

O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O`RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
ANDIJON DAVLAT UNIVERSITETI

Qo`lyozma huquqida

UDK 519.2

Axunova Gulnozaxon

Funksional tenglamalarni yechish

5A130101-Matematika (Matematik analiz)

Magistr akademik darajasini olish uchun
yozilgan dissertatsiya

Ilmiy rahbar:

f.m.f.d. G`. M. Mo`minov

Andijon -2014 yil

M u n d a r i j a

Kirish.....	3
-------------	---

I Bob. Klassik funksional tenglamalar va funksional tenglamalarni yechish usullari

1.1-§. Funksional tenglamalar haqida tushuncha.....	6
1.2-§. Elementar funksional tenglamalarni yechish.....	7
1.3-§. Klassik funksional tenglamalar.	9
I Bob bo'yicha xulosa.....	18

II Bob. Trigonometrik funksiyalarni funksional tenglamalar yordamida aniqlash

2.1-§. Dastlabki mulohazalar va π sonini aniqlash.....	20
2.2-§. Funksional tenglamalarning dastlabli sistemasi.....	25
2.3-§. $S(x)$ va $C(x)$ funksiyalarning davriyligi hamda ularning asosiy xossalari..	27
2.4-§. Asosiy tengsizliklar va asosiy natijalar.	33
2.5-§. Funksional tenglamalar yordamida qator koeffitsiyentlarini aniqlash.....	44
II Bob bo'yicha xulosa.....	47

III Bob. Funksional tenglamalarni yechish

3.1-§. Funksional tenglamalarni yechishga oid misollar.	48
3.2-§. Turli xil turnirlar va matematik olimpiadalarda talabalarga yechishga tavsiya etilgan misollardan namunalar.....	61
III Bob bo'yicha xulosa.....	67
Umumiy xulosa.....	68
Adabiyotlar.....	69

Kirish

Vatanimiz mustaqillikka erishgandan so'ng shahdam odimlar bilan olg'a bormoqda, ilm-fan va texnikaning zamonaviy sohalari rivojlanmoqda va bu rivojlanish ilm ahli oldiga ko'plab zamonaviy muammolarni hal etishni ko'ndalang qilib qo'ymoqda. Ushbu fikrimizni prezidentimiz Islom Abduganiyevich Karimovning «O'zbekiston XXI asr bo'sag'asida: havfsizlikka tahdid, barqarorlik shartlari va taraqqiyot kafolatlari» nomli kitoblarida keltirilgan quyidagi so'zlardan ham bilib olsak bo'ladi:

«Respublikamizda quyidagi yo'nalishlar bo'yicha jahon darajasidagi ilmiy maktablar yaratilgan bo'lib, ularda tadqiqotlar muvaffaqiyatli olib borilmoqda. Jumladan, matematika, ehtimollar nazariyasi, tabiiy va ijtimoiy jarayonlarni matematik modellash, informatika va hisoblash texnikasi sohasidagi tadqiqotlar.

Matematika fanining ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, differensial tenglamalar va matematik fizika, funksional tahlil sohasidagi yutuqlari respublikadan ancha uzoqda ham mashxur».

Kelajagi buyuk davlat-mustaqil O'zbekistonning milliy mafkurasi bo'lgan ma'naviyatni shakllantirishda, qaror toptirishda, halq ta'limi tizimining rivojlanishi eng asosiy ustivor vazifalardan biridir. Respublikamizda “Kadrlar tayorlash milliy dasturi” va “Ta'lim to'g'risida”gi qonunlari va ishlab chiqilgan. Yuqorida sanab o'tilgan qonunlardan kelib chiqadigan vazifalari bosqichma-bosqich amalga oshirib borilmoqda.

Hozirgi zamon fan-texnika taraqqiyotining rivojlanishi, yosh avlodga ta'lim-tarbiya berishda o'qituvchilar oldiga yangi talablar qo'ymoqda. Ayniqsa matematika fani o'sib kelayotgan yosh avlodni kamol toptirishda o'quv fani sifatida keng imkoniyatlarga ega. Bu fan o'quvchilar tafakkurini rivojlantirib, ularni maqsadga yo'nalgan mantiqiy fikrlash malakalarini shakllantiradi. Shu sababli o'quvchi yoshlarni matematika faniga bo'lgan qiziqishlarini kamol toptirish har bir o'qituvchining eng yuksak vazifalaridan biri bo'lmog'i kerak.

I. A. Karimov «O'zbekiston XXI asr bo'sag'asida: havfsizlikka tahdid, barqarorlik shartlari va taraqqiyot kafolatlari»

O'tgan asrda va hozirda ayniqsa xorij adabiyotlarida, turli xil matematik turnirlar va olimpiadalarda qatnashchilar uchun yechishga tavsiya etilayotgan misol va masalalar tarkibida funksional tenglamalar uchramoqda. Ammo bizning adabiyotlarda bu mavzuga kam e'tibor qaratilganligini hisobga olib, mazkur dissertatsiya o'rta maxsus ta'limi bilim yurtlarida va oiliy ta'limda taxsil olayotgan talabalar ommasini uchun muhim ahamiyatga ega bo'lgan funksional tenglamalarga bag'ishlanganligi tanlangan mavzuning dolzarbligini anglatadi.

Magistrlik dissertatsiyasining tadqiqot ob'ekti sifatida mavzu doirasida e'lon qilingan xorig adabiyotlari, mavzuga oid risolalar hamda turli xil matematik turnir va olimpiadalardan o'rin olgan, ammo talaba va o'qituvchilar ommasiga o'ta yaxshi ma'lum bo'lmagan misol va masalalar sistemasidir.

Asosiy maqsad funksional tenglamalarni klassifikatsiyalash, elementar ko'rinishdagi misollarni yechilish usullarini namoyon qilish, klassik funksional tenglamalar va ularning yechilish usullarini, trigonometrik funksiyalarni funksional tenglamalar bilan kiritish usulini, agar darajali qatorlar funksional tenglama ko'rinishidagi rekkurent munosabatlar bilan berilsa, darajali qator koeffitsiyentlarini funksional tenglamalarni yechish yordamida aniqlash masalalari va nihoyat funksional tenglamalarga oid ko'plab misollarni yechishdan namunalar keltirish ko'zda tutilgan asosiy vazifalardir.

Funksional tenglamalarga bag'ishlangan alohida adabiyotlar juda ham kam [6-11] bo'lib, bu tenglamalarga oid misollar olimpiada masalalarini yechishga doir adabiyotlarda uchraydi. Bu adabiyotlar orasidan ayniqsa ingliz tilida chop etilgan.

Artur Engelning "Problem-Solving Strategies". 1998 Springer-Verlag New York kitobi qisqa bo'lsada dastlabki tushuncha va ma'lumotlarni olishga qulay. Keyingi adabiyot uchun o'quvchilarga yaxshi ma'lum bo'lgan [2] adabiyotdir. Shu bilan birga akademik litsey o'quvchilariga mo'ljallangan o'zbek tilidagi [3] da bir qator elementar ko'rinishdagi misollar keltirilgan. Funksional tenglamalarni yechishga [3,5,9,13] maqolalarda ba'zi ko'rsatmalar berilgan. Funksional

tenglamalarga bag'ishlan eng so'nggi ingliz tilidagi [11,12] maqolalarni ham e'tirof etamiz.

Dissertatsiya kirish va uchta bobdan tadhkil topgan bo'lib, birinchi bobda klassik funksional tenglamalar, funksional tenglamalarni yechish usullarini o'zida namoyon etgan ko'plab misollar sistemasini o'z ichiga olgan. Ikkinchi bobda trigonometrik funksiyalarni funksional tenglamalar vositasida aniqlash bilan birga qatorlar funksional tenglamani o'z ichiga olgan rekkurent munosabatlar bilan berilgan holda qator koeffisiyentlarini toppish kabi masalalari taxlil qilingan.

Shuningdek funksional tenglamalarni yechish va turli xil turnir va olimpiadalardan o'rin olgan misollardan namunalar uchinchi bobdan o'rin olgan.

I Bob. KLASSIK FUNKSIONAL TENGLAMALAR VA FUNKSIONAL TENGLAMALARNI YECHISH USULLARI

1.1-§. Funksional tenglamalar haqida tushuncha

Noma'lum funksiyaga nisbatan qaralayotgan tenglama *funksional tenglama* deyiladi. Masalan bir o'zgaruvchili funksiyaning juftlik, toqlik, qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lishi xossalarini ifodalovchi funksional tenglamalarni mos ravishda

$$f(x) = f(-x), \quad f(x) = -f(x), \quad f \circ f(x) = x$$

tenglamalardan iborat. Shu kabi

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right); \quad f(x) = \cos \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right), \quad f(0) = 1, \quad f - \text{uzluksiz funksiya}$$

tenglamalar bir o'zgaruvchili funksional tenglamalarga misol bo'ladi. Ikki o'zgaruvchili

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y); & f(x+y) &= f(x)f(y); \\ f(xy) &= f(x) + f(y); & f(xy) &= f(x)f(y); \end{aligned}$$

funksional tenglamalar *Koshi tenglamalari* deyiladi. Shu bilan birga ikki o'zgaruvchili funksional tenglamalarga

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2} - \text{Iyensen tenglamasini va}$$

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) - \text{D'alamber tenglamasini}$$

misol keltirishimiz mumkin.

Misol sifatida $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ trigonometrik funksiyalarning qo'shish formulalari asosida tuzilgan ikki noma'lumli ikki o'zgaruvchili

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x)g(y) + g(x)f(y); \\ f(x-y) &= f(x)g(y) - g(x)f(y); \\ g(x+y) &= g(x)g(y) - f(x)f(y); \\ g(x-y) &= g(x)g(y) + f(x)f(y) \end{aligned}$$

funksional tenglamalarni yozishimiz mumkin.

Shuningdek yana bir misol sifatida $f(x)=tgx$ trigonometrik funksiyalarning qo'shish formulalari asosida

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)\cdot f(y)} \quad f(x-y)=\frac{f(x)-f(y)}{1+f(x)\cdot f(y)}$$

funksional tenglamalarni yozishimiz mumkin.

Odatda funksional tenglamalar ko'plab yechimlarga ega bo'ladi, ammo bu tenglamalarni bevosita yechish qiyinchilik tug'diradi. Ammo izlanayotgan funksiyaning ba'zi xarakteristik xossalari: uzluksizligi, davriyligi, chegaralanganligi kabi xossalari berilsa, funksional tenglamani yechish osonlashadi. Ko'plab matematik turnir va matematik olimpiadalarda funksional tenglamalarni yechishga oid misollar berilmoqda. Aytilganlarni e'tiborga olgan holda ba'zi klassik funksional tenglamalarni yechilishini ko'rib o'tamiz.

1.2-§. Elementar funksional tenglamalarni yechish

Akademik litseylar uchun sinov darsligi sifatida nashr etilgan A.A.Abduxmedov, H.A.Nasimov, U.M.Nosirov, J.H.Husanov "Algebra va matematik analiz asoslari" I-qism, Toshkent, O'qituvchi nashriyoti, 2001 yil kitobida ham funksional tenglamalarga oid bir qator misollar yechishga tavsiya etilgan, ammo yechimlari keltirilmagan. Biz bu misollarni yechimlari bilan keltiramiz.

1-misol (7.97). Agar $f\left(\frac{3x-1}{x+2}\right)=\frac{x+1}{x-1}$ bo'lsa $f(x)$ funksiyaning toping.

Yechilishi. Berilgan tenglamani yechish uchun $\frac{3x-1}{x+2}=t$ almashtirish

kiritamiz. Natijada $x=\frac{2t+1}{3-t}$ bo'lib, bu holda berilgan tenglama

$$f(t)=\frac{t+4}{5t-2}$$

ko'rinishga keladi. Demak, $f(x)=\frac{x+4}{5x-2}$.

2-misol (7.98). Agar $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$ bo'lsa $f(x)$ funksiyani toping.

Yechilishi. Bu tenglamani yechish uchun $x \rightarrow \frac{1}{x}$ almashtirish bajarilsa berilgan tenglama

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{1}{x}$$

ko'rinishni oladi. Hosil bo'lgan tenglamani -2 ga ko'paytirib berilgan tenglamaga qo'shilsa

$$3f(x) = \frac{2}{x} - x$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan $f(x) = \frac{2}{3x} - \frac{x}{3}$ natijani hosil qilamiz.

3-misol (7.99). Agar $(x-1)f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x-1}$ bo'lsa $f(x)$ funksiyani toping.

Yechilishi. Bu tenglamani yechish uchun ham $x \rightarrow \frac{1}{x}$ almashtirish bajarilsa berilgan tenglama

$$\left(\frac{1}{x} - 1\right)f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{x}{1-x}$$

ko'rinishni oladi. Hosil bo'lgan tenglamani berilgan tenglama bilan birgalikda yechib

$$f(x) = \frac{(x^2 - x + 1)^2}{1-x}$$

funksiyani topamiz.

4-misol (7.100). Agar $f(x) + xf\left(\frac{x}{2x-1}\right) = 2$ bo'lsa $f(x)$ funksiyani toping.

Yechilishi. Bu tenglamani yechish uchun $x \rightarrow \frac{x}{2x-1}$ almashtirish bajarilsa berilgan tenglama

$$f\left(\frac{x}{2x-1}\right) + \frac{x}{2x-1} f(x) = 2$$

ko'rinishni oladi. Hosil bo'lgan tenglamani $-x$ ga ko'paytirib berilgan tenglamaga qo'shilsa

$$f(x) - \frac{x^2}{2x-1} f(x) = 2 - 2x$$

tenglikni va bundan esa izlangan $f(x) = 4 + \frac{2}{x-1}$ funksiyani topamiz.

5-misol. Agar $af(x-1) + bf(1-x) = cx(1+x)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiyani toping, bu yerda a, b va c haqiqiy sonlar bo'lib, $a \neq b$.

Yechilishi. Bu tenglamani yechish uchun $t \rightarrow x-1$ almashtirish bajarilsa berilgan tenglama

$$af(t) + bf(-t) = ct(t+1)$$

ko'rinishga keladi. Endi $t \rightarrow -t$ belgilash bajarilsa bu tenglama

$$af(-t) + bf(t) = -ct(1-t)$$

ko'rinishni oladi. Oxirgi ikki tenglamalardan birinchisini a ga ikkinchisini $-b$ ga ko'paytirib qo'shilsa

$$(a^2 - b^2)f(t) = ac(t^2 + t) + bc(t - t^2)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan izlangan

$$f(x) = \frac{ac(x^2 + x) - bc(x^2 - x)}{a^2 - b^2}$$

funksiyani topamiz.

6-misol. Barcha $x, y \in R$ lar uchun

$$f(x+y) = x + yf(x) + (1-x)y \quad (1)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi $f: R \rightarrow R$ funksiyani toping.

Yechilishi. $f(x)$ funksiya barcha $x, y \in R$ lar uchun (1) tenglamani qanoatlantirsin. Agar (1) tenglamada $y = 0$ bo'lsa, u holda $f(x) = x$ bo'lib, bu funksiya berilgan tenglamani qanoatlantiradi, chunki

$$x + yf(x) + (1-x)y = x + yx + y - xy = x + y = f(x+y)$$

Javob: $f(x) = x$.

1.3-§. Klassik funksional tenglamalarni yechish

1-misol. Ushbu

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (1)$$

tenglamani yeching.

Yechilishi. Agar (1) tenglamada $y = 0$ bo'lsa, u holda

$$f(0) = 0 \quad (2)$$

munosabat kelib chiqadi.

Agar (1) tenglamada $y = -x$ bo'lsa, u holda (2) munosabat e'tiborga olinsa,

$$\begin{aligned} f(0) &= f(x) + f(-x) \Rightarrow f(-x) = -f(x), \\ f(-x) &= f(x) \end{aligned} \quad (3)$$

Bundan izlanayotgan funksiya toq funksiya ekanligi ravshan. Endi $x > 0$ bo'lganda $y = x$ bo'lsa, (1) tenglikdan $f(2x) = 2f(x)$ va induktiv mulohazalar bilan

$$f(nx) = nf(x), \quad n \in \mathbb{N} \quad (4)$$

tenglikni hosil qilishimiz mumkin.

Agar $x = \frac{m}{n}$ ratsional son bo'lsa, bundan $n \cdot x = m \cdot 1$ ekanligi e'tiborga olinsa (4) munosabatlardan $f(n \cdot x) = f(m \cdot 1)$ tenglikdan

$$f(x) = \frac{m}{n} f(1) \quad (5)$$

tenglik kelib chiqadi. Agar $f(1) = c$ deb belgilasak, u holda (2), (3) va (5) tengliklarga asoslanib, x – ratsional soni uchun $f(x) = cx$ xulosaga kelimiz.

