va bunda $\wedge_1, \wedge_2, \wedge_3, ..., \wedge_n$ lar bir xil belgi bo‘lishi shart emas deb tushunamiz.

Agar x soni $P_1(x)\wedge_1 0,\ P_2(x)\wedge_2 0,\ ...,\ P_n(x)\wedge_n 0$ tengsizliklardan har birining yechimi bo‘lsa, x soni

$$\begin{cases} P_1(x) \wedge_1 0 \\ P_2(x) \wedge_2 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_3(x) \wedge_3 0 \end{cases} \qquad (1)$$

tengsizliklar sistemasining yechimi deyiladi. (1) sistemani yechish uning barcha yechimlarini topish yoki bu sistema yechimga ega emasligini isbotlash demakdir.

1- m i s o l. $x=1$ soni berilgan sistemaning yechimi bo‘lishini ko‘rsating va sistemani yeching:

$$\begin{cases} 5x+2>3x-1, \\ 3x+1>7x-4. \end{cases}$$

Y e c h i s h. $5x+2>3x-1$ tengsizlikka $x=1$ sonini qo‘yamiz va natijada $7>2$ to‘g‘ri sonli tengsizlikka ega bo‘lamiz; $x=1$ sonini $3x+1>7x-4$ ga qo‘ysak, $4>3$ to‘g‘ri sonli tengsizlik hosil bo‘ladi. Demak, $x=1$ soni shu tengsizliklardan har birining yechimi bo‘ladi. Bu esa $x=1$ soni berilgan sistemaning yechimi bo‘lishini bildiradi.

Endi berilgan sistemani yechamiz. Tengsizliklar sistemasini yechish uchun undagi har bir tengsizlikni alohida-alohida yechish va tengsizliklarning umumiy yechimlarini aniqlash kerak:

$5x+2>3x-1$	$3x+1>7x-4$
$5x-3x>-1-2$	$3x-7>-4-1$
$2x>-3$	$-4x>-5$
$x>-1{,}5$	$x<1{,}25$

Bu yerdan berilgan sistemaning yechimlari to‘plamini aniqlaymiz: (–1,5; 1,25).

Agar x soni $P_1(x)\wedge_1 0,\ P_2(x)\wedge_2 0,\ ...,\ P_n(x)\wedge_n 0$ tengsizliklardan hech bo‘lmaganda bittasining yechimi bo‘lsa, x soni shu tengsizliklar majmuasining yechimi deyiladi. Yuqorida keltirilgan tengsizliklarning majmuasi quyidagicha belgilanadi:

$$\left[\begin{array}{l} P_1(x) \wedge_1 0 \\ P_2(x) \wedge_2 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ P_3(x) \wedge_3 0 \end{array}\right. \qquad (2)$$

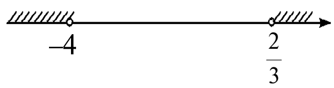
(2) majmuani yechish uning barcha yechimlarini topish yoki ularning mavjud emasligini isbotlash demakdir. Tengsizliklar majmuasini yechish uchun odatda har bir tengsizlik alohida yechilib, yechimlar to‘plamlari hosil qilinadi va shu to‘plamlarning birlashmasi topiladi.

2 - m i s o l . $x = 1$ soni quyidagi majmuaning yechimi bo‘lishini isbotlang va majmuani yeching:

$$\left[\begin{array}{l} 2x + 7 > 9 - x, \\ 4x + 9 < 3x + 5. \end{array}\right.$$

Y e c h i s h . $x = 1$ soni majmuadagi $2x + 7 > 9 - x$ tengsizlikning yechimi bo‘ladi. Demak, u majmuaning ham yechimidir. Berilgan majmuani yechamiz:

$$\begin{array}{r|c} 2x + 7 > 9 - x & 4x + 9 < 3x + 5 \\ 2x + x > 9 - 7 & 4x - 3x < 5 - 9 \\ 3x > 2 & x < -4 \\ x > \frac{2}{3} & \end{array}$$



$(-\infty;\ -4)$ va $\left(\frac{2}{3};\ +\infty\right)$ to‘plamlarning birlashmasi $(-\infty;$ $-4) \cup \left(\frac{2}{3};\ +\infty\right)$ majmuaning barcha yechimlari to‘plamidir.

