



O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA

O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

ZAHIRIDDIN MUHAMMAD BOBUR NOMIDAGI

ANDIJON DAVLAT UNIVERSITETI

PEDAGOGIKA FAKULTETI

5141600 – BTSTI TA'LIM YO'NALISHI

4-KURS 2-GURUH TALABASI

JUMABOEVA XILOLANING

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Mavzu: “Arifmetik amallarni peanoaksiomalari asosida kiritilishi”

Ilmiy rahbar:

K.Mamadaliev

Andijon – 2013

Mundarija

Kirish.....	3
I bob. Boshlang‘ich sinflarda arifmetik amallarni kiritilishi.....	5
1.1. Boshlang‘ich sinflarda arifmetik material mazmuni.....	5
1. 2. Boshlang‘ich sinflarda arifmetik amallarni kiritilishi.....	22
II bob. Arifmetik amallarning peano aksiomalari asosida kiritilishi.....	28
2.1. Aksiomatik nazariyalar va ularga qo‘yiladigan talablar.....	28
2.2. Matematik induksiya metodi va uning tadbirlari.....	36
2.3. Arifmetik amallarning peano aksiomalari asosida kiritish.....	50
Xilosa.....	66
Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yhati.....	68

Kirish

Yurtboshimiz Islom Karimov komil insonni voyaga yetkazish haqida gapirar ekan, ularni o‘tmishdagi byuk mutafakkurlar, ma’rifatparvar-larning ilmiy merosi bilan uyg‘un holda olib borish zarurligini ta’kidlaydi. Farobiy, Ibn Sino, Beruniy kabi o‘nlab buyuk mutafakkirlarimiz aqilli, bilimli, yuksak fazilatli farzandlarni tarbiyalab yetkazishni orzu qilganlar.

“Ulkan manaviy jasorat sohiblari bo‘lgan bunday allomalar dunyoning q aerida yashamasin, ezgulik va marifat yo‘lida doimo odamlarga ibrat bo‘lib kelgan”¹.

Metodalogik asosi. “Masalan, Muhammad Muso Xorazmiyning o‘nlik sanoq sistemasini, algoritm va algebra tushunchalarini dunyoda birinchi bo‘lib ilm – fan sohasiga joriy etgani va shu asosida aniq fanlar rivoji uchun o‘z vaqtida mustahkam asos yaratgani umuminsoniy taraqqiyot rivojida qanday katta ahamiyatga ega bo‘lganini barchamiz yaxshi bilamiz. Bugungi kunda odamzotning ilm – fan va zamonaviy texnologiyalar borasida erishayotgan ulkan yutuqlarni ko‘z oldimizga keltirar ekanmiz, beixtiyor ana shu buyuk bobomiz misolida bunday yuksak marralarga erishishda o‘zbek xalqining ham munosib hissasi bo‘lganidan qalbimiz iftixorga to‘ladi”.

Ishning nazariy asoslari. Bugungi kunda O‘zbekistonda matematika fani rivojlanib bormoqda. Ayniqsa hisoblash texnikasining rivojlanishi uning yangi qirralarini namoyon qilmoqda. Jahon olimpiyadalarida ishtirok etgan o‘quvchilarni matematika fani bo‘yicha ko‘rsatkichlarni dunyo mamlakatlariga nisbatan olib qaraganda yaxshi natijalarga erishgandagi fikrimizni dalilidir.

Darhaqiqat, ta’lim – tarbiyada mana shunday manbalarning mohiyatiga yana bir e’tibor berib, ularga nisbatan o‘z fikriy qarashlarimizni bildirib, bugungi

¹ (Karimov I.A. Yuksak manaviyat – yengilmas kuch. – T: “Manaviyat”, 2008 – y, 161-162-betlar).

pedagogikaning yutuqlari bilan uyg'un holda shaxsiy tajriba va xulosalarimizni o'rtoqlashib, yon atrofimizdagi odamlar, ijtimoiy hayot, Vatan ravnaqi, yurt tinchligi, halq faravonligi to'g'risida ma'lumotlar berish kerak.

Arifmetik amallarning peano aksiomalari asosida kiritilishining nazariy asosi, natural sonlar to'plaminig kiritilishini nazariy jihatdan asoslaydi.

Ishning dolzarbligi. Bizga ma'lumki aksiomatik nazariyalar matematika fanini o'rganishning asosiy qurollaridan biri hisoblanadi. Shuning uchun ham aksiomatik nazariyalarni o'rganish matematika o'qitish metodikasining dolzarb masalalaridan hisoblanadi. Shularni e'tiborga olib bitiruv malakaviy ishimizda arifmetik amallarni va ularning hossalari peano aksiomalari asosida o'rganishni maqsad qilib olgan.

Ishning ahamiyati. Matematika fani asosan aksiomatik usulda o'rganiladi. Boshlang'ich sinflarda esa sonlarni raqamlash, qoshish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish amallari to'plamlar nazariyasi asosida o'rganiladi. Aslida bu amallarni peano aksiomalari asosida o'rganish ham mumkin. Boshlang'ich sinf o'qtuvchisi natural sonlar nazariyasini o'rganishning xar hil usullarini bilishlari kerak. Natural sonlar nazariyasini aksiomatik usulda o'rganishga oid adabiyotlar xozirgi kunda yetarli emas. Bu fikrlar bitiruv malakaviy ishi mavzusining ahamiyatini ochib beradi.

Tuzilishi. Mazkur bitiruv malakaviy ishi kirish, ikkita bob va hulosa qismlardan iborat bo'lib 70 sahifani tashkil qiladi. Ishning kirish qismida ishning dolzarbligi uning ahamiyati, haqida fikr yuritilgan. Ishning I bobida ishning mazmunini ochib berishda kerak bo'ladigan asosiy tushunchalar ular orasidagi bog'lanishlar bu bog'lanishlarning hossalari yetarli darajada bayon qilingan. Ishning II bobida "Arifmetik amallarning peano aksiomalari asosida kiritilishi" ning ahamiyati atroflicha yoritilgan. Ishning xulosa qismida ishni yozish davomida olingan eng umumiy natijalar, ishning qo'llanish sohalari haqida fikrlar bildirilgan.

I bob. Boshlang'ich sinflarda arifmetik amallarni kiritilishi.

1.1. Boshlang'ich sinflarda arifmetik material mazmuni.

Boshlang'ich matematika kursi umumta'lim maktabi matematika kursining tarkibiy qismidir. Shu sababli boshlang'ich matematikani muvaffaqiyatli o'zlashtirish maktabda butun matematik ta'limni to'g'ri yo'lga qo'yishga asos bo'lishi o'z-o'zidan tushunarli bo'lib qoldi. Akademik A. N.Kolmogorov V-VIII sinf dasturlari "natural son bilan (aslida har qanday kattalikdagi) to'rt arifmetik amalni bajarishning puxta ko'nikmalari birinchi to'rtta sinfdayoq o'zlashtiriladi, degan farazdan kelib chiqishadi" deb bejiz aytgan emas.

