

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ
ВАЗИРЛИГИ

Низомий номли Тошкент давлат педагогика университети

Алгебра ва сонлар назарияси

(Маърузалар матни)
1-қисм

Математика ва уни ўқитиш методикаси кафедраси

Тузуячилар: ф.м.ф.н., доцент Б.Т.Тошпўлатов
ф.м.ф.н., доцент А.Д. Дўсумбетов
ф.м.ф.н., доц.ваз.баж. А.К.Ғулматов

Тошкент-2000

Кириш

Мазкур маъруза матнлар тўплами алгебра ва сонлар назариясидан педагогика университетлари бакалавриат йўналиши бўйича «Математика ва информатика» бўлимида тахсил оладиган талабалар учун ёзилган бўлиб, унда 36 соатга мўлжаллаб 18 та маъруза баён этилган. Бу маърузалар бўлажак бакалаврнинг математика бўйича маданиятини шакллантиришга қаратилган бўлиб, унда математик мантиқ элементлари, тўпламлар ва муносабатлар, тўплам тушунчасига кўра алгебра ҳамда алгебраик системалар кенг ёритилган. Бундан ташқари мактаб математика курсида ўрганиладиган ҳақиқий сонлар тўплами тушунчаси кенгайтирилиб, комплекс сонлар майдони тушунчаси киритилган.

Айрим матнларда теоремалар, хоссалар, натижаларнинг исботлари келтирилмаган ҳоллар ҳам учрайди. Лекин уларнинг исботларини талаба қардан ўрганиши учун кўрсатма берилган. Кўплаб тушунчалар мисоллар ёрдамида ёритиб берилган.

Тўпламда талабаларнинг мустақил таълим мавзуларини ўрганинишлари учун кўпгина матнларнинг батафсил ёзилишига эътибор берилган.

1,2-маърузалар

Мулоҳаза. Мулоҳазалар устида амаллар. Формулалар
(4-соат)

Режа:

- 1.Мулоҳаза ҳақида тушунчалар.
- 2.Мулоҳазалар устида амаллар.
- 3.Мулоҳазалар алгебрасининг формулалари.
- 4.Тенг кучли формулалар.

Адабиёт

- 1.Назаров Р.Н.,Тошплатов Б.Т.,Дгсумбетов А.Д.,Алгебра ва сонлар назарияси.1.исм. Т.:Ўқитувчи. 1993 й.(35-39 бетлар).
- 2.Куликов Л. Я. Алгебра и теория чисел. М.:Высш.шк.1979 г.(стр. 5-14).

Ҳар қандай математик назария у ёки бу математик жумланинг рост ёки ёлғонлигини ўрганади.

Таъриф. Рост ёки ёлғонлиги бир қийматли аниқланган дарак гапга жумла (мулоҳаза) дейилади.

Таърифта кўра « $0 < 1$ », « $2 \bullet 5 = 10$ », «7 – жуфт сон», «1 – туб сон» гаплар мулоҳаза бўлиб, улардан биринчиси ва иккинчиси рост, учинчиси ва тўртинчиси эса ёлғон мулоҳазалардир.

Мулоҳазалар назариясининг бошланғич объектлари содда (оддий) мулоҳазалардан иборат. Содда мулоҳазалар лотин алифбосининг катта ҳарифлари А, В, С, ... ёки кичик ҳарфлари а, в, с, ..., р, қ, г, ... орқали белгиланади. Мулоҳазаларнинг рост ёки ёлғонлиги уларнинг мазмунинга қараб аниқланади. Рост мулоҳазанинг қийматини 1, ёлғон мулоҳазанинг қийматини 0 орқали белгилайлик. Мулоҳаза бир вақитнинг ўзида ҳам рост, ҳам ёлғон бўла олмайди.

Математикада ҳар бир теорема мулоҳаза ҳисобланади.

Содда мулоҳазалардан боғловчи ёки боғловчи сўзлар орқали мураккаб мулоҳазалар ҳосил қилинади.

«Эмас», «ва», «ёки», «...келиб чиқади», «зарур ва етарли» каби боғловчи сўзларга биттадан логикий амал мос келади.

Мулоҳазалар устида бажариладиган инкор, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция амаллари мавжуд.

1. Инкор амали.

Таъриф. p мулоҳазанинг инкори деб $\neg p$ рост бўлганда ёлғон, p ёлғон бўлганда рост бўладиган янги мулоҳазага айтилади.

Инкор амалига «эмас» боғловчиси мос келади.

p мулоҳазанинг инкорини $\neg p$ ёки $\neg p$ кўринишларда белгиланади. Масалан, P : «5-жуфт сон» бўлса, у ҳолда $\neg p$: «5-жуфт сон эмас» бўлади. Бу ерда p мулоҳаза ёлғон бўлиб, $\neg p$ мулоҳаза эса рост бўлади.

p мулоҳазанинг инкорининг инкори яна p мулоҳазанинг ўзи, яъни $\neg(\neg p) = p$ бўлади. Буни икки қаррали инкор деб юритилади.

Инкор амалига қуйидаги ростлик жадвали мос келади:

p	$\neg p$
1	0
0	1

2. Конъюнкция амали.

Таъриф. p ва q мулоҳазаларнинг конъюнкцияси деб p ва q мулоҳазалар рост бўлганда рост, бошқа ҳолларда ёлғон бўлган янги мулоҳазага айтилади ва уни $p \wedge q$ ёки $p \& q$ кўринишларда белгиланади.

Конъюнкция амалига «ва» боғловчиси мос келади.

Масалан, p : «5- туб сон»,
 q : «5- тоқ сон»,
 $p \wedge q$: «5- туб ва тоқ сон».

Конъюнкция амалига қуйидаги ростлик жадвали мос келади:

P	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Мулоҳазаларнинг конъюнкцияси иккитадан ортиқ мулоҳазалар учун ҳам ўринли бўлади. $p_1, p_2, \dots, p_n$ мулоҳазаларнинг конъюнкцияси $\bigwedge_{i=1}^n p_i$ белгилайлик. $p_1, p_2, \dots, p_n$ ларнинг барчаси рост бўлса, у ҳолда $\bigwedge_{i=1}^n p_i$ рост, бошқа ҳолларда $\bigwedge_{i=1}^n p_i$ ёлғон бўлади.

3. Дизъюнкция амали.

Таъриф. p ва q мулоҳазаларнинг дизъюнкцияси деб бу мулоҳазаларнинг камида биттаси рост бўлганда рост, бошқа ҳолда ёлғон бўлган янги мулоҳазага айтилади ва уни $p \vee q$ орқали белгиланади.

Дизъюнкция амалига «ёки» боғловчиси мос келади.

Масалан, $p \gg 3 < 4$ - рост,
 q : « $3 = 4$ » - ёлғон,
 $p \vee q \gg 3 \leq 4$ - рост.

Дизъюнкция амалига қуйидаги ростлик жадвали мос келади:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Мулоҳазаларнинг дизъюнкцияси иккитадан ортиқ мулоҳазалар учун ҳам ўринли бўлади. $p_1, p_2, \dots, p_n$ мулоҳазаларнинг дизъюнкцияси $\bigvee_{i=1}^n p_i$ орқали белгилайлик. $p_1, p_2, \dots, p_n$ ларнинг камида биттаси рост бўлса, $\bigvee_{i=1}^n p_i$ рост, $p_1, p_2, \dots, p_n$ ларнинг барчаси ёлғон бўлса $\bigvee_{i=1}^n p_i$ ёлғон бўлади.

4. Импликация амали.

Таъриф. p ва q мулоҳазаларнинг импликацияси деб p рост, q ёлғон бўлганда ёлғон, бошқа ҳолларда рост бўлган янги мулоҳазага айтилади ва уни $p \Rightarrow q$ кўринишда белгиланади.

Импликация амалига «агар..., бўлса, у ҳолда,... бўлади» каби боғловчи сўзлар мос келади.

Масалан, p : « $5 \bullet 5=25$ » -рост,

q : « $6 \bullet 6=36$ » - рост,

$p \Rightarrow q$: «Агар $5 \bullet 5=25$ бўлса, у ҳолда $6 \bullet 6=36$ бўлади» - рост.

$p \Rightarrow q$ импликация қуйидагича ўқилади: « p дан q келиб чиқади», « p бўлиши учун q нинг бўлиши зарур», « p мулоҳаза q мулоҳаза учун етарли».

Импликация амалига қуйидаги ростлик жадвали мос келади:

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

5.Эквиваленция амали.

Таъриф. p ва q мулоҳазаларнинг эквиваленцияси деб p ва q ларнинг бир хил қийматларида рост, турли қийматларида ёлғон бўлган янги мулоҳазага айтилади ва уни $p \Leftrightarrow q$ кўринишда белгиланади.

Эквиваленция амалига «Агар...бўлса, шу ҳолда ва фақат шу ҳолда... бўлади», «...бажарилиши учун...бажарилиши зарур ва етарли» каби боғловчи сўзлар мос келади.

Масалан, p : «Берилган натурал сон 3 га бўлинади»,

q : «Берилган соннинг рақамлар йиғиндиси 3 га бўлинади».

$p \Leftrightarrow q$: «Берилган соннинг 3 га бўлиниши учун унинг рақамлари йиғиндисининг 3 га бўлиниши зарур ва етарли».

Эквиваленция амалига қуйидаги ростлик жадвали мос келади:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Ҳар бир қаралаётган мулоҳазага ростлик жадвалидан битта устун мос келади. Бу устунни қийматлар устуни деб юритамиз.

Таъриф. Ёйиматлари устуни бир хил бўлган мулоҳазалар ўзаро тенг кучли мулоҳазалар дейилади.

p ва q мулоҳазаларнинг тенг кучлилиги $p \equiv q$ кўринишда белгиланади.

Масалан, $p \Rightarrow q$ ва $\neg q \Rightarrow \neg p$ мулоҳазаларнинг тенг кучлилигини қуйидаги ростлик жадвали орқали кўрсатайлик:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

$p \Rightarrow q$ ва $\neg q \Rightarrow \neg p$ мулоҳазаларнинг қийматлари устуни бир хил бўлгани учун $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$ бўлади.

Мулоҳазалар ва улар устида бажариладиган мантикий амаллар биргаликда мулоҳазалар алгебраси деб юритилади.

Тариф. 1. $p, q, r, \dots$ лар мулоҳазалар алгебрасининг формулаларидир.

2. Агар p ва q лар мулоҳазалар алгебрасининг формулалари бўлса, у ҳолда $\neg p$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$ лар ҳам формула бўлади.

3.Мулоҳазалар алгебрасидаги формулалар фаіат 1) ва 2) формулалар ёрдамида тузилади.Кўп ҳолларда 2) ёрдамида аниқланган формулалар мураккаб формулалар деб юритилади.

Мураккаб формулага аргументлари рост ёки ёлғон қийматни қабул қилувчи функция деб қараш мумкин.

Таъриф. $x_i(i=\overline{1,n})$ аргументларнинг ҳар бир қабул қилиши мумкин бўлган барча 1,0 қийматлар тизимида $A(x_1,x_2,\dots,x_n)$ формулани ифодаловчи мантикий функция рост (ёлғон) қийматга эришса,у ҳолда бу формула айнан рост (ёлғон) формула дейилади.

Агар $A(x_1,x_2,\dots,x_n)$ формулада n та элементар мулоҳаза бўлса, у ҳолда бу формуланинг ростлик жадвали 2^n та сатр (йўл) дан иборат бўлади.

Таъриф. Таркибидаги $x_i(i=\overline{1,n})$ ўзгарувчиларнинг мумкин бўлган барча қийматлари тизимида $A(x_1,x_2,\dots,x_n)$ ва $B(x_1,x_2,\dots,x_n)$ формулаларнинг қийматлари устунни бир хил бўлса, у ҳолда бу формулалар ўзаро тенг кучли формулалар дейилади ва уни $A(x_1,x_2,\dots,x_n) \equiv B(x_1,x_2,\dots,x_n)$ кўринишда белгиланади.

Мулоҳазалар алгебрасида муҳим роль ўйнайдиган тенг кучли формулалардан бир қанчаси [1,2] да келтирилган.

Текшириш саволлари

1. Мулоҳаза (жумла) деб нимага айтилади?
2. Мулоҳазалар устида қандай амалларни биласиз?
3. Инкор,конъюнкция, дизъюнкция,импликация, эквиваленция таърифларини айтиб беринг?
4. Мулоҳазалар устидаги амалларга мисол келтиринг.
5. Мулоҳазалар алгебрасининг формулаларига мисол келтиринг.
6. Тенг кучли формулага мисол келтиринг.

Таянч тушунчалар

1. Дарак гап.
2. Боғловчи ва боғловчи сўзлар.
3. Эркин ўзгарувчилар.

3 – маъруза

Предикатлар. Кванторлар (2 соат)

Режа:

1. Предикатлар ҳақида тушунчалар.
2. Кванторлар ва уларнинг турлари.
3. Предикатли формулалар.
4. Мулоҳазаларни мантикий белгилар ёрдамида ёзиш.

Адабиёт

1. Назаров Р.Н., Тошпўлатов Б. Т.,Дўсимбетов А.Д. Алгебра ва сонлар назаряси. 1 қисм. Т.: оқитувчи. 1993 й.(43-50бетлар).
2. Куликов Л.Я.Алгебра и теория чисел. М.:Высш. шк. 1979 г.(стр. 22-38).

Мулоҳазалар алгебраси ёрдамида содда мулоҳазалардан мураккаб мулоҳазалар ҳосил қилишни 1,2- маърузаларда ўргандик. Лекин мулоҳазалар мантиқи камчиликларга эга, яъни унинг ёрдамида объектларнинг хоссалари ва улар орасидаги

муносабатларни ёритиш мумкин эмас. Бундай камчиликларни бартараф қилишда предикат тушунчаси муҳимдир.

Таъриф. Таркибида эркин ўзгарувчилар қатнашиб, бу ўзгарувчиларнинг қабул қилиш мумкин бўлган қийматларида мулоҳазага айланадиган дарак гапга предикат дейилади.

х объектнинг бирор Р хоссага эга бўлиши $P(x)$ каби белгиланиб, уни бир ўринли предикат дейилади.

Предикат икки, уч,...,n ўринли ҳам бўлиши мумкин. n ўринли предикат $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ орқали белгиланиб, бу предикат бирор А тўпламнинг $x_1, x_2, \dots, x_n$ элементлари орасидаги Р муносабатни билдиради. Бир ўринли предикатни унар, икки ўринли предикатни бинар, уч ўринли предикатни тернар предикатлар дейилади. Ноль ўринли предикат ўзгармас мулоҳазани билдиради.

Масалан, $P(x)$: «х- туб сон»- бир ўринли предикат,

$P(x,y)$: « $x+y=5$ » - икки ўринли предикат, $P(x,y,z)$: « $x+2y+z=0$ »- уч ўринли предикат бўлади.

Таъриф. М тўпламнинг $P(x)$ предикатни рост мулоҳазага айлантирувчи Д қисм тўпламига $P(x)$ предикатнинг ростлик соҳаси дейилади.

Таъриф. Агар $P(x)$ предикат М тўпламнинг барча элементларида рост (ёлғон) бўлса, у ҳолда $P(x)$ предикат М тўпланда айнан рост (айнан ёлғон) дейилади.

Бундан ташқари бажарилувчи предикат ҳам мавжуд бўлиб улар [1,2] да келтирилган.

n ўринли предикатлар учун ҳам айнан рост, айнан ёлғон предикатлар тушунчасини аниқлаш мумкин.

Масалан, « $x < 0$ » - предикат N тўпланда айнан ёлғон,

«х-мусбат» - предикат N тўпланда айнан рост предикат, «х- тоқ сон» - предикат эса N тўпланда бажарилувчи предикат бўлади.