Endi izlanayotgan funksiya xususiyatlariga qarab quyidagi taxlilni amalga oshiramiz.

a) Aytaylik f – uzluksiz funksiya bo'lsin. Agar x – irratsional son bo'lsa, u holda $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ tenglikni qanoatlantiruvchi (x_n) ratsional sonlar ketma ketligi uchun $f(x) = \lim_{x_n \rightarrow x} f(x_n) = \lim_{x_n \rightarrow x} cx_n = cx$ bo'lgani uchun barcha haqiqiy x lar uchun $f(x) = cx$.

b) Aytaylik f – monoton o'suvchi funksiya bo'lsin. Agar x – irratsional son bo'lsa, u holda $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$ $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = x$ tengliklarni qanoatlantiruvchi o'suvchi (r_n) va kamayuvchi (R_n) ratsional sonlar ketma ketliklari uchun

$$cr_n = f(r_n) \leq f(x) \leq f(R_n) = cR_n$$

tengsizliklarda $n \rightarrow \infty$ da limitga o'tilsa, barcha haqiqiy x lar uchun $f(x) = cx$.

c) Aytaylik f – chegaralangan funksiya bo'lsin, ya'ni

$$|f(x)| \leq M, \quad x \in [a, b]$$

bo'lsin. Biz f funksiyani $[0, b-a]$ kesmada ham chegaralanganligini ko'rsatamiz. Agar $x \in [0, b-a]$ bo'lsa, u holda $x+a \in [a, b]$ bo'lgani uchun (1)ga ko'ra $f(x) = f(x+a) - f(a)$ tenglikdan $|f(x)| \leq 2M, \quad x \in [0, b-a]$ ekanligini ko'ramiz. Agar $b-a=d$ belgilash kiritilsa, u holda f funksiya $[0, d]$ kesmada chegaralangan bo'ladi.

Endi

$$c = \frac{f(d)}{d}, \quad g(x) = f(x) - cx$$

belgilashlardan foydalansak, $g(x+y) = g(x) + g(y)$ bo'lgani uchun

$$g(d) = f(d) - cd = cd - cd = 0 \quad \text{va} \quad g(x+d) = g(x) + g(d) = g(x)$$

tengliklardan $g(x)$ davri d ga teng bo'lgan davriy funksiya bo'ladi. Ammo davriy funksiya butun son to'g'ri chizig'ida chegaralangan. Shuning uchun ixtiyoriy x_0 nuqta uchun $g(nx_0) = ng(x_0)$ munosabatga ko'ra yetarlicha katta n lar uchun $|ng(x_0)|$ chegaralangan bo'lgani uchun ziddiyat kelib chiqadi. Shuning uchun $g(x) = 0$ bo'lishi kerak. Bundan esa bu holda ham $f(x) = cx$.

Javob: $f(x) = cx$.

2-misol. Ushbu

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \quad (6)$$

tenglamani yeching.

Yechilishi. 1-usul. Agar $f(a) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi a soni mavjud bo'lsa, u holda $f(x+a) = f(x) \cdot f(a) = 0$ tenglikdan barcha x lar uchun berilgan tenglama aynan nolga teng yechimga ega bo'lar edi. Shuning uchun aynan nolga teng bo'lmagan yechimlar uchun $f(x) \neq 0$.

Agar $x = y = \frac{t}{2}$ bo'lsa, u holda (1) dan $f(t) = f^2\left(\frac{t}{2}\right) > 0$ bo'lgani uchun berilgan tenglamaning yechimi deyarli barcha x lar uchun musbat bo'ladi.

Agar (6) da $y = 0$ bo'lsa, u holda $f(0) = 1$ ekanligini va $y = x$ bo'lsa, u holda $f(2x) = f^2(x)$ bo'lgani uchun induktiv mulohazalarga binoan

$$f(nx) = f^n(x) \quad (7)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Agar $x = \frac{m}{n}$ ratsional son bo'lsa, bundan $n \cdot x = m \cdot 1$ ekanligi e'tiborga olinsa (7) munosabatdan va $f(n \cdot x) = f(m \cdot 1)$ tenglikdan

$$f^n(x) = f^m(1) \Rightarrow f(x) = f^{\frac{m}{n}}(1).$$

Agar oxirgi tenglikda $a = f(1)$ belgilash kiritsak, u holda $f(x) = a^{\frac{m}{n}}$, ya'ni x — ratsional soni uchun $f(x) = a^x$ ekanligini ko'ramiz. $f(x) > 0$ bo'lganligi uchun (6) dan

$\ln \circ f(x+y) = \ln \circ f(x) + \ln \circ f(y)$ tenglikni va $g = \ln \circ f$ belgilash bilan $g(x+y) = g(x) + g(y)$ tenglamani yozamiz. 1-misolga ko'ra $g(x) = cx$ bu tenglamaning yechimi bo'lgani uchun $\ln f(x) = cx$ va nihoyat $f(x) = e^{cx}$ yechimni hosil qilamiz.

2-usul. $y = 0$ bo'lsa, $f(x) = f(x) \cdot f(0) \Rightarrow f(0) = 1$. $f(x + \Delta x) = f(x) \cdot f(\Delta x)$ tenglikning har ikkala tomonidan $f(x)$ ayirilsa,

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f(x)(f(\Delta x) - 1)$$

tenglik hosil bo'ladi. Tenglikning har ikki tomonini Δx ga bo'linsa,

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f(x) \cdot \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

tenglik kelib chiqadi. Oxirgi tenglikda $\Delta x \rightarrow 0$ da limitga o'tilsa

$$f'(x) = Cf(x)$$

differensial tenglama hosil bo'ladi, bu yerda $C = f'(0)$. Bu tenglamani integrallash

$$\ln|f(x)| = \ln C_1 + Cx \text{ yoki } f(x) = C_1 e^{Cx}$$

funksiyani beradi. $f(0) = 1$ bo'lgani uchun $f(x) = e^{Cx}$ funksiyani hosil qilamiz.

$$\textbf{Javob: } f(x) = e^{Cx}$$

$$\textbf{3-misol.} \quad f(xy) = f(x) + f(y) \quad (9)$$

tenglamani yeching.

Yechilishi. Barcha x lar uchun $f(x)=0$ berilgan tenglamaning yechimi ekanligi ravshan. Xuddi shuningdek f funksiyani aniqlanish sohasi $D(f)$ ga tegishli bo'lgan $x=0$ uchun ham yechimlardan biri $f(x)=0$ dir. Haqiqatdan ham, $0 \in D(f)$ bo'lsa, (9) tenglamada $y=0$ deb olinsa $f(0) = f(x) + f(0)$ bo'lib, bundan $f(x)=0$.

Endi $1 \in D(f)$ bo'lsa, (1) dan $x=y=1$ bo'lganda $f(1) = 2f(1)$ va bundan

$$f(1) = 0. \quad (10)$$

Agar $-1 \in D(f)$ bo'lsa, u holda (9) dan $x=y=-1$ bo'lganda $f(1) = 2f(-1)$ bo'lib, (10) ga ko'ra $f(-1) = 0$. Agar (9) da $y=-1$ deb olinsa, u holda

$f(-x) = f(x) + f(-1)$, yani $f(-x) = f(x)$ bo'lib, izlanayotgan funksiya juft funksiya bo'lishi lozim.

Endi $f(x)$ – differensiallanuvchi funksiya bo'lsin. Bu holda y ni maxkamlab (9) ni x bo'yicha differensiallaymiz. Natijada $y \cdot f'(xy) = f'(x)$ tenglik hosil bo'ladi. Bu tenglikda $x=1$ bo'lsa, $y \cdot f'(y) = f'(1)$ tenglikni, o'zgaruvchilarni almashtirgandan so'ng $f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$ differensial tenglamani hosil qilamiz. Bundan $x > 0$ bo'lganda hosil bo'lgan tenglamani integrallab,

$$f(x) = f(1) + \int_1^x \frac{f'(1)}{x} dx = f'(1) \ln x$$

ni topamiz. Agar f funksiya $x < 0$ bo'lganda ham aniqlangan bo'lsa, izlanayotgan funksiya $f(x) = f'(1) \ln|x|$ bo'ladi.

$$\textbf{Javob: } f(x) = f'(1) \ln|x|$$

2-usul. Agar berilgan (1) tenglamada $x = e^u, y = e^v, f(e^u) = g(u)$ belgilashlar kiritilsa, u holda 1-misolda taxlil qilingan

$$g(u+v) = g(u) + g(v)$$

ko'rinishdagi tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamaning yechimi $g(u) = cu$ bo'lgani uchun kiritilgan belgilashimizga ko'ra (1) tenglamaning yechimi $f(x) = g(\ln x) = c \ln x$ bo'ladi.

Javob: $f(x) = c \ln x$

4-misol. Ushbu

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad (11)$$

tenglamani yeching.

Yechilishi. Agar berilgan (11) tenglamada $x = e^u, y = e^v, f(e^u) = g(u)$ belgilashlar kiritilsa, u holda 2-misolda taxlil qilingan

$$g(u+v) = g(u)g(v)$$

ko'rinishdagi tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamaning yechimi $g(u) = e^{cu} = (e^u)^c = x^c$ bo'lgani uchun $f(x) = x^c$. Xususiylashtirilgan holda misolning trivial yechimi $f(x) = 0$ ham bu tenglikda saqlanadi.

Agar (1) tenglamada $x = y = t$ va $x = y = -t$ bo'lganda

$$f^2(t) = f(t^2) = f(-t)f(-t) \quad \text{va} \quad f(-t) = \begin{cases} f(t) = t^c & (\text{ypki } 0) \\ -f(t) = -t^c \end{cases} \quad \text{bo'lgani uchun berilgan}$$

tenglamaning uzluksiz umumiy yechimlari:

$$f(x) = |x|^c; f(x) = \text{sign} x \cdot |x|^c; f(x) = 0$$

funksiyalardan iborat.

5-misol. Ushbu

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2} \quad (12)$$

Iyensen tenglamasini yeching.

Yechilishi. Agar $f(0) = a$ bo'lsa, $y = 0$ bo'lganda (12) tenglama

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)+a}{2}$$

ko'rinishni olgani uchun

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} = f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x+y) + a}{2}$$

tenglamani, yoki

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - a$$

tenglamani hosil qilamiz. Endi $g(x) = f(x) - a$ belgilash kiritilsa, u holda 1-misolda ko'rilgan $g(x+y) = g(x) + g(y)$ tenglamaga kelamiz.

Bu tenglamaning yechimi $g(x) = cx$ bo'lgani uchun kiritilgan belgilashga ko'ra berilgan tenglamaning yechimi $f(x) = cx + a$ dan iborat bo'ladi.

$$\textbf{Javob: } f(x) = cx + f(0)$$

6-misol. Ushbu

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \quad (13)$$

Dalamber tenglamasini yeching.

Yechilishi. Biz bu tenglamaning uzluksiz yechimlarini tanlaymiz. Berilgan tenglama $f(x) = 0$ trivial yechimga ega ekaligi ayon.

Agar (13) tenglamada $y = 0$ bo'lsa, u holda $f(0) = 1$

Agar (13) tenglamada $x = 0$ bo'lsa, u holda

$$f(y) + f(-y) = 2f(y)f(0) \Rightarrow f(-y) = f(y).$$

Bundan izlanayotgan funksiya juft funksiya ekan

Agar $x = ny$ bo'lsa,

$$f[(n+1)y] = 2f(y)f(ny) - f[(n-1)y] \quad (14)$$

tenglik hosil bo'ladi. Bu tenglikda $y = x$ bo'lsa

$$f(2x) + f(0) = 2f^2[x]$$

tenglikka va bundan $t = 2x$ bo'lganda

$$2f^2\left(\frac{t}{2}\right) = 1 + f(t) \quad (15)$$

tenglikka o'tamiz. (14) va (15) munosabatlarni $\cos t$ va $\cosh t$ funksiyalar qanoatlantirishi ma'lum. f - uzluksiz bo'lib, $f(0) = 1$ ekanligidan yetarlicha kichik

$a > 0$ soni uchun $x \in [-a, a]$ bo'lsa $f(x) > 0$. shuning uchun $f(a) > 0$ quyidagi hollarni qaraymiz.

1° – hol. $0 < f(a) \leq 1$ bo'lsin. U holda $f(a) = \cos c$ tenglikni ta'minlaydigan va $0 \leq c < \frac{\pi}{2}$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi c soni mavjud. Bizning maqsadimiz ixtiyoriy $x = \frac{n}{2^m} a$ soni uchun

$$f(x) = \cos \frac{c}{a} x \quad (16)$$

tenglikni bajarilishini ko'rsatishdir.

$x = a$ bo'lsa, (16) tenglikning o'rinli ekanligi c ning aniqlanishidan kelib chiqadi. Shu bilan birga (15) tenglikda $x = \frac{a}{2}$ uchun

$$2f^2\left(\frac{a}{2}\right) = 1 + f(a) = 1 + \cos c = 2\cos^2 c$$

Bu tenglikka ko'ra $f\left(\frac{a}{2}\right) > 0, \cos \frac{c}{2} > 0$ tengsizliklar e'tiborga olinsa

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = \cos \frac{c}{2} \quad (17)$$

xulosaga kelimiz. Faraz qilaylik (16) tenglik $x = \frac{a}{2^m}$ uchun o'rinli bo'lsin. U holda (15) munosabatdan

$$2f^2\left(\frac{a}{2^{m+1}}\right) = 1 + f\left(\frac{a}{2^m}\right) = 1 + \cos \frac{c}{2^m} = 2\cos^2 \frac{c}{2^{m+1}},$$

yoki bundan har bir natural m soni uchun

$$f\left(\frac{a}{2^{m+1}}\right) = \cos \frac{c}{2^{m+1}}$$

Shuning uchun (14) tenglikda $n = 2$ bo'lganda

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{2^m} a\right) &= f\left(3 \cdot \frac{a}{2^m}\right) = 2f\left(\frac{a}{2^m}\right)f\left(\frac{a}{2^{m-1}}\right) - f\left(\frac{a}{2^m}\right) = \\ &= 2\cos \frac{c}{2^m} \cos \frac{c}{2^{m-1}} - \cos \frac{c}{2^m} = \cos \frac{3}{2^m} c \end{aligned}$$

(16) munosabat $x = \left[\frac{n}{2^m} \right] a$ uchun o'rinli va $x = \left[\frac{n}{2^m} \right] a$ bo'lganda (14)

munosabatda $x = \frac{n-1}{2^m} a$ va $x = \frac{n}{2^m} a$ sonlari uchun $f\left(\frac{n+1}{2^m} a\right) = \cos \frac{n+1}{2^m} c$. Demak,

$$f\left(\frac{n}{2^m} a\right) = \cos \frac{n}{2^m} c, \quad n, m \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

Shu bilan birga f – uzluksiz juft funksiya bo'lgani uchun barcha x lar uchun

$$f(x) = \cos \frac{c}{a} x.$$

2° – hol. $f(a) > 1$ bo'lganda $f(a) = chc$ tenglikni ta'minlovchi $c > 0$ soni mavjud bo'lib, xuddi 1° – hol. dagidek barcha x lar uchun

$$f(x) = ch \frac{c}{a} x$$

tenglikka ega bo'lamiz. Shuning uchun (1) funksional tenglama

$$f(x) = 0, f(x) = \cos bx, f(x) = chx$$

uzluksiz yechimlarga ega bo'lib, bu yechimlar qatoriga $b = 0$ bo'lganda hosil bo'ladigan $f(x) = 1$ yechim ham kiradi.

Endi (13) tenglamaning ikki marta differensiallanuvchi yechimini topamiz. Buning uchun

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \quad (13)$$

tenglamani har ikki o'zgaruvchi bo'yicha ikki marta differensiallaymiz, natijada

$$x \text{ bo'yicha: } f''(x+y) + f''(x-y) = 2f''(x)f(y),$$

$$y \text{ bo'yicha: } f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y)$$

Har ikki tenglamadan

$$f''(x)f(y) = f(x)f''(y) \Rightarrow \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{f''(y)}{f(y)} = c$$

tenglikni va bundan $f''(x) = cf(x)$ differensial tenglamaga ega bo'lamiz.

Bu tenglama $c = -\omega^2$ bo'lsa, $f(x) = a \cos \omega x + b \sin \omega x$ yechimga, $c = \omega^2$ bo'lsa, $f(x) = a \cosh \omega x + b \sinh \omega x$ yechimga ega bo'ladi.