Mashqlar

6.443. Tengsizliklar sistemasini yeching. So‘ngra bu sistemalarning har birini majmuaga aylantiring va majmualarni yeching:

a) $\begin{cases}(2x+3)(2x+1)(x-1)<0,\\(x+5)(x+1)(1-2x)(x-3)>0;\end{cases}$

b) $\begin{cases}(x^2+12x+35)(2x+1)(3-x)\geq 0,\\(x^2-2x-8)(2x-1)\geq 0;\end{cases}$

d) $\begin{cases}\frac{x+3}{3-x}<2,\\x^3<16x,\\4\geq x^2;\end{cases}$ e) $\begin{cases}\frac{(x+2)(x^3-3x+8)}{x^2-9}\leq 0,\\\frac{1-x^2}{x^2+2x-8}\geq 0.\end{cases}$

2. Ikki o'zgaruvchili tengsizliklar. Har qanday $y=f(x)$ chiziq unda yotgan nuqtalarning to'plamini — shu chiziqni, $y>f(x)$ tengsizlik koordinata tekisligining chiziqdan yuqorida joylashgan, $y<f(x)$ tengsizlik esa chiziqdan pastda joylashgan qismini ifodalaydi. Agar bu qismlarga chiziqning o'zi ham qo'shilsa, uni $y\leq f(x)$ yoki $y\geq f(x)$ tengsizliklar ifodalaydigan bo'ladi. Aksincha, $f(x)\leq a$ yoki $f(x)\geq a$ tengsizlikning yechimini tekislikning ularga mos qismlari sohalari beradi. Shu kabi $f(x)<g(x)$ tengsizligining yechimini tekislikning $f(x)$ chiziqdan yuqori va $g(x)$ chiziqdan pastda yotgan qismlari kesishmasi beradi:

$$\begin{cases}y\geq f(x),\\y\leq g(x).\end{cases}$$

Ko'pincha sistemani

$$\begin{cases}a\leq x\leq b,\\f(x)\leq y\leq g(x)\end{cases}\tag{1}$$

yoki

$$\begin{cases}c\leq y\leq d,\\f(y)\leq x\leq g(y)\end{cases}\tag{2}$$

ko'rinishda yozish qulay.

1-misol. $\begin{cases}y\geq x^2,\\y\leq x+2\end{cases}$ tengsizliklar sistemasi bilan berilgan sohani (1) ko'rinishga keltiramiz.

Y e c h i s h . Oldin $y = x + 2$ to‘g‘ri chiziq va $y = x^2$ parabolaning kesishish nuqtalarini topamiz. Buning uchun $\begin{cases} y = x + 2, \\ y = x^2 \end{cases}$

tenglamalar sistemasini yechamiz. Uning yechimi (–1; 1), (2; 4). Izlanayotgan sohani (1) sistema ko‘rinishida yozamiz:

$$\begin{cases} -1 \le x \le 2, \\ x^2 \le y \le x + 2. \end{cases}$$

2- m i s o l . Radiusi $R = 4$, markazi $A(-1;\ 2)$ nuqta bo‘lgan aylana ichki qismini (1) tengsizliklar sistemasi ko‘rinishida ifodalang.

Y e c h i s h . Aylana tenglamasi: $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$. Bundan pastki va yuqorigi yarim aylanalarning tenglamalarini topamiz:

$$y = 2 - \sqrt{16 - (x+1)^2}, \quad y = 2 + \sqrt{16 - (x+1)^2}\ .$$

Argument $a = -1 - 4 = -5$ dan $b = -1 + 4 = 3$ gacha o‘zgaradi. Izlanayotgan sistema:

$$\begin{cases} -5 \le x \le 3, \\ 2 - \sqrt{16 - (x+1)^2} \le y \le 2 + \sqrt{16 + (x+1)^2} \end{cases}$$

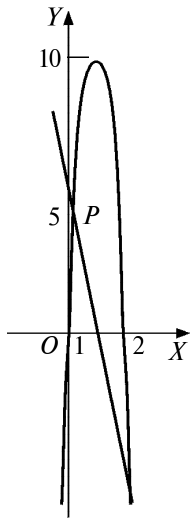
dan iborat.

3- m i s o l . 32- rasmda tasvirlangan parabola va to‘g‘ri chiziqning kesishuvidan hosil bo‘ladigan yopiq shaklni ifodalovchi tengsizliklar sistemasini tuzamiz.