Предикатлардан мулоҳаза ҳосил қилишнинг қуйидаги иккита усули билан танишайлик:

Бирор М тўпламнинг «Барча (ихтиёрий) х элементлари учун» деган жумла қисқа $\forall x \in M$, «Баъзи бир х элементи учун» деган жумла эса $\exists x \in M$ орқали белгиланиб, улар мос равишда умумийлик (ихтиёрийлик) ва мавжудлик кванторлари дейилади. «А тўпламнинг барча (ихтиёрий) х элементлари учун $f(x)$ предикат рост» деган жумла қисқача ($\forall x \in A$) $f(x)$ кўринишда ёзилади. ($\exists x \in A$) $f(x)$ ёзувда $\exists x \in f(x)$ белги эса «А тўпламнинг шундай х элементи мавжудки (топиладики), бу элемент учун $f(x)$ предикат рост» деган маънони билдиради.

$f(x)$ предикат А тўпламнинг барча элементлар учун рост бўлгандагина ($\forall x \in A$) $f(x)$ мулоҳаза рост қийматга эга, $f(x)$ предикат айнан ёлғон бўлганда ($\forall x \in A$) $f(x)$ мулоҳаза ёлғон, яъни $\forall x \in f(x)$ ёлғон бўлади.

Икки, уч,...,n ўринли предикатлар орқали ҳам кванторли мулоҳазалар ҳосил қилиш мумкин. Бу мулоҳазаларнинг ҳар бири айнан рост ёки айнан ёлғон бўлиши мумкин.

М тўплам қаралаётган предикатларнинг ростлик соҳаси бўлсин.

Таъриф. 1) М тўпланда аниқланган ҳар қандай мулоҳаза ва предикат предикатлар логикасининг формуласидир;

2) Агар $F_i (i=1, n)$ формула бўлса, у ҳолда $\forall F_i, \exists F_i, \neg F_i$ лар ҳам формуладир;

3) Агар F ва Φ формула бўлса, у ҳолда $(F \vee \Phi), (F \wedge \Phi), (F \Rightarrow \Phi)$ ва $(\Phi \Rightarrow F)$ лар ҳам предикатлар логикасининг формуласи бўлади;

4) Предикатлар мантиқидаги формулалар фақат 1), 2), 3) формулалар орқали тузилади.

Математик мулоҳазаларни мантикий белгилар ёрдамида ёзиш учун одатда чекли сондаги базис предметлар танлаб олинади. Ҳолган хосса ва муносабатлар базис предикатлар ҳамда эрки ўзгарувчилар ёрдамида тузилган таъриф, теоремалар орқали ифодаланади.

Мисол. 1. А тўпламда аниқланган ρ транзитив муносабат қуйидагича бўлади:

$$(\forall a, b, c \in A)((a \rho b) \wedge (b \rho c)) \Rightarrow a \rho c.$$

2. $f(x)$: « x - тўртбурчак», $\varphi(x)$: « x -квадрат» предикат бўлса, у ҳолда «Баъзи тўртбурчаклар квадратдир» деган тасдиқ $\exists x \in f(x) \Rightarrow \varphi(x)$, «Ихтиёрий квадрат тўртбурчакдир» деган тасдиқ эса $\forall x \in \varphi(x) \Rightarrow f(x)$ кўринишларда ёзилади.

Текшириш саволлари

1. Предикат деб нимага айтилади?
2. p ўринли предикатга мисол келтиринг?
3. Умумийлик (ихтиёрийлик) ва мавжудлик кванторларини тушунтириб беринг?
4. Предикатли формулаларни тушунтириб беринг.
5. Айрим мулоҳазаларни мантикий белгилари орқали ёзинг?

Таянч тушунчалар

1. Мулоҳаза (жумла) ва улар устида мантикий амаллар.
2. Тўплам.

4,5-маърузалар

Тўплам. Тўпламост. Тўпламлар устида амаллар ва уларнинг хоссалари (4 соат)

Режа:

1. Тўпламлар ҳақида тушунчалар.
2. Ҳисм тўплам (тўпламост).
3. Тўпламлар устида амаллар ва уларнинг хоссалари.

Адабиёт

1. Назаров Р.Н., Тошпўлатов Б.Т., Дўсимбетов А.Д. Алгебра ва сонлар назарияси. 1 қисм. Т.: Ёқитувчи. 1993 й. (6-18 бетлар).
2. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. М.: Высш. шк. 1979 г. (стр. 39-48).

Математикада энг муҳим тушунчалардан бири тўплам тушунчасидир. Бу тушунчага биринчи марта немис математиги Георг Кантор (1845-1918) асос солди.

Тўпламга таъриф бериб бўлмайди, уни баъзи бир нарсалар, буюмлар, объектларнинг мажмуи деб қаралади.

Тўпламни латин ёки грек алифбосининг бош ҳарфлари орқали белгиланади.

Таъриф. Тўпламни ташкил этувчи объектлар шу тўпламнинг элементлари дейилади.

Тўпламнинг элементлари латин ёки грек алифбосининг кичик ҳарфлари орқали белгиланади.

Элементлари $a, b, c, \dots$ бўлган A тўпламни $A = \{a, b, c, \dots\}$ кўринишда ёзилади.

Таъриф. Элементлари сони чекли бўлган тўпламни чекли тўплам, элементларининг сони чексиз кўп бўлган тўпламни чексиз тўплам дейилади.

Масалан, $A = \{0\}, B = \{0, 1\}, C = \{1, 2, \dots, n\}$ - тўпламлар чекли, $N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ тўплам чексиз тўплам бўлади. Баъзи тўпламларни ўз элементлари орқали ёзиш мумкин эмас. Бундай вақтда у тўпламлар ўз элементларининг характеристик хоссалари орқали

берилади. Агар A тўпламнинг барча элементлари бирор P хоссага эга бўлса, у ҳолда A тўпламни $A = \{x/P(x)\}$ кўринишда ёзилади.

Масалан, $x^2 + 2x - 3 = 0$ тенгламанинг илдизлари тўплами $A = \{x/x^2 + 2x - 3 = 0\}$, барча рационал сонлар тўплами эса $Q = \{r \mid r = \frac{p}{q}, p \text{ ва } q \neq 0 \text{ ихтиёрий бутун сон}\}$ кўринишда ёзилади.

Агар a элемент A тўпламга тегишли бўлса, у ҳолда уни $a \in A$, агар a элемент A тўпламга тегишли бўлмаса, у ҳолда уни $a \notin A$ ёки $a \in \bar{A}$ кўринишларда белгиланади.

Масалан, $1 \in \mathbb{N}, 0 \notin \mathbb{N}$ бўлади.

Таъриф. Агар A тўпламнинг ихтиёрий элементи B тўпламда мавжуд бўлса ва аксинча, B тўпламнинг ихтиёрий элементи A тўпламда мавжуд бўлса, у ҳолда A ва B тўпламларни тенг дейилади ва уни $A = B$ кўринишда белгиланади.

Масалан, $A = \{x/x^2 + 2x - 3 = 0\}$ ва $B = \{1, -3\}$ тўпламлар тенг, яъни $A = B$ бўлади.

Таъриф. Агар B тўпламнинг ихтиёрий элементи A тўпламда мавжуд бўлса, у ҳолда B тўплам A тўпламнинг қисм тўплами (тўплам ости) дейилади ва уни $B \subseteq A$ белгиланади.

$\subseteq$ белги сақланиш белгиси дейилади.

Масалан, $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ - барча натурал сонлар тўплами $\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ - барча бутун сонлар тўпламининг тўпламостиси бўлади.

Таъриф. B тўпламнинг барча элементлари A тўпламда мавжуд бўлиб, A да яна B га тегишли бўлмаган элементлар ҳам мавжуд бўлса, у ҳолда B тўплам A тўпламнинг хос қисм тўплами (хос тўпламостиси) дейилади ва уни $B \subset A$ орқали белгиланади.

Масалан, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ бўлади.

Таъриф. Битта ҳам элементга эга бўлмаган тўплам бўш тўплам дейилади ва уни $\emptyset$ ёки $\{\}$ кўринишда белгиланади.

Масалан, $x^2 + 4 = 0$ тенгламанинг ҳақиқий ечимлари тўплами бўш тўплам бўлади.

Таъриф. A тўпламнинг ўзи ва $\emptyset$ тўплам шу A тўпламнинг хосмас қисм тўплами дейилади.

$\emptyset$ тўплам ҳар қандай тўпламнинг тўпламостиси бўлади.

Исталган n та элементли тўпламнинг барча қисм тўпламлари сони 2^n га тенг (Бу мулоҳазанинг исботи [1] да келтирилган).

Тўпламлар устида бирлашма, кесишма, айирма амаллари мавжуд.

Таъриф. A ва B тўпламларнинг бирлашмаси деб шу тўпламларнинг камида биттасига тегишли бўлган барча элементлардан тузилган тўпламга айтилади ва уни $A \cup B$ кўринишда белгиланади.

Таърифга кўра $A \cup B = \{x/x \in A \text{ ёки } x \in B\}$, бўлади.

Тўпламларнинг бирлашмасини чекли сондаги $A_1, A_2, \dots, A_n$ тўпламлар учун киритиш мумкин, яъни $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$ бўлиб, бу тўплам $A_i (i = \overline{1, n})$ ларнинг камида биттасига тегишли элементлардан тузилади.

Мисол. $A = \{0, 1, 2\}, B = \{1, 2, 3\}$ бўлса, у ҳолда $A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}$ бўлади.

Тўпламларнинг бирлашмаси қуйдаги хоссаларга эга :

1⁰. $A \cup B = B \cup A$ (коммутатив хосса) ;

2⁰. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (ассоциатив хосса);

3⁰. $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$;

4⁰. $A \cup A = A$ (идемпотентлик қонуни).

Бу хоссалар тўпламлар тенглиги таърифидан фойдаланиб исботланади. (Бу хоссалардан айримларининг исботи [1, 2] да келтирилган).

Таъриф. А ва В тўпламларнинг кесишмаси деб шу тўпламларнинг барча умумий элементларидан тузилган тўпламга айтилади ва уни $A \cap B$ кўринишда белгиланади.

Таърифта кўра $A \cap B = \{x/x \in A \text{ ва } x \in B\}$ бўлади.

Тўпламларнинг кесишмасини чекли сондаги $A_1, A_2, \dots, A_n$ тўпламлар учун киритиш мумкин, яъни $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$ бўлиб, бу тўплам $A_i (i=\overline{1, n})$ ларнинг барчасига тегишли бўлган элементлардан тузилади.

Мисол. $A = \{0, 1, 2\}, B = \{1, 2, 3\}$ бўлса, у ҳолда $A \cap B = \{1, 2\}$ бўлади.

Тўпламларнинг кесишмаси қуйдаги хоссаларга эга:

$$1^0. A \cap B = B \cap A;$$

$$2^0. A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

$$3^0. A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A;$$

$$4^0. A \cap A = A.$$

Бу хоссаларнинг айримларининг исботи [1,2] да келтирилган.

Тўпламларнинг бирлашмаси ва кесишмасидан қуйдаги хоссалар келиб чиқади:

1⁰. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (бирлашманинг кесишмага нисбатан тарқатиш (дистрибутив) қонуни).

2⁰. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (kesishmaning birlashmaga nisbatan tarqatish (distributiv) қонуни).

1- хоссанинг исботи [1] да келтирилган.

1,2- хоссалар исталган сондаги тўпламлар учун ҳам ўринли бўлади, яъни

$$A \cup \left(\bigcap_{i=1}^n B_i \right) = \bigcap_{i=1}^n (A \cup B_i),$$

$$A \cap \left(\bigcup_{i=1}^n B_i \right) = \bigcup_{i=1}^n (A \cap B_i)$$

бўлади.

Таъриф. А тўпламдан В тўпламнинг айирмаси деб А га тегишли, лекин В га тегишли бўлмаган барча элементлардан тузилган тўпламга айтилади ва уни $A \setminus B$ кўринишда белгиланади.

Мисол. $A = \{0, 1, 2\}, B = \{1, 2, 3\}$ бўлса у ҳолда $A \setminus B = \{0\}$, $B \setminus A = \{3\}$ бўлади.

Ўйидаги де-Морган қонунлари ўринли: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Инволюция қонуни: $\overline{\overline{A}} = A$.

Таъриф. А нинг В да ва В нинг А да бўлмаган элементларидан тузилган тўпламга А ва В тўпламларнинг симметрик айирмаси дейилади ва уни $A \Delta B$ кўринишда белгиланади.

Мисол. $A = \{0, 1, 2\}, B = \{1, 2, 3\}$ бўлса, у ҳолда $A \Delta B = \{0, 3\}$ бўлади.

Таъриф. В тўплам А нинг қисм тўплами бўлганда $A \setminus B$ тўплам В ни А гача тўлдиручи тўплам дейилади ва уни $\overline{B}$ ёки $C_A B$ орқали белгиланади.

Таърифта кўра $A \setminus B = \overline{B}$ бўлиб, $B \cup \overline{B} = A$ бўлади.

Мисол. $N \subseteq Z$ бўлгани учун $Z \setminus N = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0\} = \overline{N}$ бўлиб, $\overline{\overline{N}} \cup N = Z$ бўлади.

Таъриф. Ҳар қандай тўпламнинг хос қисм тўплами бўлмаган тўпламга универсиал тўплам дейилади.

Универсиал тўпламни U орқали белгилайлик.

Ўйидаги хоссалар ўринли:

$$1^0. A \cup U = U;$$

$$2^0. A \cap U = A;$$

$$3^0. \overline{\emptyset} = U, \overline{U} = \emptyset.$$

Тўпламлар устида амалларни Эйлер-Вендиagramмалари орқали ҳам бажариш мумкин (Мустақил таълимда ўрганилади).

Текшириш саволлари

1. Тўпламлар назарияси асосчиси ким?
2. Тўплам қандай тушунча?
3. Тўпламнинг элементи деб нимага айтилади?
4. Ёсим тўплам (тўпламостии) га таъриф беринг?
5. Бўш тўплам деб нимага айтилади?
6. Тўпламларнинг тенглигига таъриф беринг?
7. Тўпламларнинг бирлашмаси, кесиммаси, айирмаси, симметрик айирмаси деб нимага айтилади?
8. Универсал тўплам деб нимага айтилади?
9. Тўпламлар устидаги амалларнинг хоссаларидан бирини исботлаб беринг?
10. Тўпламнинг тўлдирмаси деб нимага айтилади?

Таянч тушунчалар

1. Латин ва грек алифболари.
2. Сон тушунчалари.

6 – маъруза

Декарт кўпайтма. Бинар муносабатлар. Функция (2соат)

Режа:

1. Тўпламларнинг декарт (тўғри) кўпайтмаси.
2. Бинар муносабатлар ва уларнинг турлари.
3. Функция (акслантириш) ҳақида тушунча.

Адабиёт

1. Назаров Р.Н., Тошпўлатов Б.Т., Дўсимбетов А.Д. Алгебра ва сонлар назарияси. 1 қисм. Тошкент : оқитувчи. 1993 й. (18-23, 28-33 бетлар).
2. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. Москва: Высш. шк.1979 г.(стр. 48-65).

Таъриф. Бўш бўлмаган A ва B тўпламларда A тўплам элементларини биринчи, B тўплам элементларини иккинчи қилиб тузилган барча жуфтликлар тўпламига A ва B тўпламларнинг декарт (тўғри) кўпайтмаси дейилади ва уни $A \times B$ кўринишда белгиланади.

Таърифта кўра $A \times B = \{(x,y)/x \in A, y \in B\}$ бўлади. Тартибланган (x,y) жуфтликни узунлиги иккига тенг бўлган кортеж ҳам дейилади. Узунлиги n га тенг бўлган кортеж деганда тартибланган $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ белгини тушунамиз. Агар иккита кортежнинг узунликлари ва мос компонентлари ўзаро тенг бўлса, у ҳолда бу кортежларни тенг дейилади.

Мисол. $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5\}$ бўлса, у ҳолда $A \times B = \{(1;4), (1;5), (2;4), (2;5), (3;4), (3;5)\}$ бўлади.

Агар A тўпламда m та, B тўпламда n та элемент бўлса, у ҳолда $A \times B$ тўғри кўпайтмада $m \cdot n$ та элемент бўлади.