O'quv dasturida hozirgi paytda shunday progressiv g'oyalar o'z aksini topdiki, so'nggi yillarda bu g'oyalar asosida o'rta umumta'lim maktabida matematika o'qitishni isloh qilish harakati avj olib ketdi:

- maktab matematika kursini hozirgi zamon matematikasiga va uning amaliy tadbirlariga yaqinlashtirishga intilish;

- arifmetika bilan algebra va geometriya negizlari tarkiban birlashib ketgan yagona matematika kursini yaratish uchun harakat;

- maktab matematika kursining amaliy yo'nalganligi, o'qitishning turmish bilan bog'langanligi va o'quvchilarning hisoblash madaniyatlariga e'tibor berganligiga, ayniqsa, o'qitishning quyi bosqichida jiddiy amal qilgan holda maktab matematika kursining nazariy tomoniga e'tiborning kuchayishi;

- ta'lim mazmunini yangilash, bayon qilish sistemasi va metodlarini mukammallashtirish hisobiga asosan o'quvchilarning bilim imkoniyatlaridan to'la foydalanish hisobiga o'quv materialini o'qitish yillari bo'yicha birmuncha pastga surish.

Bu yetakchi qoidalar bilib olingan va maktabning bundan keyingi rivoji uchun ta'sir ko'rsatuvchi faktorlar sifatida to'g'ri baholangan taqdirdagina yangi

o‘quv dasturining ruhi va yo‘nalishini, uning qayta qurilishining ma’nosini oxirigacha tushunib yetishi mumkin.

Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki, amaldagi boshlang‘ich matematika dasturi tuzilishi va mazmuni bo‘sh joyda yaratilmadi, balki traditsion o‘quv dasturlaridan to‘plangan boy metodik merosdan va o‘quvchilarning ilg‘or ish tajribasidan kelib chiqib, o‘qitishning traditsion sistemasi bilan ma’lum izchillikni saqlagan holda yaratildi.

Endi amaldagi o‘quv dasturlari bo‘yicha 1-4 sinflarda o‘rganiladigan boshlang‘ich matematika kursining strukturasi va mazmunini mafassolroq qarab chiqaylik.

Ma’lumki o‘quv predmeti ilgargidek “Arifmetika” emas, balki “Matematika” deb ataladi. Fan nomining bunday o‘zgartirilishi bejiz emas: bu o‘zgarish o‘zida o‘quv predmetining mazmunini va strukturasi o‘zgarishini aks ettiradiyu

Matematika dasturining asosiy o‘zagi natural sonlar va asosiy miqdorlar arifmetikasidan iborat bo‘lib, bu o‘zak atrofida algebra va geometriya elementlari birlashadi, bu elementlar arifmetik bilimlar sistemasiga tarkiban qo‘shilib, son, arifmetik amallar va matematik munosabatlar haqidagi tushunchalarning yuqoriroq darajada o‘zlashtirilishiga imkoniyat yaratib beradi².

Shunday qilib, boshlang‘ich matematika kursi o‘z strukturasi bo‘yicha uch fanni o‘z ichiga olgan butun kursdir, unda arifmetik, algebraik va geometrik materialdan iborat qismlarni farq qilish kerak.

Zaruriy umumlashtirishlarni shakillantirish uchun eng qulay sharoitlar yaratish maqsadlariga mazmunga emas, balki o‘quv materialining joylashish

² Levenberg L.Sh. Boshlang‘ich sinflarda matematika o‘qitish metodikasi Toshkent “O‘qituvchi” 1985 yil

sistemi ham javob beradiyu O'quv materiali dasturda yo chiziqli yoki konsentrik joylashishi mumkin.

Chiziqli tuzilish deganda dasturda materialning shunday joylashishi tushuniladiki, u bo'limlarning mantiqiy ketma-ketligiga asoslangan bo'lib, ilmiy kurslarda qabul qilingan. Arifmetikaga nisbatan chiziqli qurilish bunday bo'lishi mumkin: ko'p xonali sonlarni nomerlash (raqamlash), qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish. Boshlang'ich matematika kursida arifmetik materialning konsentrik joylashuvi saqlanadi. Ammo amaldagi o'quv dasturida konsentrlar soni kamaytirilgan: o'nlik, yuzlik, minglik, ko'p xonali sonlar.

Shuni ham aytish kerak, o'quv matkriali shunday guruhlanganki, unda o'zaro bog'langan tushunchalar, amallar, masalalarni qarash vaqt jihatdan yaqinlashtiradi. Bu o'qitishda har doim o'zaro bog'liq tushunchalar, amallar, masalalarni taqqoslash, qarshi qo'yish va solishtirish, qaralayotgan faktlarning o'xshash va farqli tomonlarini aniqlash, ular orasidagi mavjud bog'lanishlarni ochish imkonini beradi.

Nazariyaga katta e'tibor berish va kursni ratsionalroq tuzish tufayli uning muhum bo'limlarini o'rganishni soddalashtirish imkoniga ega bo'linadi. Bu, masalan, 1-sinfda 100 ichida qo'shish va ayirish usullari ustida ishlashga, 2-sinfda jadvalda ko'paytirish va bo'lishni o'rganishga va hakozolarga tegishli.

Endilikda boshlang'ich matematika kursining har tarkibiy qismi (arifmetik, algebraik va geometrik) mazmunini qaraymiz.

Boshlang'ich sinflar o'quv dasturida arifmetikadan elementar ma'lumotlarning ushbu uyushmasi berilgan: natural sonlar nol soni, shu sonlar ustida to'rt arifmetik amallar; ulushlar (kasrlar), ismli sonlar va ular ustida amallar. Bu mateial o'rganish o'quvchilarni matematik tushunchalar sistemasini o'zlashtirishga, shuningdek puxta va tushunib olingan hisoblash ko'nikma va malakalarini egallashga olib keladi. Shu bilan birga ko'nikmalar, birtomondan

predmet to'plamlar bilan ishlashda, ikkinchi tomondan, hisoblash usullaridan ongli foydalanish asosida rivojlanadi.

O'quv dasturiga arifmetik amallarning ba'zi muhim xossalari va ulardan kelib chiqadigan natijalar bilan tanishish kiritilganligi sababli, hisoblash usullarini ongli o'zlashtirish imkoni vujudga keladi. Bu qo'shish va ko'paytirishning o'rin almashtirish xossasi, ko'paytirish va bo'lishning taqsimot qonuni, asosiy xossalaridan kelib chiqadigan natijalar: sonni yig'indiga qo'shish, sonni yig'indidan ayirish, yig'indini songa qo'shish, yig'indini sondan ayirish, yig'indini yig'indiga qo'shish, yig'indini yig'indidan ayirish, sonni yig'indiga va yig'indini songa ko'paytirish, yig'indini songa bo'lish, sonni ko'paytmaga ko'paytirish va bo'lishdan iborat.

Asosiy xossalarning har bir to'plamlari yoki sonlar ustida amallar operatsiyalar bajarish asosida olib boriladi, buning natijasida o'quvchilar umumlashtirishlarga kelishlari kerak. Xossalarni o'zlashtirish uchun kursda maxsus mashqlar sistemasi nazarda tutiladi, ammo xossalarni qo'llanishning bosh sferasi ular orasida hisoblash usullarini ochib berishdan iborat.

Arifmetik amallarning xossalari va mos hisoblash usullarini o'rganish bilan bir vaqtda arifmetik amallar natijalari bilan amal komponentalari orasidagi bog'lanishlar beriladi (masalan, agar yig'indidan qo'shiluvchilarni biri ayrilsa, ikkinchi qo'shiluvchi hosil bo'ladi), komponentalardan birining o'zgarishi bilan arifmetik amallar natijalarining o'zgarishi kuzatiladi.