Y e c h i s h . Parabola (0; 0), (2; 0), (1; 10) nuqtalar ustidan o‘tadi. Uning $y = Ax^2 + Bx + C$ tenglamasini tuzish uchun A, B, C parametrlarni topamiz. Buning uchun uch noma’lumli uch tenglama sistemasini tuzamiz va undan A, B, C larni aniqlaymiz.

(0; 0) nuqta bo‘yicha: $0 = A \cdot 0^2 + B \cdot 0 + C$, bundan $C = 0$;

(2; 0) nuqta bo‘yicha: $0 = A \cdot 2^2 + B \cdot 2 + C$, bundan $2A + B = 0$;



32- rasm.

(1; 10) nuqta bo'yicha: $10 = A \cdot 1^2 + B \cdot 1 + C$, bundan $A + B = 10$.

Keyingi ikki tenglamalar sistemasidan $A = -10$, $B = 20$ aniqlanadi.

Parabolaning tenglamasi: $y = -10x^2 + 20x$. To'g'ri chiziq (0; 5), (1; 0) nuqtalardan o'tadi. Tenglamasi: $y = -4x + 5$. Kesishuvdan hosil bo'luvchi yopiq shakl paraboladan pastda, to'g'ri chiziqdan yuqorida joylashgan. Shunga ko'ra

$$\begin{cases} y \geq -4x + 5, \\ y \leq -10x^2 + 20x. \end{cases}$$

Mashqlar

6.444. Tengsizliklar sistemalari bilan berilgan sohalarni chizing:

a) $\begin{cases} -5 \leq x \leq 2, \\ x^2 - 9 \leq y \leq 1 - 2x; \end{cases}$ b) $\begin{cases} -1 \leq y \leq 3, \\ y - 1 \leq x \leq 8 - y; \end{cases}$

d) $\begin{cases} -2 \leq x \leq 2, \\ x^2 - 2 \leq y \leq x + 6; \end{cases}$ e) $\begin{cases} -3 \leq x \leq 4, \\ 0 \leq y \leq \sqrt{16 - x^2}. \end{cases}$

6.445. Tengsizliklar bilan ifodalang:

a) uchlari $O(0;\ 0)$, $A(2;\ 0)$, $B(2;\ 2)$, $C(0;\ 1)$ nuqtalar bo'lgan to'rtburchakni;

b) uchlari $A(1;\ 3)$, $B(2;\ 6)$, $C(10;\ 6)$ nuqtalar bo'lgan uchburchakni;

d) markazi $M(1;\ 1)$ nuqtada va yoyining uchlari $A(\sqrt{5};\ 2)$ va $B(-\sqrt{5};\ 20)$ nuqtalarda bo'lgan AOB doiraviy sektorni;

e) AOB parabola yoyi va $A(-1;\ 8)$ va $B(1;\ 8)$ nuqtalarni tutashtiruvchi vatar bilan chegaralangan AOB parabola segmentini, bunda $O(0;\ 0)$.

6.446. D soha tengsizlik bilan yoki tengsizliklar sistemasi bilan berilgan. Uni (1) ko'rinishdagi tengsizliklar sistemasi bilan bering:

a) $x \geq 0,\ y \leq 0,\ x - 4 \geq y$, ya'ni $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \leq 0, \\ x - 4 \geq y; \end{cases}$

b) $4x^2 + y^2 \leq a$; d) $x^2 + y^2 \leq 4x$;

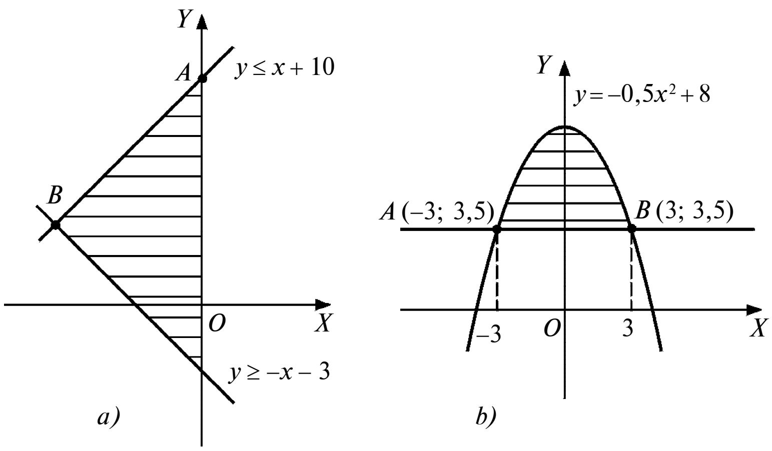
e) $y \geq 2x,\ x \geq 1,\ y \leq 4$; f) $\begin{cases} y \leq x \leq y + 6, \\ 1 \leq y \leq 3. \end{cases}$