Ammo $f(0)=1$ va $f(-x)=f(x)$ ekanligidan bu yechimlardan (13) funksional tenglamaning $f(x)=\cos \omega x$, $f(x)=ch \omega x$ yechimlarini topamiz.

7-misol. $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)\cdot f(y)}$ tenglamani yeching.

Yechilishi. $y=0$ bo'lsa, $f(x)=\frac{f(x)+f(0)}{1-f(x)\cdot f(0)}$, yoki

$$f(x)-f^2(x)\cdot f(0)=f(x)+f(0)$$

Bundan esa $f(0)=0$ boshlang'ich shartni aniqlaymiz. 3-misoldagidek fikr yuritilsa,

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\left[\frac{f(x)+f(\Delta x)}{1-f(x)\cdot f(\Delta x)}-f(x)\right]:\Delta x,$$

yoki

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\cdot\frac{1+f^2(x)}{1-f(x)\cdot f(\Delta x)}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikdan $\Delta x \rightarrow 0$ da

$$f'(x)=f'(0)\cdot(1+f^2(x))=C(1+f^2(x))$$

munosabatni hosil qilamiz. Bu tenglikni

$$\frac{df(x)}{1+f^2(x)}=Cdx$$

ko'rinishida yozib, integrallasak $\arctg f(x)=Cx+C_1$ munosabatni, $f(0)=0$ ekanligi e'tiborga olinsa, $C_1=0$ bo'ladi. Demak, $\arctg f(x)=Cx$, bundan esa $f(x)=tg Cx$ funksiyani aniqlaymiz.

Javob: $f(x)=tg Cx$

I bob bo'yicha xulosa.

Bu bobda funksional tenglamalarni yechishga oid turli hil elementar ko'rinishdagi misollarning yechilishi, klasifikatsiyalanishi amalga oshirilgan bo'lib akademik litsey va kollejlarda o'qituvchilari va talabalari uchun mustaqil ishlashlarida foydalidir. Hozirgi kunga kelib ko'plab horijiy manbalarda funksional

tenglamalarga oid risola va maqolalar uchraydi, ammo bizning nashrlarimizda bu masalaga kam ahamiyat berilgan.

Odatda funksional tenglamalar ko'plab yechimlarga ega bo'ladi, ammo bu tenglamalarni bevosita yechish qiyinchilik tug'diradi. Ammo izlanayotgan funksiyaning ba'zi xarakteristik xossalari: uzluksizligi, davriyligi, chegaralanganligi kabi xossalari berilsa, funksional tenglamani yechish osonlashadi. Ko'plab matematik turnir va matematik olimpiadalarda funksional tenglamalarni yechishga oid misollar berilmoqda. Aytilganlarni e'tiborga olgan holda ba'zi klassik funksional tenglamalarni yechilishi birinchi bobda ko'rib o'tildi.

II Bob. TRIGONOMETRIK FUNKSIYALARNI FUNKSIONAL TENGLAMALAR YORDAMIDA ANIQLASH

2.1-§. Dastlabki mulohazalar va π sonini aniqlash

Ma'lumki umumta'lim maktablar matematika kursida asosiy trigonometrik funksiyalar geometrik tarzda aniqlanadi. Bunday geometrik aniqlashlar turli ko'rinishda bo'lishi mumkin. Masalan, qandaydir burchakning o'lchovi sifatida α sonini olib, α sonining trigonometrik funksiyalarini to'g'ri burchakli uchburchakning mos tomonlarining nisbati orqali, yoki mos nuqta radius vektori proyeksiyalarining bu radius uzunligiga nisbati kabi, yoki bu nuqta koordinatalarini shu nuqtadan koordinata boshigacha bo'lgan masofaga nisbati kabi aniqlash mumkin va hakozo. Trigonometrik funksiyalarni geometrik tarzda aniqlashda bu funksiyalarning xossalarini keltirishda geometriyaga tayanishga majburmiz. Ammo maktab matematika kursi o'ta qat'iy talablarga bo'sunmaganligi uchun keltirilgan trigonometriyada qo'llanilgan bir qator isbotlarda qat'iylik yetishmaydi. Geometriya bilan bog'liq bo'lmagan tarzda trigonometrik funksiyalarni aniqlashni differensial tenglamalar asosida amalgam oshirish mumkin: a) ikkinchi tartibli chiziqli

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$$

tenglamaning

$$x = 0 \text{ bo'lganda } y_1 = 1, \frac{dy_1}{dx} = 0$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi $y_1(x)$ yechimini kosinus deb nomlaymiz va $\cos x$ kabi belgilaymiz.

b) ikkinchi tartibli chiziqli

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$$

tenglamaning

$$x = 0 \text{ bo'lganda } y_2 = 0, \frac{dy_2}{dx} = 1$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi $y_2(x)$ yechimini sinus deb nomlaymiz va $\sin x$ kabi belgilaymiz.

Trigonometrik funksiyaning keltirilgan bu ta'rifidan uning barcha xossalari o'rnatish mumkin va shuningdek x sonini qandaydir burchak o'lchovi sifatida qaralsa $\sin x$ va $\cos x$ funksiyalar yuqorida aytilgan geometrik xossalarga ega bo'ladi.

Trigonometrik funksiyalarni darajali qatorlar yordamida ham aniqlashimiz mumkin.

Bu holda x ning barcha qiymatlarida yaqinlashuvchi

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

darajali qatorning yig'indisiga x soning sinusi, x ning barcha qiymatlarida yaqinlashuvchi

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

darajali qatorning yig'indisiga x soning kosinusi deyiladi. Ammo bu ta'rifni maktab matematika kursiga kiritib bo'lmaydi.

Endi x ning barcha qiymatlarida

$$S(x+y) = S(x)C(y) + C(x)S(y), \quad (1)$$

$$C(x+y) = C(x)C(y) - S(x)S(y), \quad (2)$$

$$S^2(x) + C^2(x) = 1, \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{S(x)}{x} = 1 \quad (4)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi ikkita $S(x)$ va $C(x)$ funksiyalarni qaraymiz. Bu munosabatlardan $S(x) = \sin x$ va $C(x) = \cos x$ funksiyalarni aniqlash mumkin. Biz bu bobda trigonometrik funksiyalarni aniqlashning funksional tenglamalarga asoslangan yana bir usulini keltiramiz. Trigonometrik funksiyalarni aniqlashda π soni muhim o'rin tutadi. Bu sonni analitik ko'rinishda aniqlaymiz.

Ushbu sonlar ketma ketligini qaraymiz:

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \dots$$

Bu ketma ketlikning umumiy hadini z_n bilan belgilaymiz. Bu ketma ketlik monoton o'suvchidir, chunki

$$z_1 < z_2 < z_3 < z_4 < \dots.$$

Bu ketma ketlikni chegaralangan ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham, ixtiyoriy natural n soni uchun

$$z_{n+1} = \sqrt{2 + z_n}$$

munosabatga ega bo'lamiz. $n = k$ uchun $z_n < 2$ tengsizlik bajarilsin deb faraz qilamiz. U holda $z_{n+1} = \sqrt{2 + z_n} < \sqrt{2 + 2} = 2$. Ammo $z_1 < 2$ bo'lgani uchun $z_2 < 2, z_3 < 2$ va hakazo. Bundan z_n sonlar ketma ketligi limitga ega ekanligi kelib chiqadi.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = t$$

deb olamiz. Shu bilan birga yana quyidagi

$$2 + \sqrt{2}, \quad 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \dots$$

sonlar ketma ketligini qaraymiz. Bu ketma ketlikning umumiy hadi $(z_n)^2$ dan iborat. Shu bilan birga bu ketma ketlikning umumiy hadi $z_{n+1} + 2$ ga teng.

Demak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(z_n)^2] = \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + 2)$$

Bu tenglikni $t^2 = t + 2$ ko'rinishda yozish mumkin. Bundan $t = 2$ bo'lgani uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 2$$

natijaga ega bo'lamiz. Endi

$$2\sqrt{2}; \quad 2^2\sqrt{2 - \sqrt{2}}; \quad 2^3\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}; \dots$$

ketma ketlikni olamiz. Bu ketma ketlikning umumiy hadini u_n bilan belgilaymiz.

$$u_n = 2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}$$

(radikallar soni n ta). Bundan

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}}{2^n \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}}$$

(maxrajdagi radikallar soni n ta, suratdagi radikallar soni $n+1$ ta). Bu tenglikning o'ng qismi surat va maxrajini $n+1$ radikallardan iborat $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}$ soniga ko'paytiramiz. Natijada yuqorida $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}} < 2$ ekanligi ko'rsatilgani uchun radikallar soni nechta bo'lmasin

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{2^{n+1} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}}{2^n \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}} > 1 \end{aligned}$$

u_n musbat sonlar bo'lgani uchun $u_{n+1} > u_n$. Demak, u_n ketma ketlik monoton o'suvchidir.

Shu bilan birga quyidagi sonlar ketma ketligini qaraymiz:

$$\frac{2^2 \sqrt{2}}{\sqrt{2}}; \frac{2^3 \sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}; \frac{2^4 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}; \frac{2^5 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}; \dots$$

Bu ketma ketlikning umumiy hadini v_n orqali belgilaymiz:

$$v_n = \frac{2^n \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}$$

(maxrajdagi radikallar soni ham n ta, suratdagi radikallar soni ham n ta).

Xuddi yuqorida $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ nisbatga nisbatan bajarilgan ishlarga o'xshash tarzda

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}} + \frac{1}{2}$$

ekanligini ko'rsatamiz.

$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}} < 2$ bo'lgani uchun $\frac{v_n}{v_{n+1}} > 1$ bo'ladi. v_n musbat sonlar

bo'lgani uchun $v_{n+1} < v_n$ bo'lib, v_n sonlar ketma ketligi kamayuvchi bo'ladi. Endi ixtiyoriy natural n soni uchun $u_n < v_n$ ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham,

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}}{2} \text{ (suratdagi radikallar soni } n \text{ ta).}$$

$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}} < 2$ bo'lgani uchun $\frac{u_n}{v_n} < 1$. Demak n ortishi bilan

u_n ketma ketlik o'suvchi bo'lada, ammo qandaydir sonidan masalan $v_1 = \frac{2^2 \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4$

sonidan kichikligicha qoladi, chunki $u_n < v_n < v_2 = 4$. Bundan u_n ketma ketlik limitga ega. Biz bu limitni π bilan belgilaymiz.

Demak,

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}} \text{ (radikallar soni } n \text{ ta).}$$

Ikkinchi tomondan n ortishi bilan v_n ketma ketlik kamayuvchi bo'lada, ammo qandaydir sonidan masalan $u_1 = 2\sqrt{2}$ sonidan kattaligicha qoladi, chunki $v_n > u_n > u_1 = 2\sqrt{2}$. Demak, v_n ketma ketlik limitga ega. Shu bilan birga

$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}}$$

bo'lgani uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = 1 \text{ va } \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \pi$$

Geometrik nuqtai nazardan u_n va v_n ketma ketlikliklar mos ravishda $R=1$ radiusli aylanaga ichki va tashqi chizilgan muntazam n burchaklarning yarim perimetrlaridir. Shuning uchun π aylana uzunligini diametrga nisbatidir.

2.2-§. Funksional tenglamalarning dastlabki sistemasi.

Funksional tenglamalarning

$$S(x-y) = S(x) \cdot C(y) - C(x) \cdot S(y), \quad (1)$$

$$C(x-y) = C(x) \cdot C(y) + S(x) \cdot S(y), \quad (2)$$

sistemalarini

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad (3)$$

oralikda

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad (4)$$

shart bo'yicha qaramiz va bu shartlarni qanoatlantiruvchi $S(x)$ va $C(x)$ funksiysylar mavjud deb faraz qilamiz. (1)-(4) munosabatlardan $S(x)$ va $C(x)$ funksiylarning quyidagi xossalari kelib chiqadi.

(1) munosabatda $x = y$ deb olib

$$S(0) = 0 \quad (5)$$

munosabatga ega bo'lamiz. (1) munosabatda $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$ deb olib. (5)

munosabatni e'tiborga olgan holda

$$C(0) = 1$$

munosabatga ega bo'lamiz. (2) tenglikda $x = y$ deb olib,

$$S^2(x) + C^2(x) = 1 \quad (6)$$

tenglikni hosil qilamiz. (6) munosabatdan

$$|S(x)| \leq 1, \quad |C(x)| \leq 1 \quad (7)$$

hamda (6) dan $x = \frac{\pi}{2}$ bo'lganda

$$S^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + C^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

tenglikni hosil qilamiz. Ammo

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

bo'lgani uchun
$$C\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (8)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

$S(x)$ funksiyani toq funksiya, $C(x)$ funksiyani juft funksiya ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham, (1) munosabatda $x = 0$ deb olib,

$$S(-y) = S(0) \cdot C(y) - C(0) \cdot S(y)$$

va bundan $S(0) = 0$, $C(0) = 1$ bo'lgani uchun

$$S(-y) = -S(y) \quad (9)$$

munosabat o'rinli bo'ladi. (2) tenglikda $x = 0$ deb olsak,

$$C(-y) = C(0) \cdot C(y) + S(0) \cdot S(y)$$

va bundan $S(0) = 0$, $C(0) = 1$ bo'lgani uchun

$$C(-y) = C(y) \quad (10)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Endi $S(x)$ va $C(x)$ funksiyalar uchun qo'shish formulalarini keltirib chiqarish qiyin emas. Haqiqatdan ham, (1) va (2) formulalarda y ni $-y$ bilan almashtirib,

$$S(x+y) = S(x) \cdot C(-y) - C(x) \cdot S(-y), \quad (11)$$

$$C(x+y) = C(x) \cdot C(-y) + S(x) \cdot S(-y), \quad (12)$$

tengliklarni hosil qilamiz. (11) va (12) qo'shish formulalarida $y = \frac{\pi}{2}$ bo'lganda quyidagi formulalar kelib chiqadi:

$$S\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = C(x) \quad (13), \quad C\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -S(x) \quad (14).$$

Bu ikki formula (9) va (10) formulalar bilan birgalikda x ning ixtiyoriy haqiqiy qiymati uchun $S(x)$ va $C(x)$ funksiyalarning qiymatlarini bu funksiyalarning x ning $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ oraliqdagi qiymatlari orqali topish imkoniyatini beradi. Xususiyl holda

$$S(\pi + x) = C\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -S(x), \quad C(\pi + x) = -S\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -C(x)$$

2.3-§. $S(x)$ va $C(x)$ funksiyalarning davriyligi va ularning asosiy xossalari

Endi yuqoridagilardan foydalanib, $S(x)$ va $C(x)$ funksiyalarning davriyligini ko'rsatishimiz mumkin. Haqiqatda quyidagi teorema o'rinli:

1-teorema. $S(x)$ funksiya davriy va 2π soni bu funksiyaning eng kichik musbat davri bo'ladi.

Isboti. $S(2\pi + x) = S[\pi + (\pi + x)] = -S(\pi + x) = S(x)$
bo'lgani uchun har qanday x soni uchun

$$S(2\pi + x) = S(x)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Faraz qilaylik shunday k ($0 < k < 2\pi$) soni mavjudki, har qanday x soni uchun

$$S(k + x) = S(x) \quad (*)$$

tenglik o'rinli bo'lsin. k soni π soniga teng emas, chunki agar $k = \pi$ bo'lsa, u holda

$$S(\pi + x) = S(x) \quad (*)$$

Ammo $S(\pi + x) = -S(x)$ bo'lgani uchun $S(x) = -S(x)$ bo'lib, bundan (3) ga zid bo'lgan

$$S(x) = 0$$

ziddiyatni hosil qilamiz.

k soni $\frac{3\pi}{2}$ soniga ham teng emas, chunki agar $k = \frac{3\pi}{2}$ bo'lsa, u holda

$$S\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) = S(x)$$

Ammo

$$S\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) = S\left[\frac{\pi}{2} + (\pi + x)\right] = -C(\pi + x) = -C(-x) = -C(x)$$

bo'lgani uchun biz $S(x) = -C(x)$ ziddiyatga ega bo'lamiz.

k soni $\frac{\pi}{2}$ soniga ham teng emas, chunki agar $k = \frac{\pi}{2}$ bo'lsa, u holda

$$S\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = S(x)$$

Ammo boshqa tomondan $S\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = C(x)$ bo'lgani uchun biz $S(x) = C(x)$

ziddiyatga ega bo'lamiz. (*) munosabatda $x = 0$ deb olib

$$S(k) = S(0)$$

tenglikni hosil qilamiz.

k soni $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ oraliqqa ham tegishli emas, aks holda biz (3) ga zid

munosabatga kelimiz.

k soni $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ oraliqqa ham tegishli emas, chunki $\pi - k$ soni $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

oraliqqa tegishli bo'lib, biz (3) ga zid bo'lgan $S(\pi - k) = -S(-k) = S(k) = 0$ munosabatga kelimiz.

k soni $(\pi, 2\pi)$ oraliqqa ham tegishli emas, chunki $2\pi - k$ soni $(0, \pi)$ oraliqqa tegishli bo'lib, biz (3) ga zid bo'lgan

$$S(2\pi - k) = S[2\pi + (-k)] = S(-k) = -S(k) = 0$$

munosabatga kelimiz.