Таъриф. Ҳар қандай $A_1, A_2, \dots, A_n$ тўпламлар берилган бўлса, у ҳолда $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ декарт кўпайтманинг ихтиёрий W қисм тўплами шу тўпламлар элементлари орасида аниқланган n ўринли мослик, n га эса шу W мосликнинг ранги дейилади.

Хусусий ҳолда, $A_1=A_2=...=A_n=A$ бўлса, у ҳолда W мослик A тўпламдан аниқланган муносабат деб юритилади.

$\underbrace{Ax \, Ax \, ... \, xA}_{n \text{ та}} = A^n$ бўлиб $A^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_i \in A (i = \overline{1, n})\}$ бўлади.

Декарт кўпайтма коммутатив эмас.

Таъриф. AxB декарт кўпайтманинг ихтиёрий ρ қисм тўпламига A ва B тўпلام элементлари орасида аниқланган бинар (икки ўринли) муносабат дейилади.

Агар $a \in A, b \in B$ бўлиб, $(a; b) \in \rho$ бўлса, у ҳолда a элемент ρ муносабат ёрдамида b элемент билан боғланган дейилади ёки ρ муносабат a ва b элементлар учун ўринли деб юритилади ва уни $a \rho b$ шаклда ёзилади. Мосликларни $\rho, R, S, T, ...$ харфлар орқали белгиланади.

$a \rho b$ да ρ ўрнида $=, //, \perp, \equiv, >, <, ...$ муносабатлар келиши мумкин.

Мисол. Иккита a ва b натурал сонларнинг энг катта умумий бўлувчисини топиш уч ўринли (тернар) муносабат бўлади.

Ўуйида бинар муносабат турларини кўрайлик:

1. Рефлексивлик муносабати

Таъриф. Агар A тўпلامнинг ихтиёрий a элементи учун $a \rho a$ бажарилса (бажарилмаса), у ҳолда ρ га A тўпلامда аниқланган рефлексив (антирефлексив) муносабати дейилади. Агар A тўпلامнинг баъзи бир a элементи учун $a \rho a$ бажарилиб, баъзи бир b элементи учун $b \rho b$ бажарилмаса, у ҳолда ρ га A тўпلامдаги рефлексивмас муносабат дейилади.

Масалан, R ҳақиқий сонлар тўпламида аниқланган «тенглик» муносабати рефлексив, лекин «кичик» («катта») муносабати антирефлексив муносабат бўлади.

2. Симметрик муносабат

Таъриф. Агар A тўпلامнинг ихтиёрий a ва b элементлари учун $a \rho b$ муносабатнинг ўринли эканлигидан $b \rho a$ муносабатнинг ҳам ўринли эканлиги келиб чиқса, (келиб чиқмаса), у ҳолда ρ га A тўпلامда аниқланган симметрик (симметрикмас) муносабат дейилади. Агар A тўпلامдаги ихтиёрий a ва b элементлар учун $a \rho b$ ва $b \rho a$ муносабатларнинг бажарилишидан $a=b$ келиб чиқса, у ҳолда ρ га A тўпلامдаги антисимметрик муносабат дейилади.

Масалан, R ҳақиқий сонлар тўпламида «тенглик» муносабати симметрик, «кичик» («катта») муносабатга симметрик муносабат эмас, лекин «кичик эмас» («катта эмас») муносабати антисимметрик муносабат бўлади.

3. Транзитивлик муносабат

Таъриф. Агар A тўпلامнинг ихтиёрий a, b ва c элементлари учун $a \rho b$ ва $b \rho c$ муносабатларнинг ўринли эканлигидан $a \rho c$ муносабатнинг ўринли эканлиги келиб чиқса (келиб чиқмаса), у ҳолда ρ га A тўпلامдаги транзитив (транзитивмас) муносабати дейилади.

Масалан, R ҳақиқий сонлар тўпламидаги «кичик» («катта») муносабати транзитив муносабат бўлади.

Энди акслантириш (функция) тушунчасини ўрганайлик.

Таъриф. $A \neq \emptyset$ ва $B \neq \emptyset$ тўпلامлар берилганда, A тўпلامнинг ҳар бир x элементи учун $x f y$ муносабатни қаноатлантирувчи ягона $y \in B$ элемент мавжуд бўлса, у ҳолда f мосликка акслантириш (функция) дейилади ва у $f: A \rightarrow B$ ёки $y=f(x)$ кўринишларда белгиланиб A тўпلام f акслантиришнинг аниқланиш соҳаси дейилади.

Мисол. $\{(x; y) | x, y \in \mathbb{N}, y=x^2\}$ функция бўлади.

Таъриф. $y=f(x)$ шартни қаноатлантирувчи тартибланган (x,y) жуфтликлар тўплами функциянинг графиги дейилади.

Таъриф. Агар $f:A \rightarrow B$ акслантиришда $A=B$, яъни $f:A \rightarrow A$ бўлса, у ҳолда f акслантириш тўпламни ўз-ўзига акслантирувчи алмаштириш дейилади.

$y=f(x)$ да у элемент x элементнинг образи (акси), x элемент эса у элементнинг, яъни $f(x)$ нинг прообрази (асли) деб юритилади.

Таъриф. Агар B тўпламнинг ҳар бир элемент аслига эга бўлса, у ҳолда $f:A \rightarrow B$ акслантиришга сюръектив (устига) акслантириш дейилади.

Мисол. $fx \rightarrow x^2$ мослик барча ҳақиқий сонлар тўпламини манфиймас ҳақиқий сонлар тўпламига акслантириш сюръектив акслантириш бўлади.

Таъриф. Агар B тўпламнинг ҳар бир элементи биттадан ортиқ аслига (прообразга) эга бўлмаса, у ҳолда бундай акслантиришга инъектив (ичига) акслантириш дейилади.

Таъриф. Агар $f:A \rightarrow B$ акслантириш бир вақтда сюръектив ва инъектив бўлса, у ҳолда f акслантириш биектив акслантириш дейилади.

Таъриф. A тўпламнинг ҳар бир x элементини яна шу x элементга ўтказувчи (акслантирувчи) акслантиришга айний (бирлик) акслантириш дейилади ва уни $e_A:A \rightarrow A$ орқали белгиланади.

Таъриф. Агар $f:A \rightarrow B$ ва $\varphi:A \rightarrow B$ акслантириш берилган бўлиб, $\varphi(f(A \rightarrow B))=e_A$ акслантириш ўринли бўлса, у ҳолда φ акслантириш f акслантиришга чап тескари, $f\varphi:(A \rightarrow B)=e_B$ акслантириш ўринли бўлганда эса, φ акслантириш f га ўнг тескари акслантириш дейилади. Агар $f\varphi=\varphi f$, яъни $e_B=e_A$ бўлса, у ҳолда f акслантириш φ га тескари акслантириш дейилади ва уни $\varphi=f^{-1}$ орқали белгиланади. Агар $f\varphi=e(e:a \rightarrow a)$ бўлса, у ҳолда f ва φ лар ўзаро тескари акслантиришлар дейилади.

$f:A \rightarrow B$ акслантириш тескариланувчи бўлиши учун f нинг ўзаро бир қийматли (биектив) бўлиши зарур ва етарли. Бу мулоҳазанинг исботи [1] да келтирилган.

Текшириш саволлари

1. Иккита тўпламнинг декарт (тўғри) кўпайтмаси деб нимага айтилади?
2. n та тўпламларнинг декарт кўпайтмасини ёзинг ?
3. Бинар муносабат деб нимага айтилади?
4. Рефлексив, симметрик, транзитив муносабатларнинг таърифини айтиб беринг?
5. Акслантириш (функция) деб нимага айтилади?
6. Ҳандай акслантиришларни биласиз?

Таянч тушунчалар

1. Тўплам ва улар устида амаллар.
2. Тўпламости.

7-маъруза

Эквивалентлик муносабати. Тартиб муносабати (2 соат)

Режа:

1. Эквивалентлик муносабат.
2. Фактор-тўплам.
3. Тартиб муносабати.
4. Тартибланган тўплам.

Адабиёт

1. Назаров Р.Н., Тошпўлатов Б.Т., Дўсумбетов А.Д. Алгебра ва сонлар назарияси. 1-қисм. Тошкент:Ўқитувчи. 1993 й. (24-27, 33-35 бетлар).
2. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. Москва: Высш. шк. 1979 г. (стр. 65-74).

Олдинги маърузада бинар муносабатларнинг бир нечта турларини ўргандик. Айрим ҳолларда битта тўпламда бир нечта бинар муносабатлар аниқланган бўлиши ҳам мумкин.

Таъриф. Агар A тўпламда аниқланган ρ бинар муносабат бир вақтнинг ўзида рефлексив, симметрик ва транзитив бўлса, у ҳолда ρ муносабатга эквивалентлик муносабат дейилади.

Эквивалентлик муносабати $\equiv$ каби белгиланади.

Масалан, ихтиёрий $A \neq \emptyset$ тўплам элементлари учун аниқланган тенглик муносабати, тўғри чизиқлар тўпламидаги параллелик муносабати, учбурчаклар тўпламидаги ўхшашлик муносабати эквивалентлик муносабати бўлади.

$\rho = \{(x; y) | x, y \in Z, \forall m \in Z (m \neq 0) \text{ ва } x-y \text{ сон } m \text{ га бўлинади}\}$ муносабати эквивалент муносабат бўлади. A тўпламда аниқланган эквивалентлик муносабати шу A тўпламни ўзаро кесишмайдиган синфларга ажратиш тушунчаси билан узвий боғланган. Бундай синфлар одатда эквивалентлик синфлари деб юритилади. a элемент билан аниқланувчи эквивалентлик синфи деб a га эквивалент бўлган элементлардан тузилган тўпламга айтилади.

Таъриф. Агар A тўплам ρ эквивалентлик муносабати ёрдамида эквивалентлик синфларига ажратилган бўлса, у ҳолда бу эквивалентлик синфлари тўпламига фактор – тўплам дейилади ва уни A/ρ кўринишда белгиланади.

Мисол. $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ тўпламнинг барча элементларини 4 га бўлиб чиқайлик. Z нинг элементларини 4 га бўлишдан ҳосил бўлган қолдиқлар 0, 1, 2, 3, бўлади. Бу қолдиқлар бўйича Z ни $C_0 = \{4k | \forall k \in Z\}$, $C_1 = \{4k+1 | \forall k \in Z\}$, $C_2 = \{4k+2 | \forall k \in Z\}$, $C_3 = \{4k+3 | \forall k \in Z\}$ синфларга ажратиш мумкин.

$C_i \cap C_j = \emptyset (i \neq j)$ ва $C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3 = Z$ бўлади.

Математикада тартиб муносабати тушунчаси катта аҳамиятга эга. Шу тушунча билан танишайлик.

Таъриф. A тўпламда антисимметрик ва транзитив бўлган бинар муносабатга тартиб муносабати дейилади. Тартиб муносабати киритилган тўплам тартибланган тўплам дейилади.

Тартиб муносабати $<$ оркали белгиланади.

Таъриф. Агар A тўпламда аниқланган ρ тартиб муносабати рефлексив (антирефлексив) бўлса, у ҳолда ρ га қатъиймас (қатъий) тартиб муносабати дейилади.

Таъриф. A тўпламда аниқланган ρ тартиб муносабати боғланган бўлса, яъни A тўпламнинг ихтиёрий a ва b элементлари учун $a \rho b$ ёки $a = b$ ёки $b \rho a$ муносабатлардан фақат биттаси бажарилса, у ҳолда ρ га чизиқли тартиб муносабати дейилади.

Чизиқли бўлмаган тартиб муносабати одатда қисман тартибланганлик муносабати деб юритилади.

Сонлар тўпламида (комплекс сонлар тўпламидан бошқа) аниқланган кичик эмаслик ($\geq$) муносабати тартиб муносабати бўлади.

Таъриф. Ёсман тартибланган A тўпламнинг берилган a элементи ва ихтиёрий x элементи учун $a \leq x$ ($x \leq a$) муносабат бажарилса, у ҳолда a га A тўпламнинг энг кичик (энг катта) элементи дейилади.

Ёсман тартибланган тўпламлар умуман олганда энг катта ёки энг кичик элементларга эга бўлмаслиги мумкин.

Масалан, манфиймас ҳақиқий сонлар тўплами энг кичик элемент, яъни 0 га эга, лекин энг катта элементга эга эмас.

Таъриф. Агар қисман тартибланган A тўпламнинг a элементида қатъий катта (катъий кичик) бўлган элементлари бўлмаса, у ҳолда a га A тўпламнинг максимал (минимал) элементи дейилади.

Ҳисман тартибланган тўплам бир қанча максимал ёки бир қанча минимал элементларга эга бўлиши мумкин.

$a < x$ бўлганда $x=a$ бўлса, у ҳолда a максимал элемент, $y < b$ бўлганда $y=b$ бўлса, у ҳолда b минимал элемент бўлади.

Ҳисман тартибланган тўпламнинг минимал ва максимал элементларини унинг энг кичик ва энг катта элементларидан фарқлай билиш керак экан.

Таъриф. Агар чизикли тартибланган A тўпламнинг ихтиёрий бўш бўлмаган B қисм тўплами доимо энг кичик элементга эга бўлса, у ҳолда бундай A тўпламга тўла тартибланган тўплам дейилади.

Масалан, барча натурал сонлар тўплами тўла тартибланган тўплам бўлади.

Текшириш саволлари

1. Эквивалентлик муносабати деб нимага айтилади?
2. Фактор-тўпламга тушунча беринг ва битта мисол келтиринг.
3. Тартиб муносабати деб нимага айтилади?
4. Ҳандай тартибланган тўпламларни биласиз?
5. Тўпламнинг энг кичик ва энг катта элементларини тушунтириб беринг?
6. Тўпламнинг максимал ва минимал элементларини тушунтириб беринг?

Таянч тушунчалар

1. Тўплам ва улар устида амаллар.
2. Тўплам элементлари.
3. Ҳисм тўплам.
4. Рефлексив, антирефлексив, симметрик, транзитив муносабатлар.

8-маъруза

Бинар алгебраик амал. Алгебраик амалларнинг турлари (2 соат)

Режа:

1. Бинар алгебраик амал ҳақиқий тушунча.
2. Алгебраик амалнинг турлари.
3. Бинар алгебраик амалларнинг хоссалари.

Адабиёт

1. Назаров Р.Н., Тошпўлатов Б.Т., Дўсумбетов А.Д. Алгебра ва сонлар назарияси. 1 қисм. Тошкент: Ёқитувчи 1993 й. (58-63 бетлар).
2. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. Москва: Высш. шк. 1979 г. (стр. 75-84).

Ҳозирги вақтда алгебра фани тўплам ва унинг элементлари учун аниқланган алгебраик амал ва унинг хоссаларини ўрганади.

Таъриф. $A \neq \emptyset$ тўплам берилган бўлиб $A \times A$ декарт кўпайтма A тўпламга мос қўйувчи $f: A \times A \rightarrow A$ акслантириш A тўпламда аниқланган бинар (икки ўринли) операция (алгебраик амал) дейилади.

Таърифга кўра $a, b \in A$ элементлар учун $(a; b)$ тартибланган жуфтликка шу A тўпламнинг ягона c элементи мос келади. $(b; a)$ жуфтликка c элемент мос келмаслиги мумкин. f акслантириш ёрдамида $(a; b)$ жуфтликка $c \in A$ мос қўйилиши $f(a; b)=c$, $(a; b)f=c$ ёки $afb=c$ орқали белгиланади. Бинар алгебраик амаллар одатда махсус танланган $0, 1, *, \otimes, \dots$ белгилар орқали белгиланади.

$aob=c$ бўлса, у ҳолда o ўрнида қўшиш, айириш, кўпайтириш ва ҳақозо амаллар бўлиши мумкин.

Агар $f:A^0 \rightarrow A$ бўлса, у ҳолда f га нулар операция (ноль ўринли алгебраик амал) дейилади (бунда тўпламнинг исталган элементини алоҳида олиш тушунилади).

Агар $f:A \rightarrow A$ бўлса, у ҳолда f га унар операция (бир ўринли алгебраик амал) дейилади.