Dasturda hisoblashlarning og'zaki usullari bilan bir qatorda yozma usullariga ham katta e'tibor beriladi. Yozma hisoblash usullari ustida ishlash 3-sinfda "Minglik" mavzusini o'rganishda boshlanadi. Bu sinfda o'quvchilar 1000 ichida yozma qo'shish va ayirish usullari bilan tanishadilar, shuningdek, ming ichida qo'shish va ayirishning keyinroq hollari (masalan, $248+176$; $900-345$; $803-357$ ko'rinishdagi hollar) qaraladi. 4-sinfda ko'p xonali sonlar (millionlar sinfi ichida) ustida barcha amallar ko'rib o'tiladi.

Matematika sistematik kursini o'rganishga tayyorlash maqsadida kasrlar haqida ayoniy tassavvurlar beriladi. 3-sinfda ulush (qism) tushunchasi butunning (doiraning, to'g'ri to'rtburchakning va h.k.) teng qismlaridan biri sifatida kiritiladi, ulushlarning yozilishi beriladi. 4-sinfda ulushlar to'plami sifatida kiritiladi, kasrlarni almashtirish va taqqoslash ko'rsatmalilik asosida beriladi.

Amaldagi o'quv dasturinig arifmetik materiali o'quvchilarni asosiy miqdorlar – uzunlik , massa, vaqt, yuza, baho, tezlik bilan tanishtirishni, shuningdek, bu miqdorlarning o'lchov birliklari, har hil o'lchov asboblari yordamida o'lchash usullari bilan tanishtirishni o'z ichiga oladi. Dasturda uzunlik o'lchovlarini o'rganishga yaqinlashish tubdan o'zgartiriladi. Natural qatorning dastlabki sonlarini raqamlash o'rgatilayotganidayoq santimetr tushunchasi kiritiladi. Ikkinchi o'nlik sonlarni o'rganilayotganda detsimetr, yuzlik o'rganilayotganda esa metr kiritiladi. Bu, birinchidan, bolalarda son tushunchasini sanoq natijasiga emas, balki o'lchash natijasi sifatida ham shakllantirish imkonini beradi; ikkinchidan, bolalarni uzunlik o'lchovlarida ifodalangan sonlar bilan ertaroq tanishtirish imkoniyatini yaratadi. Bunday Yaqinlashishda ismli sonlarni alohida mavzuga ajratish zarurati yo'qoladi. Ismli sonlar ustida amallar ismsiz sonlar ustida amallar bajarish bilan bir vaqtda bajariladi, chunki ikkala hol asosida qam o'nli sanoq sistemasi o'zi yotadi.

Shuni alog'ida qayd qilish kerakki, arifmetika mateirali amaldagi dasturga yirik metodik birliklarda kiradi. Chunonchi, unda ikkita konsentr – million va milliard konsentrlari yo'q, balki bitta konsentr – ko'p xonali sonlar konsentri mavjud; ikkita konsentr – ikkinchi onlik va yuzlik konsentrlari yo'q, balki bitta-birinchi yuzlik konsentri bor, bu o'z ichiga ikkinchi o'nlikni ham oladi; yuqorida aytilganidek, murakkab ismli sonlar konsentri deb ataluvchi alohida konsentr yo'q, chunki bu sonlar ustida amallar ismsiz sonlar ustidagi amallar bilan birgalikda o'rganiladi; nihoyat, ko'paytirish va bo'lishga doir to'rtta javal yo'q, bittagina jadval mavjud, bu jadval bo'yicha, jadvalda bo'lish natijalari osongina topiladi.

Materialni bunday konsentlash natijasida bolalarga qisqa vaqt ichida ko'p miqdorda umumlashtirilgan va puxta bilimlar berish imkoniyati tug'iladi.

Yuqorida takidlab o'tilganidek, boshlang'ich matematika kursining asosiy materiali natural sonlar va asosiy kattaliklar (miqdorlar) matematikasidir. U bilan birga (imkon bo'lsa, unga bog'liq holda) kurs tarkibiga algebraik va geometrik mazmundagi masalalar ham kiritilganligi aytib o'tildi. Dasturda ko'rsatilganidek, boshlang'ich matematika kursi maqsadga muvofiq ravishda tanlangan sistema asosida ochib beriladi. Bu asosiy qoidadir kursning asosiy mazmunini qarab chiqishda hisobga olinishi kerak.

Butun boshlang'ich ta'lim davomida bolalarda natural son va arifmetik amallar haqida tushunchalarni shakllantirish ishlari olib boriladi. Boshidanoq bu ish tushunchalarni amaliy qo'llanishning turli usullarini qarab chiqish bilan, bolalarning sonlarning ba'zi hossalarni, o'nli sanoq sistemasini, arifmetik amallarni va ularga asoslangan hisoblash usullarini o'zlashtirishiga yo'naltirilgan ish bilan o'zaro bog'liq holda amalga oshiriladi. Bu ishning natijasida bolalar dasturga kiritilgan nazariy xarakterdagi masalalarni ham, o'rganilgan nazariy masalalarni ham amaliy va o'quv masalalarini hal qilishga tadbqiq etish malakalarini ongli va mustahkam egallashlari hamda og'zaki va yozma hisoblashlarni bajarilishi ham kerak.

Bunda nazariya va amaliyot dasturning arifmetik qismi ustida ishlash davomida birgalikda va bir-biri bilan bog'langan bo'lishi kerak. Umumiy maktab ishida dasturni amalga oshirish tajribasini kuzatishlar dasturning aynan shu muhim talabi ko'pincha buzilishini ko'rsatadi.

Bu, masalan, og'zaki hisoblash malakalarini shakllantirishda o'qituvchilar ko'pincha bolalar ongiga bajarilgan amallarning nazariy asosini yetkazish esdan chiqarishadi, ularni hisoblash vaqtida xato qilinganda o'quvchilar nazariyaning yo'l qo'yilgan xatoning sababini tushunib olishga va uni mustaqil tuzuta olishga yordam beruvchi nazariy masalalarni qarab chiqishga qaytarishga o'rgatmaydilar.

Bunda aynan ongli o'zlashtirish ishonchli, to'g'ri va tez hisoblashning haqiqiy mustahkam ko'nikmalari shakllanishi mumkin bo'lgan asosdir.

Nazariya va amaliyotni ularning yagonaligida qarashga bo'lgan talabning buzilishi matematika darslarida ko'pincha bolalarga nazariy xarakterdagi mavhum shaklda berilishida, tegishli ta'riflar, qoidalar va hokazolar ularning amaliy tadbiqidan ajralgan holda o'rganilishida namoyon bo'ladi. Bunda quyidagicha holatlarni uchratish mumkin: o'quvchilardan yo dasturda umuman ko'zda tutilmagan, yoki bolalar ancha keyin o'zlashtirilishlari kerak bo'lgan ifodalarni bilish talab qilinadi. Masalan, o'qituvchi 1-sinfda "Sonlar qo'shishda qanday ataladi?" degan savolga to'liq javob berishni talab qilganda ish shunday bo'ladi. Matematik terminologiyani bu tarzda bilishni umuman talab qilib bo'lmaydi. Muhimi shundaki, o'quvchilar tegishli so'zlar manosi o'qituvchi foydalanganda tushunilishlari va sekin-asta bu terminlarni o'z nutqlariga kiritib borishlari kerak. O'qituvchi 2-sinfda o'quvchilardan ayrish amali qo'shish yordamida qanday qilib tekshirilishi mumkinligini tushuntirib berishni (bu uchunchi yil o'qitish materiallaridir) talab qilganda ham shunday bo'ladi.