Demak, 2π soni $S(x)$ funksiyaning eng kichik musbat davri ekan.

2-teorema. $C(x)$ funksiya davriy va 2π soni bu funksiyaning eng kichik musbat davri bo'ladi.

Isboti. $C(2\pi + x) = C[\pi + (\pi + x)] = -C(\pi + x) = C(x)$

bo'lgani uchun har qanday x soni uchun

$$C(2\pi + x) = C(x)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Faraz qilaylik shunday k ($0 < k < 2\pi$) soni mavjudki, har qanday x soni uchun

$$C(k + x) = C(x) \quad (**)$$

tenglik o'rinli bo'lsin. k soni $\frac{1}{2}\pi$ soniga teng emas, chunki agar $k = \frac{1}{2}\pi$ bo'lsa, u holda

$$C\left(\frac{1}{2}\pi + x\right) = C(x) \quad (*)$$

Ammo $C\left(\frac{1}{2}\pi + x\right) = -S(x)$ bo'lgani uchun $C(x) = -S(x)$ ziddiyatni hosil qilamiz.

k soni π soniga ham teng emas, chunki agar $k = \pi$ bo'lsa, u holda

$$C(\pi + x) = C(x)$$

Ammo

$$C(\pi + x) = -C(x)$$

bo'lgani uchun biz $C(x) = -C(x)$ tenglikdan $C(x) = 0$ ziddiyatga ega bo'lamiz.

k soni $\frac{3\pi}{2}$ soniga ham teng emas, chunki agar $k = \frac{3\pi}{2}$ bo'lsa, u holda

$$C\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = C(x)$$

Ammo boshqa tomondan $C\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = C\left[\frac{\pi}{2} + (\pi + x)\right] = -S(\pi + x) = S(x)$

bo'lgani uchun biz $C(x) = S(x)$ ziddiyatga ega bo'lamiz, chunki $C(0) = 1, S(0) = 0$.

Demak, $k \neq \frac{\pi}{2}, k \neq \pi, k \neq \frac{3\pi}{2}$. (***) munosabatda $x = \frac{\pi}{2}$ deb olinsa

$$C\left(\frac{\pi}{2} + k\right) = C\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. Ammo $C\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -S(k)$. Demak, $S(k) = 0$. Lekin bu munosabatning bo'lishi mumkin emasligi yuqorida ko'rsatildi.

Demak, 2π soni $C(x)$ funksiyaning eng kichik musbat davri ekan.

Biz kelgusida (1) va (2) qo'shish formulalaridan kelib chiquvchi quyidagi

$$S(x_1) + S(x_2) = 2S\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot C\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right),$$

$$S(x_1) - S(x_2) = 2C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot S\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)$$

$$C(x_1) + C(x_2) = 2C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot C\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right),$$

$$C(x_1) - C(x_2) = 2S\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot S\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)$$

formulalarni keltirib chiqaramiz.

Masalan, birinchi formula quyidagi tartibda hosil qilinadi.

$$S(x_1) + S(x_2) = S\left(\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_1 - x_2}{2}\right) + S\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{x_1 - x_2}{2}\right) = 2S\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot C\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)$$

Keyin,

$$S(2x) = S(x) \cdot C(x) + C(x) \cdot S(x) = 2S(x) \cdot C(x), \quad C(2x) = C^2(x) - S^2(x)$$

formulalarga ega bo'lamiz. Nihoyat

$$S\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - C(x)}{2}}, \quad C\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + C(x)}{2}}$$

formulalarni keltirib chiqaramiz.

Haqiqatdan ham,

$$1 - C(x) = 2S\left(\frac{x}{2}\right) \cdot S\left(\frac{x}{2}\right) = 2S^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

bo'lgani uchun

$$S\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - C(x)}{2}}$$

Keyin

$$1 + C(x) = 2C\left(\frac{x}{2}\right) \cdot C\left(-\frac{x}{2}\right) = 2C^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

bo'lgani uchun

$$C\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + C(x)}{2}}$$

3-teorema. $C(x)$ funksiya $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ oraliqda musbat.

Isboti. Agar $0 < x < \frac{\pi}{2}$ bo'lsa, u holda $0 < \frac{\pi}{2} - x < \frac{\pi}{2}$. Faraz qilaylik $C(x) \leq 0$ bo'lsin. U holda $S\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \leq 0$ bo'lib, bu (3) ga zid. Demak, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ bo'lganda $C(x) > 0$ ekan.

4-teorema. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ kesmada $S(x)$ funksiya o'suvchi, $C(x)$ funksiya esa kamayuvchi funksiya bo'ladi.

Isboti. Aytaylik, x_1 va x_2 sonlari $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ kesmaga tegishli bo'lib, $x_1 > x_2$ bo'lsin. U holda

$$0 < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2} \quad \text{va} \quad 0 < \frac{x_1 - x_2}{2} < \frac{\pi}{2}$$

Demak,

$$S\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right) > 0 \quad \text{va} \quad C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > 0$$

Shu bilan birga

$$S(x_1) - S(x_2) = 2C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot S\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)$$

bo'lgani uchun $S(x_1) - S(x_2) > 0$, ya'ni

$$S(x_1) > S(x_2)$$

bo'lib $S(x)$ funksiya o'suvchi bo'ladi.

Keyin

$$C(x_1) - C(x_2) = 2S\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot S\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right) = -2S\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot S\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right) < 0$$

bo'lgani uchun $C(x_1) - C(x_2) < 0$, ya'ni

$$C(x_1) < C(x_2)$$

bo'lib $C(x)$ funksiya kamayuvchi bo'ladi.

5-teorema. Ixtiyoriy n natural soni uchun

$$2C\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}} \quad (*)$$

$$2S\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}} \quad (**)$$

tengliklar o'rinli, bu yerda radikallar soni $n-1$ ta.

Isboti. Ma'lumki,

$$2C\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \sqrt{\frac{1+C\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2}} = \sqrt{2}; \quad 2C\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2 \cdot \sqrt{\frac{1+C\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Aytaylik (*) munosabat $n=k$ uchun to'g'ri bo'lsin. U holda $k-1$ ta radikallar uchun

$$2C\left(\frac{\pi}{2^k}\right) = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}$$

bo'lishi kerak. Natijada

$$2C\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right) = 2 \sqrt{\frac{1+C\left(\frac{\pi}{2^k}\right)}{2}} = 2 \sqrt{\frac{1+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}}{2}} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}$$

bo'lib, bu yerda radikallar soni k ta. Demak, (*) munosabat $n=k+1$ uchun ham to'g'ri. Bu tenglik $n=2$ uchun ham to'g'ri bo'lgani uchun ixtiyoriy natural n uchun ham o'rinli. Ikkinchi tenglik esa quyidagi mulohazalardan kelib chiqadi:

$$2S\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = 2 \sqrt{1 - C^2\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} = 2 \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}}{4}} = \sqrt{2 - \sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}$$

radikallar soni $n-1$ tadan iborat.

6-teorema. Agar n natural son bo'lsa, u holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = 1 \quad \text{va} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = 0$$

Isboti. Haqiqatdan ham, biz yuqorida, radikallar soni n ta bo'lganda

$$z_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}$$

belgilash kiritgan edik. Shung uchun

$$C\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{z_n - 1}{2}$$

Bundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n - 1}{2} = 1,$$

chunki $\lim_{n \rightarrow \infty} z_{n-1} = 2$

Ikkinchi tomondan yuqorida belgilashlarni e'tiborga olinsa

$$S\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{\sqrt{2 - z_{n-2}}}{2}$$

Bundan esa talab etilayotgan ikkinchi munosabat kelib chiqadi.

7-teorema. $C(x)$ va $S(x)$ funksiyalar uzluksizdir.

Isboti. $\Delta C(x) = C(x + \Delta x) - C(x) = -2S\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot S\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ va shu bilan birga

$$\left|S\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leq 1 \quad \text{va} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} S\left(\frac{\Delta x}{2}\right) = 0 \quad \text{bo'lgani uchun} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta C(x) = 0.$$

$$\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x) = 2S\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot C\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \quad \text{va shu bilan birga}$$

$$\left|C\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leq 1 \quad \text{va} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} S\left(\frac{\Delta x}{2}\right) = 0 \quad \text{bo'lgani uchun} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta S(x) = 0$$

2.4-§. Asosiy tengsizlik va asosiy natija

8-teorema. Agar x soni $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ oraliqqa tegishli bo'lsa, u holda

$$f(x) < x$$

Isboti. Bu tengsizlikni to'g'ri ekanligini dastlab $x = \frac{\pi}{2^n}$ soni uchun isbotlaymiz, bu yerda n qandaydir natural son. Yuqorida biz $n-1$ ta radikallardan iborat ifoda uchun

$$u_{n-1} = 2^{n-1} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}} < \pi$$

tengsizlikka ega bo'lgan edik. Bu tengsizlikdan

$$\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}}{2} < \frac{\pi}{2^n}$$

tengsizlik kelib chiqadi. Shuning uchun ixtiyoriy natural n soni uchun

$$S\left(\frac{\pi}{2^n}\right) < \frac{\pi}{2^n}$$

Endi x soni $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ oraliqqa tegishli bo'lib

$$x = \frac{m\pi}{2^n}$$

ko'rinishdagi son uchun

$$S(x) < x$$

tengsizlikni isbotlaymiz, bu yerda m va n natural sonlar bo'lib, $m < 2^n$.

Agar $m=1$ yoki $m=2$ bo'lsa, yuqorida isbotlanganlarga ko'ra $f(x) < x$ tengsizlikning to'g'riligi ravshan.

Faraz qilaylik $f(x) < x$ tengsizlik $x = \frac{k\pi}{2^n}$ soni uchun to'g'ri bo'lsin, bu yerda k –qandaydir natural son bo'lib, $k < 2^{n-1}$. Endi bu tengsizlik $x = \frac{(k+1)\pi}{2^n}$ soni uchun ham o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham,

$$S\left(\frac{(k+1)\pi}{2^n}\right) = S\left(\frac{\pi}{2^n} + \frac{k\pi}{2^n}\right) = S\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \cdot C\left(\frac{k\pi}{2^n}\right) + S\left(\frac{k\pi}{2^n}\right) \cdot C\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$

Ammo

$$S\left(\frac{\pi}{2^n}\right) < \frac{\pi}{2^n}, \quad S\left(\frac{k\pi}{2^n}\right) < \frac{k\pi}{2^n}, \quad C\left(\frac{\pi}{2^n}\right) < 1 \quad \text{va} \quad C\left(\frac{k\pi}{2^n}\right) < 1$$

bo'lgani uchun

$$S\left(\frac{(k+1)\pi}{2^n}\right) = S\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \cdot C\left(\frac{k\pi}{2^n}\right) + S\left(\frac{k\pi}{2^n}\right) \cdot C\left(\frac{\pi}{2^n}\right) < \frac{\pi}{2^n} + \frac{k\pi}{2^n} = \frac{(k+1)\pi}{2^n}$$

$S(x) < x$ tengsizlik, $m=2$ bo'lgan hol uchun $x = \frac{m\pi}{2^n}$ soni uchun to'g'ri

bo'lgani uchun bu tengsizlik $m=3$ uchun ham o'rinli va demak, ixtiyoriy $m > 1$ soni uchun o'rinlidir.

$\frac{m\pi}{2^n}$ ko'rinishdagi sonni $r_{m,n}$ bilan belgilaymiz va agar $r_{m,n} > r_{k,l}$ bo'lsa, u

holda

$$r_{m,n} - r_{k,l} > S(r_{m,n}) - S(r_{k,l})$$

tengsizlikni o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz.

Haqiqatdan ham,

$$S(r_{m,n}) - S(r_{k,l}) = 2C\left(\frac{r_{m,n} + r_{k,l}}{2}\right) \cdot S\left(\frac{r_{m,n} - r_{k,l}}{2}\right)$$

Agar $r_{m,n}$ va $r_{k,l}$ sonlari $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ oraliqqa tegishli bo'lsa, u holda $\frac{r_{m,n} + r_{k,l}}{2}$

soni ham bu oraliqqa tegishli hamda

$$0 < C\left(\frac{r_{m,n} + r_{k,l}}{2}\right) < 1$$

Keyin,

$$r_{m,n} - r_{k,l} = \frac{m\pi}{2^n} - \frac{k\pi}{2^l} = \frac{\pi}{2^{n+l}}(2^l m - 2^n k) = \frac{\pi}{2^{n+l}} p,$$

bu yerda

$$2^l m - 2^n k = p$$

deb olindi.

$r_{m,n} > r_{k,l}$ bo'lgani uchun $\frac{m}{2^n} > \frac{k}{2^l}$ va p butun musbat son bo'ladi. Yuqorida

isbotlanganlarda ko'ra

$$S\left(\frac{r_{m,n} - r_{k,l}}{2}\right) < \frac{r_{m,n} - r_{k,l}}{2}$$

Shuning uchun

$$S(r_{m,n}) - S(r_{k,l}) < 2 \cdot \frac{r_{m,n} - r_{k,l}}{2} = r_{m,n} - r_{k,l}$$

Bu tenglikdan agar $r_{m,n} > r_{k,l}$ bo'lsa, u holda

$$r_{m,n} - S(r_{m,n}) > r_{k,l} - S(r_{k,l})$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Endi $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ oraliqdagi qandaydir x uchun va qandaydir natural n va k

sonlari uchun

$$x > r_{k,l}$$

bo'lsin. Yuqorida isbotlanganlarga ko'ra

$$r_{k,l} - S(r_{k,l}) > 0$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

Biz doimo

$$r_{k,l} < r_{m,n} < x \text{ va } S(x) - S(r_{m,n}) < r_{k,l} - S(r_{k,l})$$

tengsizliklar bajariladigan natural m va n sonlarini topishimiz mumkin.

Ikkinchi tomondan

$$r_{m,n} - S(r_{m,n}) > r_{k,l} - S(r_{k,l})$$

Bu tengsizliklardan

$$x - S(x) + r_{m,n} - S(r_{m,n}) - x + S(x) > r_{k,l} - S(r_{k,l})$$

$$x - S(x) > r_{k,l} - S(r_{k,l}) + (x - r_{m,n}) - [S(x) - S(r_{m,n})]$$

Shu bilan birga

$$x - r_{m,n} > 0 \text{ va } S(x) - S(r_{m,n}) < r_{k,l} - S(r_{k,l})$$

bo'lgani uchun

$$x - S(x) > 0$$

va hakoza.

$$T(x) = \frac{S(x)}{C(x)}$$

funksiyani qaraymiz. Bu funksiya $\frac{\pi}{2}(2k+1)$ ko'rinishdagi sonlardan boshqa barcha haqiqiy sonlar to'plamida aniqlangan, bu yerda k - ixtiyoriy butun son.

Quyidagi munosabatlarga ega bo'lamiz:

$$T(0) = \frac{S(0)}{C(0)} = 0,$$

$$T(-x) = \frac{S(-x)}{C(-x)} = -\frac{S(x)}{C(x)} = -T(x)$$

$$T(x+y) = \frac{S(x) \cdot C(y) + C(x) \cdot S(y)}{C(x) \cdot C(y) - S(x) \cdot S(y)}, \text{ bu yerda } x+y \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$$

$$T(x-y) = \frac{S(x) \cdot C(y) - C(x) \cdot S(y)}{C(x) \cdot C(y) + S(x) \cdot S(y)}, \text{ bu yerda } x-y \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$$

Qandaydir m natural soni uchun x, y sonlaridan biri $\frac{\pi}{2}(2m+1)$ ga teng emas deb faraz qilib oxirgi tengliklarning o'ng qismlarini $C(x) \cdot C(y)$ ga bo'lib,

$$T(x+y) = \frac{T(x)+T(y)}{1-T(x) \cdot T(y)},$$

$$T(x-y) = \frac{T(x)-T(y)}{1+T(x) \cdot T(y)}$$

formulalarga ega bo'lamiz.