Агар $f:AxAxA=A^3 \rightarrow A$ бўлса, у ҳолда f га тернар операция (уч ўринли алгебраик амал) дейилади (бунда $AxAxA=A^3$ декарт кўпайтманинг тартибланган (a, b, c) учлигига A тўпламнинг ягона d элементи мос қўйилади).

$\underbrace{AxAx\dots xA}_{n\text{ та}} = A^n$ декарт кўпайтма берилган бўлса, у ҳолда унинг элементи

узушлиги n га тенг бўлган $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ кортеж бўлади.

Таъриф. A^n декарт кўпайтманинг тартибланган ҳар бир $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ элементига A тўпламнинг ягона a_{n+1} элементи мос қўйилган бўлса, у ҳолда A тўпламда ранги n га тенг бўлган (n ўринли) n - ар операция (алгебраик амал) аниқланган дейилади.

n -ар операцияни f орқали белгиласак, у ҳолда уни $f(a_1, a_2, \dots, a_n)=a_{n+1}$ ёки $(a_1, a_2, \dots, a_n)f=a_{n+1}$ кўринишларда ёзилади. Айрим ҳолларда $a_{n+1} \notin A$ бўлиши мумкин. Бундай ҳолда қаралаётган алгебраик амал қисмий алгебраик амал деб юритилади.

Мисол. Натурал сонлар тўпламида қўшиш ва кўпайтириш амаллари бинар операция бўлади. Бу тўпламда айириш амали исмий бинар операция бўлади.

Битта тўпламнинг ўзида бир нечта алгебраик амаллар аниқланган бўлиши мумкин. Фараз қилайлик $A \neq \emptyset$ тўпламда иккита ҳар хил o ва $\otimes$ бинар операциялар берилган бўлсин.

Таъриф. Агар o операция аниқланган A тўпламнинг ихтиёрий a ва b элементлари учун $aob=boa$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда o операция A тўпламда коммутатив дейилади.

Масалан, ҳар қандай сонлар тўпламида аниқланган қўшиш ва кўпайтириш амаллари коммутатив бўлиб, даражага кўтариш амали коммутатив эмас, яъни $a^b \neq b^a$ бўлади.

Таъриф. Агар o операция аниқланган A тўпламнинг ихтиёрий a, b, c элементлари учун $ao(bo)= (aob)o$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда o операция A тўпламда ассоциатив дейилади.

Масалан, ҳар қандай сонлар тўпламида қўшиш ва кўпайтириш амаллари ассоциатив бўлиб, даражага кўтариш амали ассоциатив эмас, яъни $(a^b)^c \neq a^{b^c}$ ($\forall a, b, c \in R$).

Таъриф. o ва $\otimes$ операциялар аниқланган A тўпламнинг ихтиёрий a, b, c элементлари учун $ao(b \otimes c)= (aob) \otimes (aoc)$ тенглик бажарилса, у ҳолда o операция $\otimes$ операцияга нисбатан дистрибутив дейилади.

Масалан, сонлар тўпламида аниқланган кўпайтириш амали қўшиш амалига нисбатан дистрибутив, лекин қўшиш амали кўпайтириш амалига нисбатан дистрибутив эмас.

Таъриф. o операция аниқланган A тўпламнинг ихтиёрий x ва y элементлари учун $xoa=yoa$ ($a \otimes x=a \otimes y$) тенгликдан $x=y$ тенглик келиб чиқса, у ҳолда A тўплам элементлари учун o амалга нисбатан ўнгдан (чапдан) қисқартириш қонуни ўринли дейилади. Агар A

тўпламда бир вақтнинг ўзида чапдан ва ўнгдан қисқартириш қонуни ўринли бўлса, у ҳолда A тўпламда қисқартириш қонуни ўринли дейилади.

о операцияга нисбатан нейтрал ва симметрик элементлар тушунчалари мустақил таълимда алоҳида ўрганилади. Шунинг учун бу тушунчаларга тўхтамаймиз.

Текшириш саволлари

1. Бинар операция (алгебраик амал) ҳақида тушунча беринг?
2. Алгебраик амалларнинг қандай турларини биласиз?
3. Алгебраик амалларнинг хоссаларини айтиб беринг?

Таянч тушунчалар

1. Тўплам ва улар устида амаллар.
2. Тўпламларнинг декарт кўпайтмаси.
3. Акслантириш.
4. Кортёж.

9-маъруза

Алгебра. Алгебралар гомоморфизми (2 соат)

Режа:

1. Тўпламлар назариясига кўра алгебра тушунчаси.
2. Алгебранинг тури ҳақида тушунча.
3. Бир хил турли алгебралар.
4. Алгебралар гомоморфизми.

Адабиёт

1. Назаров Р.Н., Тошпўлатов Б.Т., Дўсумбетов А.Д. Алгебра ва сонлар назарияси. I қисм. Тошкент: Ўқитувчи. 1993 й. (59-60, 63-66 бетлар). '
2. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. Москва: Высш. шк. 1979 г. (стр. 82-86).

Олдинги маърузада битта $A \neq \emptyset$ тўпламнинг ўзида бир нечта алгебраик амаллар мавжуд бўлишини кўриб ўтдик. Шу амаллар $f_1, f_2, \dots, f_s$ бўлсин.

Таъриф. Бўш бўлмаган A тўплам ва унда қаралаётган алгебраик амаллар тўплами Ω дан тузилган $\langle A, \Omega \rangle$ тартибланган жуфтлик алгебра дейилади ва уни A_1 орқали белгиланади.

Таърифга кўра $A_1 = \langle A, \Omega \rangle$ бўл ади. Бунда A тўпламнинг элементи A_1 алгебранинг элементи, A тўплам A_1 алгебранинг асосий тўплами, Ω даги операциялар A_1 алгебранинг асосий операциялари дейилади.

A тўпламда қаралаётган амаллар сони чекли бўлганда бу алгебра $A_1 = \langle A, f_1, f_2, \dots, f_s \rangle$ кўринишда белгиланиб уни узунлиги $s+1$ га тенг бўлган кортеж ҳам дейилади.

f алгебраик амалнинг ранги одатда $r(f)$ орқали белгиланади.

Таъриф. Агар $r(f_i) = r_i, (i=1, 2, \dots, s)$ бўлса $(r_1, r_2, \dots, r_s)$ кортеж $A_1 = \langle A, f_1, f_2, \dots, f_s \rangle$ алгебранинг тури (типи) дейилади.

Масалан, $N_1 = \langle N, +, *, 1 \rangle$ алгебра $(2, 2, 0)$ турли алгебра бўлади.

Таъриф. A ва A' тўпламда аниқланган алгебраик амаллар сони тенг бўлиб, A тўпламда аниқланган $f_i (i=1, 2, \dots, k)$ алгебраик амалларнинг ранги билан A' тўпламда аниқланган ва $f_i \in F = \{f_1, f_2, \dots, f_s\}$ амалларга мос келувчи $f'_i \in F' = \{f'_1, f'_2, \dots, f'_s\}$ алгебраик

амалларнинг ранглари ўзаро тенг бўлса, у ҳолда $A_1 = \langle A, F \rangle$ ва $A_1' = \langle A', F' \rangle$ алгебра ўзаро бир хил турли алгебралар дейилади.

Масалан, $\langle R, +, 0 \rangle$ ва $\langle R^+, \cdot, 1 \rangle$ алгебралар бир хил турли алгебралар бўлади (бунда R^+ -мусбат ҳақиқий сонлар тўплами), яъни иккаласи ҳам $(2, 0)$ турли алгебралар бўлади.

Таъриф. Агар A_1 алгебранинг тўплами A чекли (чексиз) бўлса, у ҳолда A_1 алгебра чекли (чексиз) алгебра дейилади.

Энди бир хил турли алгебраларнинг гомоморфлиги ҳақидаги тушунча билан танишайлик.

Таъриф. Бир хил турли $A_1 = \langle A, F \rangle$ ва $A_1' = \langle A', F' \rangle$ алгебралар берилган бўлиб, A тўпламни A' тўпламга бир қийматли акслантирувчи шундай $\varphi(f_i(a_1, a_2, \dots, a_n)) = f_i'(\varphi(a_1), \varphi(a_2), \dots, \varphi(a_n))$ тенглик A тўпламнинг барча элементлари учун бажарилса, у ҳолда A_1 алгебра A_1' алгебрага гомоморф аксланган дейилади ва уни $A_1 \approx A_1'$ кўринишда белгиланади (бунда p сон f_i амалнинг ранги).

Масалан, $\forall a \in R$ учун $\varphi(a) = |a|$ акслантириш $\langle R, \cdot \rangle$ алгебрани $\langle R_0^+, \cdot \rangle$ алгебрага гомоморф акслантиради (бу ерда R_0^+ тўплам манфиймас ҳақиқий сонлар тўпламидир), яъни $\langle R, \cdot \rangle \approx \langle R_0^+, \cdot \rangle$ бўлади.

Таъриф. Агар A_1 алгебранинг A_1' алгебрага φ гомоморф аксланиши биектив (ўзаро бир қийматли) акслантириш бўлса, у ҳолда A_1 алгебра A_1' алгебрага изоморф дейилади ва уни $A_1 \cong A_1'$ кўринишда белгиланади.

Масалан, $\langle R^+, \cdot, 1 \rangle \cong \langle R, +, 0 \rangle$ бўлади.

Алгебраларнинг изоморфлиги бинар эквивалентлик муносабати бўлади.

Текшириш саволлари

1. Тўплам тушунчасига кўра алгебра деб нимага айтилади ва унга мисол келтиринг?
2. Алгебранинг тури (типи) деб нимага айтилади ва унга мисол келтиринг?
3. Бир хил турли (типли) алгебралар деб нимага айтилади ва унга мисол келтиринг?
4. Гомоморф алгебралар деб нимага айтилади ва унга мисол келтиринг?
5. Изоморф алгебралар деб нимага айтилади ва унга мисол келтиринг?

Таянч тушунчалар

1. Тўплам.
2. Алгебраик амаллар.
3. Эквивалентлик муносабати.

10-маъруза

Группа ва унинг асосий хоссалари (2 соат)

Режа:

1. Группа тушунчаси. Группага таъриф.
2. Ярим группа.
3. Моноид
4. Группанинг содда хоссалари

Адабиёт

1. Назаров Р.Н., Тошпўлатов Б.Т., Дўсумбетов А.Д. Алгебра ва сонлар назарияси. I қисм. Тошкент:Ўқитувчи. 1993 й. (73-74, 76-79 бетлар).
2. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. Москва: Высш. шк. 1979 г. (стр. 94-100).

Битта бинар $\circ$ ва битта унар $*$ алгебраик амалларга эга бўлган бўш бўлмаган G тўплам берилган бўлсин. Бу операциялардан фойдаланиб, математикада алгебранинг хусусий ҳолларидан бири бўлган группа тушунчасини ўрганамиз.

Таъриф. Агар G тўпламда қуйидаги аксиомалар бажарилса, у ҳолда $(G, \circ, *)$ турли $\langle G, \circ, * \rangle$ алгебра группа дейилади:

1. $(\forall a, b, c \in G) a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$;
2. $(\forall a \in G, \exists e \in G) a \circ e = e \circ a = a$;
3. $(\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G) a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$;

Бинар $\circ$ операция G тўпламда группа ҳосил қилувчи асосий операция деб ҳисобланади.

Таъриф. Агар $\langle G, \circ, * \rangle$ алгебра группа бўлиб, $\circ$ операция коммутатив, яъни $(\forall a, b \in G) a \circ b = b \circ a$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $\langle G, \circ, * \rangle$ группа $\circ$ операцияга нисбатан коммутатив группа ёки абель группаси дейилади.

Таъриф. Агар группадаги асосий операция қўшиш (кўпайтириш) амал бўлса, у ҳолда бундай группага аддитив (мультипликатив) группа, агар аддитив группада қўшиш амали коммутатив бўлса, у ҳолда бундай группага аддитив-абель группа дейилади.

Масалан, $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ аддитив- абель группа, $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$ мультипликатив группа бўлмайди (чунки $\forall m \in \mathbb{Z} (m \neq \pm 1) m^{-1} \notin \mathbb{Z}$ бўлади).

Таъриф. Агар G тўпламда аниқланган бинар $\circ$ операция ассоциатив бўлса, у ҳолда G тўплам ярим группа дейилади.

Масалан, $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$ алгебра ярим группа бўлади.

Таъриф. Нейтрал элементга эга бўлган ярим группа моноид деб аталади.

Масалан, $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$ алгебра моноид бўлади, $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ алгебра ярим группа бўлсада, лекин моноид бўлмайди.

Таъриф. $\langle G, \circ, * \rangle$ группанинг бирор M қисм тўплами $\circ$ бинар операцияга нисбатан группа ташкил этса, у ҳолда M га

$\langle G, \circ, * \rangle$ группанинг қисм группаси дейилади.

$\mathbb{N}$ қисм группа тушунчаси мустақил таълимда батафсил ўрганилади.

Группанинг қуйидаги хоссалари мавжуд:

1⁰. Групадаги асосий операцияга нисбатан нейтрал ва тескари элементлар мавжуд, улар ягона бўлади.

2⁰. Ҳар қандай G мультипликатив группада бўлиш муносабати ўринли, яъни $\forall a, b \in G$ элементлар учун $\exists x, y \in G$ бўлиб, улар учун $a \cdot x = b$ ва $y \cdot a = b$ тенгламалар $a^{-1}b \in G$ ва $ba^{-1} \in G$ ягона ечимларга эга бўлади.

3⁰. Ҳар қандай группада элементларни чап ва ўнг томондан қисқартириш қонуни ўринли.

4⁰. G группанинг a^{-1} элементига тескари элемент a нинг ўзи бўлади.

5⁰. $\langle G, \cdot, ^{-1} \rangle$ группанинг ихтиёрий p та элементи шу группада аниқланган алгебраик амалга нисбатан ассоциатив бўлади.

6⁰. $a_1, a_2, \dots, a_n \in G$ элементларнинг кўпайтмаси бўлган $a_1 a_2 \dots a_n$ элементга тескари элемент $a_n^{-1} \dots a_2^{-1} a_1^{-1}$ элемент бўлади.

7⁰. $\underbrace{a \cdot a \cdots a}_n = a^n$, $\underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdots a^{-1}}_n = (a^{-1})^n = a^{-n}$, $a^0 = e (a \neq 0)$ бўлса, у ҳолда $a^m a^n = a^{m+n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$ ($\forall m, n \in \mathbb{Z}$), фақат ўрин алмашинувчи а ва в элементлари учун $(a \cdot v)^n = a^n v^n$, $a^n a^{-n} = e$ бўлади.

Булардан ташқари қуйидаги муносабатлар ҳам ўринли бўлади:

а) $nx + mx = (n+m)x$;

б) $m(nx) = mn x$;

в) $mx - nx = (m-n)x$.

Бу тенгликларда $\underbrace{x + x + \dots + x}_n = nx$, $\underbrace{(-x) + (-x) + \dots + (-x)}_n =$

$n(-x) = -nx$ дир.

Юқоридаги 7 та хоссанинг исботи [1, 2] да келтирилган.

Текшириш саволлари

1. ГРУППА деб нимага айтилади?
2. Ярим группа деб нимага айтилади?
3. Моноид деб нимага айтилади?
4. Аддитив, мультипликатив группаларни тушунтириб беринг?
5. Абель группаси деб нимага айтилади?
6. Аддитив-абель группаси деб нимага айтилади?

Таянч тушунчалар

1. Тўплам. Тўплам ости.
2. Тўплам тушунчасига кўра алгебра тушунчаси.
3. Нейтрал, тесқари элементлар.
4. Алгебраик амал.

11-маъруза

Ҳалқа ва унинг асосий хоссалари (2 соат)

Режа:

1. Ҳалқа тушунчаси. Ярим ҳалқа.
2. Коммутатив ҳалқа.
3. Сонлар ҳалқаси.
4. Ҳалқанинг содда хоссалари.