O'quvchilarning sun'iy yuklanishiga olib keluvchi shunga o'xshash uslubiy xatolarga yo'l qo'ymaslik uchun 1-4 sinflardagi arifmetik material ustida ishlashning butun sistemasini aniq tassavvur qilib olish, nazariyaning dasturda ko'zda tutilgan elementlarining ahamiyati va o'rnini tushinib olish muhimdir.

Boshlang'ich matematika kursida raqamlash va arifmetik mallar ustidagi ish konsentrik ravishda tuziladi. Dasturda bolalar bilan ko'rib chiqiladigan sonlar sohasini asta-sekin kengaytirish sistemasi ko'zda tutiladi (tayyorlov davri –o'nlik – yuz – ming ko'p xonali sonlar), bunda bu mavzularning har birini o'rganishda sonning yangi sohasini qarab chiqish bilan birga bolalarning raqamlash va sonlar ustida amallar bajarishda ilgari egallagan bilimlarini asta-sekin kiritish (yoki chuqurlashtirish, sistemaga solish, umulashtirish) ko'zda tutilgan.

Bolalarni sonlar va arifmetik amallar bilan tanishtirish matematikadan dastlabki darslarda berilgan ikki buyum to'plamlarining birlashmasiga, ikki to'plam elementlari orasida moslik o'rnatishga va buyumlarning berilgan to'plamlari qismini o'rnatishga amaliy mashq qilish bilan tayyorlanadi.

O'quvchilar to'plamlar ustida amallar bajarishdan asta-sekin buyumlar sanog'iga o'tadilar, natural katorning dastlabki o'n ta soni bilan (ularni nomi tartibi bilan) tanishadilar, sonlarni taqqoslashni, ular yig'indisi va ayirmasini topishni o'rganadilar

10 ichida qo'shish va ayirishni o'rganishda, keyin esa yuz ichida qo'shish ayirishni o'rganishda bolalar amallarning xossalaridan foydalanishga (yig'indini songa qo'shishning turli usullari, yig'indidan sonni ayirish va sondan yig'indini ayirishga) asoslangan, shuningdek, qo'shish bilan ayirish orasidagi bog'lanishni tushunish asosida tushunadilar. Bunda, yuqorida aytib o'tilganidek, bu xossalarni va hisoblashlarning turli xil usullarini qarab qarab chiqish bilan bog'liq butun ish hisoblashlarini samarali qilish masalasiga bo'ysunadi.

Birinchi yil o'qitishning hisoblash ko'nikmalarini shakillantirishdagi muhim vazifasi bolalarning 10 ichida qo'shish va ayirishning jadval hollarini shunday o'zlashtirishni, bunda bir xonali sonlarni qo'shishda va ikki xonali sonlarni tez og'zaki hisoblash ko'nikmalarini shakillantirishda avtomatik tarzda hisoblash imkoniyatlari ta'minlansin.

Dasturda berilgan tushuntirish (uqtirish) xatida qo'shish va ayirishning jadval hollari mashqlar natijasida bolalar tomonidan o'zlashtirishi ta'kidlanadi va shuning uchun bolalarga ularni eslab qolishga oid ko'rsatmalarning o'z vaqtida yaratilishi katta ahamiyatga ega. Shuningdek, har kuni mashq qilish ishini ham olib borish zarur, usiz istagan natijaga erishish mumkin emas.

10 va 100 ichida raqamlash (nomerlash)ni qarab chiqishda o'quvchilarni yangi sanoq birligi – o'nlik bilan tanishtirishga, xona qo'shiluvchilaridan iborat sonlar tarkibini o'rganishga (masalan, 13 – bu 10 va 3 yoki o'nlik va 3 birlik), ikki xonli

son yozuvida raqamlarning o'rniga ko'ra qiymatini aniqlashga alohida e'tibor beriladi. Bu masalalarni qarab chiqish shu darajada bo'ladiki, bunda bolalar o'z bilimlaridan ishonchli foydalanishni, lekin biror umumiy ifodalashlarni o'zlashtirishni talab qilmaslikni nazarda tutadi.

100 ichida ko'paytirish va bo'lish 3-sinfda qoraladi. Bolalar uchun yangi bo'lgan bu arifmetik amallar bilan tanishtirishda, o'qituvchi 2-sinf uchun dasturda ko'zda tutilgan tayyorgarlik ishlariga (bir xil qo'shiluvchilar yig'indisini topish va sonni shunday yig'indi ko'rinishida ifodalash mashqlariga) tayanish mumkin.

Qo'shish va ayirishni o'rganishdagi kabi 100 ichida ko'paytirish va bo'lish usullariga qarab chiqish bolalarni oldindan bu amallarning ba'zi muhim xossalari bilan tanishtirish asosida olib boriladi. Bunda biz yuqorida qo'shish va ayirishga nisbatan qarab chiqqanga o'xshash yuzaga keladi.

Dastavval to'rtta arifmetik amal bolalar ongiga bu amallar qo'llaniladigan aniq masalalar bilan mustahkam bog'lanishi kerak. Amallarning mazmuni asosan buyumlar to'plami bilan amaliy ishlash asosida va tegishli mtlnli masalalar sistemasida ochib berilishi kerak.

Shular orasida amal komponenti va natijasi orasidagi bog'lanish, amallar orasidagi bog'lanish, amallarning qarab chiqilayotgan xossalari va o'rganilgan matematik munosabatlar bolalar ongiga yetkaziladi.

“O'nlik” mavzusidayoq dastlabki o'nta son bilan tanishilgandan so'ng bolalar birinchi marta 0 soni bilan tanishadilar. Keyin qo'shish, ayirish, ko'paytirish, va bo'lishni o'rganish davomida nol qatnashgan hollarni qarab chiqishga alohida e'tibor beriladi. Ko'paytirish va bo'lishni o'rganish munosabati bilan 0 va 1 bilan ko'paytirish va bo'lish hollari ajralib qoladi³.

³ Levenberg L.Sh. Boshlang'ich sinflarda matematika o'qitish metodikasi Toshkent “O'qituvchi” 1985 yil

Sonlarni va arifmetik amallarni o'rganish bilan yaqindan bog'lanishda bolalarni kattaliklar va ularning o'lchovlari bilan tanishtirish ishi ham olib boriladi. Yangi o'lchov birliklari bilan tanishish va ular orasidagi munosabatlarni o'rnatish turli o'lchov birliklarida ifodalangan sonlarni shakl almashtirish odatda raqamlash ustidagi ish bilan bog'lanadi. (masalan xona qo'shiluvchilaridan iborat ikkinchi o'nlik sonlarni tarkibi va $1\text{dm } 5\text{sm}$ ko'rinishidagi son kesmalarini o'lchash natijasida bu sonlarning boshqa turi: $1\text{dm } 5\text{sm} = 15\text{sm}$ hosil bo'lishi parallel qarab chiqiladi. Bu 1 o'nlik 5 birlik 15 birlikka teng deganga o'xshash amalga oshiriladi).

“Ming” va “Ko‘p xonali sonlar” mavzusini o'rganishga o'tishda yozma hisoblash ko'nikma va malakalarini shakllantirish ishi asosiy ahamiyatga ega bo'ladi. Biroq bunda arifmetik amallarning yozma bajarish usullarini qarab chiqish bilan parallel ravishda 100 ichidagi sonlar bilan og'zaki hisoblashlarni bajarish ko'nikmalari ham takomillashtiriladi.