Keltirish formulasi

$$T\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{T(x)}$$

formulani beradi. π soni $T(x)$ funksiyaning eng kichik musbat davri ekanligini isbotlaymiz.

Haqiqatdan ham,

$$T(x+\pi) = T\left[\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right] = -\frac{1}{T\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = T(x)$$

Endi barcha x lar uchun

$$T(k+x) = T(x)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi k ($0 < k < \pi$) soni mavjud deb faraz qilamiz.

Bu tenglikda $x=0$ bo'lsa, u holda

$$T(k) = T(0) = 0$$

$k \neq \frac{\pi}{2}$ bo'lgani uchun $C(k) \neq 0$. Demak, $S(k) = 0$, bu yerda $0 < k < \frac{\pi}{2}$ yoki,

$$\frac{\pi}{2} < k < \pi$$

Shu bilan birga quyidagi formulalarga ega bo'lamiz:

$$T(x_1) + T(x_2) = \frac{S(x_1 + x_2)}{C(x_1) \cdot C(x_2)},$$

$$T(x_1) - T(x_2) = \frac{S(x_1 - x_2)}{C(x_1) \cdot C(x_2)}$$

$$T(2x) = \frac{2T(x)}{1-T^2(x)},$$

$$T\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1-C(x)}{1+C(x)}}$$

Agar x soni $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ oraliqga tegishli bo'lsa, u holda $T(x)$ funksiya $(0, +\infty)$ oraliqga tegishli bo'ladi.

Agar $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ bo'lsa, u holda

$$T(x_1) - T(x_2) = \frac{S(x_1 - x_2)}{C(x_1) \cdot C(x_2)} > 0,$$

chunki $S(x_1 - x_2) > 0$. Demak, $T(x)$ funksiya $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ oraliqda monoton funksiya bo'ladi. Shu bilan birga

$$\lim_{(x_1 - x_2) \rightarrow 0} [T(x_1) - T(x_2)] = 0$$

Haqiqatdan ham,

$$\lim_{(x_1 - x_2) \rightarrow 0} S(x_2 - x_1) = 0 \text{ va } \lim_{(x_1 - x_2) \rightarrow 0} [T(x_1) - T(x_2)] = \frac{\lim_{(x_1 - x_2) \rightarrow 0} S(x_2 - x_1)}{\lim_{(x_1 - x_2) \rightarrow 0} [C(x_1)C(x_2)]} = 0$$

Demak, $T(x)$ funksiya $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ oraliqda uzluksizdir. $T(x)$ funksiyaning davriyligidan uning bu xossasi ixtiyoriy butun k sonlari uchun barcha $\left(\frac{\pi}{2}(2k-1); \frac{\pi}{2}(2k+1)\right)$ ko'rinishdagi oraliqlarga yoyiladi.

9-teorema. Agar x soni $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ oraliqga tegishli bo'lsa, u holda

$$x < T(x)$$

Isboti. Dastlab bu tengsizlikni $x = \frac{\pi}{2^n}$ soni uchun isbotlaymiz, bu yerda $n > 1$ – natural son.

$$T\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{S\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{C\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}},$$

bu yerda surat va maxrajda $n-1$ tadan radikallar ishtirok etmoqda. Ma'lumki,

$$\pi < \frac{2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}},$$

bu yerda ham surat va maxrajda $n-1$ tadan radikallar ishtirok etmoqda.

Bu mulohazalardan

$$\frac{\pi}{2^n} < T\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$

tengsizlik kelib chiqadi.

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ oraliqga tegishli bo'lgan x soni $x = \frac{m\pi}{2^n}$ ko'rinishga ega bo'lsin, bu

yerda m va n natural sonlar. Demak, $n > 1$ va $m < 2^n$.

$x < T(x)$ tengsizlik $x = \frac{k\pi}{2^n}$ ($n > 1$ va $k < 2^n$) bo'lganda o'rinli. Bu

tengsizlikni

$k+1 < 2^{n-1}$ bo'lganda $x = \frac{(k+1)\pi}{2^n}$ uchun isbotlaymiz:

$$T\left(\frac{(k+1)\pi}{2^n}\right) = T\left(\frac{k\pi}{2^n} + \frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{T\left(\frac{k\pi}{2^n}\right) + T\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{1 - T\left(\frac{k\pi}{2^n}\right) \cdot T\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$$

$\frac{(k+1)\pi}{2^n}$ soni $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ oraliqga tegishli bo'lgani uchun

$$0 < 1 - T\left(\frac{k\pi}{2^n}\right) \cdot T\left(\frac{\pi}{2^n}\right) < 1, \text{ va demak } T\left(\frac{(k+1)\pi}{2^n}\right) > 0.$$

Shuning uchun

$$T\left(\frac{(k+1)\pi}{2^n}\right) > T\left(\frac{k\pi}{2^n}\right) + T\left(\frac{\pi}{2^n}\right) > \frac{k\pi}{2^n} + \frac{\pi}{2^n} = \frac{(k+1)\pi}{2^n}$$

Bundan $x = \frac{m\pi}{2^n}$ ko'rinishga sonlar uchun

$$x < T(x)$$

tengsizlikni bajarilishi kelib chiqdi, bu yerda m va n natural sonlar bo'lib, $n > 1$

va $m < 2^{n-1}$.

Xuddi yuqoridagidek $\frac{m\pi}{2^n} (n \neq 1, m < 2^{n-1})$ sonini $r_{m,n}$ bilan belgilaymiz va $r_{m,n} > r_{k,l}$ deb faraz qilamiz. U holda

$$r_{m,n} - r_{k,l} < T(r_{m,n}) - T(r_{k,l})$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Haqiqatdan ham,

$$T(r_{m,n}) \cdot T(r_{k,l}) > 0$$

bo'lgani uchun

$$T(r_{m,n}) - T(r_{k,l}) > \frac{T(r_{m,n}) - T(r_{k,l})}{1 + T(r_{m,n}) \cdot T(r_{k,l})} = T(r_{m,n} - r_{k,l})$$

Ammo yuqorida

$$r_{m,n} - r_{k,l} = \frac{\pi}{2^{n+l}} p,$$

bu yerda $2^l m - 2^n k = p$ -butun musbat son deb belgilash kiritilgan edi.

$r_{m,n} - r_{k,l}$ soni $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ oraliqga tegishli bo'lgani uchun $p < 2^{n+l-1}$. Shuning uchun

$$T(r_{m,n} - r_{k,l}) > r_{m,n} - r_{k,l}$$

Demak, $r_{m,n}$, $r_{k,l}$ sonlari $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ oraliqga tegishli bo'lsa va $r_{m,n} > r_{k,l}$ bo'lsa,

u holda

$$T(r_{m,n}) - T(r_{k,l}) > r_{m,n} - r_{k,l}$$

yoki

$$T(r_{m,n}) - r_{m,n} > T(r_{k,l}) - r_{k,l}$$

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ oraliqdan olingan qandaydir x soni va qandaydir natural k va l sonlari uchun

$$x > r_{k,l}$$

bo'lsin. Bu holda

$$T(r_{k,l}) - r_{k,l} > 0$$

Shu bilan birga doimo

$$r_{k,l} < r_{m,n} < x \quad \text{va} \quad T(x) - T(r_{m,n}) < T(r_{k,l}) - r_{k,l}$$

tengsizliklar bajariladigan m va n natural sonlarni topishimiz mumkin.

Keyin,

$$T(x) - x + T(r_{m,n}) - r_{m,n} + x - T(x) > T(r_{k,l}) - r_{k,l}$$

Bundan

$$T(x) - x > T(r_{k,l}) - r_{k,l} - (x - r_{m,n}) + [T(x) - T(r_{m,n})]$$

Ammo m va n natural sonlarni

$$0 < x - r_{m,n} < T(r_{k,l}) - r_{k,l}$$

tengsizlik bajariladigan qilib tanlashimiz mumkin. Ikkinchi tomondan

$$T(x) - T(r_{m,n}) > 0$$

Demak, $T(x) - x > 0$ va $T(x) > x$.

10-teorema. Ushbu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{S(x)}{x}$ limit mavjud.

Isboti. Aytaylik x soni $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ oraliqga tegishli bo'lsin. Natijada

$$S(x) < x < T(x)$$

tengsizlik o'rinli. Bu tengsizlik

$$1 < \frac{x}{S(x)} < C(x),$$

yoki

$$1 > \frac{S(x)}{x} > \frac{1}{C(x)}$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

$$\lim_{x \rightarrow +0} C(x) = 1 \text{ bo'lgani uchun } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{S(x)}{x} = 1$$

Ammo $\frac{S(-x)}{-x} = \frac{S(x)}{x}$ bo'lgani uchun

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{S(x)}{x} = 1$$

11-teorema. Ushbu munosabatlar o'rinli: $S(x) \equiv \sin x$, $C(x) \equiv \cos x$

Isboti. Ixtiyoriy haqiqiy x soni uchun

$$S(x) = \sin x \quad \text{va} \quad C(x) = \cos x$$

tengliklarni ko'rsatamiz. Bu tengliklar $x = \frac{\pi}{2^n}$ soni uchun bajariladi, bu yerda n qandaydir natural son. Haqiqatdan ham, ixtiyoriy x uchun quyidagi tengliklar:

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \quad \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

Xuddi yuqorida ko'rsatilganidek $n-1$ ta radikallardan iborat

$$\sin \frac{\pi}{2^n} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{2^n} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}{2}$$

formulalarni ko'rsatishimiz mumkin. Bu formulalarni yuqorida hosil qilingan

$$S\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}{2}, \quad C\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}{2}$$

formulalar bilan taqqoslab

$$\sin \frac{\pi}{2^n} = S\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \quad \text{va} \quad \cos \frac{\pi}{2^n} = C\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$

tengliklarni hosil qilamiz.

Aytaylik x soni

$$x = \frac{m\pi}{2^n}$$

ko'rinishda bo'lsin, bu yerda m – qandaydir butun son, n – natural son. Qo'shish teoremasi yordamida $\sin x$ funksiyani $\sin \frac{\pi}{2^n}$ va $\cos \frac{\pi}{2^n}$ lar orqali ifodalash mumkin. $\sin \frac{\pi}{2^n}$ ning o'rniga $S\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ ni, $\cos \frac{\pi}{2^n}$ ning o'rniga $C\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ ni qo'yamiz.

Natijada

$$\sin \frac{m\pi}{2^n} = S\left(\frac{m\pi}{2^n}\right)$$

tenglik hosil bo'las. Xuddi shu kabi

$$\cos \frac{m\pi}{2^n} = C\left(\frac{m\pi}{2^n}\right)$$

tengliklar hosil qilinadi.

x – ixtiyoriy haqiqiy son bo'lsin. Biz doimo ikkita $\frac{m\pi}{2^n}$ va $\frac{(m+1)\pi}{2^n}$ sonlarini

$$\frac{m\pi}{2^n} < x < \frac{(m+1)\pi}{2^n}$$

tengsizlik bajariladigan qilib tanlashimiz mumkin. Bundan sinusning monotonligidan foydalanib,

$$\sin \frac{m\pi}{2^n} < \sin x < \sin \frac{(m+1)\pi}{2^n}$$

tenglikni va bundan esa

$$S\left(\frac{m\pi}{2^n}\right) < \sin x < S\left(\frac{(m+1)\pi}{2^n}\right)$$

tenglikni yoza olamiz. Ammo $S(x)$ funksiyaning monotonligidan

$$S\left(\frac{m\pi}{2^n}\right) < S(x) < S\left(\frac{(m+1)\pi}{2^n}\right)$$

tengsizlikni yozamiz.

Faraz qilaylik $S(x) \neq \sin x$ bo'lsin. U holda

$$|S(x) - \sin x| < S\left(\frac{(m+1)\pi}{2^n}\right) - S\left(\frac{m\pi}{2^n}\right)$$

$S(x)$ uzluksiz funksiya bo'lgani uchun $S\left(\frac{(m+1)\pi}{2^n}\right) - S\left(\frac{m\pi}{2^n}\right)$ ayirmani

istalgancha kichik qilishimiz mumkin. Shuning uchun bu tengsizlikdan $S(x) = \sin x$ tenglik kelib chiqadi. Xuddi shu kabi $C(x) = \cos x$ tenglik ko'rsatiladi.

Bu mulohazalar bizni quyidagi tasdiqqa olib keladi: *agar x ni qandaydir burchakning o'lchovi sifatida qaralsa va $\sin x$ va $\cos x$ funksiyalar geometrik ko'rinishda aniqlansa, u holda $\sin x$ va $\cos x$ funksiyalar (1)-(4) munosabatlar o'rinli bo'ladi.*

Keltirilgan shartlarni qanoatlantiruvchi boshqa funksiyalar mavjud emasligi (1)-(4) funksional munosabatlarni trigonometrik funksiyalarni aniqlashga asos sifatida olish mumkin. $S(x)$ va $C(x)$ (1)-(4) munosabatlarni qanoatlantiruvchi funksiyalar bo'lsin. Aniqlaganimizga ko'ra

$$\sin x = S(x), \cos x = C(x)$$

tengliklar bilan biz funksional tenglamalar yordamida trigonometrik funksiyalarni aniqlaymiz.

2.5-§. Funksional tenglamalar yordamida qator koeffitsiyentlarini aniqlash

Agar qatorlar funksional tenglamalar ko'rinishdagi rekkurent formula bilan berilsa bunday qatorlarning noma'lum koeffitsiyentlarini funksional tenglamani yechish yordamida aniqlash mumkin ekanligini misollarda ko'rsatamiz.

Biz ushbu bo'limda shu xususda to'xtalamiz.

1-misol. Ushbu

$$F(z) = (1 - qz)(1 - q^2z)(1 - q^3z) \dots \quad (|q| < 1)$$

funksiya darajali qatorga

$$F(z) = A_0 + A_1z + A_2z^2 + A_3z^3 + \dots$$

ko'rinishda yoyilishi ma'lum.

$$F(z) = (1 - qz)F(qz)$$

funksional tenglama yordamida ko'rsatilgan qatorning A_n koeffitsiyentlarini aniqlang.

Yechilishi. Keltirilgan qator bo'yicha

$$F(qz) = (1 - q^2z)(1 - q^3z)(1 - q^4z) \dots (1 - q^nz) \dots = A_0 + A_1qz + A_2q^2z^2 + A_3q^3z^3 + \dots$$

bo'lgani uchun

$$\begin{aligned} (1 - qz)F(qz) &= A_0 + A_1qz + A_2q^2z^2 + A_3q^3z^3 + \dots - (A_0qz + A_1q^2z^2 + A_2q^3z^3 + A_3q^4z^4 + \dots) = \\ &= A_0 + (A_1 - A_0)qz + (A_2 - A_1)q^2z^2 + (A_3 - A_2)q^3z^3 + \dots \end{aligned}$$

bo'lgani uchun berilgan funksional tenglama

$$A_0 + (A_1 - A_0)qz + (A_2 - A_1)q^2z^2 + (A_3 - A_2)q^3z^3 + \dots = A_0 + A_1z + A_2z^2 + A_3z^3 + \dots$$

ko'rinishdagi ayniyatni beradi.

z ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsiyentlarini tenglash

$$(A_n - A_{n-1})q^n = A_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

tengliklarni beradi.

Bu tenglikdan

$$A_n = \frac{q^n}{q^n - 1} A_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Nihoyat oxirgi tenglikdan izlanayotgan

$$A_n = \frac{q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(q-1)(q^2-1)\dots(q^n-1)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

koeffitsiyentlarni aniqlaymiz.

2-misol. Ma'lumki

$$F(z) = (1 - qz)(1 - q^2z)(1 - q^3z)\dots \quad (|q| < 1)$$

funksiya ko'rinishda bo'lib, bu miqdorga teskari miqdor

$$\frac{1}{F(z)} = B_0 + B_1z + B_2z^2 + B_3z^3 + \dots$$

ko'rinishda qatorga yoyilishi ma'lum.

$$F(z) = (1 - qz)F(qz)$$

funksional tenglama yordamida ko'rsatilgan B_n koeffitsiyentlarini aniqlang.