Адабиёт

1. Назаров Р.Н., Тошпўлатов Б.Т., Дўсумбетов А.Д. Алгебра ва сонлар назарияси. I қисм. Тошкент: Ўқитувчи. 1993 й. (79-82 бетлар).
2. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. Москва: Высш. шк. 1979 г. (стр.104-107).

Ҳалқа ҳам олдинги маърузада ўрганилган группа сингари алгебранинг хусусий ҳоли. Группада биз битта бинар ва битта унар операция билан иш кўрган эдик. Энди биз бўш бўлмаган А тўплам элементлари учун иккита бинар (биз уларни кўпайтириш ва қўшиш амали деб юритамиз) ва битта унар операция ($\forall a \in A$ элемент учун а га симметрик элемент мавжудлиги)ни ўринли деб қараймиз.

Таъриф. Агар $A \neq \emptyset$ тўпламда қўшиш ва кўпайтириш амаллари аниқланган бўлиб, қуйидаги аксиомалар ўринли бўлса, $A_1 = \langle A, +, \cdot \rangle$ алгебрага ярим ҳалқа дейилади:

1. $(\forall a, b, c \in A) a+(b+c)=(a+b)+c$;
2. $(\forall a, b \in A) a+b=b+a$;
3. $(\forall a, b, x \in A) (a+x=b+x) \Rightarrow (a=b) \wedge (x+a=x+b) \Rightarrow (a=b)$;
4. $(\forall a, b, c \in A) a(bc)=(ab)c$;
5. $(\forall a, b, c \in A) (a+b)c=ac+bc, c(a+b)=ca+cb$.

Агар бу таърифдаги аксиомалар билан биргаликда яна $(\forall a, b \in A)$ учун $ab=ba$ тенглик ҳам ўринли бўлса, у ҳолда $A_1=\langle A, +, \bullet \rangle$ ярим ҳалқага коммутатив ярим ҳалқа дейилади. Агар A тўплам чекли бўлса, у ҳолда ярим ҳалқа чекли, акс ҳолда ярим ҳалқа чексиз деб юритилади. $\forall a \in A$ элемент учун $a+0=0+a=a$ бўлса, у ҳолда 0 элементга A_1 ярим ҳалқанинг ноль элементи, $\forall a \in A$ учун $ae=ea=a$ бўлса, у ҳолда e элементга ярим ҳалқанинг бирлик элементи дейилади.

Масалан, $N_1=\langle N, +, * \rangle$ алгебра ярим ҳалқа бўлиб, кўпайтириш амалига нисбатан нейтрал элемент 1 сони бўлади, қўшиш амалига нисбатан нейтрал элемент мавжуд эмас.

Таъриф. Агар o операция аниқланган A тўпламнинг ихтиёрий иккита a ва b элементлари берилганда $(aob) \in A$ бўлса, у ҳолда A тўплам o операцияга нисбатан ёпиқ дейилади.

Масалан, N тўплам қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан ёпиқ бўлади, чунки N тўпламга тегишли ихтиёрий иккита натурал сонларнинг йиғиндиси ва кўпайтмаси яна натурал сон бўлади.

Таъриф. Агар A тўплам қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан ёпиқ бўлиб, қуйидаги шартлар бажарилса, у ҳолда $A_1=\langle A, +, - \rangle$ алгебра ҳалқа дейилади:

1. $\langle A, + \rangle$ - аддитив группа;
2. $\langle A, \bullet \rangle$ - ярим группа;
3. $(\forall a, b, c \in A) a(b+c)=ab+ac, (b+c)a=ba+ca$.

Агар A_1 ҳалқада $(\forall a, b \in A_1)$ $ab=ba$ тенглик берилса, у ҳолда бундай A_1 ҳалқага коммутатив ҳалқа дейилади.

Бу таърифда A_1 ҳалқанинг элементлари сонлар бўлмаслиги ҳам мумкин. Агар A тўпламнинг элементлари сонлардан иборат бўлса, у ҳолда қуйидаги таъриф ўринли:

Таъриф. Сонлар тўпламига тегишли ихтиёрий иккита соннинг йиғиндиси, айирмаси ва кўпайтмаси яна шу тўпламга тегишли, яъни сонлар тўплами қўшиш, айириш ва кўпайтириш амалларига нисбатан ёпиқ бўлса, у ҳолда бундай сонлар тўпламига сонлар ҳалқаси дейилади.

Масалан, $\langle Z, +, -, \bullet \rangle$ алгебра сонли ҳалқа бўлади.

Энди ҳалқанинг баъзи бир содда хоссаларини қарайлик.

1⁰. A_1 ҳалқада ягона ноль элемент мавжуд. A_1 ҳалқадаги ихтиёрий a элемент учун ягона қарама-қарши — a элемент мавжуд. A_1 ҳалқада $a+x=b$ тенглама ягона $b-a \in A_1$ ечимга эга.

2⁰. Учта элементни қўшишдаги ўринли бўлган ассоциативлик қонунини исталган p та элемент учун ёзиш мумкин.

3⁰. $\forall a \in A_1$ бўлганда $a+a+\dots+a=na$ бўлади. Бу хоссадан фойдаланиб $pa+ma=(p+m)a$ тенгликни ёзамиз. pa кўпайтмаси A_1 ҳалқанинг иккита элементлари кўпайтмаси деб қараш мумкин эмас. Агар A_1 ҳалқа бирлик e элементга эга, яъни $\forall a \in A_1, \exists e \in A_1$ учун $ea=a$ бўлса, у ҳолда $pa=n(ea)=ne a$ бўлгани сабабли, $ne \in A_1$ бўлади.

4⁰. $\forall a \in A_1, \exists (-a) \in A_1$ учун $(-a)+(-a)+\dots+(-a)=n(-a)=-na$ бўлади. $(p+m)a=pa+ma$ тенгликда $m=-n$ бўлса, у ҳолда $(p+(-n))a=(p-n)a=pa-na=0$ бўлади, яъни $0a=0$ тенглик ҳар доим ўринли.

5⁰. $(\forall a \in A_1, \exists (-a) \in A_1) -(-a)=a$;

6⁰. $(\forall a, b \in A_1, \exists (-a) \in A_1), (-a)b=a(-b)=-(ab)$;

7⁰. $(\forall a, b \in A_1, \exists (-a), (-b) \in A_1) (-a)(-b) = ab$;

8⁰. $(\forall a, b, c \in A_1) (a-b)c = ac-bc, c(a-b) = ca-cb$.

Бу хоссаларнинг исботи [1, 2]да келтирилган.

Таъриф. Агар $a \neq 0, b \neq 0$ бўлганда $ab \neq 0$ бўлса, у ҳолда a ва b лар нолнинг бўлувчилари дейилади.

Бу таърифдан фойдаланиб нолнинг бўлувчисига эга бўлмаган ҳалқада кўпайтманинг нолга тенг бўлиши учун кўпайтувчилардан камида биттаси нолга тенг бўлиши зарур деган хулосага келамиз. Бу тасдиқнинг тескариси умуман тўғри эмас, яъни кўпайтувчиларнинг бирортаси ҳам нолга тенг бўлмаганда, кўпайтма нолга тенг бўлиши ҳам мумкин.

Текшириш саволлари

1. Ярим ҳалқа деб нимага айтилади ва унга мисол келтиринг?
2. Ҳалқа деб нимага айтилади ва унга мисол келтиринг?
3. Коммутатив ҳалқа деб нимага айтилади?
4. Сонли ҳалқа деб нимага айтилади?
5. Ҳалқанинг қандай содда хоссаларини биласиз?
6. Алгебраик амалга нисбатан ёпиқ тўплам деганда нимани тушунасиз?

Таянч тушунчалар

1. Тўплам.
2. Тўплам тушунчаси буйича алгебра.
3. Алгебраик амал.
4. Аддитив алгебра.
5. Гурппа.

12-маъруза

Алгебраик системалар. Системаости. Алгебраик системалар гомоморфизми (2 соат)

Режа:

1. Алгебраик системалар ҳақида тушунча.
2. Алгебраик система, системаости.
3. Алгебраик системалар гомоморфизми.

Адабиёт

1. Назаров Р.Н., Тошпўлатов Б.Т., Дўсумбетов А.Д. Алгебра ва сонлар назарияси. I қисм. Тошкент: Ўқитувчи. 1993 й. (65-66 бетлар). '
2. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. Москва: Высш. шк. 1979 г. (стр. 112-116).

Олдинги маърузаларда тўпламлар назариясига кўра алгебра тушунчаси ва алгебранинг хусусий ҳолларидан гурппа ва ҳалқа тушунчалари билан танишдик. Мустақил таълимда эса алгебранинг яна бир хусусий ҳоли бўлган майдон тушунчаси билан ҳам батафсил танишиб ўтдик. Энди алгебра тушунчасини янада бойитиб тўпламда муносабат тушунчасини ҳам қарайлик.

Бўш бўлмаган A тўпламда бир қанча алгебраик амаллар билан биргаликда қандайдир муносабатлар ҳам аниқланган бўлиши мумкин.

Масалан, Z тўпламда кичик, катта, қолдиксиз бўлинишлик, бир нечта соннинг энг катта умумий бўлувчиси ва бошқа муносабатлар аниқланган. Бўш бўлмаган A тўпламда аниқланган муносабатлар $w_1, w_2, \dots, w_s$ бўлсин. Бу муносабатлар тўпламини $\Omega' = \{w_1, w_2, \dots, w_s\}$, A тўпламда аниқланган барча $f_1, f_2, \dots, f_s$ операциялар тўплами $\Omega = \{f_1, f_2, \dots, f_s\}$ орқали белгилайлик.

Таъриф. Бўш бўлмаган A тўплам ва унда аниқланган Ω алгебраик амаллар ҳамда Ω' муносабатлар тўпламидан иборат тартибланган $\langle A, \Omega, \Omega' \rangle$ учликга алгебраик система дейилади ва у A_1 ҳарфи орқали белгиланади.

Таърифта кўра $A_1 = \langle A, \Omega, \Omega' \rangle$ бўлиб, бунда $A \neq \emptyset$, $\Omega = \{f_1, f_2, \dots, f_s\}$, $\Omega' = \{w_1, w_2, \dots, w_s\}$ бўлади.

Масалан, $N_1 = \langle N, +, \cdot, < \rangle$ тартибланган учлик алгебраик система бўлади. Бу системани натурал сонлар системаси деб юритилади.

Тартибланган $\langle A, \Omega' \rangle$ жуфтлик баъзан модел деб юритилади. Масалан, $\langle N, <, > \rangle$ модел бўлади. $A_1 = \langle A, \Omega, \Omega' \rangle$ системада $A \neq \emptyset$ алгебраик системанинг асосий тўплами, унинг элементи, A_1 алгебраик системанинг элементи дейилади. Ω тўпламдаги операциялар A_1 системанинг асосий операциялари, Ω' тўпламдаги муносабатлар эса A_1 системанинг асосий муносабатлари дейилади.

Айрим ҳолларда алгебраик система деб тартибланган $\langle A, \Omega_0 \rangle$ жуфтликни ҳам тушунилади (бунда $\Omega_0 = \Omega \cup \Omega'$ дан иборат). Агар $\Omega' = \emptyset$ бўлса, у ҳолда $\langle A, \Omega_0 \rangle$ система $\langle A, \Omega \rangle$ алгебрадан иборат, яъни $\langle A, \Omega_0 \rangle = \langle A, \Omega \rangle$ бўлади. Шу сабабли алгебрани алгебраик системанинг хусусий ҳоли деб қараш мумкин.

Таъриф. Агар $\langle A, \Omega \rangle$ ва $\langle B, \Omega_1 \rangle$ алгебралар бир хил турли алгебралар бўлиб, Ω' ни Ω_1' га акслантириш инъектив акслантириш бўлса, у ҳолда $A_1 = \langle A, \Omega, \Omega' \rangle$ ва $B_1 = \langle B, \Omega_1, \Omega_1' \rangle$ алгебраик системаларни бир хил турли (типли) системалар дейилади.

Агар Ω ва Ω' лар чекли тўпламлар бўлса, бу таърифни янада ойдинлаштириш мумкин. Айтайлик, $\Omega = \{f_1, f_2, \dots, f_s\}$, $\Omega' = \{R_1, R_2, \dots, R_t\}$,

$\Omega_1 = \{f_1', f_2', \dots, f_s'\}$, $\Omega_1' = \{R_1', R_2', \dots, R_t'\}$ бўлсин. У ҳолда $A_1 = \langle A, f_1, f_2, \dots, f_s, R_1, R_2, \dots, R_t \rangle$, $B_1 = \langle B, f_1', f_2', \dots, f_s', R_1', R_2', \dots, R_t' \rangle$ бўлиб, бунда $r(f_i)$ сон $f_i (i=1, 2, \dots, s)$ операциянинг ранги, $r(R_k)$ сон $R_k (k=1, 2, \dots, t)$ муносабатнинг ранги дейилиб улар $A_1 = \langle A, \Omega, \Omega' \rangle$ системанинг турлари деб юритилади.

Агар A_1 ва B_1 алгебраик системаларнинг турлари бир хил бўлса, яъни $r(f_i) = r(f_i')$ ($i=1, 2, \dots, s$), $r(R_k) = r(R_k')$ ($k=1, 2, \dots, t$) бўлса, у ҳолда A_1 ва B_1 алгебраик системалар бир хил турли системалар дейилади.

Масалан, $N_1 = \langle N, +, \cdot, \leq \rangle$ натурал сонлар системаси (2, 2, 2) турли система бўлади.

Айтайлик A_1 ва B_1 бир хил турли алгебраик системалар бўлсин. A_1 системанинг асосий операцияси f_A бўлсин ва B_1 системанинг f_B га мос асосий операцияси f_B бўлсин. Худди шундай A_1 системанинг асосий муносабати R_A бўлсин ва B_1 системанинг R_B га мос асосий муносабати R_B бўлсин. ^

Таъриф. A_1 алгебраик системани B_1 алгебраик системанинг системаости дейилади, агар $A \subset B$ бўлиб A_1 системанинг ҳар бир асосий операцияси ва ҳар бир асосий R_A муносабати учун қуйидаги шартлар бажарилса:

1. $(\forall a_1, a_2, \dots, a_m \in A) f_A(a_1, a_2, \dots, a_m) = f_B(a_1, a_2, \dots, a_m)$,
2. $(\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in A) (a_1, a_2, \dots, a_n) \in R_A \Leftrightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n) \in R_B$. (бунда m сон f_A операциянинг ранги, n сон R_A муносабатнинг ранги).

Таъриф. Бир хил турли A_1 ва B_1 алгебраик системаларни гомоморф системалар дейилади, агар A_1 ни B_1 га ички h акслантириш мавжуд бўлиб, A_1 системадаги барча асосий операциялар сақланса ва ушбу $(\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in A) (a_1, a_2, \dots, a_n) \in R_A \rightarrow (h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n)) \in R_B$ шарт ўринли бўлса. Бунда R_A муносабат A_1 системанинг ихтиёрий

асосий муносабати бўлиб n унинг ранги, R_B эса A_1 системанинг R_A муносабатига мос келувчи B_1 нинг асосий муносабати.

Текшириш саволлари

1. Алгебраик система ҳақида тушунча беринг?
2. Алгебраик система деб нимага айтилади?
3. Бир хил турли алгебраик системалар деб нимага айтилади?
4. Алгебраик системанинг системаости деб нимага айтилади?
5. Гомоморф алгебраик системалар деб нимага айтилади?

Таянч тушунчалар.

1. Тўплам.
2. Тўплам тушунчасига кўра алгебра.
3. Алгебраик амаллар.
4. Тўпламда аниқланган муносабат.
5. Акслантиришлар.

13-маъруза

Натурал сонлар системаси. Математик индукция принципи (2 соат)

Режа:

1. Сонлар системасини қуриш тушунчаси.
2. Натурал сонлар системаси.
3. Пеано аксиомаси.
4. Математик индукция принципи.

Адабиёт

1. Назаров Р.Н., Тошпўлатов Б.Т., Дўсумбетов А.Д. Алгебра ва сонлар назарияси. I қисм. Тошкент: Ўқитувчи. 1993 й. (66-73 бетлар).
2. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. Москва: Высш. шк. 1979 г. (стр. 117-122).