Sonlarni qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lishning yozma bajarish usullarini ochishda, og'zaki hisoblash usullaridagi kabi o'quvchilarning bajariladigan amallarning mazmuni, ularning ketma-ketligini ongli tushunishlari, ularni tushunarli asoslari ko'zda tutilgan. Shu bilan birga har doim yozma hisoblashlarda ma'lum avtomatizmga erishishdan iborat maqsad ko'zda tutulishi kerak (hosilaviy amallarni tushunib olishga qaytish ham mazkur holda asosan hisoblash davomida qiyinchilik yoki xatolik yuzaga kelganda tavsiya qilinadi.)

Yozma hisoblashlar bilan birga bolalarning amallarning o'zi ularning xossalari haqidagi ba'zi yangi xossalari kiritiladi, amallar orasidagi mavjud bog'lanish haqidagi, komponentlardan biri o'zgarganda amal natijasining o'zgarishi haqidagi, komponentlar va amal natijalari orasidagi bog'lanish haqidagi bilimlarni umumlashtiradi va chuqurlashtiradi. Tegishli bilimlarni umumlashtirish va chuqurlashtirish boshlang'ich ta'limning uch yili davomida sistemali o'tkaziladigan kuzatishlar asosida amalga oshiriladi. Bu amallarning hammasi

dasturga berilgan tushuntirish xatida hisoblashlarni samaraliroq qilish uchun foydalaniladi.

Sonlarni va arifmetik amallarni o'rganish bilan birga u bilan uzviy aloqada ifodalar, tengliklar va tengsizliklar tushunchasini shakllantirishga karatilgan ishlar olib boriladi. Sonli ifodalar, tengliklar va tengsizliklar matematika o'qitishning dastlabki bosqichlaridayoq uchraydi va keyin ular ustidagi ish muntazam har darsda olib boriladi. Unda material faqat qaralayotgan sonlar sohasini kengaytirish hisobigagina emas, balki qaralayotgan ifodalarning tuzilishini murakkablashtirish hamda bolalar ilgari egallagan bilimlarini qo'llanishi bilan bog'liq topshiriq turlarini murakkablashtirish hisobiga ham asta –sekin qiyinlashtirib borishni nazarda tutadi. Bu sistema dastur matnida alohida , yanada umumiy misollar bilan ifodalangan. Masalan, “Ikkinchi o'nlik” mavzusida bolalarni avval sonlarni taqqoslash va $5=5$, $6 < 7$, $8 < 9$ ko'rinishdagi yozuvlar bilan tanishtirish ko'zda tutilgan, keyin $5+4$ va $6+4$, $7+2$ va $7-2$, $3+0$ va $3-0$

Ko'rinishdagi ifodalarni o'qish, yozish va taqqoslash tushunchasi kiritiladi. “Yuz” mavzusida $42:6$ va $36:6$, $6+2$ va $6-2$ va hakoza ko'rinishdagi ifodalarni taqqoslash uchun mo'ljallangan misollar keltirilgan.

Ifoda, tenglik, tengsizlik haqidagi tushunchalarni shakllantirish masalasidan tashqari tegishli mashqlar ham hisoblash malakalarini, ham amallarni o'rganishda qarab chiqilgan arifmetik nazariya elementlarini mustahkamlashga yordam beradi.

Dasturining arifmetik qismiga bolalarni kasrlar bilan dastlabki tanishtirish ham kiradi. Bu masalaga nisbatan kam vaqt ajratilgan, chunki tegishli mavzularning hajmi ham uncha katta emas. Dastur bolalarda miqdorlarning ulushlari haqidagi, ularning teng qismlarga bo'lish bilan hosil bo'lishi haqidagi tasavvurlarini shakllantirishni talab qiladi. O'quvchilar ulushlarini taqqoslashni, kattalikning berilgan qiymatidan berilgan ulushni topishni va teskari masalani yechishni (ulushning berilgan qiymati bo'yicha izlanayotgan kattalikning

kiymatini topishni) bilishlari kerak . Bunday masalalar ko'rsatmalilik asosida yechiladi⁴.

Biz qarab chiqqan asosiy arifmetik material atrofida dasturga kiritilgan algebra va geometriya elementlari birlashtiriladi.

1-sinf o'quvchilari o'quv yili davomida natural sonlarni qo'shish amali bilan hamda natural sonlarni ayirishdan iborat amal bilan tanishtiriladi. Bunda ko'rsatilgan amallar barcha natural sonlar to'plamida emas balki 1 dan 100 gacha bo'lgan natural sonlar ustida qoraladi. Shuningdek, 0 soni ham 1 dan 100 gacha bo'lgan sonlar qatoriga qo'shib o'rganiladi.

2-sinfda natural sonlarni ko'paytirish natural sonlarni qisman bo'lish amallari kiritiladi. Bunda o'rganilayotgan sonlar to'plami 0 dan 100 gacha bo'ladi, ya'ni amallar 0 dan 100 gacha sonlar ustida bajariladi. Lekin bu bajarilayotgan amallar hozircha to'la ma'noda algebraik bo'la olmaydi: 67 va 84 sonlari 100 dan kichik, ammo ularning yig'indisi 100 dan katta (ko'paytmasi ham 100 dan katta). Faqat 4-sinfdagina o'quvchilar natural sonlar to'plamida bajariladigan qo'shish va ko'paytirish amallarini algebraik amal sifatida o'rganadilar. Shuningdek 4-sinfda qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish amallari chekli o'nli kasrlar to'plamigacha kengaytiriladi. Ayirish amali bu to'plamda qisman algebraik amaligacha qoladi.

Qo'shishning assotsiativlik xossasi bilan o'quvchilar maktab matematika kursining 1-sinfida uchratadilar. "Qo'shish va ayirishning qulay usullari" mavzusida "Matematika-1" darsligida quyidagi misollardan xulosa chiqariladi. $34+(6+4) = (34+6)+4=40+4=44$; Shunday qilib, o'quvchilar quyidagi tengliklar bilan tanishadilar.

⁴Bikbaeva. N. U. Va boshqalar. 1 – 4 sinflar uchun "matematika" darsliklari. Toshkent. "O'qituvchi" 1996 – 1998 yil

$$(a+b)+c=a+(b+c)=(a+c)+b$$

Bu tengliklarning birinchisi qo‘shishning assotsiativligini bildiradi . Ikkinchi tenglik esa nafaqat assotsiativlik bilan, balki komutativlik bilan ham bog‘liqdir.

“Matematika 1” darsligida yig‘indini songa qo‘shish $70+(10+3)$ misolida qaraladi va bu holda yechimning uch usuli ko‘rsatiladi. 3-sinfda ko‘paytirishning assotsiativligi (sonni ko‘paytmaga ko‘paytirish) qaraladi. Bu yerda ham uch hil yechim ko‘rsatiladi: $2 \cdot (3 \cdot 10) = (2 \cdot 3) \cdot 10 = (2 \cdot 10) \cdot 3$.

Birinchi tenglik ko‘paytirishning assotsiativlik ifodalash, ikkinchi tenglik ko‘paytirishning kommutativligi bilan bog‘likdir.

