O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

ABU RAYHOH BERUNIY NOMIDAGI TOSHKENT DAVLAT TEXNIKA UNIVERSITETI

Referat

MAVZU:

IKKI KARRALI INTEGRALLAR

Bajardi: **Dexqonboyev B.**

Tekshirdi: **Yunusov B.**

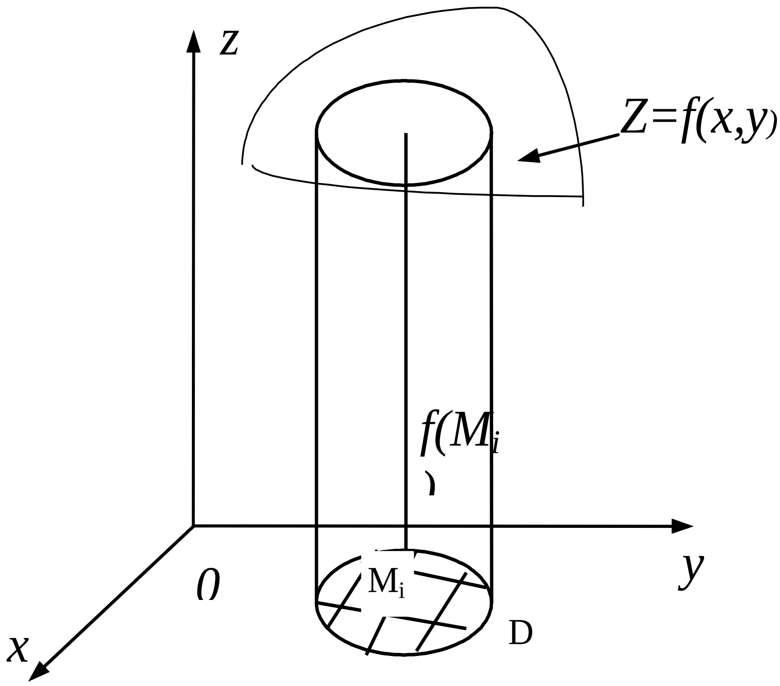
Toshkent-2015

IKKI KARRALI INTEGRALGA KELTIRILADIGAN BA'ZI MASALALAR. IKKI KARRALI INTEGRALNING TA'RIFI. IKKI KARRALI INTEGRALNING XOSSALARI. O'RTA QIYMAT HAQIDAGI TEOREMA.

1. Ikki karrali integralga keltiriladigan ba'zi masalalar.

Geometriyada, mexanikada va fizikada shunday masalalar borki, ularni yechishda aniq integralning kuchi yetmaydi.

1-masala. Yasovchisi OZ o'qiga parallel, pastki asosi XOY tekisligida yotuvchi va $z = f(x, y)$ sirt bilan chegaralangan silindrsimon g'o'laning hajmini toping.



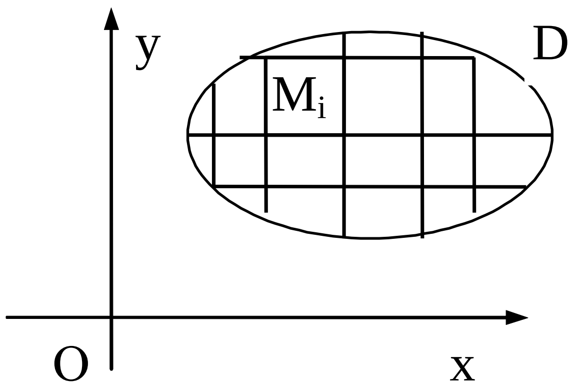
1-rasm.