Биз алгебраик системалар мавзусини ўрганганимизда унинг тўплами исталган элементлардан тузилган бўлишини кўрдик. Агар қаралаётган системаларнинг асосий тўплами элементлари сонлардан иборат бўлса, у ҳолда бундай системалар одатда сонли системалар дейилади. Мазкур маърузада биз натурал сонлар системасини ўрганамиз. Сонли системаларни йуришнинг конструктив ва аксиоматик усуллари мавжуд. Бу усуллар тўплам тушунчасига асосланган.

Конструктив усулда йурилатган система олдиндан маълум ҳисобланган тушунчага асосланиб қурилади.

Сонли системаларни аксиоматик усулда қуришда эса ҳар бир системанинг асосий хоссалари аксиомалар ёрдамида берилади.

Мазкур мавзуда натурал сонлар системасининг аксиоматик усулда қурилишини ўрганамиз. Бунинг учун бошланғич муносабат сифатида "в элемент а элементдан бевосита кейин келади" муносабати ва бу муносабат учун қўйилган аксиомалар системасини оламиз.

Таъриф. Бирор буш бўлмаган N тўплагининг а ва в элементлари учун "в элемент а элементдан бевосита кейин келади" муносабати ўринли бўлиб, N тўплагининг элементлари учун қуйидаги тўртта аксиомалар бажарилса, у ҳолда N тўплагининг элементларига натурал сонлар дейилади:

1) Ҳеч қандай натурал сондан кейин келмайдиган 1 сони мавжуд (агар а дан бевосита кейин келадиган элементни a' десак, у ҳолда $a' \neq 1$ кўринишда ёзилади);

2) Исталган натурал а сон учун ундан бевосита кейин келадиган натурал сон ягонадир, яъни $(\forall a, v \in N)(a=v) \Rightarrow (a'=v')$;

3) 1 сонидан бошқа ихтиёрий натурал сон битта ва фақат битта натурал сондан кейин келади, яъни $(\forall a, v \in N)(a'=v') \Rightarrow (a=v)$;

4) Агар натурал сонлар тўплагининг ихтиёрий M тўплагимаси:

а) 1 ни ўз ичига олса;

в) Ихтиёрий а элементининг M да бўлишидан a' нинг ҳам M да бўлиши келиб чиқса, у ҳолда M тўплагимаси N натурал сонлар тўплами билан устма-уст тушади, яъни $\forall (M \subseteq N)((1 \in M) \wedge (a \in M \Rightarrow a' \in M)) \Rightarrow M=N$ (индукция аксиомаси) бўлади.

Юқоридаги таърифдаги аксиомаларни дастлаб Италия математиги Пеано (1858-1932) таклиф этгани учун уларни Пеано аксиомалари деб юритилади.

Натурал сонлар системасига қуйидагича таъриф бериш мумкин [2 нинг 119 бетида]:

Таъриф. Ёўшиш ва кўпайтириш амаллари аниқланган 0 ва 1 элементлари киритилган N тўплам элементлари учун қуйидаги шартлар (аксиомалар) ўринли бўлса, у ҳолда $N_1 = \langle N, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ агебрага натурал сонлар системаси дейилади:

1. $(\forall n \in N) n+1 \neq 0$, яъни 0 элементни N нинг ҳар қандай n элементи ва 1 нинг йиғиндиси сифатида ифодалаш мумкин эмас;

2. $(\forall m, n \in N) m+1=n+1 \Rightarrow m=n$ яъни қўшиш амали буйича 1 дан чапда келувчи ҳеч қандай элемент йўқ;

3. $(\forall m \in N) m+0=m$, яъни 0 элемент қўшиш амалига кўра ўнг нейтрал элемент;

4. $(\forall m, n \in N) m+(n+1)=(m+n)+1$ яъни қўшиш амали кучсиз, ассоциатив шаклда бўлади;

5. $(\forall m \in N) m \cdot 0=0$;

6. $(\forall m, n \in N) m(n+1)=mn+m$ яъни кўпайтиришнинг қўшишга исбатан кучсиз дистрибутив шакли бўлади;

7. Агар $M \subseteq N$ бўлганда:

а) $0 \in M$, б) $\forall n \in M \Rightarrow n+1 \in M$, у ҳолда $M=N$ бўлади.

7-аксиома математик индукция аксиомаси дейилади. N тўпламнинг элементларини натурал сонлар дейилади. 0 ва 1 элементларни мос равишда N системасининг ноль ва бирлик элементлари дейилади. $1+1, (1+1)+1, ((1+1)+1), \dots$ ёзув ўрнида мос равишда 2, 3, 4, ... оддий ўнлик белгилар ишлатилади.

Таъриф. Математик индукция принципи деб қуйидаги аксиомага айтилади:

Бирор жумла p натурал сонга боғлиқ бўлиб, қуйидаги аксиомалар ўринли бўлсин, яъни

1. $p=1$ учун жумла рост;

2. $p=k$ учун жумланинг ростлигидан $p=k+1$ учун жумланинг ростлиги келиб чиқади.

Бу ҳолда жумла p нинг ҳар қандай натурал қийматида рост бўлади.

Бу аксиоманинг шартларини текшириш қуйидаги иккита теорема билан аниқланади:

1-теорема. Жумланинг $p=1$ учун ростлигини исботлаш;

2-теорема. Жумланинг $p=k$ учун тўғри деб фараз қилиб, унинг $p=k+1$ учун ростлигини исботлаш.

1-теоремага индукция базиси, 2-теоремага индукцион қадам дейилади.

Таъриф. Хусусий жумлалардан умумий хулоса чиқариш индукция дейилади.

Индукция икки хил, яъни тўла ва чала индукция бўлади.

Таъриф. Барча хусусий ҳолларни текшириб умумий хулоса чиқариш тўла индукция дейилади.

Таъриф. Барча хусусий ҳолларни текширмасдан бир нечта хусусий ҳолларни текшириб умумий хулоса чиқариш чала индукция дейилади.

Чала индукция билан ҳосил қилинган натижалар нотўғри бўлиши мумкин. Шунинг учун у математикада кўп ишлатилмайди.

Мисол. $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$ тенгликни n нинг ҳар қандай натурал қийматида тўғри эканлигини исботланг.

Берилган тенгликнинг ростлигини математик индукция принципи асосида исбот қиламиз.

1. $p=1$ учун $1=1^2$ тўғри;

2. $p=k$ учун $1+3+5+\dots+(2k-1)=k^2$ тенгликни $\forall k \in N$ бўлганда тўғри деб фараз қилиб $p=k+1$ учун $1+3+5+\dots+(2(k+1)-1)=(k+1)^2$ тенгликнинг тўғрилигини исботлайлик.

Исботи. $1+3+5+\dots+(2k-1)+(2(k+1)-1)=k^2+2k+2-1=k^2+2k+1=(k+1)^2$, яъни $1+3+5+\dots+(2(k+1)-1)=(k+1)^2$ келиб чиқади. Демак, берилган тенглик $p \in N$ бўлганда рост бўлади.

Теорема (Математик индукция принципи). Агар бирор $B(n)$ тасдиқ $n=1$ учун рост бўлиб, унинг $n=k$ учун ростлигидан $n=k+1$ учун ростлиги келиб чиқса, у ҳолда $B(n)$ тасдиқ исталган n натурал сон учун рост бўлади.

Бу теореманинг исботи [1] да келтирилган.

Текшириш саволлари

1. Сонли системаларни қуришнинг қандай усуллари биласиз?
2. Натурал сонлар системаси деб нимага айтилади?
3. Пеано аксиомасини айтиб беринг?
4. Индукция деб нимага айтилади?
5. Чала ва тўла индукцияга таъриф беринг?
6. Математик индукция принципи деб нимага айтилади?

Таянч тушунчалар

1. Тўплам.
2. Алгебраик амаллар.
3. Тўпланда аниқланган муносабатлар.
4. Алгебраик система.

14-март

Бутун сонлар ҳалқаси. Рационал сонлар майдони, хоссалари (2 соат)

Режа:

1. Бутун сонларнинг аддитив группаси.
2. Бутун сонлар ҳалқаси.
3. Майдон тушунчаси. Майдоннинг содда хоссалари.
4. Рационал сонлар майдони.

Адабиёт

1. Назаров Р.Н., Тошпўлатов Б.Т., Дўсумбетов А.Д. Алгебра ва сонлар назарияси. I қисм. Тошкент: Ўқитувчи 1993 й. (87-92 бетлар).
2. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. Москва: Высш. шк. 1979 г. (стр. 135-150).

$N_1 = \langle N, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ натурал сонлар системасида айириш амали ҳар доим бажарилавермайди, яъни m, n натурал сонлар берилганда x га нисбатан $m+x=n$ тенглама ҳар доим ҳам N га тегишли ечимга эга бўлавермайди. Бу тенглама фақат $m < n$ бўлганда N га тегишли ягона ечимга эга бўлади. Бу ечим n ва m сонларнинг айирмаси дейилиб, у $n-m$ орқали белгиланади.

$Z = \{ \dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots \}$ - барча бутун сонлар тўплами берилган бўлсин. Z тўплам $Z_1 = \langle Z, +, - \rangle$ алгебрининг асосий тўплами $Z_1 = \langle Z, +, - \rangle$ алгебра аддитив группа бўлади. Ҳақиқатан, Z тўплам элементлари учун группанинг қуйидаги шартлари бажарилади:

1. $(\forall a, b, c \in Z) a+(b+c)=(a+b)+c$;
2. $(\forall a \in Z, \exists 0 \in Z) a+0=0+a=a$;
3. $(\forall a \in Z, \exists (-a) \in Z) a+(-a)=(-a)+a=0$.

$Z_1 = \langle Z, +, - \rangle$ алгебрани бутун сонларнинг аддитив группаси дейилади.

Таъриф. $Z_1 = \langle Z, +, -, \cdot, 1 \rangle$ алгебрага бутун сонлар ҳалқаси дейилади (бу ерда $N \subset Z$ бўлиб, 1 эса N нинг бирлик элементи).

Таъриф. Агар a ва b бутун сонлар берилганда, шундай k натурал сон мавжуд бўлиб $a+k=b$ ($k \neq 0$) тенглик ўринли бўлса, у ҳолда « a сон b сондан кичик» дейилади ва у $a < b$ кўринишда ёзилади. « a сон b сондан кичик ёки тенг» деган мулоҳаза $a \leq b$ кўринишда ёзилади. « a муносабатига тескари муносабат» орқали белгиланади. Шундай қилиб $a > b$ бўлади, шу ҳолда ва фақат шу ҳолда, агар $b < a$ бўлса.

Агар $Z_1 = \langle Z, +, -, \cdot, 1 \rangle$ бутун сонлар халқаси бўлса, у ҳолда қуйидаги мулоҳазалар ўринли:

1. $\forall a, v \in Z$ учун $a < v, a = v, v < a$ муносабатлардан битта ва фақат биттаси бажарилади;
2. $\forall a \in Z$ учун $a < 0, a = 0, 0 < a$ муносабатлардан битта ва фақат биттаси бажарилади;
3. $\forall a, v, c \in Z$ учун $a < v$ бўлади, шу ҳолда ва фақат шу ҳолда, агар $a + c < v + c$ бўлса;
4. $\forall a, v, c \in Z$ учун $a < v$ ва $c > 0$ бўлса, у ҳолда $ac < vc$ бўлади. Алгебранинг бир кўриниши майдондир. Энди майдон ва унинг содда хоссалари билан танишайлик.

Таъриф. Камида иккита ҳар хил элементга эга бўлган F_1 коммутатив халқа элементлари учун $a \neq 0$ бўлганда ушбу

$$ax = v \quad (1)$$

тенглама F_1 га тегишли ягона $a^{-1}v$ ечимга эга бўлса, у ҳолда F_1 коммутатив халқага майдон дейилади.

Таъриф. a элемент K халқанинг тескариланувчан элементи дейилади, агар K да шундай v элемент мавжуд бўлиб $av = va = 1_k$ тенглик ўринли бўлса (бунда 1_k элемент K халқанинг бирлик элементи). Агар K халқанинг a ва v элементлари учун $av = va = 1_k$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда a ва v элементлар ўзаро тескари элементлар дейилади.

Бу таърифдаги тушунчалардан фойдаланиб майдонга қуйидагича ҳам таъриф бериш мумкин.

Таъриф. Нолли элементи бирлик элементидан фарқли, яъни $0_k \neq 1_k$ бўлгандагина коммутатив K халқани майдон дейилади, агар K нинг ҳар бир ноль бўлмаган элементи тескариланувчи элемент бўлса.

Бу таърифга кўра F_1 майдонни $F_1 = \langle F, +, -, \cdot, 1 \rangle$ кўринишда ёза оламиз. Биз $\langle F, +, - \rangle$ алгебранинг аддитив группа эканини кўриб ўтдик. Бу аддитив группанинг нейтрал элементи F_1 майдонининг нолли элементи дейилади ва уни 0_F ёки 0 орқали белгиланади.

Таъриф. Ҳар бир ноль бўлмаган элементи тескариланувчан бўлган F_1 майдоннинг халқаостисига F_1 майдоннинг майдоности дейилади. F_1 нинг ўзидан бошқа майдоностилари хос майдоности дейилади.

Ҳар қандай майдоности майдон бўлиши равшан.

Таъриф. Агар майдон хос майдоностиларига эга бўлмаса, у ҳолда бундай майдонга туб майдон дейилади.

Ихтиёрий a, v, c элементли $F_1 = \langle F, +, -, \cdot, 1 \rangle$ майдоннинг қуйидаги хоссалари мавжуд:

1. $(av = 1) \Rightarrow (a \neq 0 \wedge v = a^{-1})$;
2. $(ac = bc) \wedge (c \neq 0) \Rightarrow a = b$;
3. $(av = 0) \Rightarrow (a = 0) \vee (v = 0)$;
4. $(a \neq 0) \wedge (v \neq 0) \Rightarrow (av \neq 0)$;
5. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc (b \neq 0, d \neq 0)$;
6. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd} (b \neq 0, d \neq 0)$;
7. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} (b \neq 0, d \neq 0)$;
8. $\frac{a}{b} + \frac{(-a)}{b} = 0, -\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-a}{b}$;

$$9. (a \neq 0) \wedge (b \neq 0) \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a};$$

$$10. \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0, c \neq 0).$$

Бу хоссаларнинг исботлари [2] да келтирилган.

Таъриф. Ҳуйидаги хоссаларга эга бўлган Q тўпламга рационал сонлар майдони дейилади:

1. $Z \subset Q$;
2. Q – тўплам - майдон;
3. Z тўпламдаги сонларни қўшиши ва кўпайтириши амаллари Q тўпламдаги қўшиш ва айириш амаллари билан устма - уст тушади.

4. Q тўплам-туб майдон.

Рационал сонлар майдонини Q_1 орқали белгилайлик. Q_1 майдоннинг элементларини рационал сонлар деб аталади. Ҳар қандай рационал сон $\frac{m}{n}$ кўринишга эга бўлиб, бунда $\forall m, n \in Z (n \neq 0)$ бўлади.

Рационал сонлар устидаги амаллар қуйидаги хоссаларга эга:

$$1. \frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow mq = np \quad (n \neq 0, q \neq 0);$$

$$2. \frac{m}{n} \pm \frac{p}{q} = \frac{mq \pm np}{nq} \quad (n \neq 0, q \neq 0);$$

$$3. \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq} \quad (n \neq 0, q \neq 0);$$

$$4. \frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{mq}{np} \quad (n \neq 0, q \neq 0, p \neq 0).$$

$\frac{m \cdot n}{n}$ бўлгани учун $Z \subset Q$ эканлиги келиб чиқади. $0 \neq a \in Q$ бўлганда $a \cdot 1 = 0$ тенглик

бажарилмагани учун Q_1 майдон ноль характеристикаси майдони дейилади (бунда 1 элемент Q_1 нинг бирлик элементи).