Yechilishi. Keltirilgan qator bo'yicha

$$\frac{1}{F(qz)} = B_0 + B_1qz + B_2q^2z^2 + B_3q^3z^3 + \dots$$

bo'lgani uchun funksional tenglama

$$\frac{1}{F(qz)} = \frac{1 - qz}{F(z)}$$

ko'rinishga ega ekanligidan foydalanib,

$$\begin{aligned} B_0 + B_1qz + B_2q^2z^2 + B_3q^3z^3 + \dots &= B_0 + B_1z + B_2z^2 + B_3z^3 + \dots - (B_0qz + B_1q^2z^2 + B_2q^3z^3 + B_3q^4z^4 + \dots) = \\ &= B_0 + (B_1 - B_0q)z + (B_2 - B_1q)z^2 + (B_3 - B_2q)z^3 + \dots \end{aligned}$$

tenglikni yozamiz. Demak, berilgan funksional tenglama

$$B_0 + (B_1 - B_0q)z + (B_2 - B_1q)z^2 + (B_3 - B_2q)z^3 + \dots = B_0 + B_1qz + B_2q^2z^2 + B_3q^3z^3 + \dots$$

ko'rinishdagi ayniyatni beradi.

z ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsiyentlarini tenglash

$$(B_n - B_{n-1}q) = B_n q^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

tengliklarni beragi.

Bu tengliklardan

$$B_n = \frac{q}{1-q^n} B_{n-1}, \quad n=1,2,3,\dots$$

Nihoyat oxirgi tengliklardan izlanayotgan

$$B_n = \frac{q^n}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)}, \quad n=1,2,3,\dots$$

koeffisiyentlarni aniqlaymiz.

3-misol. Ushbu

$$(1+qz)(1+qz^{-1})(1+q^3z)(1+q^3z^{-1})(1+q^5z)(1+q^5z^{-1})\dots(1+q^{2n-1}z)(1+q^{2n-1}z^{-1}) = \\ = C_0 + C_1(z+z^{-1}) + C_2(z^2+z^{-2}) + \dots + C_n(z^n+z^{-n})$$

ayniyatdan $C_0, C_1, C_2, \dots$ koeffisiyentlarni aniqlang.

Yechilishi. Keltirilgan ayniyatning chap qismini ikki qismga ajratamiz:

$$f(z) = (1+qz)(1+q^3z)(1+q^5z)\dots(1+q^{2n-1}z),$$

va

$$g(z) = (1+qz^{-1})(1+q^3z^{-1})(1+q^5z^{-1})\dots(1+q^{2n-1}z^{-1})$$

Birinchi va ikkinchi munosabatlardan mos ravishda

$$f(q^2z) = \frac{1+q^{2n+1}z}{1+qz} \quad \text{va} \quad g(q^2z) = \frac{1+qz}{qz+q^{2n}} g(z)$$

funksional tenglamalarni hosil qilish qiyin emas. Demak, berilgan tenglikning chap qismi $\varphi_n(z)$ bilan belgilansa, u holda bu funksiya bu ikki funksiyalar ko'payitmasidan iborat bo'lgani uchun

$$\varphi_n(q^2z) = \frac{1+q^{2n+1}z}{qz+q^{2n}} \varphi_n(z)$$

funksional tenglamani qanoatlantirishini ko'rishimiz qiyin emas. Bundan,

$$C_\nu q^{2\nu+1}(1-q^{2n-2\nu}) = C_{\nu+1}(1-q^{2n+2\nu+2}) \quad C_n = q^{n^2}, \quad \nu = 0,1,2,\dots,n-1$$

Demak, qator koeffisiyentlari

$$C_\nu = \frac{(1-q^{2n+2\nu+2})(1-q^{2n+2\nu+4})\dots(1-q^{4n})}{(1-q^2)(1-q^4)\dots(1-q^{2n-2\nu})}, \quad \nu = 0,1,2,\dots,n-1$$

munosabat bilan aniqlanadi.

II bob bo'yicha xulosa

Ushbu bobda funksional tenglamalar yordamida trigonometrik funksiyalarni kiritish amalga oshirilgan. Ma'lumki umumta'lim maktablar matematika kursida asosiy trigonometrik funksiyalar geometrik tarzda aniqlanadi. Bunday geometrik aniqlashlar turli ko'rinishda bo'lishi mumkin. Masalan, qandaydir burchakning o'lchovi sifatida α sonini olib, α sonining trigonometrik funksiyalarini to'g'ri burchakli uchburchakning mos tomonlarining nisbati orqali, yoki bu nuqta koordinatalarini shu nuqtadan koordinata boshigacha bo'lgan masofaga nisbati kabi aniqlash mumkin. Geometriya bilan bog'liq bo'lmagan tarzda trigonometrik funksiyalarni aniqlashni differensial tenglamalar asosida amalga oshirish mumkin:

a) ikkinchi tartibli chiziqli

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0 \quad \text{tenglamaning}$$

$$x = 0 \text{ bo'lganda } y_1 = 1, \frac{dy_1}{dx} = 0$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi $y_1(x)$ yechimini kosinus deb nomlaymiz va $\cos x$ kabi belgilaymiz.

b) ikkinchi tartibli chiziqli

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0 \quad \text{tenglamaning}$$

$$x = 0 \text{ bo'lganda } y_2 = 0, \frac{dy_2}{dx} = 1$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi $y_2(x)$ yechimini sinus deb nomlaymiz va $\sin x$ kabi belgilaymiz. Trigonometrik funksiyaning keltirilgan bu ta'rifidan uning barcha xossalari o'rnatish mumkin va shuningdek x sonini qandaydir burchak o'lchovi sifatida qaralsa $\sin x$ va $\cos x$ funksiyalar yuqorida aytilgan geometric xossalarga ega bo'ladi.

III Bob. Funksional tenglamalarni yechish

3.1-§. Funksional tenglamalarni yechishga oid misollar

Biz bu paragrafda turli adabiyt va risolalardan to'plangan bir qator funksional tenglamalarni yechilishga oid misollardan namunalar keltiramiz.

1-misol. Barcha $x \in R$ lar uchun

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$$

xossaga ega bo'lgan uzluksiz $f(x)$ funksiyalarni toping.

Yechilishi. $x \rightarrow \frac{x}{2}$ almashtirishdan

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2^2}\right) = \dots = f\left(\frac{x}{2^n}\right) \quad \text{Bundan} \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0) \text{ bo'lgani}$$

uchun $f(x)$ – o'zgarmas funksiya.

$$\textbf{Javob:} \quad f(x) = C = \text{const.}$$

2-misol. Ushbu

$$f(x+y) = g(x) + h(y)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi uzluksiz funksiyalarni toping.

Yechilishi. Bu tenglama Koshi tenglamasiga keltirilishi mumkin, buning uchun

$$y=0, \quad h(0)=b \text{ deb olamiz. U holda berilgan tenglamani}$$

$$f(x) = g(x) + b \text{ yoki, } g(x) = f(x) - b$$

kabi yozishimiz mumkin.

$$x=0, \quad g(0)=a \text{ deb olsak, } x=0 \text{ bo'lganda berilgan tenglamadan}$$

$$f(y) = a + h(y) \text{ yoki } h(y) = f(y) - a$$

kabi yozishimiz mumkin. Natijada

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - a - b$$

tenglama hosil bo'ladi. Endi $f_0(z) = f(z) - a - b$ belgilash kiritilsa, u holda

$$f_0(x+y) = f_0(x) + f_0(y)$$

Koshi tenglamasi hosil bo'ladi. Bu tenglamaning yechimi $f_0(x) = cx$ bo'lgani uchun kiritilgan belgilashlarga ko'ra

$$f(x) = cx + a + b, g(x) = cx + a, h(x) = cx + b$$

yechimga ega bo'lamiz.

3-misol. Ushbu

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos y$$

tenglamani qanoatlantiruvchi $f(x)$ funksiyalarni toping.

Yechilishi. $y = \frac{\pi}{2}$ bo'lganda tenglikning o'ng tomoni nolga teng bo'ladi.

$$x = 0, y = t \quad \text{bo'lsa, tenglama } f(t) + f(-t) = 2a \cos t;$$

$$x = \frac{\pi}{2} + t, y = \frac{\pi}{2} \quad \text{bo'lsa, tenglama } f(\pi + t) + f(t) = 0;$$

$$x = \frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{2} + t \quad \text{bo'lsa, tenglama } f(\pi + t) + f(-t) = -2b \sin t$$

tenglamaga o'tadi. Bu yerda $a = f(0)$, $b = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ belgilashlar kiritilgan.

Hosil bo'lgan tenglamalardan berilgan tenglamaning yechimi uchun $f(t) = a \cos t + b \sin t$ funksiyani hosil qilamiz.

$$\textbf{Javob: } f(t) = a \cos t + b \sin t$$

4-misol. Maxkamlangan a soni va ixtiyoriy x uchun

$$f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $f(x)$ davriy funksiya ekanligini isbotlang.

Yechilishi.

$$f(x+2a) = \frac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)} = \frac{1+\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\frac{1+f(x)}{1-f(x)}} = -\frac{1}{f(x)},$$

$$f(x+4a) = -\frac{1}{f(x+2a)} = f(x)$$

tengliklardan $f(x)$ funksiya davriy bo'lib, uning davri $4a$ ga teng.

5-misol. Ushbu $p(x+1)=p(x)+2x-1$ tenglikni qanoatlantiruvchi $p(x)$ ko'phadlarni toping.

Yechilishi. Berilgan tenglamani $p(x)=x^2$ funksiya qanoatlantiradi. Berilgan tenglamaning boshqa yechimlari mavjudmi? kabi savol tug'ilishi tabiiy.

Shuning uchun $f(x)=p(x)-x^2$ belgilash kiritsak,

$$f(x+1)=p(x+1)-(x+1)^2=p(x)+2x+1-(x+1)^2=p(x)-x^2=f(x) \quad \text{bo'lib,}$$

bundan $f(x)=C=const$. Demak, $p(x)=x^2+C$.

Javob: $p(x)=x^2+C$.

6-misol. Barcha $x \in R$ lar uchun aniqlangan va ixtiyoriy x, y lar uchun

$$xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x)f(y)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi $f(x)$ uzluksiz funksiyani toping.

Yechilishi. $y=x \Rightarrow f(x)=f^2(x) \Rightarrow f(x)(f(x)-1)=0$, demak, barcha x lar uchun $f(x) \equiv 0$ va $f(x) \equiv 1$ uzluksiz yechimlardir. Uzilishga ega bo'lgan ko'plab yechimlar ham mavjud. R ning ixtiyoriy A qism to'plami uchun

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{agar } x \in A \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } x \in R \setminus A \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

Ammo bu ziddiyatga olib keladi, chunki $y=-x$ bo'lganda $f(-x)=f(x)$ bo'lib, $f(x)$ —juft funksiyadir.

Javob: $f(x) \equiv 0$ va $f(x) \equiv 1$

7-misol. Barcha x, y lar uchun

$$f(x)f(y)=f(x-y)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi noldan farqli $f(x)$ funksiyani toping.

Yechilishi. $y=0 \Rightarrow f(x)f(0)=f(x)$ tenglikdan $f(x)$ aynan noldan farqli yechim bo'lgani uchun $f(0)=1$.

$y = x \Rightarrow f^2(x) = f(0) = 1$ tenglikdan $f(x) \equiv -1$ va $f(x) \equiv 1$ uzluksiz yechimlarni hosil qilamiz. Shu bilan birga uzilishga ega bo'lgan yechimlar ham mavjud. Masalan, R ning ixtiyoriy A qism to'plami uchun

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{agar } x \in A \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } x \in R \setminus A \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

yechimni olishimiz mumkin.

Javob: $f(x) \equiv -1$ va $f(x) \equiv 1$

8-misol. $x > 0$ soni uchun

$$f(xy) = xf(y) + yf(x)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi $f(x)$ funksiyani toping.

Yechilishi. $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ belgilash kiritsak,

$$g(xy) = \frac{f(xy)}{xy} = \frac{xf(y) + yf(x)}{xy} = \frac{f(y)}{y} + \frac{f(x)}{x} = g(x) + g(y)$$

Koshi tenglamasiga kelimiz. Bu tenglamaning yechimi $g(x) = C \ln x$ bo'lgani uchun berilgan tenglamaning yechimi $f(x) = Cx \ln x$ bo'ladi.

Javob: $f(x) = C \ln x$

9-misol. Ushbu

$$f(x+y) + f(x-y) = 2[f(x) + f(y)]$$

tenglamani qanoatlantiruvchi $f(x)$ funksiyani toping.

Yechilishi. $y = 0 \Rightarrow 2f(x) = 2f(x) + 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

kelib chiqadi.

$$y = x \Rightarrow f(2x) + f(0) = 4f(x) \Rightarrow f(2x) = 2^2 f(x)$$

matematik induksiya usuli bilan har bir $n \in N$ uchun

$$f(nx) = n^2 f(x) \quad (1)$$

ekanligini ko'rsatishimiz mumkin. $x = \frac{p}{q}$ – ratsional son bo'lsa, u holda $q \cdot x = p \cdot 1$

bo'lgani uchun $f(q \cdot x) = f(p \cdot 1)$, bundan esa (1) ga asosan $q^2 f(x) = p^2 f(1)$, yoki,

$f(x) = \frac{p^2}{q^2} f(1) = f(1)x^2$. $a = f(1)$ belgilash kiritsak berilgan tenglamaning yechimi

$f(x)=ax^2$ dan iborat bo'ladi. Bevosita tekshirish bu funksiya berilgan tenglamani qanoatlantirishi kelib chiqadi.

$$\textbf{Javob: } f(x)=ax^2$$

10-misol. Ushbu

$$f(x+y)-f(x-y)=2f(y)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi $f(x)$ funksiyaning toping.

$$\textbf{Yechilishi. } y=0 \Rightarrow f(x)-f(x)=2f(0) \Rightarrow f(0)=0$$

kelib chiqadi.

$$y=x \Rightarrow f(2x)-f(0)=2f(x) \Rightarrow f(2x)=2f(x)$$

matematik induksiya usuli bilan har bir $n \in N$ uchun

$$f(nx)=nf(x) \quad (1)$$

ekanligini ko'rsatishimiz mumkin. $x=\frac{p}{q}$ - ratsional son bo'lsa, u holda $q \cdot x = p \cdot 1$

bo'lgani uchun $f(q \cdot x)=f(p \cdot 1)$, bundan esa (1) ga asosan $qf(x)=pf(1)$, yoki,

$$f(x)=\frac{p}{q}f(1)=f(1)x. \quad a=f(1) \text{ belgilash kiritsak berilgan tenglamaning yechimi}$$

$f(x)=ax$ dan iborat bo'ladi. Bevosita tekshirish bu funksiya berilgan tenglamani qanoatlantirishi kelib chiqadi.

$$\textbf{Javob: } f(x)=ax$$

11-misol. Ushbu

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi $f(x)$ funksiyaning toping.

Yechilishi.

$$y=x \Rightarrow f(2x)+f(0)=2f(x) \Rightarrow f(2x)=2f(x)-f(0)$$

Endi berilgan tenglamada x ni $2x$ bilan almashtirsak $y=x$ bo'lganda

$$f(3x)+f(x)=2f(2x), \text{ yoki } f(3x)=3f(x)-2f(0) \text{ tenglikni hosil}$$

qilamiz. Matematik induksiya usuli bilan har bir $n \in N$ uchun

$$f(nx) = nf(x) - (n-1)f(0) \quad (1)$$

ekanligini ko'rsatishimiz mumkin. $x = \frac{p}{q}$ - ratsional son bo'lsa, u holda $q \cdot x = p \cdot 1$

bo'lgani uchun $f(q \cdot x) = f(p \cdot 1)$, bundan esa (1) ga asosan

$$qf(x) - (q-1)f(0) = pf(1) - (p-1)f(0),$$

yoki bundan

$$f(x) = \frac{p}{q} f(1) - \frac{p-q}{q} f(0),$$

yoki

$$f(x) = xf(1) + (x-1)f(0)$$

Endi $a = f(0) + f(1), b = -f(0)$ belgilashlar kiritib berilgan tenglamaning yechimi $f(x) = ax + b$ chiziqli funksiyadan iborat bo'ladi. Bevosita tekshirish bu funktsiya berilgan tenglamani qanoatlantirishi kelib chiqadi.

$$\textbf{Javob: } f(x) = ax + b$$

12-misol. Ushbu

$$f(x+y) = \frac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}$$

tenglamani qanoatlantiruvchi $f(x)$ funktsiyani toping.

Yechilishi. Berilgan tenglamani

$$\frac{1}{f(x+y)} = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(y)}$$

ko'rinishda yozib, $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ belgilash kiritilsa, berilgan tenglama

Koshining

$$g(x+y) = g(x) + g(y)$$

tenglamasiga o'tadi. Bu tenglamaning yechimi $g(x) = cx$ bo'lgani uchun berilgan

tenglamaning yechimi $f(x) = \frac{a}{x}$ bu yerda $a = \frac{1}{c}$

$$\textbf{Javob: } f(x) = \frac{a}{x}$$

13-misol. Ushbu

$$f^2(x) = f(x+y)f(x-y)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi $f(x)$ funksiyani toping.