6.447. D soha (1) ko'rinishdagi tengsizliklar sistemasi bilan berilgan. Uni (2) ko'rinishdagi tengsizliklar sistemasiga keltiring:

a) $\begin{cases} 0 \leq x \leq 5, \\ 2x^2 \leq y \leq 10x; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ x \leq y \leq 4x; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ -\sqrt{5 - x^2} \leq y \leq 5 - x. \end{cases}$

6.448. Tengsizliklar sistemasining yechimlar to'plamini koordinata tekisligida tasvirlang, hosil qilingan shaklning yuzini toping:



33- rasm.

a) $\begin{cases} y \ge |x| - 4, \\ x^2 + y^2 < 9; \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy > 16, \\ x^2 + y^2 \le 16x. \end{cases}$

6.449. a) Ikki to‘g‘ri chiziq va Oy o‘qi; b) parabola va to‘g‘ri chiziq bilan chegaralangan shaklni tengsizliklar bilan ifodalang (33- *a*, *b* rasm).

6.450. Tengsizliklar bilan ifodalangan sohani toping va koordinata tekisligida tasvirlang:

a) $(x^2 - 2x)(x^2 + y^2 - 15) \ge 0$;

b) $(x^2 - y + 1)(-x^2 - y^2 + 3) < 0$.

7- §. Irratsional tenglamalar va tengsizliklar

1. Irratsional tenglamalar. Agar $A(x) = B(x)$ tenglamadagi $A(x)$ yoki $B(x)$ ifodalardan hech bo‘lmaganda bittasi irratsional bo‘lsa, u holda bu tenglama *irratsional tenglama* deyiladi. Ularni yechishda teng kuchli almashtirishlardan foydalaniladi.

T e o r e m a . ***Agar n soni musbat va toq bo‘lsa, u holda*** $\boldsymbol{A(x) = B(x)}$ ***va*** $\boldsymbol{A^n(x) = B^n(x)}$ ***tenglamalar teng kuchli bo‘ladi. Agar n soni musbat va juft bo‘lsa,*** $\boldsymbol{A^n(x) = B^n(x)}$ ***tenglamaning ildizi*** $\boldsymbol{A(x) = B(x)}$ ***va*** $\boldsymbol{A(x) = -B(x)}$ ***tenglamalardan hech bo‘lmaganda bittasini qanoatlantiradi.***

I s b o t . α soni $A(x) = B(x)$ tenglamaning ildizi, ya’ni $A(\alpha) = B(\alpha)$ bo‘lsin. U holda $A^n(\alpha) = B^n(\alpha)$, ya’ni α soni $A^n(x) = B^n(x)$ tenglamaning ham ildizi. Aksincha, α soni $A^n(x) = B^n(x)$ ning ildizi, ya’ni $A^n(\alpha) = B^n(\alpha)$ bo‘lsa, toq n larda $A(\alpha) = B(\alpha)$ bo‘ladi, ya’ni $A(x) = B(x) \Leftrightarrow A^n(x) = B^n(x)$. Juft n larda $A^n(\alpha) = B^n(\alpha)$ tenglik $A(\alpha) = B(\alpha)$ bo‘lganda yoki $A(\alpha) = -B(\alpha)$ da o‘rinli va shunga ko‘ra α soni $A(x) = B(x)$ va $A(x) = -B(x)$ tenglamalardan hech bo‘lmaganda bittasining ildizi bo‘ladi.