4-sinfda $4 \cdot 10 \cdot 7 = 4 \cdot 7 \cdot 10$ misolini ko‘rish asosida, “ko‘paytuvchininglarning o‘rni almashtirish bilan ko‘paytma o‘zgarmaydi”. Qoidasi keltirib chiqarilib $a \cdot b \cdot c = a \cdot b \cdot c$ ekanligi ko‘rsatiladiv dastlab bu qoida sonlar qatnashgan misolda $7 \cdot (8 \cdot 10) = (7 \cdot 8) \cdot 10$ ko‘rsatilib so‘ngra ixtiyoriy a, b, c sonlar uchun umumlashtiriladi $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ va ko‘paytirishning guruxlash qonuni quyidagicha ifodalanadi : “ikki qo‘shni ko‘paytuvchini ularning ko‘paytmasi bilan almashtirish mumkin.”

Qo‘shishning assotsiativligini (qo‘shishning guruxlash hossasini) o‘rganish 4-sinfda uchta 17, 20 va 43 sonlarning yig‘indisi turli usullar bilan topish asosida ko‘rib o‘tiladi: $(17+20)+43=37+43=80$; $17+(20+43) = 17+63=80$ misollariga asoslanib $(17+20)+43=10+(20+43)$ ekanligida barcha natural sonlar uchun qo‘shish amalida $(a+b)+c=a+(b+c)$ tenglik to‘g‘ri degan fikr o‘quvchilarga yetkazilib qo‘shiluvchilarni guruxlash qonuni quyidagicha ifodalanadi: “ikkita qo‘shni qo‘shiluvchilarni ularni yig‘indisi bilan almashtirish mumkin”.

Qo‘shish va ko‘paytirishning assotsiativligi qoidalari boshlang‘ich sinflar matematika kursida soddalashtirishda ishlatiladi.

$$((3+7)+4)+18 \text{ ni } 3+7+4+18 \text{ deb, } ((2 \cdot 6) \cdot 5) \cdot 9 \text{ ni } 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 9 \text{ deb yozladi.}$$

Qo‘shishning kamutativligini maktab matematika kursida birinchi bo‘lib ko‘rib o‘tiladigan xossadir. O‘quvchilar 1-sinfdayoq qo‘shiluvchilar o‘rni

almashgani bilan yig'indi o'zgarmasligini bilishadi. Bu xossa ($3+1$ va $1+3$, $4+2$ va $2+4$) misollarini qarab chiqish orqali kiritiladi. Bu xossani o'rganish jarayonida yana bir qancha masalalar qarab chiqiladi. (Likobchadagi 3 ta olma ustiga 2 ta olma qo'shiladi, keyin 2 ta olma ustiga 3 ta olma qo'shiladi va h.k.). Ko'paytirishning kommutativligi bilan o'quvchilar 2-sinfda tanishadilar. "Ko'paytuvchilarning o'rnini almashtirish bilan ko'paytma o'zgarmaydi".

4-sinfda qo'shish va ko'paytirishning kommutativligiga yana qaytiladi. 4-sinfda qo'shishning kommutativligi xossasi $a+b=b+a$ ko'rinishida yozilib, har bir natural son uchun o'rin almashtirish qonuni quyidagicha ifodalanadi: "qo'shiluvchilarning o'rinlarini almashtirishda yig'indi o'zgarmaydi". Xuddi shuningdek ko'paytmaning kommutativligi $a \cdot b=b \cdot a$ ko'rinishida yozilib, natural son uchun o'rin almashtirish qoydasi quyidagicha ifodalanadi: "ko'paytuvchilarning o'rinlarini almashtirishda ko'paytma o'zgarmaydi".

Bu xossalar isbot etilmasdan faqat konkret sonli misollar orqali tushuntiriladi.

Boshlang'ich sinflar matematika kursida assotsiativlik singari kommutativlik xossasi ham hisoblashlarni osonlashtirish uchun tadbiq etiladi: qo'shiluvchilar yoki ko'paytuvchilar o'rnini almashtirib va guruhlab hisoblashlarni soddalashtirish mumkin. Masalan, $36+27+64+113$ yig'indini quyidagicha guruhlash qulaydir:

$$(36+64)+(27+113)=100+140=240$$

Qo'shishning assotsiativlik va kommutativlik xossalari ikki xonali sonlarni qo'shishda keng qo'llaniladi:

$$45+12=(40+5)+(10+2)=(40+10)+(5+2)=50+7=57.$$

Ko'paytirishning ko'shishga nisbatan distributiv ekanligi bilan o'quvchilar 3-sinfda tanishadilar. Ular $(3+2) \cdot 4$ ko'paytmani ikki usul bilan hisoblab, bu ifoda $3 \cdot 4+2 \cdot 4$ ga teng ekanligiga ishonch hosil qiladilar. Bu hulosi, bu tasdiq umumiy xarakterga ega ekanligini ko'rsatuvchi plovat bilan birgalikda ko'rsatiladi va

xulosa qilinadi: yig'indini songa ko'paytirish uchun turli usullar bor bo'lib, ular bir xil natija beradi:

- 1) Yig'indini hisoblash va uni yig'indiga ko'paytirish mumkin.
- 2) Sonni har bir qo'shiluvchiga ko'paytirib olingan natijalarni qo'shish mumkin.

Keyinchalik bo'lish amali ham qo'shishga nisbatan distributiv ekanligi ham ko'rib chiqiladi.

Biroq $(a+b):c=a:c+b:c$ tenglik natural sonlar uchun faqat a va b lar s soniga alohida-alohida bo'lingandagina o'rinli ekanligini aytib o'tish zarurdir. Chunki, a va b lar s ga bo'linmagan holda ham ularning yig'indisi s soniga bo'linishi mumkin. (masalan $(8+4):3$ ifoda natural sonlar to'plamida ma'noga ega bo'lib, 4 natija olinadi, lekin $8:3$ va $4:3$ bu to'plamda ma'noga ega emas.

Yig'indini songa ko'paytirish qoidasi ikki xonali sonni bir xonali songa ko'paytirishda qo'llaniladi:

$$23 \cdot 4 = (20+3) \cdot 4 = 20 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 80 + 12 = 92$$

shuningdek bir xonali sonni ikki xonali songa ko'paytirishda ham ishlatiladi:

$$4 \cdot 23 = 4 \cdot (20+3) = 4 \cdot 20 + 4 \cdot 3 = 80 + 12 = 92$$

4-sinfda ko'paytirishning qo'shishga nisbatan distributivligi $(30+10) \cdot 4 = 40 \cdot 4 = 160$ va $(30+10) \cdot 4 = 30 \cdot 4 + 10 \cdot 4 = 120 + 40 = 160$ misolarida qo'llanib, $(30+10) \cdot 4 = 30 \cdot 4 + 10 \cdot 4$ ekanligidan " Sonning yig'indiga ko'paytirish uchun bu sonni har bir qo'shiluvchisiga alohida-alohida ko'paytirilib, chiqqan natijani qo'shish mumkin" qoidasi keltirilib chiqariladi, ya'ni $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ so'ngra huddi shu usulda ko'paytirishning ayirishga nisbatan distributivligi: $(a-b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$ qoidasi keltirib chiqariladi. Shuni ko'zdan qochirmaslik kerakki, $a \geq b$.

Qo‘shish va ayirishga nisbatan ko‘paytirishning distributivligi $69 \cdot 27 + 31 \cdot 27$, $438 \cdot 90 - 238 \cdot 90$ va h.k. ifodalarni son qiymatlarini hisoblashda, iychamlashda ishlatiladi.