Yechilishi. Berilgan tenglamani har ikki qismini logarifmlab,

$$2\ln f(x) = \ln f(x+y) + \ln f(x-y)$$

tenglamaga $g = \ln \circ f$ belgilash bilan

$$2g(x) = g(x+y) + g(x-y)$$

Koshi tenglamasiga kelamiz. Bu tenglamaning yechimi $g(x) = ax + b$ bo'lgani uchun kiritilgan almashtirishga ko'ra berilgan tenglamaning yechimi $f(x) = Ce^{ax}$ ko'rinishda bo'ladi.

$$\textbf{Javob: } f(x) = Ce^{ax}$$

14-misol. $x \neq 0,1$ soni uchun

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x \quad (1)$$

tenglik bajariladigan barcha $f(x)$ funksiyani toping.

Yechilishi. Berilgan tenglamada $x \rightarrow \frac{1}{1-x}$ almashtirish bajarilsa, (1)

tenglama

$$f\left(1 - \frac{1}{x}\right) + f(x) = 1 - \frac{1}{x} \quad (2)$$

tenglamaga (2) $x \rightarrow \frac{1}{1-x}$ almashtirishda

$$f\left(1 - \frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x} \quad (3)$$

tenglamaga o'tadi.

Endi (1) va (2) tenglamalarni hadlab qo'shib, (3) e'tiborga olinsa, u holda

$$2f(x) + \frac{1}{1-x} = x + 1 - \frac{1}{x}$$

tenglikni va bundan berilgan tenglamaning

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(1 + x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} \right)$$

yechimini hosil qilamiz.

15-misol. Ushbu

$$f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi uzluksiz funksiyalarni toping.

Yechilishi. Berilgan tenglamada x va y ning o'rinlari almashtirilsa, f funksiyaning juft funksiya ekanligi kelib chiqadi.

$$x = y \Rightarrow f(0) = f^2(x) + g^2(x) \quad \text{va} \quad x = y = 0 \Rightarrow f(0) = f^2(0) + g^2(0)$$

Shu bilan birga $f(0) = 1 \Rightarrow g(0) = 0$.

Agar berilgan tenglamada $y = 0$ bo'lsa

$$f(x) = f(x)f(0) + g(x)g(0)$$

Agar berilgan tenglamada $y = 0$ bo'lsa

$$f(2x) = f(x)f(-x) + g(x)g(-x)$$

Oxirgi tenglik $f(x) = \cos x, g(x) = \sin x$ funksiyalar uchun o'rinli.

Javob: $f(x) = \cos x, g(x) = \sin x$

16-misol. Ushbu

$$f(x+y)f(x-y) = [f(x)f(y)]^2$$

tenglikni qanoatlantiruvchi barcha uzluksiz funksiyalarni toping.

Yechilishi. Berilgan tenglamaning har ikkala qismini logarifmlaymiz. Natijada

$$\ln f(x+y) + \ln f(x-y) = 2\ln f(x) + 2\ln f(y)$$

tenglama hosil bo'ladi. Endi $g = \ln \circ f$ belgilash kiritilsa, u holda

$$g(x+y) + g(x-y) = 2g(x) + 2g(y)$$

tenglama hosil bo'ladi. Ammo

$$(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2(x^2 + y^2)$$

ayniyat e'tiborga olinsa, u holda $g(x) = ax^2$ deb olishimiz mumkin. U holda kiritilgan belgilashga ko'ra berilgan tenglamaning yechimi $f(x) = e^{ax^2}$.

$$\text{Javob: } f(x) = e^{ax^2}$$

17-masala. Arifmetik progressiyaning uchta: $x, x+y, x+2y$ hadlari geometrik progressiyaning uchta: $f(x), f(x+y), f(x+2y)$ hadlariga o'tkazuvchi, ya'ni

$$[f(x+y)]^2 = f(x)f(x+2y)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funksiyani toping.

Yechilishi. Tenglamada $x \rightarrow x-y$ almashtirish bajarilsa, u holda tenglama

$$f^2(x) = f(x-y)f(x+y)$$

ko'rinishni oladi. $f(x) > 0$ deb faraz qilib, bu tenglamaning har ikkala qismini logarimlasak,

$$2 \ln f(x) = \ln f(x+y) + \ln f(x-y)$$

tenglama hosil bo'ladi. Endi oxirgi tenglamada $g = \ln \circ f$ almashtirish bajarilsa, oldindan yechilgan

$$2g(x) = g(x+y) + g(x-y)$$

tenglamani hosil qolamiz. Bu tenglamaning yechimi $g(x) = ax + b$ bo'lgani uchun kiritilgan o'rin almashtirishga ko'ra berilgan tenglamaning yechimi

$$f(x) = Ce^{ax} \text{ dan iborat.}$$

$$\text{Javob: } f(x) = Ce^{ax}$$

18-misol. Ushbu

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi barcha uzluksiz funksiyalarni toping.

Yechilishi. Agar $f(x) = g(x) - 1$ belgilash kiritilsa berilgan tenglama Koshining

$$g(x+y) = g(x)g(y)$$

tenglamasiga o'tadi. Bu tenglamaning yechimi $g(x) = a^x$ bo'lgani uchun berilgan tenglamaning yechimi $f(x) = a^x - 1$ dan iborat.

Javob: $f(x) = a^x - 1$

19-misol. Ushbu

$$f^2(x) = 1 + f(x+1)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi funksiyaga misol keltiring.

Yechilishi. $f(x) = ax + b$ – chiziqli funksiya bo'lsin. U holda

$$(ax+b)^2 = 1 + a(x+1) + b. \text{ Bundan}$$

$$a^2x^2 + (2ab - a)x + b^2 - a - b - 1 = 0$$

tenglik barcha $x \in R$ lar uchun bajarilishi kerak. Demak,

$$a = 0, b^2 - b - 1 = 0 \Rightarrow b = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Javob: $f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

20-masala. Arifmetik progressiyaning uchta hadini arifmetik progressiyaning uchta hadlariga o'tkazuvchi funksiyaga misol keltiring.

Yechilishi. Arifmetik progressiyaning dastlabki uchta hadi f almashtirishda arifmetik progressiya tashkil etuvchi $f(x), f(x+y), f(x+2y)$ sonlariga o'tsin. U holda arifmetik progressiyaning ta'rifiga asosan

$$f(x) + f(2x+y) = 2f(x+y)$$

funksional tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglamada $y = 0$ bo'lsa, $f(2x) = 2f(x)$ tenglamaga va induksiya bo'yicha

$$f(nx) = nf(x)$$

funksional tenglamaga ega bo'lamiz.

$x = \frac{p}{q}$ – ratsional son bo'lsa, u holda $q \cdot x = p \cdot 1$ bo'lgani uchun

$f(q \cdot x) = f(p \cdot 1)$, bundan esa $qf(x) = pf(1)$, yoki, $a = f(1)$ belgilash kiritsak berilgan

tenglamaning yechimi $f(x)=ax$ dan iborat bo'ladi. Bevosita tekshirish bu funktsiya berilgan tenglamani qanoatlantirishi kelib chiqadi.

Javob: $f(x)=ax$

21-misol. Ushbu

$$3f(2x+1)=f(x)+5x$$

tenglikni qanoatlantiruvchi funktsiyani toping.

Yechilishi. Berilgan tenglamaning yechimini $f(x)=ax+b$ ko'rinishda izlaymiz. U holda berilgan tenglamadan

$$6ax+3a+3b=(a+5)x+b$$

tenglikka kelamiz. Bu tenglik barcha x lar uchun $6a=a+5$, $3a+3b=b$ bo'lganda, ya'ni $a=1, b=-\frac{3}{2}$ bo'lganda bajariladi. bundan berilgan tenglamaning yechimi

$$f(x)=x-\frac{3}{2} \text{ ekanligi kelib chiqadi.}$$

Javob: $f(x)=x-\frac{3}{2}$.

22-misol. $x=0$ nuqtada chegaralangan,

$$f(x)-\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)=x^2$$

tenglamani qanoatlantiruvchi funktsiyani toping.

Yechilishi. Berilgan tenglikda ketma ket x ni $\frac{x}{2}, \frac{x}{2^2}, \frac{x}{2^3}, \dots, \frac{x}{2^n}$ larga almashtirib, hamda hosil bo'lgan tengliklarni ketma ket $\frac{1}{2}$ ga ko'paytirib

$$f(x)-\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)=x^2,$$

$$\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2^2}f\left(\frac{x}{2^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2,$$

$$\frac{1}{2^2}f\left(\frac{x}{2^2}\right)-\frac{1}{2^3}f\left(\frac{x}{2^3}\right)=\frac{1}{2^2}\left(\frac{x}{2^2}\right)^2,$$

.....

$$\frac{1}{2^n}f\left(\frac{x}{2^n}\right)-\frac{1}{2^{n+1}}f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)=\frac{1}{2^n}\left(\frac{x}{2^n}\right)^2$$

tengliklarni yozamiz. Bu tengliklarni hadlab qo'shib,

$$f(x) - \frac{1}{2^{n+1}} f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = x^2 \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \dots + \frac{1}{2^{3n}}\right)$$

tenglikka kelamiz. Bunda $x \rightarrow 0$ da $f(x)$ yaqinlashuvchi, $n \rightarrow \infty$ da esa bu tenglikdan $f(x) - 0 = x^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^3}}$ yoki, $f(x) = \frac{8}{7} x^2$ natijaga erishamiz.

$$\textbf{Javob: } f(x) = \frac{8}{7} x^2$$

23-misol. Ushbu

$$f(x) - \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) = x - x^2$$

tenglamani qanoatlantiruvchi, har qanday chekli oraliqda chegaralangan funksiyani toping.

Yechilishi. 1-misoldagidek bajarilgan ishlarni bajarib,

$$f(x) - \frac{1}{2^{n+1}} f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = x \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{2n}}\right) - x^2 \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \dots + \frac{1}{2^{3n}}\right)$$

tenglikka kelamiz. Bunda $f(x)$ chegaralangan bo'lib, $n \rightarrow \infty$ da esa bu tenglikdan $f(x) - 0 = x \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^2}} - x^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^3}}$ yoki, $f(x) = \frac{4}{3} x - \frac{8}{7} x^2$ natijaga erishamiz.

$$\textbf{Javob: } f(x) = \frac{4}{3} x - \frac{8}{7} x^2$$

24-misol. $a \neq \pm 1$ haqiqiy soni va $x \neq 1$ da aniqlangan $\varphi(x)$ funksiya uchun

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right) = af(x) + \varphi(x)$$

tenglikdan $f(x)$ funksiyani toping.

Yechilishi. $y = \frac{x}{x-1}$ belgilash kiritilsa, $x = \frac{y}{y-1}$ va

$$f(y) = af\left(\frac{y}{y-1}\right) + \varphi\left(\frac{y}{y-1}\right) = a(af(y) + \varphi(y)) + \varphi\left(\frac{y}{y-1}\right),$$

yoki

$$(1-a^2)f(y) = a\varphi(y) + \varphi\left(\frac{y}{y-1}\right)$$

bo'ladi. Bundan esa $f(y) = \frac{a\varphi(y) + \varphi\left(\frac{y}{y-1}\right)}{1-a^2}$ bo'ladi.

$$\textbf{Javob: } f(x) = \frac{a\varphi(x) + \varphi\left(\frac{x}{x-1}\right)}{1-a^2}.$$

25-misol. Qanday funksiya

$$xf(x) + 2xf(-x) = -1$$

tenglik bilan xarakterlanadi?

Yechilishi. $x \rightarrow -x$ almashtirishlar bajarilsa, u holda

$$-xf(-x) - 2xf(x) = -1$$

tenglama hosil bo'ladi. Ikkinchi tenglamani 2 ga ko'paytirib birinchi tenglamaga qo'shilsa $-3f(x) = -3$ va bundan izlangan funksiya $f(x) = \frac{1}{x}$ ekanligi kelib chiqadi.

$$\textbf{Javob: } f(x) = \frac{1}{x}.$$

26-misol. Ushbu

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$$

tenglikni qanoatlantiruvchi barcha uzluksiz funksiyalarni toping.

Yechilishi. Agar $f(x) = ax^2 + bx + c$ bo'lsa, u holda berilgan tenglamadan hisoblashlar natijasida

$$(2a-1)xy = c$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglik $a = \frac{1}{2}, c = 0$ bo'lganda barcha x, y lar uchun o'rinli bo'ladi. Demak, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx$ berilgan tenglamaning yechimi bo'ladi.

$$\textbf{Javob: } f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx$$

27-misol. Agar $q > 0, q \neq 1$ bo'lsa

$$f(x) = f(qx)$$

tenglamani yeching.

Yechilishi. Berilgan tenglamada $x = q^t, f(x) = \varphi(t)$ belgilash kiritilsa, tenglama $f(q^t) = f(q^{t+1})$ yoki $\varphi(t) = \varphi(t+1)$ ko'rinishni oladi. Bundan izlangan funksiya davri 1 ga teng bo'lgan funksiya ekanligini ko'rsatadi. Demak,

$$f(x) = \varphi(t) = p(t) = p\left(\frac{\ln|x|}{\ln q}\right),$$

bu yerda p – davri 1 ga teng bo'lgan ixtiyoriy funksiya.

$$\textbf{Javob: } f(x) = p\left(\frac{\ln|x|}{\ln q}\right),$$

bu yerda p – davri 1 ga teng bo'lgan ixtiyoriy funksiya.

3.2-§. Turli xil turnir va matematik olimpiadalarda talabalar yechishi uchun taklif etilgan misollardan namunalar

Dastlab viloyat olimpiadalarida yechish uchun tavsiya etilgan quyidagi misollarni keltiramiz:

1-misol. Agar $x, y \in R$ bo'lsa, ixtiyoriy x, y larda $f(x-y) = f(x) + f(y) - 2xy$ shartni qanoatlantiruvchi barcha f funksiyalarni toping.

Yechilishi. Berilgan tenglamada $x = 2y$ deb olinsa, $f(2y) = 4y^2$ tenglik hosil bo'ladi. Bundan $f(x) = x^2$ ekanligi kelib chiqadi.

$$\textbf{Javob: } f(x) = x^2.$$

2-misol. $f(x)$ funksiya ixtiyoriy x uchun aniqlangan va quyidagi xossalarga ega:

$$1) f(1) = 2,$$

$$2) f(x+6) \geq f(x)+6,$$

$$3) f(x+1) \leq f(x)+1;$$

$f(2010)$ ning qiymatini toping.

Yechilishi. Masalaning 2) va 3) shartlaridan $f(x)+6 \leq f((x+5)+1) \leq f(x+5)+1$, ya'ni $f(x+5) \geq f(x)+5$. Hosil bo'lgan tengsizlik va 3) shartdan $f(x)+5 \leq f((x+4)+1) \leq f(x+4)+1$, ya'ni $f(x+4) \geq f(x)+4$. Xuddi shu tartibni davom ettirsak, $f(x+1) \geq f(x)+1$ bo'ladi. Bu va 3) shartdan

$$f(x+1) = f(x)+1$$

funksional tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamaning yechimini $f(x) = ax + b$ ko'rinishida izlab, $a = b = 1$ ekanligini aniqlaymiz. Demak, $f(x) = x+1$ bo'lgani uchun $f(2010) = 2011$ bo'ladi.

Javob: 2011

3-misol. $\forall x \in R$ haqiqiy sonlari uchun ushbu

$$(x+1)P(x-1) + (x-1)P(x+1) = 2xP(x)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi barcha $P(x)$ ko'phadlarni toping.

Yechilishi. 1-usul. $x = 0$ bo'lsa, u holda $P(-1) = P(1)$, $x = 1$ bo'lsa, u holda $P(0) = P(1)$ bo'lgani uchun $P(x)$ ko'phadni $P(x) = cx(x^2 - 1)$ ko'rinishida izlash mumkin. Bevosita tekshirish $P(x) = cx(x^2 - 1)$ ko'phad berilgan ayniyatni qanoatlantirishini ko'rsatadi.