Bularga qaraganda $A(x) = B(x)$ irratsional tenglamaning ikkala qismi juft darajaga ko‘tarilganda *chet ildizlar*, ya’ni $A(x) = -B(x)$ tenglamaning ildizlari paydo bo‘lishi mumkin. Juft darajaga ko‘targanda chet ildizlarning paydo bo‘lishi mavjudlik sohasining o‘zgarishidan ham bo‘lishi mumkin. Ularni aniqlash uchun topilgan ildizlarni berilgan tenglamaga qo‘yib tekshirish, shuningdek, teng kuchlilik shartlariga rioya qilinganligini tekshirish kerak. Chunonchi, $A(x)$, $B(x)$ ifodalar ratsional ifoda va $\sqrt[2k]{A(x)} \geq 0$, $k \in N$ bo‘lganda quyidagi munosabat o‘rinli bo‘ladi:

$$\sqrt[2k]{A(x)} = B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = B^{2k}(x), \\ B(x) \geq 0. \end{cases}$$

1-misol. $\sqrt{x^2+3x+1} = x-2$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglama ushbu sistemaga teng kuchli:

$$\begin{cases} x^2 + 3x + 1 = (x-2)^2, \\ x - 2 \geq 0. \end{cases}$$

$x^2 + 3x + 1 = (x-2)^2$ tenglama yagona $x = \frac{3}{7}$ ildizga ega. Lekin u $x - 2 \geq 0$ tengsizligini qanoatlantirmaydi. Tenglama yechimga ega emas.

2-misol. $\sqrt{-3x^2+3x-2} = \sqrt{-2x-10}$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglama ushbu sistemaga teng kuchli:

$$-3x^2 + 3x^2 - 2 = -2x - 10, \quad -2x - 10 \geq 0.$$

$-3x^2 + 3x - 2 = -2x - 10$ tenglamaning ildizlari -1 va $2\frac{2}{3}$. Lekin bu qiymatlarda $-2x - 10 \geq 0$ tengsizligi bajarilmaydi. Demak, berilgan tenglama ildizga ega emas.

3-misol. $x^2 - 3x - 11 + \sqrt{x^2 - 3x - 9} = 0$ tenglamani yeching.

Yechish. $y = \sqrt{x^2 - 3x - 9}$ almashtirish tenglamani $y^2 - 2 + y = 0$ ko‘rinishga keltiradi. Uning ildizlari $y_1 = -2$, $y_2 = 1$ sonlari bo‘lgani uchun, eski o‘zgaruvchiga qaytish natijasida yechimga ega bo‘lmagan $\sqrt{x^2 - 3x - 9} = -2$ tenglamaga hamda $x_1 = -2$,

$x_2 = 5$ ildizlarga ega bo‘lgan $\sqrt{x^2 - 3x - 9} = 1$ tenglamaga ega bo‘lamiz. Demak, berilgan tenglama $x_1 = -2$, $x_2 = 5$ ildizlarga ega.

4-misol. $\sqrt{x^2 - 8x + 16} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2$ tenglamani yeching.

Yechish. $\sqrt{x^2 - 8x + 16} = |x - 4|$ va $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = |x - 2|$ bo‘lgani uchun berilgan tenglama $|x - 4| + |x - 2| = 2$ ko‘rinishga keladi. Modul qatnashgan bu tenglama barcha $x \in [2; 4]$ lardagina to‘g‘ri tenglikka aylanadi.

Mashqlar

Tenglamalarni mantiqiy mulohazalar yuritib yeching:

6.451. $\sqrt{x + 2} + \sqrt{2x - 1} = -3$.

6.452. $4 + \sqrt{2y - 3} = 1$.

6.453. $6 - \sqrt{x + \sqrt{2}} = 7$.

6.454. $\sqrt{10 + \sqrt{x - \sqrt{3}}} = 3$.

6.455. $\sqrt{x - 3} + \sqrt{2 - x} = 5$.

6.456. $\sqrt{x - 4} + \sqrt{4 - x} = 1$.

6.457. $\sqrt{x - 4} + \sqrt{4 - x} = -1$.

6.458. $\sqrt{x + 4} + \sqrt{-x - 5} = 0$.

Tenglamalarni aniqlanish sohasini topish bilan yeching:

6.459. $x + \sqrt{x - 1} + 2 = \sqrt{x - 1}$.

6.460. $\sqrt{-x^2 + x + 6} = 2x - 7$.

6.461. $\sqrt{-x^2 - 3x - 2} = x - 1$.

6.462. $\sqrt{x^2 - 4x + 3} = \sqrt{5x - 6 - x^2}$.

6.463. $\sqrt{2x^2 - 7x + 3} = \sqrt{5x - 2 - x^2}$.