O‘nli kasrlar tushunchasi kiritilgach, endi o‘nli kasrlarni ko‘paytirish qo‘shishga nisbatan distributiv ekanligi kiritiladi.

1-sinfda 0 soni $1-1$, $2-2$, va h.k. ko‘rinishidagi ayirmalarni o‘rganish asosid kiritiladi. Lekin 0 sonining qo‘shish va ayirishdagi xossalari unchalik ta’kidlanmaydi. Faqat misollardagina $0+8$ yoki $7+0$ kabi ifodalar uchraydi.

4-sinfda qo‘shish va ko‘paytirishda nol sonining xossalriga va ko‘paytirishda bir sonining xossalriga qaytiladi va quyidagi tasdiq o‘quvchilar ongiga singdiriladi: agar qo‘shiluvchilardan biri 0 ga teng bo‘lsa, u holda yig‘indi ikkinchi qo‘shiluvchiga teng (0 ning qo‘shishga nisbatan neytralligi) . Bu tasdiq $a+0=0+a=a$ ko‘rinishida yoziladi.

0 sonining ayirish amalidagi o‘rni ham shunga o‘xshash belgilanadi:

$a-0=a$. Ko‘paytirish amali uchun $1 \cdot a=a$, $a \cdot 1=a$ va $0 \cdot a=0$, $a \cdot 0=0$ tenglik alohida kursatiladi. Bu tengliklarning ma’nosi to‘la tushuntirilmaydi.

Qo‘shish va ayirish amallarining o‘zaro bog‘liqligi bilan o‘quvchilar birinchi sinfda tanishadilar. Ular $1+1=2$, $2-1=1$, $3+1=4$, $4-1=3$ va h.k. mashqlarni bajaradilar. Ammo qo‘shish va ayirish amallari alohida o‘rganiladi, buning ustiga ayirish amali uchun komponentalar nomlari kiritilmaydi. O‘quvchilar yig‘indidan qo‘shiluvchilarning birini ayirishga doir misol yechish jarayonida, ayirish amali qo‘shish amaliga teskari amal ekanligiga ishonch hosil qiladilar. Nihoyat, quyidagi qoida ifodalanadi: “agar ikki qo‘shiluvchining yig‘indisidan qo‘shiluvchilardan biri ayirilsa, u holda ikkinchi qo‘shiluvchi hosil bo‘ladi”⁵.

⁵ Jumaev M.Ye. matematika o‘qitish metodikasidan praktikum. Toshkent “O‘qituvchi” 2004 yil

“Kamayuvchi” va “ayiriluvchi” tushunchalari kiritilgandan so‘ng quyidagi qoida ifodalanadi: Agar ayirmaga ayiriluvchi qo‘shilsa, u holda kamayuvchi hosil bo‘ladi; agar kamayuvchidan ayirma ayirilsa, u holda ayiriluvchi hosil bo‘ladi.

Shu bilan natural sonlar to‘rlamida qo‘shish va ayirish amallari orasidagi bog‘lanishni o‘rganish yakunlanadi. Qo‘shish va ayirish amallari orasidagi bog‘lanishlar $a+x=b$, $a-x=b$, $x-a=b$ ko‘rinishidagi tenglamalar yechishda qo‘llaniladi. Yig‘indidan sonni ayirish, sondan yig‘indini ayirish qoidalari keltirib chiqariladi. Bunda yig‘indidan sonni ayirish har doim ham amalga oshirish mumkin bo‘lavermasligini hisobga olish kerak. (masalan, $(2+3)-4$ ayirishni faqat bir usulda, $(2+6)-4$ ni esa ikki usulda bajarish mumkin).

Uchunchi sinfda ayirish amaliga qo‘shish amaliga teskari amal sifatida ta’rif berilgan: ayirish deb ikki qo‘shiluvchining yig‘indisi va ulardan biriga ko‘ra ikkinchi qo‘shiluvchini topishdan iborat amalga aytiladi.

Uchunchi sinfda shunga o‘xshash tahlil natural sonlarni ko‘paytirish va bo‘lish amallariga nisbatan amalga oshiriladi: agar ikki sonning ko‘paytmasi ko‘paytuvchilardan biriga bo‘linsa, u holda ikkinchi ko‘paytuvchi hosil bo‘ladi: agar bo‘luvchini bo‘linmaga ko‘paytirilsa, u holda bo‘linuvchi hosil bo‘ladi. Bu qoidalar natural sonlar to‘plamida ko‘paytirish va bo‘lish amallari orasidagi bog‘lanishni ifodalaydi (garchi amallar bir-biriga bog‘lanmagan holda kiritilsa ham). Uchunchi sinfda sonni ko‘paytmaga bo‘lish masalasi qaraladi va quyidagi qoida ifodalanadi: sonni ko‘paytmaga bo‘lish uchun ko‘paytmani topish va sonni topilgan songa bo‘lish kerak yoki sonni ko‘paytuvchilardan biriga bo‘lib, hosil bo‘lgan sonni ikkinchi ko‘paytuvchiga bo‘lish kerak.

Bu sinfda bo‘lishga ko‘paytirish amaliga teskari amal sifatida qaraladi: berilgan ko‘paytma va ko‘paytuvchilardan biri bo‘yicha bevosita boshqa ko‘paytuvchini topishga bo‘lish amali deyiladi.

Bu materiallarni mustahkamlash uchun o‘quvchilarning o‘zlari xilosa qilishi va keyin ularni masalalar yechishga qo‘llay olishiga asos bo‘la oladigan qator

misollar beriladi. Ularga ma'lum bo'lgan qo'shish va ko'paytirishning assotsiativligi bilan yig'indi va ko'paytmani o'zgarishi orasidagi bog'lanishni e'tiborga olinishi maqsadga muvofiq bo'ladi.

To'rtinchi sinfda qo'shish va ko'paytirish amallari nol bilan to'ldirilgan barcha natural sonlar to'plami uchun qaraladi. Bunda ayirish va bo'lish amallari qo'shish va ko'paytirish amallariga teskari amallar sifatida ta'rifdan foydalanib a sonidan b sonini ayirish, bu shunday x sonini topish demakki, bu topilgan x soni bilan b sonining yig'indisi a sonini beradi, $b+x=a$. a sonini b soniga bo'lish, bu shunday x soni topishdirki, uni b soniga ko'paytirilganda a sonini beradi $b \cdot x=a$ ekanligi haqida ma'lumot beriladi.

Bu yerda bo'lish amali doim amalga oshirish mumkin bo'lmashligi e'tiborga olinadi; nolga bo'lish masalasi alohida ko'rib o'tiladi.

Yuqorida ko'rib o'tilgan usul nafaqat natural sonlar uchun balki, o'nli kasrlar uchun, keyinchalik esa ratsional sonlar uchun ham teskari amallarni aniqlashga imkon yaratadi. Ularning barchasida asosiy amallar sifatida qo'shish va ko'paytirish ta'riflanib, keyinchalik ayirish va bo'lish amallari bu amallarga teskari amal sifatida ta'riflanadi.

1. 2. Boshlang'ich sinflarda arifmetik amallarni kiritilishi.

Qo'shish amallarining ta'rifi va uning hossalari.