2-usul. Berilgan ayniyatning har ikkala qismini $x^2 - 1$ ifodaga bo'linsa, u holda

$$\frac{P(x-1)}{x-1} + \frac{P(x+1)}{x+1} = \frac{2x^2}{x^2-1} \cdot \frac{P(x)}{x},$$

yoki

$$f(x-1) + f(x+1) = \frac{2x^2}{x^2-1} f(x)$$

tenglikni beradi. $f(x)$ ko'phadni $f(x) = ax^2 + bx + c$ ko'rinishda izlaymiz. Natijada

$$a = \frac{x^2}{x^2-1} (ax^2 + bx + c) \text{ tenglikni hosil qilamiz.}$$

Bundan $c = -a, b = 0$ ekanligini aniqlaymiz.

$$\textbf{Javob: } P(x) = ax(x^2 - 1)$$

Endi xorijda talabalar o'rtasida o'tkazilgan xorijning turli matematik olimpiadalarda yechish uchun tavsiya etilgan funksional tenglamalarga oid bir qator misollardan namunalar keltiramiz. Misollarning aksariyati [14-16] adabiyotlardan tanlangan.

1. (MDPI) Uzlusiz funksiyalar sinfida

$$f(x) = f(2x)$$

tenglamani yeching.

2. (MIIT) $x = 0$ nuqtada chegaralangan

$$f(x) - \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) = x^2$$

tenglamani qanoatlantiruvchi funksiyani toping.

3. (MEI) Ushbu

$$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)}$$

funksional tenglamani qanoatlantiruvchi barcha differensiallanuvchi funksiyalarni toping.

4. (MEI) Ixtiyoriy x_1 va x_2 lar uchun

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

munosabatni qanoatlantiruvchi barcha uzlusiz $f(x)$ funksiyalarni toping.

5. (MDPI) $a \neq 0,1$ haqiqiy son bo'lsin. $x \neq 1$ bo'lganda aniqlangan va

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right) = af(x) + \varphi(x) \quad (1)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi barcha $f(x)$ funksiyalarni toping.

6. (MDPI) $x > 0$ yarim o'qda

$$f(x^n) = \alpha f(x)$$

funksional tenglamani yeching, bu yerda α – maxkamlangan haqiqiy son, n – natural son.

7. (Mexmat) Barcha x lar uchun R da

$$f(x) = f(\sin x)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi barcha uzluksiz $f(x)$ funksiyalarni toping.

8. (KDU) $x = 0$ nuqtada uzluksiz va barcha $x, y \in R$ lar uchun

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$$

munosabatni qanoatlantiruvchi barcha uzluksiz $f: R \rightarrow R$ funksiyalarni toping.

9. (Mexmat) Barcha $x, y \in R$ lar uchun $P(x)$ ko'phad

$$P^2(x) - P^2(y) = P(x+y) \cdot P(x-y)$$

tenglikni qanoatlantiradi. Qandaydir a soni uchun $P(x) \equiv ax$ ekanligini isbotlang.

10. (KDU) $f(x)$ funksiya $[0, 1]$ kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lib, $x \in R$ uchun

$$f(x) = \frac{1}{3} f\left(\frac{x}{3}\right) + f\left(\frac{x+1}{3}\right) + f\left(\frac{x+2}{3}\right)$$

tenglikni qanoatlantiradi. Shu bilan birga $f\left(\frac{1}{\pi}\right) = 1$. $f(x)$ funksiyaning aniqlang.

11. (Moskva I-III kurs) Barcha $x \in R$ lar uchun

$$f(f(x)) = e^{-x}$$

munosabatni qanoatlantiruvchi butun haqiqiy son o'qida aniqlangan uzluksiz $f(x)$ funksiya mavjudmi?

12. (MEI) Ushbu

$$\varphi = \int_0^b \varphi(x) dx + \psi \quad x = 0$$

tenglamani qanoatlantiruvchi barcha $\varphi \in C[a, b]$ funksiyalarni toping, bu yerda $\varphi \in C[a, b]$ ma'lum funksiya.

13. (Mexmat) $\varphi(t)$ funksiya

$$1 - \varphi(t) + \sum_{i=1}^n a_i t^{k_i} \varphi(t)^{k_i}$$

tenglamani qanoatlantiradi, bu yerda a_i – haqiqiy sonlar, k_i – musbat butun son.

Agar

$$\varphi(t)f(t\varphi(t)) = \frac{1}{1-t}$$

bo'lsa $f(t)$ funksiyani toping.

12. (UDN) $p(x): [0,1] \rightarrow R$, $p(0) = p(1) = 0$ va barcha $x, y \in [0,1]$ lar uchun

$$p\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq p(x) + p(y).$$

a) Barcha $x \in [0,1]$ lar uchun $p(x) \geq 0$ ekanligini va $p(x)$ funksiya $[0,1]$ kesmada cheksiz ko'p nollarga ega bo'lishini isbotlang;

b) Aynan nolga teng bo'lmagan $p(x)$ funksiyaga misol keltiring.

13. (Nyu-York, 1978) $f: R \rightarrow R$ funksiya

$$f(xy) = \frac{f(x) + f(y)}{x+y}, \quad x, y \in R, \quad x+y \neq 0$$

ayniyatni qanoatlantiradi. $f(x) \neq 0$ shartni qanoatlantiruvchi $x \in R$ soni mavjudmi?

14. (Bolgariya, 1968) Ushbu

$$xf(y) + yf(x) \equiv (x+y)f(x)f(y)$$

ayniyatni qanoatlantiruvchi barcha $f: R \rightarrow R$ funksiyalarni toping.

15. (Germaniya, 1982) M bilan $f(0) \neq 0$ shartni va $n, m \in Z$ sonlari uchun

$$f(n)f(m) \equiv f(n+m) + f(n-m)$$

ayniyatni qanoatlantiruvchi $f: Z \rightarrow R$ funksiyalar to'plami berilgan.

a) $f(1) = 5/2$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $f(n) \in M$ funksiyalarni toping;

b) $f(1) = \sqrt{3}$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $f(n) \in M$ funksiyalarni toping.

16. (Avstriya-Polsha, 1979) Ushbu

$$f(n+m) + f(n-m) \equiv f(3n), \quad n, m \in Z^+, \quad n \geq m$$

ayniyatni qanoatlantiruvchi barcha $f: Z^+ \rightarrow R$ funksiyalarni toping.

17. (Nyu-York, 1976) $f, g: R \rightarrow R$ funksiyalar o'zgaras sonidan farqli bo'lib, $x, y \in R$ sonlari uchun

$$\begin{aligned}f(x+y) &\equiv f(x) \cdot g(y) + g(x) \cdot f(y), \\g(x+y) &\equiv g(x) \cdot g(y) - f(x) \cdot f(y)\end{aligned}$$

ayniyatlarni qanoatlantiradi. $f(0)$ va $g(0)$ ning mumkin bo'lgan qiymatlarini toping.

18. (Lyuksemburg, 1980) $f(1)=2$ shartni va $x, y \in Q$ sonlari uchun

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$$

ayniyatni qanoatlantiruvchi barcha $f: Q \rightarrow Q$ funksiyalarni toping.

19. (Yugoslaviya, 1983) $f: Z \rightarrow R$ funksiya $n \in Z$ uchun

$$f(n) = \begin{cases} n-10, & \text{agar } n > 100 \text{ bo'lsa,} \\ f(f(n+11)), & \text{agar } n \leq 100 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

shart bajariladi. Ixtiyoriy $n \leq 100$ uchun $f(n)=91$ ekanligini isbotlang.

20. (Xindiston, 1990) Nomanfiy sonlar to'plamida f funksiya aniqlangan bo'lib, bu funksiya o'z qiymatlarini shu to'plamdan qabul qiladi. Quyidagilar ma'lum:

a) nomanfiy x sonlari uchun

$$x - f(x) = 19 \left\lfloor \frac{x}{19} \right\rfloor - 90 \left\lfloor \frac{f(x)}{90} \right\rfloor;$$

b) $1900 < f(1990) < 2000$. $f(1990)$ ning qabul qiladigan qiymatlari to'plamini toping.

21. (Ruminiya, 1979) $f, g, h: N \rightarrow N$ funksiyalar quyidagi:

a) $h(n)$ funksiya $n \in N$ nuqtada bittadan ortiq qiymatni qabul qilmaydi;

b) $g(n)$ funksiyaning qiymatlari N to'plamdan iborat;

c) $n \in N$ uchun $f(n) \equiv g(n) - h(n) + 1$

shartlarni qanoatlantiradi. $n \in N$ uchun $f(n) \equiv 1$ ayniyatni isbotlang.

22. (Ruminiya, 1978) $n \in N$ uchun $f(f(n)) \equiv n^2$ ayniyatni

qanoatlantiruvchi $f: N \rightarrow N$ funksiya mavjudligini isbotlang.

23. (AQSh, 1982) $f_k(x, y) = \frac{x^k + y^k + (-1)^k (x+y)^k}{k}$ belgilash kiritamiz.

$m+n \neq 0$ tengsizlikni va $x, y \in R$ sonlari uchun

$$f_m(x, y) f_n(x, y) \equiv f_{m+n}(x, y)$$

ayniyatni qanoatlantiruvchi noldan farqli barcha $m \leq n$ sonlarini toping.

Ko'rsatma. $m=2, n=3$ va $m=2, n=5$ juftlar ko'rsatilgan shartlarni

qanoatlantiradi.

24. (Belgiya, 1977) Ushbu

$$f(x+y) \equiv f(x) + f(y) + 2xy, \quad x, y \in R$$

ayniyatni qanoatlantiruvchi cheksiz marta differensiallanuvchi barcha $f: R \rightarrow R$ funksiyalarni toping.

III bob bo'yicha xulosa

Mazkur bobda hozirgi kunda turli xil matematik turnir va olimpiadalardan o`rin olgan funksional tenglamalarni yechish masalalari qaralgan. Misol tariqasida shu yil akademik litsey va kollej talabalari uchun o`tkazilgan viloyat olimpiadasida Ihtiyoriy $\forall x \in R$ haqiqiy sonlari uchun ushbu

$$(x+1)P(x-1) + (x-1)P(x+1) = 2xP(x)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi barcha $P(x)$ ko'phadlarni topish masalasi ham dissertatsiyadan o`rin olgan. Shuningdek bu bobda jahonning turli xil turnirlar va matematik olimpiadalarda talabalar yechishi uchun taklif etilgan funksional tenglamalarga oid misollar jamlangan.

Umumiy xulosa

Matematika fanida funksiyalarning ko'plab xossalari o'rganiladi. Ayrim xossalarini funksiyaning turli nuqtalaridagi qiymatlarini bog'lovchi tenglamalar yordamida ifodalash mumkin. Adabiyotlarda bunday tenglamalar funksional tenglamalar deyiladi. Masalan, o'zining aniqlanish sohasida juft, toq va davriy bo'lgan funksiyalar mos ravishda

$$f(x) = f(-x), \quad f(x) = -f(-x) \quad \text{va} \quad f(x) = f(x+T)$$

funksional tenglamalarni qanoatlantiradi. Shu bilan birga, bizga ma'lum bo'lgan x^n , a^x , $\log_a x$, $\operatorname{tg} x$ elementar funksiyalar mos ravishda

$$f(xy) = f(x)f(y), \quad f(x+y) = f(x)f(y), \quad f(xy) = f(x) + f(y), \\ f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)}$$

tenglamalarni qanoatlantirishini ko'rish qiyin emas.

Funksional tenglamalar ko'plab matematik turnir va olimpiadalarda berilib, bu funksional tenglamalarni qanoatlantiruvchi funksiyalarni topish talab qilinadi. Umuman aytganda funksional tenglamalarni yechishning traditsion usullari mavjud bo'lmasdan balki har bir olingan tenglamaga alohida qarash lozim bo'ladi.

Magistrlik dissertatsiyamizda asosan funksional tenglamalarni klassifikatsiyalashga e'tiborimizni qaratdik. Shu maqsadda eng sodda elementar funksional tenglamalar, klassik funksional tenglamalar hamda funksional tenglamalar yordamida qator koeffitsiyentlarini aniqlash, trigonometrik funksiyalarni aniqlash kabi bo'limlarga ajratdik. Shuning bilan birga turli xil turnirlar va matematika olimpiadalarda funksional tenglamalarni yechishga oid taklif qilingan misollardan namunalar keltirdik.

Mazkur ishimiz talabalarni turli xil matematik turnirlarga tayorlashda qo'llanma bo'lib xizmat qiladi deb hisoblaymiz.

Normativ huquqiy hujjatlar

1. O'zbekiston Respublikasining "Ta'lim to'g'risida"gi Qonuni. 29 avgust 1997 yil 464-1-son.
2. O'zbekiston Respublikasining "Kadrlar tayyorlash milliy dasturi to'g'risida"gi Qonuni. 29 avgust 1997 yil 463-1-son.
3. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining "Oliy malakali ilmiy va ilmiy-pedagog kadrlar tayyorlash va attestatsiyadan o'tkazish tizimini yanada takomillashtirish to'g'risida"gi 2012 yil 24 iyundagi PF-4456-sonli Farmoni.
4. O'zbekiston Respublikasining Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirining "Magistratura to'g'risidagi nizomni tasdiqlash haqidagi 2012 yil 29 oktabrdagi 419-sonli buyrug'i.

O'zbekiston Respublikasi Prezidenti Islom Abdug'aniyevich Karimovning asarlari.

5. Karimov I. A. O'zbekiston mustaqillikka erishish ostonasida – T. "O'zbekiston" 2012.
6. Karimov I. A. YUksak ma'naviyat yengilmas kuch. T. "Ma'naviyat" 2010.
7. Karimov I. A. Barkamol avlod orzusi – T. "O'zbekiston milliy ensiklopediyasi" 2000.
8. Karimov I.A. Barkamol avlod – O'zbekiston taraqqiyoti poydevori. T. 1997.

Darslik va o'quv qo'llanmalar.

9. Artur Engel Problem-Solving Strategies. 1998 Springer-Verlag New York
10. Туманов С.А. Поиски решения задач. М. «Просвещение», 1969 г.
11. A.A.Abduaxmedov, H.A.Nasimov, U.M.Nosirov, J.H.Husanov " Algebra va matematik analiz asoslari" I-qism, Toshkent O'qituvchi nashriyoti, 2001 yil

12. Лопшиц А.М. Функциональные уравнения.-Квант,1970 г. №1-2,30-35 с.
13. Котельников П.М. О функциональных уравнениях, определяющих тригонометрические функции. Математика в школе , 1951, №2, 1-12 с.
14. Ясинский В.А. Олимпиада математика, функциональные уравнения.Х.: Основа, 2005.
15. Андреев А.А. и др. Функциональные уравнения.-Самара: В мире науки,1999.
16. Бродский Я.С.,Слипенко А.К. Функциональные уравнения.-К.,Вища школа, 1983.
17. Ильин В.А. Методы решения функциональных уравнений// Соросовский образовательный журнал, 2001, №2,С.116-120.
18. Лихтарников Л.М.Элементарное введение в функциональные уравнения.- СПб.: Лань, 1977.-С.160.
19. Paul Vaderlind. Functional Equations for The Beginners. Stockholm University, 2005.
20. Titu Andreescu, Iurie Borieico. Functional Equations. Electronic Edition, 2007.
21. Ismailov Sh.Berkisheva L. Funksional tenglamalarni yechishning bir sodda usuli haqida // Fizika, Matematika, Informatika, 2/2013.-С. 57-62.
22. Садовничий В.А., Григорьян А.А.,Конягин. Задачи студенческих математических олимпиад. Изд-во МГУ, 1987.
24. Садовничий В.А., Подколызин А.С. Задачи студенческих математических олимпиад. Москва, Наука, 1978.
25. Зарубежные математические олимпиады. Под редакцией И.Н.Сергеева.Москва, Наука, 1987.

Ilmiy jurnallardagi maqollalar

1. Mo`minov G.M, Ahunova G.B, Yoqubov D. Klassik funksional tenglamalarni yechish. Fizika matematika va informatika fanlarini o`qitishning dolzarb muammolari mavzusidagi hududiy ilmiy uslubiy anjuman materiallari. Andijon 2013. 69-75 betlar.

2. Ahunova G.B Funksional tenglamalar yordamida qator koeffisientlarini aniqlash. ADU, Ilmiy habarnoma 2014 yil "Maxsus son"

3. Bahritdinov B, Axlimirzayev A, Ibragimov M, Axunova G. AnGU. « О применения формулы интегрирования по частям» "Oliy ta'lim sifati: muammolar va yechimlar" mavzusidagi respublika ilmiy amaliy konferensiya materiallari. Qo`qon 2014. 166-170 betlar.

Internet saytlari

<http://www.search.re.uz> - O`zbekiston axborotlarni izlab topish tizimi.

<http://www.atv.emmm.narod.ru> – Rossiya Federassiyasining matematik modellashtirish bo'yicha turli mavzulardagi ma'lumotlarni olishni ta'minlaydi.

<http://www.ziyonet.uz>

<http://www.adu.uz> – (Andijon Davlat Universiteti)

<http://www.google.uz>