Таъриф. Агар сонлар тўпламига тегишли ихтиёрий иккита соннинг йиғиндиси айирмаси кўпайтмаси ва бўлинмаси яна шу сонлар тўпламига тегишли бўлса, у ҳолда бундай тўпламни сонлар майдони дейилади.

Текшириш саволлари

1. Бутун сонларнинг аддитив группаси деб нимага айтилади?
2. Бутун сонлар ҳалқасига таъриф беринг?
3. Майдон деб нимага айтилади.
4. Майдоннинг содда хоссаларини баён этинг?
5. Рационал сонлар майдони деб нимага айтилади?
6. Рационал сонлар устидаги амалларнинг қандай хоссаларини биласиз?
7. Сонлар майдони деб нимага айтилади.

Таянч тушунчалар

1. Тўплам.
2. Группа.

3. Ҳалқа.
4. Бирлик ва ноль элементлар.
5. Алгебраик амаллар.

15-маъруза

Ҳақиқий сонлар майдони ва унинг хоссалари (2 соат)

Режа:

1. Ҳақиқий сон ҳақида тушунча.
2. Ҳақиқий соннинг модули ва унинг хоссалари.
3. Ҳақиқий сонлар тўплами.

Адабиёт

1. Назаров Р.Н., Тошпўлатов Б.Т., Дўсумбетов А.Д. Алгебра ва сонлар назарияси. I қисм. Тошкент:Ўқитувчи. 1993 й. (95-98 бетлар).
2. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. Москва:Высш. шк. 1979 г.(стр. 150-157).

Ўрта мактаб математикасидан ўнли каср тушунчаси бизга маълум. Шу тушунчани мазкур маърузада янада кенгрок ўрганамиз.

Таъриф. Агар чексиз ўнли касрда вергулдан кейин битта рақам ёки бир неча рақамлар группаси чексиз такрорланиб келса, у ҳолда бундай чексиз ўнли касрга даврий ўнли каср, рақамлар группаси давр, даврдаги рақамлар сони эса давр узунлиги дейилади.

Мисол.. 2, 7373... касрни 2,(73) кўринишда ҳам ёзилади. Бу чексиз ўнли каср даврий ўнли каср бўлиб даври 73, давр узунлиги эса 2 га тенг.

Таъриф. Агар даврий касрда давр бевосита вергулдан кейин келса, у ҳолда бундай касрга соф даврий каср дейилади. Масалан, 2,(73) сон соф даврий каср сон бўлади.

Таъриф. Агар чексиз ўнли касрда давр билан вергул орасида бошқа рақамлар келса, у ҳолда бундай касрга аралаш даврий каср дейилади.

Мисол. 2, 131414... = 2,13(14) сон аралаш даврий каср сон бўлади.

Таъриф. Чексиз даврий ўнли каср сон рационал сон дейилади.

Мисол. 2,(73); 2,13(14) сонлари рационал сон бўлади.

Рационал соннинг таърифидан кўринадики ҳар қандай соф даврий каср сон ҳам, аралаш даврий каср сон ҳам рационал сон бўлади.

Ихтиёрий рационал сонни $\frac{m}{n}$ ($\forall m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$) кўринишда ёзиш мумкин ва аксинча $\frac{m}{n}$ ($\forall m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$) кўринишдаги сон рационал сон бўлади.

Таъриф. Даврий бўлмаган чексиз ўнли каср сон иррационал сон дейилади.

Мисол. 2,101001000100001...; 3,121121112... сонлар иррационал сонлар бўлади.

Рационал сон билан иррационал соннинг йиғиндиси ва айирмаси, нолдан фарқли рационал соннинг иррационал сонга кўпайтмаси ва нисбати яна иррационал сон бўлади.

Ҳар қандай чекли ёки чексиз ўнли каср сон ҳақиқий сон бўлади.

Таъриф. а ҳақиқий соннинг модули (абсолют қиймати) деб ушбу

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{агар } a \geq 0 \text{ булса,} \\ -a, & \text{агар } a < 0 \text{ булса} \end{cases}$$

муносабатни қаноатлантирувчи $|a|$ сонга айтилади.

Ҳақиқий сонларнинг модули қуйидаги хоссаларга эга:

1°. $|a| = |-a|$;

2°. $|a| \leq b$ ва $-b \leq a \leq b$ муносабатлар бир хил маънога эга;

3°. $|a| \geq b$ муносабат $a \geq b$ ёки $a \leq -b$ эканлигини билдиради;

бир хил маънога эга;

4°. $|a+b| \leq |a|+|b|$;

5°. $|a+b| \geq |a-b|$;

6°. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;

7°. $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad b \neq 0$.

Барча рационал сонлар тўплами $Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid (\forall m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0) \right\}$ кўринишда бўлади.

Барча иррационал сонлар тўпламини I барча ҳақиқий сонлар тўпламини R орқали белгилайлик. У ҳолда R тўплам Q ва I тўпламларнинг бирлашмасидан иборат, яъни $R = Q \cup I$ бўлади. Барча ҳақиқий сонлар тўпламини $R = (-\infty; +\infty)$ кўринишда ҳам белгиланади.

Таъриф. Агар сонлар тўпламига тегишли ихтиёрий иккита соннинг йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва нолдан фарқли сонга бўлинмаси яна шу тўпламга тегишли бўлса, у ҳолда бундай тўпламга сонли майдон дейилади.

Таърифга кўра R тўплам сонлар майдони бўлади ва у майдонни R_1 орқали белгилайлик.

Масалан, рационал сонлар ҳалқаси, ҳақиқий сонлар ҳалқаси майдон бўлади.

R_1 майдонда ягона ноль ва бирлик элемент мавжуд, R_1 майдоннинг нолдан фарқли ихтиёрий a элементи учун унга тескари a^{-1} элемент мавжуд ва ягонадир.

R_1 майдонда ноль элемент бирлик элемент билан бир хил эмас.

Бизга маълумки $a \neq 0$, $b \neq 0$ бўлганда $ab \neq 0$ бўлса, у ҳолда a ва b элементлар нолнинг бўлувчилари дейилар эди.

R_1 майдон нолнинг бўлувчиларига эга эмас.

$\{ \}$ - тартиб муносабат булсин. Агар $\langle A, +, \cdot, 1 \rangle$ тартибланган майдоннинг a элементи учун $a+a \neq a$ ва $a+a \in A$ (а $\{a+a\}$ шартлар бажарилса, у ҳолда a элементга $\langle A, +, \cdot, 1 \rangle$ майдоннинг мусбат (манфий) элементи дейилади. Тартибланган майдоннинг a ва b элементлари берилганда $a-b$ айрма мусбат бўлса, у ҳолда a элемент b элементдан, катта дейилади ва уни $a > b$ орқали белгиланади, ёки b элемент a элементдан кичик деб юритилади ва уни $b < a$ орқали белгиланади, агар $a-b=0$ бўлса, $a=b$ бўлади. Тартибланган майдоннинг a мусбат элементи нолдан катта ва манфий b элементи нолдан кичик бўлади.

Таъриф. Агар n ихтиёрий натурал сон ва e элемент P майдоннинг бирлик элементи бўлганда $ne=0$ тенглик бажарилмаса, у ҳолда P майдон ноль характеристикаси майдон, агар $m \neq 0$, бўлганда $me=0$ бўлса ва $\min m = p$ деб олсак, у ҳолда P майдон p характеристикали майдон дейилади. ^

Ҳар қандай сонли майдон, шу жумладан R майдон ҳам ноль характеристикали майдон бўлади.

Айтайлик e элемент R майдоннинг бирлик элементи бўлсин. $e+e+e^2$ бўлгани учун e мусбат элемент бўлади. $e+e+\dots+e$

n

$=ne$ йиғинди n та мусбат элементининг йиғиндиси бўлгани учун ne ҳам мусбат, яъни $ne > 0$ бўлади. Демак, $n=pe=0$ тенглик ҳеч қачон бажарилмайди. Шу сабабли P майдон таърифга кўра ноль характеристикали майдон бўлади.

Биз ҳақиқий сонлар системаси мавзуси билан мустақил таълимдан танишмиз. У системани $\langle R, +, -, \cdot, 1, < \rangle$ кўринишда белгилаймиз. У ҳолда $\langle R, +, -, \cdot, 1 \rangle$ алгебра

ҳақиқий сонлар майдони, R ҳақиқий сонлар тўплами, унинг элементи эса ҳақиқий сон дейилади.

Теорема. Ҳар қандай a ва $b > 0$ ҳақиқий сонлар берилганда шундай m бутун сон ва g ҳақиқий сонлар топилиб, улар учун $a = mb + g$, $0 \leq g < b$ муносабатлар ўринли бўлади.

Бу теореманинг исботи [2] да келтирилган.

Масалан, $A = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ тўплам майдон бўлади.

Текшириш саволлари

1. Ҳақиқий сон деб нимага айтилади?
2. Даврий ўнли каср деб нимага айтилади ва унинг қандай кўринишларини биласиз?
3. Рационал, иррационал сон деб нимага айтилади?
4. Ҳақиқий соннинг модули деб нимага айтилади ва унинг хоссаларини ёзиб беринг?
5. Ҳақиқий сонлар тўплами қандай бўлади.
6. Ҳақиқий сонлар майдони деб нимага айтилади.
7. Ноль характеристикали майдон деб нимага айтилади?

Таянч тушунчалар

1. Ўнли каср ва улар устида амаллар.
2. Тўплам ва улар устида амаллар.
3. Ҳалқа.
4. Бирлик элемент.

16-март.

Майдоннинг комплекс кенгайтмаси. Комплекс сонлар майдони (2 соат)

Режа:

1. Комплекс кенгайтма ҳақида тушунча.
2. Комплекс кенгайтманинг мавжудлиги.
3. Комплекс сонлар майдони.

Адабиёт

1. Назаров Р.Н., Тошпўлатов Б.Т., Дўсумбетов А.Д. Алгебра ва сонлар назарияси. I қисм. Тошкент: Ўқитувчи. 1993 й. (98-100 бетлар).
2. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. Москва: Высш.шк. 1979 г. (стр. 157-163).

Мактаб математика курсидан маълумки, $x^2 + 1 = 0$ тенглама ҳақиқий ечимга эга эмас эканлиги, яъни бу тенглама $R = \langle \mathbb{R}, +, \cdot, 1 \rangle$ майдонда ечимга эга эмас. Энди R майдоннинг шундай кенгайтириш масаласини қўямизки, натижада у кенгайтмада $x^2 + 1 = 0$ тенглама ечимга эга бўлсин. Бундай кенгайтмани қуришнинг бир қанча усуллари мавжуд. Шулардан бири бўлган қуйидаги усулни кўрайлик:

Аввало $a \in R$ ҳақиқий сонга $(a; 0)$ жуфтликни мос қўямиз, яъни $(a; 0) = a$ деб оламиз. $b \in R$ олиб $(a; b)$ тартибланган жуфтликни тузамиз. Бундай жуфтликлар тўпламини S орқали белгилаймиз. S тўплам элементлари учун тенглик муносабати, қўшиш ва кўпайтириш каби бинар алгебраик амалларни мос равишда қуйидагича киритамиз:

1. $(a; b) = (c; d) \Leftrightarrow (a = c) \wedge (b = d) (\forall (a; b), (c; d) \in S;$

2. $(a; b) + (c; d) = (a+c; b+d) \ (\forall (a; b), (c; d) \in C;$
3. $(a; b) \cdot (c; d) = (ac-bd; ad+bc) \ (\forall (a; b), (c; d) \in C;$

Теорема. $\{(a; b) \mid a, b \in R\}$ тўплам коммутатив халқа бўлади. Бу теореманинг исботи [1] да берилган.

Теорема. $\langle C, +, \cdot \rangle$ алгебра майдон бўлади.

Бу теоремани исботи [1] да берилган.

$\langle C, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ майдон бўлиб уни комплекс сонлар майдони деб юритилади ва уни C ҳарфи орқали белгиланади. C тўпламнинг элементи C майдоннинг ҳам элементи бўлади. Шу сабабли $(a; b)$ тартибланган жуфтлик C майдоннинг элементи бўлиб, у комплекс сон дейилади. C комплекс сонлар майдони ўз ичига R ҳақиқи сонлар майдонини олади, чунки $(a; b)$ жуфтликда $b=0$ бўлса, $(a; 0)=a$ бўлиб $(a; 0)$ жуфтликлар тўплами ҳақиқий сонлар тўпламидан иборат бўлади. $(0; 0)=0$ бўлади.

$(0; 1)$ жуфтликни i орқали белгилайлик, яъни $(0; 1)=i$ бўлсин. $z=(a; b)+(0; 0)=(a+0; 0+b)=(a; 0)+(0; b)=a(1; 0)+b(0; 1)=a+bi = a+vi$, яъни $z=(a; b)=a+vi$ бўлар экан. Бунда a ва b лар ҳақиқий сонлар бўлиб, a сон z комплекс соннинг ҳақиқий қисми, b сон эса z комплекс соннинг мавҳум қисми, i мавҳум бирлик дейилади. Агар $z=a+vi$ да $v \neq 0$ бўлса, у ҳолда $a+vi$ мавҳум сон, $a=0$, $v \neq 0$ бўлса, vi сон соф мавҳум сон дейилади. $z=a+vi$ га z комплекс соннинг алгебраик шакли, $(a; b)$ га z комплекс соннинг жуфтлик шакли дейилади. Демак, C майдонда квадрати -1 га тенг бўлган i сон бўлиб, бу майдонда $x^2+1=0$ тенглама $x_{1,2}=\pm i$ ечимга эга бўлади.

Таъриф $F_1=\langle F, +, \cdot, 1 \rangle$ майдон квадрати -1 га тенг бўлмаган элементлардан тузилган майдон бўлиб, қуйидаги шартлар бажарилса, у ҳолда K майдон F_1 майдоннинг комплекс кенгайтмаси дейилади:

1. F_1 майдон K майдоннинг майдоности;
2. K да квадрати -1 га тенг бўлган i элемент мавжуд бўлса;
3. K майдоннинг ҳар бир z элементини $z=a+vi$ ($a, b \in F$) кўринишда ягона ифодалаш мумкин бўлса.

Бу таърифга кўра C майдон R майдоннинг комплекс кенгайтмаси бўлади.

Теорема. Ҳар бир элементининг квадрати -1 га тенг бўлмаган $F_1=\langle F, +, \cdot, 1 \rangle$ майдон учун комплекс кенгайтма мавжуд.

Бу теореманинг исботи [2]да берилган.

Таъриф. Ҳақиқий сонлар майдонининг комплекс кенгайтмаси комплекс сонлар майдони дейилади.

Таъриф. Комплекс сонлар майдонининг ҳар қандай майдоностисига сонли майдон дейилади.

Юқоридаги тушунчалардан $Q \subset R \subset C$ эканлиги келиб чиқади;

Таъриф. Фақат мавҳум қисмининг ишораси билан фарқ қиладиган комплекс сонларга ўзаро қўшма комплекс сонлар дейилади.

$a-bi$ комплекс $\bar{z}$ орқали белгилайлик, яъни $\bar{z}=a-bi$ бўлсин. У ҳолда $z=a+bi$ ва $\bar{z}=a-bi$ лар ўзаро қўшма комплекс сонлар бўлади.

Ўзаро қўшма комплекс сонлар қуйидаги хоссаларга эга:

1. $\overline{z + \bar{z}} = z + \bar{z}$
2. $\overline{\overline{z}} = z$;
3. $\overline{z \cdot \bar{z}} = z \cdot \bar{z}$;
4. $\overline{\overline{z}} = z$;
5. $z = \bar{z} \iff z \in R$;
6. $z=a+bi$ бўлса, у ҳолда $z \bar{z} = a^2 + b^2$ бўлади;

7. $z=a+bi$ бўлса, у ҳолда $z + \bar{z} = 2a$ бўлади.

Таъриф. $z=a+bi$ комплекс соннинг модули деб $\sqrt{a^2 + b^2}$ сонга айтилади ва уни $|z|$ ёки $|a+bi|$ кўринишларда белгиланади.