6.464. $\sqrt{y-3}-6\sqrt{2-y}=8.$

6.465. $(x^2-1)\sqrt{2x-1}=0.$

6.466. $(x^2-4)\sqrt{x+1}=0.$

6.467. $(9-x^2)\sqrt{2-x}=0.$

6.468. $(16-x^2)\sqrt{3-x}=0.$

Tenglamalarni $\sqrt[2n]{f(x)}=g(x)$ tenglama bilan $\begin{cases} f(x)=(g(x))^2, \\ g(x)\geq 0 \end{cases}$ sistemaning teng kuchliligidan foydalanib yeching:

6.469. $\sqrt{12-x}=x.$

6.470. $\sqrt{7-x}=x-1.$

6.471. $x-\sqrt{x+1}=5.$

6.472. $21+\sqrt{2x-7}=x.$

6.473. $1-\sqrt{1+5x}=x.$

6.474 . $2\sqrt{x+5}=x+2.$

6.475. $4\sqrt{x+6}=x+1.$

6.476. $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2.$

6.477. $\sqrt{37-x^2}+5=x.$

6.478. $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4.$

6.479. $\sqrt{1+4x-x^2}=x-16.$

Tenglamalarni yangi o‘zgaruvchi kiritib yeching:

6.480. $x^2-4x+6=\sqrt{2x^2-8x+12}.$

6.481. $2x^2+3x-5\sqrt{x^2+3x+9}+3=0.$

6.482. $x^2+\sqrt{x^2+2x+8}=12-2x.$

6.483. $2x^2+\sqrt{2x^2-4x+12}=4x+8.$

6.484. $3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2.$

6.485. $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}=3.$

6.486. $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}-6=0.$

6.487. $\frac{4}{\sqrt[3]{x}+2}+\frac{\sqrt[3]{x}+3}{5}=2$.

6.488. $\frac{8}{\sqrt{10-2x}}-\sqrt{10-2x}=2$.

6.489. $\sqrt{2-x}+\frac{4}{\sqrt{2-x}+3}=2$.

6.490. $\sqrt{\frac{3-x}{2+x}}+3\sqrt{\frac{2+x}{3-x}}=4$.

6.491. $\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}-2\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}}=1$.

Tenglamalarni darajaga ko‘tarish usuli bilan yeching:

6.492. $\sqrt{x+1}=8-\sqrt{3x+1}$.

6.493. $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4$.

6.494. $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+3}=3$.

6.495. $\sqrt{x^2+x-5}+\sqrt{x^2+8x-4}=5$.

6.496. $\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x+1}=\sqrt{15x+4}$.

6.497. $\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3}=\sqrt{2x+7}$.

6.498. $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1$.

6.499. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8}$.

6.500. $\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}=\sqrt[3]{2x+11}$.

6.501. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}$.

6.502. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2$.

6.503. $\sqrt[3]{5x+7}+\sqrt[3]{5x-12}=1$.

6.504. $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4$.

6.505. $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}-\sqrt[3]{5+\sqrt{x}}=1$.

6.506. $\sqrt[3]{x^2-2x}-\sqrt[3]{2x^2-7x+6}=0$.

6.507. $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1$.

Tenglamalarni «qo‘shmasiga ko‘paytirish usuli» bilan yeching:

6.508. $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$.

6.509. $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7$.

6.510. $\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-7}=2$.

6.511. $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6$.

Tenglamalarni yeching:

6.512. $\sqrt{x^2+3x-3}=2x-3$.

6.513. $\sqrt{9x^2+2x-3}=3x-2$.

6.514. $(x+2)(x-5)+3\sqrt{x(x-3)}=0$.

6.515. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$.

6.516. $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=1$.

6.517. $\sqrt{5x+7}-\sqrt{x+3}=\sqrt{3x+1}$.

6.518. $\sqrt{x+4}+2\sqrt{x+1}=\sqrt{x+20}$.

6.519. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{5x}$.

6.520. $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x+3}=\sqrt[3]{2x+1}$.

6.521. $\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[6]{x^2-1}$.

6.522. $\sqrt{x+1}=a$.

6.523. $\sqrt{x+3}=\sqrt{a-x}$.

6.524. $\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}+2\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=3$.

6.525. $\sqrt{7-x}-\sqrt{x-3}=a$.

6.526. $\sqrt{2x-1}-x+a=0$.