Silindr pastki asosi D - sohani ixtiyoriy ravishda $D_1, D_2, \dots, D_n$ bo'laklarga bo'lamiz. $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$, bunda $D_1, D_2, \dots, D_n$ sohalar umumiy ichki nuqtalarga ega bo'lmagan sohalardir. D_i $(i = \overline{1, n})$ sohaning yuzini Δs_i bilan belgilaymiz va shu sohada ixtiyoriy M_i nuqta olamiz. Pastki asosi D_i bo'lgan kichik silindrsimon g'o'laning hajmi $\upsilon_i \approx f(M_i) \cdot \Delta s_i$ taqribiy formula bilan aniqlanadi. Natijada qaralayotgan g'o'laning hajmi

$$\upsilon = \sum_{i=1}^{n} \upsilon_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i \qquad (1)$$

taqribiy formula bilan hisoblanadi. Bu masalaning aniq yechimiga keyinroq to'xtalamiz. (1) ning o'ng tomoni integral yig'indidir, lekin bizga tanish bo'lgan bir o'lchovli (aniq) integral hosil bo'ladigan yig'indi emas.

2-masala. Har bir (x, y) nuqtasidagi sirt zichligi $\rho = \rho(x, y)$ bo'lgan tekis figuraning (plastinkaning) massasini toping.



2-rasm.

Bu yerda yuqorida keltirilgan mulohazalarni takrorlaymiz. Plastinkaning D_i bo'lagida ixtiyoriy M_i nuqtani olib, D_i bo'lagining massasini m_i bilan belgilab, fizikadan ma'lum bo'lgan quyidagi taqribiy formulani yozamiz (2-rasm)

$$m_i \approx \rho(M_i)\Delta s_i \quad (i = 1,2,\dots,n).$$

Butun plastinkaning massasi

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(M_i)\Delta s_i \qquad (2)$$

taqribiy formula bilan hisoblanadi. (2) ning o'ng tomoni ham integral yig'indidir, lekin bunda ham bir o'lchovli (aniq) integral hosil bo'lmaydi. Massaning aniq qiymatini hisoblashga keyinroq to'xtaymiz.

2. Ikki karrali integralning ta'rifi.

Biror D_i sohaning diametri deb shu D_i sohada yotuvchi ikkita nuqta orasidagi masofalarning aniq yuqori chegarasiga (eng kattasiga) aytiladi. D_i sohaning diametrini d_i bilan belgilasak, ta'rifdan $d_i = \sup\limits_{M_1M_2 \in D_i} |M_1M_2|,$

bunda $M_1(x_1, y_1),$ bo'lsa,

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

bo'ladi. Biz yuqorida silindrsimon g'o'laning hajmini taqribiy hisoblagan edik. Agar (1) integral yig'indi D_i sohalar diametrlarining eng kattasi nolga intilganda M_i nuqtalarning D_i sohalardan tanlanishiga va D sohaning $D_1, D_2, ..., D_n$ sohalarga bo'linish usuliga bog'liq bo'lmay yagona limitga intilsa, shu limitga $f(x, y)$ funksiyaning D soha bo'yicha ikki karrali integrali deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{\max\limits_i d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i = \iint_D f(x, y)dxdy \tag{3}$$

Ikki karrali integral yordamida (1) va (2) tengliklardagi υ va m larning aniq qiymatlarini yoza olamiz

$$\upsilon = \iint_D f(M)ds = \iint_D f(x, y)dxdy \tag{4}$$

$$m = \iint_D \rho(M)ds = \iint_D \rho(x, y)dxdy \tag{5}$$

Bunda (1) va (2) tengliklarning o'ng tomonlarida $\max\limits_i d_i \to 0$ bo'lganda limitga o'tib, (3) formulani qo'lladik. Shunday qilib, ikki karrali integral - yasovchilari OZ o'qiga parallel, asoslarining biri XOY tekisligida, ikkinchisi esa $z = f(x, y)$ sirtda yotuvchi silindrsimon g'o'laning hajmini aniqlar ekan. Agar integral ostidagi funksiya D soha bilan ustma-ust tushgan plastinkaning sirt zichligini ifodalasa, u holda ikki karrali integral shu plastinkaning massasini aniqlar ekan, bunda $\rho(x, y) > 0,$ $(x, y) \in D.$

3. Ikki karrali integralning xossalari.

1-xossa. D sohaning yuzini $D=S$ deb belgilasak, $\iint\limits_D dxdy = S$ tenglik o'rinlidir.