Таърифта кўра $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ бўлади. Ҳар қандай z_1, z_2 комплекс сонлар учун қуйидаги муносабатлар ўринли:

1. $|z_1|^2 = z_1 \bar{z}_1$;
2. $|z_1| = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0$;
3. $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$;
4. $|z_1^{-1}| = |z_1|^{-1}$ ($z_1 \neq 0$);
5. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;
6. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$;
7. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.

Текшириш саволлари

1. Комплекс кенгайтма деб нимага айтилади?
2. Комплекс кенгайтманинг мавжудлиги ҳақиқида теоремани баён этинг?
3. Комплекс сонлар майдони деб нимага айтилади?
4. Комплекс сон деб нимага айтилади ва унинг қандай шакллари биласиз?
5. Сонли майдон деб нимага айтилади?

Таянч тушунчалар

1. Тенглама ва унинг ечими.
2. Тўплам.
3. Майдон.
4. Тартибланган жуфтлик.

17-маъруза

Комплекс соннинг тригонометрик шакли. Муавр формуласи (2 соат)

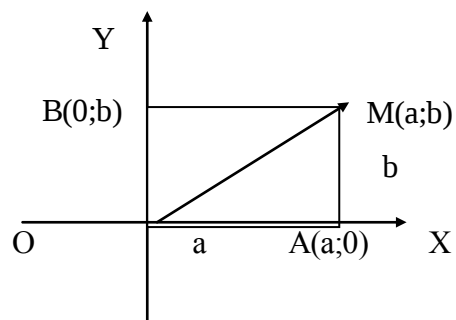
Режа:

1. Комплекс соннинг геометрик тасвири.
2. Комплекс соннинг тригонометрик шакли.
3. Тригонометрик шаклдаги комплекс сонларни қўпайтириш ва бўлиш.

Адабиёт

1. Назаров Р.Н., Тошпўлатов Б.Т., Дўсумбетов А.Д. Алгебра ва сонлар назарияси. I қисм. Тошкент:Ўқитувчи. 1993 й. (100-108 бетлар).
2. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. Москва:Высш.шк. 1979 г. (стр. 164-171).

$z=a+bi$ комплекс сонни текисликдаги декарт координаталари системасида абсциссаси a , ординатаси b бўлган $M(a; b)$ нукта билан тасвирлаш қабул қилинган. У ҳолда a ҳақиқий сон абсцисса ўқида ётувчи $A(a; 0)$, b мавҳум сон ордината ўқида ётувчи $B(0; b)$ нукталар билан тасвирланади (1-чизма), $0=0+0i$ сонга мос келувчи нукта координата боши бўлади.



1-чизма.

Бундай тасвирлашда абсцисса ўқи-ҳақиқий ўқ, ордината ўқи эса мавҳум ўқ деб юритилади. $z=a+bi$ комплекс сонни боши координата бошида ва учи $M(a; b)$ нуктада ётувчи вектор билан ҳам тасвирлаш мумкин. Комплекс сонлар тўплами S билан текисликдаги барча нукталар тўплами орасида биектив акслантириш мавжуд.

Масалан, $z_1=2-3i$, $z_2=-3$, $z_3=5i$ сонлар мос равишда текисликдаги $M_1(2; -3)$, $M_2(-3; 0)$, $M_3(0; 5)$ нукталар билан тасвирланади.

Таъриф. $z=a+bi$ комплекс соннинг геометрик тасвири деб, координаталари a ва b бўлган текисликнинг нуктасига айтилади.

$z=a+bi$ комплекс соннинг геометрик тасвирини билдирувчи векторнинг узунлиги $|z|$ комплекс соннинг модули дейилади ва у

$r=|z|=|a+bi|$ кўринишда белгиланади. $r=|z|$ ни Пифагор теоремаси бўйича 1-чизмадаги МОА тўғри бурчакли учбурчакдан топамиз. Бунда $r=\sqrt{a^2+b^2}$ бўлади. Ох ўқнинг мусбат йўналиши билан ОМ вектор орасидаги гткир бурчакни φ деб белгилайлик. У ҳолда МОА тўғри бурчакли учбурчакдан $a=r\cos\varphi$, $b=r\sin\varphi$ ларни топамиз. Буларни $z=a+bi$ га қўйиб

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi) \quad (1)$$

ни ҳосил қиламиз. (1) га комплекс соннинг тригонометрик шакли дейилади (бунда $r\geq 0$, лекин исталган (манфий, ноль, мусбат) ҳақиқий қийматларни қабул қила олади). (1) да φ бурчак z комплекс соннинг аргументи деб аталади ва у $\operatorname{Arg} z=\varphi$ каби ёзилади. φ

бурчак $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$ формуладан топилади, лекин ҳар доим ҳам φ бурчакни бу формуладан топиб бўлавермайди (Масалан, $a=0$ бўлганда). Бундай ҳолда φ ни топиш учун z нинг геометрик тасвири ҳам эътиборга олинади.

(1) ни умумий шаклда $z=r(\cos(\varphi+2k\pi)+i\sin(\varphi+2k\pi))$ ($\forall k\in\mathbb{Z}$) деб ёзилади.

Масалан, $z=1+3i$ алгебраик шаклдаги комплекс сонни тригонометрик шаклга келтирайлик. Бунинг учун r ва φ ларни топиб уларни (1) га қўямиз. Бунда $r=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{4}=2$, яъни $r=2$, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{3}{1}$, яъни $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3}$ дан $\varphi=\frac{\pi}{3}$ бўлади.

Демак, $z=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$ бўлар экан.

Энди тригонометрик шаклдаги комплекс сонлар устида кўпайтириш ва бўлиш амалларини кўриб ўтаемиз.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 \cdot r_2 ((\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2)), \\ z_1 z_2 &= r_1 r_2 ((\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned} \quad (2)$$

га эга бўламиз.

Демак, тригонометрик шаклдаги иккита комплекс соннинг кўпайтмаси модули кўпайтувчилар моддуларининг кўпайтмасига, аргументи эса кўпайтувчилар аргументларининг йиғиндисига тенг бўлган тригонометрик шаклдаги комплекс сон бўлади.

Масалан, $z_1=2(\cos 23^\circ + i\sin 23^\circ)$, $z_2=3(\cos 22^\circ + i\sin 22^\circ)$ бўлса, у ҳолда $z_1 z_2=6(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$ бўлади.

Исталган $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ комплекс сонни $z_2=(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_2)\neq 0$ комплекс сонга бўлиш қуйидагича бажарилади:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos\varphi_1 - \varphi_2 + i \sin\varphi_1 - \varphi_2) \quad (3)$$

Тригонометрик шаклдаги иккита комплексларнинг бўлинмаси тригонометрик шаклдаги комплекс сон бўлиб, бўлинманинг модули бўлинувчи ва бўлувчи моддуларнинг бўлинмасига, аргумент эса бўлинувчи ва бўлувчи аргументларнинг айирмасига тенг бўлади.

Масалан, $z_1=4(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$, $z_2=2(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)$ бўлса, у ҳолда $\frac{z_1}{z_2} = 2(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$ бўлади.

Текшириш саволлари.

1. Комплекс соннинг геометрик тасвири деб нимага айтилади?

2. Комплекс сонлар тўплами билан тикисликдаги нуқталар тўплами орасидаги боғланишни тушунтириб беринг?

3. Комплекс соннинг тригонометрик шаклини келтириб чиқаринг?

4. Тригонометрик шаклдаги иккита комплекс сонларнинг кўпайтмасини қандай бўлади?

5. Тригонометрик шаклдаги иккита комплекс сонларнинг бўлинмаси қандай бўлади?

Таянч тушунчалар

1. Комплекс сон ва унинг алгебраик, жуфтлик шакллари.

2. Текисликдаги декарт координаталар системаси.

3. Текисликдаги нуқта.

4. Вектор.

5. Комплекс соннинг модули.

6. Бурчак.

7. Тригонометрик функциялар.

8. Икки бурчак йиғиндиси ва айирмаси косинуси.

18-маъруза

Муавр формуласи. Комплекс сондан илдиз чиқариш (2 соат)

Режа:

1. Муавр формуласи.

2. Комплекс сондан n - даражали илдиз чиқариш.

3. Комплекс сондан квадрат илдиз чиқариш.

Адабиёт

1. Назаров Р.Н., Тошпўлатов Б.Т., Дўсумбетов А.Д. Алгебра ва сонлар назарияси. I қисм. Тошкент: Ёқитувчи 1993 й. (102-103, 108-112 бетлар).

2. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. Москва: Высш. шк. 1979 г. (стр.169-173).

Олдинги маърузада биз тригонометрик шаклда берилган иккита комплекс сонларнинг кўпайтмаси билан танишган эдик. Энди бу тушунчани умумлаштирайлик. Ҳақиқатан, n та

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1),$$

$$z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$

.....

$$z_n = r_n(\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n)$$

комплекс сонлар кўпайтмасини қуйидагича ҳосил қиламиз:

$$z_1 z_2 \dots z_n = r_1 r_2 \dots r_n (\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)) \quad (1)$$

(1) даги $z_i = r_i (i = 1, n)$, ва $z_1 z_2 \dots z_n = r_1 r_2 \dots r_n$ тенгликлардан

$$z_1 z_2 \dots z_n = z_1 z_2 \dots z_n \quad (2)$$

тенглик ҳосил бўлади. Агар (1) да $r_1 = r_2 = \dots = r_n = r$ ва $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_n = \varphi$ бўлса, у ҳолда $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$ бўлиб, (1) ва (2) лардан

$$z^n = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad (3)$$

формула келиб чиқади. (3) формулани Муавр формуласи дейилади. (3) дан кўринадики, $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ кўринишдаги комплекс сонни n -даражага кўтариш учун унинг модулини n даражага кўтариб, аргументини эса n марта орттириш лозимлиги.

Мисол.

$$\begin{aligned} 4(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ) &= 4^3 (\cos 3 \cdot 15^\circ + i \sin 3 \cdot 15^\circ) = 64(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) = \\ &= 64 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 32\sqrt{2} + i 32\sqrt{2} = 32\sqrt{2} (1 + i) \end{aligned}$$

Агар $n=4k+r$ бўлса, у ҳолда $i^n = i^r$ бўлади.

Таъриф. $a+bi$ комплекс соннинг n -даражаси илдизи деб, ушбу

$$(x+yi)^n = a+bi \quad (4)$$

тенгликни қаноатлантирувчи $x+yi$ сонга айтилади ва уни

$$x+yi = \sqrt[n]{a+bi} \quad (5)$$

кўринишда ёзилади. Айтайлик,

$$a+bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad x+yi = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad (6)$$

бўлсин. У ҳолда (4)ни (6)га кўра

$$(\rho(\cos \alpha + i \sin \alpha))^n = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (7)$$

кўринишда ёза оламиз. Муавр формуласига асосан (7) дан

$$\rho^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (8)$$

ни ҳосил қиламиз. Тригонометрик шаклдаги комплекс сонларнинг тенглигидан $\rho^n = r$,

$\rho = \sqrt[n]{r}$ ва $n\alpha - \varphi = 2k\pi$ ($\forall k \in \mathbb{Z}$), $\alpha = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$ келиб чиқади. ρ ва α ларнинг бу

қийматларини (6)га қўйиб

$$x+yi = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha) = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (9)$$

ёки (5) ва (9) га асосан

$$\sqrt[n]{a+bi} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (10)$$

формулани ҳосил қиламиз. (10) формулада k ихтиёрий бутун сон, лекин k учун $k=0,1,2,\dots,(n-1)$ қийматлар олинади. $\sqrt[n]{r}$ арифметик илдиз.

(10) формулада $r=1$, $\varphi=0$ бўлса, $a+bi=1$ бўлиб, у

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad k = 0, n-1 \quad (11)$$

кўринишни олади.

$n=3$ учун (11) формулани қарайлик.

$$\sqrt[3]{1} = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3} \quad k = 0, 1, 2.$$

1) $k=0$, $\varepsilon_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1 + i0 = 1$, $\varepsilon_0 = 1$;

$$2) k=1, \varepsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon_1 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$3) k=2, \varepsilon_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2};$$

Энди алгебраик шаклдаги комплекс сондан чиқарилган квадрат илдизни алгебраик шаклда излаймиз.

Таъриф. $a+bi$ комплекс сондан чиқарилган квадрат илдиз деб, ушбу

$$(x+yi)^2 = a+bi \quad (13)$$

тенгликни қаноатлантирувчи $x+yi$ комплекс сонга айтилади ва уни $\sqrt{a+bi}$ кўринишда белгиланади.

Таърифга кўра.

$$x+yi = \sqrt{a+bi} \quad (14)$$

бўлди.

(13) дан $x^2+2xyi+y^2i^2=x^2-y^2+2xyi=a+bi$ тенгликни ёза оламиз. Алгебраик шаклдаги комплекс сонлар тенглигидан:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = b. \end{cases} \quad (15)$$

ни ёза оламиз, (15) даги тенгликларнинг ҳар бирини квадратга кўтариб, кейин қўшайлик ва маълум амалларни бажарайлик:

$$\begin{cases} x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = a^2, \\ 4x^2y^2 = b^2, \end{cases}$$

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = a^2 + b^2,$$

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2,$$

$$x^2 + y^2 = \pm \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$x^2 + y^2$ мусбат сон, яъни $x^2 + y^2 > 0$ бўлгани сабабли $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$. бўлади.

Демак,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}, \\ x^2 - y^2 = a. \end{cases} \quad (16)$$

системани ҳосил қиламиз.

$$(16) \text{ системадаги тенгликларни қўшиб } 2x^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \text{ ни топамиз.}$$

$$(16) \text{ системадаги тенгликларни айириб ва маълум амалларни бажариб}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \text{ ни топамиз.}$$

$$\sqrt{a+bi} = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \pm i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$$

кўринишда ёзамиз. (15) дан кўринадики $b > 0$ бўлса, у ҳолда $\begin{pmatrix} x > 0, \\ y > 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} x < 0, \\ y < 0 \end{pmatrix}$

эканлиги. Демак, $b > 0$ бўлганда

$$\sqrt{a+bi} = \pm \left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right) \quad (17)$$

бўлади. Агар $b < 0$ бўлса, у ҳолда (15) дан кўринадики $\begin{pmatrix} x < 0, \\ y > 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} x > 0, \\ y < 0 \end{pmatrix}$ эканлиги.

Демак, $b < 0$ бўлганда

$$\sqrt{a + bi} = \pm \left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} - i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right) \quad (18)$$

бўлади.

Мисол. $\sqrt{-7 + 24i}$ ни ҳисобланг.

24 мусбат сон бўлгани учун (17) формуладан фойдаланамиз.

$$\begin{aligned} \sqrt{-7 + 24i} &= \pm \left(\sqrt{\frac{-7 + \sqrt{49 + 576}}{2}} + i \sqrt{\frac{7 + \sqrt{49 + 576}}{2}} \right) = \\ &= \pm \left(\sqrt{\frac{-7 + \sqrt{625}}{2}} + i \sqrt{\frac{7 + \sqrt{625}}{2}} \right) = \pm \left(\sqrt{\frac{-7 + 25}{2}} + i \sqrt{\frac{7 + 25}{2}} \right) = \\ &= \pm (\sqrt{9} + i\sqrt{16}) = \pm (3 + 4i), \text{ яъни } \sqrt{-7 + 24i} = \pm (3 + 4i) \end{aligned}$$

бўлади.

Текшириш саволлари

1. Муавр формуласини ёзиб беринг?
2. Комплекс сондан n-даражали илдиз чиқариш деб нимага айтилади?
3. Комплекс сондан n-даражали илдиз чиқариш формуласини ёзиб беринг?
4. Комплекс сондан квадрат илдиз чиқариш деб нимага айтилади?
5. Комплекс сондан квадрат илдиз чиқариш формуласини ёзиб беринг?

Таянч тушунчалар

1. Комплекс сон ва улар устида амаллар.
2. Комплекс соннинг тригонометрик ва алгебраик шакллари.
3. Сондан илдиз чиқариш.
4. Барча бутун сонлар тўплами.