6.527. $2+\frac{2x}{\sqrt{2+x^2}}=\sqrt{2}$.

2. Irratsional tengsizliklar. a va b sonlari nomanfiy bo‘lgandagina $a < b$ dan $a^n < b^n$ kelib chiqadi (va aksincha, $a^n < b^n \Leftrightarrow \Leftrightarrow a < b$). Shunga ko‘ra $A(x)$, $B(x)$ irratsional ifodali tengsizliklarni yechishda ularning ishoralari e’tiborga olinishi kerak. Umuman,

$$\sqrt[2k]{A(x)} < B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0, \\ B(x) > 0, \\ A(x) < B^{2k}(x) \end{cases} \tag{1}$$

bo‘ladi. Sistemadagi birinchi tengsizlik ildiz ostidagi ifodaning nomanfiyligini, ikkinchisi $B(x)$ ning musbatligini ifodalaydi, uchinchisi $a \geq 0$, $b \geq 0$ da $a < b$ va $a^{2k} < b^{2k}$ tengsizliklar bir vaqtda bajarilishidan kelib chiqadi. $\sqrt[2k]{A(x)} > B(x)$ tengsizligi $B(x) \geq 0$, $A(x) > B^{2k}(x)$ bo‘lganda yoki $A(x) \geq 0$, $B(x) < 0$ bo‘lganda o‘rinli. Shunga ko‘ra $\sqrt[2k]{A(x)} > B(x)$ tengsizlikni yechish uchun

$$\begin{cases} B(x) \geq 0, \\ A(x) > B^{2k}(x) \end{cases} \quad (2) \quad \text{va} \quad \begin{cases} A(x) \geq 0, \\ B(x) < 0 \end{cases} \tag{3}$$

tengsizliklar sistemalarini yechish va ularning yechimlarini birlashtirish kerak.

1- m i s o l. $\sqrt{x^2 + 6x - 16} > x - 1$ tengsizlikni yeching.

Y e c h i s h . Berilgan tengsizlikdan ushbu tengsizliklar sistemalari hosil bo‘ladi:

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ x^2 + 6x - 16 > x^2 - 2x + 1 \end{cases} \quad \text{va} \quad \begin{cases} x^2 + 6x - 16 \geq 0, \\ x - 1 < 0. \end{cases}$$

Birinchi sistemaning yechimi $\left(2\frac{1}{8}; +\infty\right)$ to‘plamdan, ikkinchi sistemaniki $(-\infty; -8)$ to‘plamdan iborat.

J a v o b : $(-\infty; -8) \cup \left(2\frac{1}{8}; +\infty\right)$.

Agar irratsional tengsizlik

$$\sqrt{A(x)} + \sqrt{B(x)} < C(x) \tag{4}$$

ko'rinishda berilgan bo'lsa, $A(x) \ge 0$, $B(x) \ge 0$ va $\sqrt{B(x)} < C(x)$ (yoki $\sqrt{A(x)} < C(x)$) shartlar bajarilganda berilgan tengsizlik $A(x) < (C(x) - \sqrt{B(x)})^2$ (yoki $B(x) < (C(x) - \sqrt{A(x)})^2$) tengsizlikka teng kuchli bo'lib, yuqorida qaralgan turlardan biriga keladi.

2-misol. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} < 5$ tengsizlikni yeching.

Yechish.

$$\begin{cases} x-1 \ge 0, \\ x+4 \ge 0, \\ \sqrt{x-1} < 5, \\ x+4 < (5-\sqrt{x-1})^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 1, \\ x \ge -4, \\ x < 26, \Rightarrow 1 \le x \le 5, \\ x < 5. \end{cases}$$

Javob: $1 \le x \le 5$.

Tengsizliklarni mantiqiy mulohazalar yuritib yeching:

6.528. $\sqrt{x+3} \ge -5$.

6.529. $\sqrt{x^2+1} > -1$.

6.530. $\sqrt{x^2-2x+4} > -\frac{1}{2}$.

6.531. $\sqrt{x^2-2x+4} < 0$.

6.532. $\sqrt{x^2-6x+9} \ge 0$.

6.533. $\sqrt{|x-2|+x^2+4} < 0$.

6.534. $\sqrt{x^2-2x+3} \ge -0{,}3$.

6.535. $\sqrt{x^2} > 0$.

6.536. $\sqrt{x-4} + \sqrt{3-x} > 0$.