Isboti. (4) da $f(x,y)=1$ qo'yamiz, natijada $v=\iint\limits_D dxdy$ hosil bo'ladi. Ikkinchi tomondan $\upsilon = 1\cdot S_{acoc} = S.$ Bularni taqqoslab, $\iint\limits_D dxdy = S$ tenglikka ega bo'lamiz.

2-xossa. $a = const$ bo'lsa,

$$\iint\limits_D af(x,y)dxdy = a\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

o'zgarmas ko'paytuvchini integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

Isboti. (3) da $f(x,y)$ o'rniga $af(x,y)$ qo'yamiz va chap tomonga yig'indining va limitning xossalarini qo'llasak, 2-xossaning to'g'riligi kelib chiqadi.

3-xossa. Agar $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ va $\iint\limits_D g(x,y)dxdy$ integrallar mavjud bo'lsa, u holda

$$\iint\limits_D [f(x,y)\pm g(x,y)]dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy \pm \iint\limits_D g(x,y)dxdy$$

tenglik o'rinlidir. Bu xossaning to'g'riligi ikki karrali integral ta'rifidan, yig'indi va limitning xossalaridan bevosita kelib chiqadi.

4-xossa. Agar $D = D_1 + D_2$ bo'lib, D_1 va D_2 sohalar umumiy ichki nuqtalarga ega bo'lmagan sohalar bo'lsa, u holda $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Bu xossa ham ikki karrali integralning ta'rifidan kelib chiqadi.

5-xossa. Agar $(x,y)\in D$ bo'lganda $f(x,y)\le g(x,y)$ bo'lsa, u holda

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \le \iint\limits_D g(x,y)dxdy$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Isboti. Belgilash kiritamiz:

$$0 \le g(x,y) - f(x,y) = \alpha(x,y). \qquad (4)$$

formulaga ko'ra, bundan $\iint\limits_D \alpha(x,y)dxdy = \vartheta \ge 0$ ya'ni 5-xossaning to'g'riligi kelib chiqadi.

6-xossa. D sohada integrallanuvchi $f(x,y)$ funksiya uchun quyidagi tengsizlik o'rinlidir

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|dxdy$$

Isboti. $-|f(x,y)| \le f(x,y) \le |f(x,y)|$ bo'lgani uchun 5-xossaga ko'ra

$$-\iint\limits_D |f(x,y)dxdy| \le \iint\limits_D f(x,y)dxdy \le \iint\limits_D |f(x,y)|dxdy,$$

bundan $\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|dxdy$ kelib chiqadi.

7-xossa. D sohada integrallanuvchi $f(x,y)$ funksiya shu sohada $m \le f(x,y) \le M$ tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda

$$mS \le \iint\limits_D f(x,y)dxdy \le MS$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu yerda S - D sohaning yuzi.

Bu xossaning isboti 1- va 5-xossalardan kelib chiqadi.

4. O'rta qiymat haqidagi teorema.

$f(x,y)$ funksiya D yopiq sohada uzluksiz bo'lsa, u holda D sohada shunday $(x_0, y_0) \in D$ nuqta mavjudki, bunda

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(x_0, y_0) \cdot S \qquad (6)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. Yopiq sohada uzluksiz bo’lgan $f(x,y)$ funksiya shu sohada o’zining eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadi. $\underset{(x,y)\in D}{Sup} f(x,y)=M$, $\inf\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)=m$ deb belgilab,

$$mS \le \iint\limits_D f(x,y)dxdy \le MS$$

(7-xossaga ko’ra) tengsizlikni hosil qilamiz. M va m sonlar orasida shunday $m<K<M$ son mavjudki, bunda $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = KS$ tenglik bajariladi. $f(x,y)$ funksiya D sohada uzluksiz bo’lgani uchun shunday $(x_0,y_0)\in D$ nuqta mavjudki, $f(x_0,y_0)=K$ bo’ladi. Natijada

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(x_0,y_0)\cdot S$$

kelib chiqadi.