6.537. $\sqrt{x-4} + \sqrt{3+x} < 0$.

6.538. $\sqrt{x^2-3x+2} \ge 0$.

6.539. $\sqrt{4y^2+4y+1} > 0$.

6.540. $\sqrt{x^2+x+1} > 0$.

6.541. $\sqrt{5x-6-x^2} > 0$.

6.542. $\sqrt{x-1-x^2} > 0$.

6.543. $\sqrt{5x-18-x^2} > 0$.

6.544. $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \ge 0$.

6.545. $(3-x)\sqrt{x^2+x-2} \le 0$.

6.546. $\frac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}} < 0$.

6.547. $\dfrac{\sqrt{2x^2+15x-17}}{10-x} \geq 0$.

6.548. $\dfrac{\sqrt{x^2-x-2}}{x^2+2x-3} > 0$.

6.549. $\dfrac{x^2-3x-6}{\sqrt{x^2-4x+3}} < 0$.

Tengsizliklarni yeching:

6.550. $\sqrt{x+7} < x$.

6.551. $\sqrt{x^2+4x+4} < x+6$.

6.552. $\sqrt{2x^2-3x-5} < x-1$.

6.553. $\sqrt{x+78} < x+6$.

6.554. $\sqrt{(x+2)(x-5)} < 8-x$.

6.555. $1-\sqrt{13+3x^2} > 2x$.

6.556. $\sqrt{x^2+x-12} < x$.

6.557. $\sqrt{2x+4} > x+3$.

6.558. $\sqrt{x^2+x-2} > x$.

6.559. $\sqrt{9-24x+16x^2} > 8$.

6.560. $\sqrt{(x+4)(x+3)} > 6-x$.

6.561. $\sqrt{x^2-5x-24} > x+2$.

6.562. $\sqrt{x^2-4x} > x-4$.

6.563. $\sqrt{x^2-x-6} \leq x+5$.

6.564. $\sqrt{x^2-5x+6} \leq x+1$.

6.565. $\sqrt{x^2-7x+12} \geq 1-x$.

6.566. $3\sqrt{x}-\sqrt{x+3} > 1$.

6.567. $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+4} > 0$.

6.568. $\sqrt{x-6}-\sqrt{10-x} \geq 1$.

6.569. $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1} > \sqrt{2x-1}$.

6.570. $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2} > 1$.

6.571. $\sqrt{1-x} \leq \sqrt[4]{5-x}$.

6.572. $\sqrt[4]{5x-1} \leq \sqrt{x\sqrt{6}}$.

6.573. $\sqrt{1-x^2}+1 < \sqrt{3-x^2}$.

6.574. $\sqrt{x+3} < \sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}$.

6.575. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} > \frac{3}{2}$.

6.576. $\sqrt{x^2-x-12} < 7-x$.

6.577. $\sqrt{x^2-5x+6} < 2x-3$.

6.578. $\frac{\sqrt{x+2}}{x} < 1$.

6.579. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}} > 1{,}5\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$.

6.580. $\sqrt{x^2-5x+6}+\frac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}} \geq 2$.

6.581. $\frac{1}{\sqrt{3x-2}}+\sqrt{3x+2} > 2$.

6.582. $\sqrt{x^2-x-2}+\frac{1}{\sqrt{x^2-x-2}} > 2$.

6.583. $\sqrt{3-4x}+\frac{1}{\sqrt{3-4x}} < 2$.

6.584. $\sqrt{x^2+4x+4} < x+6$.

6.585. $\sqrt{16x^2-24x+9}<\sqrt{4x^2+12x+9}$.

6.586. $\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}<8$.

6.587. $\sqrt{x^4+2x^2+1}+\sqrt{4x^4-4x^2+1}\le 2x-1$.

6.588. $\sqrt{x}-3\le\frac{2}{\sqrt{x}-2}$.

6.589. $5\sqrt{x}>x+6$.

6.590. $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}>4+\frac{\sqrt{x}-1}{2}$.

6.591. $\frac{1}{\sqrt{2-x}}>\frac{1}{x-1}$.

6.592. $\frac{1}{\sqrt{1+x}}>\frac{1}{2-x}$.

6.593. $\frac{\sqrt{3x^2+4}}{x-1}\ge 4$.

6.594. $a\sqrt{x+1}<1$.

6.595. $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}>a$.