Qo'shishning to'plamlar tilidagi ta'rifi:

a , v natural sonlarni yig'indisi deb, elementlar soni a ta bo'lgan A to'plam va elementlar soni v to'plam bo'lgan V to'plam birlashmasidan hosil bo'lgan to'plamning elementlar soniga aytiladi. (bunda $A \cap V = \emptyset$)⁶

Misol

⁶ Jumaev M.Ye. matematika o'qitish metodikasidan praktikum. Toshkent "O'qituvchi" 2004 yil

$7+4=11$ chunki, A.to'plamda elementlar soni 7 ta, V to'plamni elementlari soni 4 ta bo'lganda ya'ni

$$A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$$

$$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \text{ bo'lsa,}$$

$AVB=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ bo'ladi va hosil bo'lgan to'plamni elementlar son 11 ta

Qo'shishning induktivlikka asoslangan ta'rifi:

Bu ta'rif ikki qismdan iborat bo'lib, u (1809-1877) yillarda yashab ijod qilgan Nemis olimi German Grosmon tomonidan berilgan. U quyidagicha:

1)Ihtiyoriy a natural songa 1 ni qo'shish, bevosita a dan keyin a^1 sonni beradi.

YA'ni $\forall a \in \mathbb{N}$ bo'lsa $a+1=a^1$ bo'ladi.

2) $a+v^1$ amali a songa v sondan keyin keladigan v^1 soni qo'shish natijasida $a+v$ sondan bevosita keyin keladigan $(a+v)^1$ sonni bildiradi.

YA'ni: $\forall a, v \in \mathbb{N} [(a+v)^1=a+v+1]$

$a+v$ da

a, v qo'shiluvchilar

a -birinchi qo'shiluvchi

v -ikkinchi qo'shiluvchi

$a+v$ -yig'indi deb ataladi.

Qo'shish amalining xossalari:

1. $\forall a; v \in \mathbb{N}$ uchun $a+v=v+a$ (kommutativlik) hossasi

2. $\forall a, v, s \in \mathbb{N}$ uchun $a+v+s=a+(v+s)=(a+v)+s$ (asossiativlik) hossasi

Ayrish amallarining ta'rifi va uning hossalari

Faraz qilaylik A va V to'plamlar bir hil predmentlardan tashkil topgan va $n(A)=a$ va $n(B)=b$ bo'lsin.

$a-v$ deb a ta elementga ega bo'lgan A to'plam ayirmasidan hosil bo'lgan to'plamning elementlari soniga aytiladi.

Misol:

$8-3=5$ chunki 8 ta sanoq cho'pga ega bo'lgan to'plamda 3 ta sanoq cho'p bo'lgan to'plamni ayirsak 5 ta sanoq cho'pga ega bo'lgan to'plam hosil bo'ladi. Qo'shish va ayrish amalini to'plamlar tilidagi ta'riflarini nazariy jihatdan asos qolib boshlang'ich sinflarda bu amallarni o'quvchilarga o'rnatish o'quvchilarga qo'shish ayrish amalini ma'nosi haqida tasavvurga hosil qilish yaxshi natija beradi.

Ayrishning qo'shish amali yordamidagi ta'rifi:

Faraz qilaylik $a > v$ bo'lsin.

a sonini ayirmasi deb, a sonini hosil qilish uchun v soniga qo'shish keark bo'lgan songa aytiladi. $a-v=s$ da; a -kamayuvchi; kamayuvchi, v -ayruvchi; s -ayirma deb ataladi.

Demak kamayuvchi ayriluvchi bilan ayirmaning yig'indisiga teng bo'lar ekan.

Misol:

$12-5=7$ chunki $12=7+5$

Hossalari

1) $\forall a; v \in \mathbb{N}$ uchun $(a+v)-v=a$

2) $\forall a; v_1 s \in \mathbb{N}$ uchun $a+(v-s)=(a+v)-s$

3) $\forall a; s \in \mathbb{N}$ uchun $a-(v+s)=a-v-s$

4) $\forall a; v_1 s \in \mathbb{N}$

$$a-(a-v)=(a-v)+s$$

Ko'paytirish amalining ta'rifi va uning hossalari

Ko'paytirish amalining to'plamlar tiliadgi ta'rifi:

$\forall a, v \in \mathbb{N}$ bo'lganda a soni bilan v soni ko'patmasi deb, a ta elementga ega bo'lgan A to'plam bilan v ta elementga ega bo'lgan V to'plam dekart ko'patmasida hosil bo'lgan juftliklar soniga aytiladi.

Misol $4 \cdot 3=12$ chunki ta'rifga asosan

$A=\{a, v, s, d\}$ va $V=\{x, u, g'\}$

to'plamlarni dekart ko'paytiramiz u holda

$A \times V \{ (a;x), (a;u), (a;g'), (v;x), (v;u), (v;g'), (s;x), (s;u), (s;g'), (d;x), (d;y), (d;g') \}$

To'plamdagi juftliklar soni 12 ga tengdir.

Ko'paytirish amalini qo'shish amali orqali ta'rifi:

$\forall a, v \in \mathbb{N}$ bo'lganda a sonini v soniga ko'paytirish deb a ta v ni yig'indisiga aytiladi. YA'ni

$$\underbrace{a \cdot v = v + v + v + \dots + v}$$

a ta

Misol:

$$4 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}$$

4 ta

Ko'paytirish amalining hossalari

1. $\forall a, v \in \mathbb{N}$ uchun $a \cdot v = v \cdot a$ (kommutativlik xossasi)

2. $\forall a, v, s \in \mathbb{N}$ uchun $(a+v) \cdot s = a \cdot s + v \cdot s$

yig'indining ko'paytirish amaliga nisbatan
distributivlik xossasi

3. $\forall a, v, s \in \mathbb{N}$ uchun $s \cdot (a+v) = sa + sv$

ko'paytirish amalining qo'shishga nisbatan distributivlik hossasi

4. $\forall a, v, s \in \mathbb{N}$ uchun $(a \cdot v) \cdot s = a \cdot (v \cdot s)$

ko'paytirish amalining asostsiativlik hossasi

5. Natija . $\forall a \in \mathbb{N}$ uchun $a \cdot 0 = 0$ chunki ta'rifga ko'ra

chunki $a \cdot 0 = 0 + 0 + \dots + 0 = 0$ asostsiativlik

$$\underbrace{\hspace{10em}}$$

a ta

Bo'lish amalining ta'rifi va uning hossalari

Bo'lish amalining to'plamlar tilidagi ta'rifi

$\forall a, v \in \mathbb{N}$ va $a > v$ bo'lganda, a sonini v soniga bo'linmasi deb a ta elementga ega bo'lgan A to'plamni elementlari soni v tadan qilib tuzilgan o'zaro kesishmaydigan qism to'plamlari soniga aytiladi.

Misol:

$8:2=4$ chunki 8 ta elementga ega bo'lgan $A=\{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8\}$ to'plam olib, bu to'plam elementlaridan o'zaro kesishmaydigan 2 tadan elementi bo'lgan 4 ta

$$A_1=\{a_1 a_2\}$$

$$A_2=\{a_3 a_4\}$$

$$A_3=\{a_5 a_6\}$$

$$A_4=\{a_7 a_8\}$$
 qism to'plamni ajratish mumkin.

(O'zingiz mustaqil misol tuzishga harakat qiling)

Bo'lishni ko'paytirish amali yordamidagi ta'rifi

$\forall a, v, s \in \mathbb{N}$ bo'lganda a sonini v soniga bo'linmasi deb, a sonini hosil qilish uchun v sonini ko'paytirish kerak bo'lgan s soniga aytiladi va $a;\beta=c$ kabi yoziladi.

Bunda: a -bo'linuvchi

v -bo'luvchi

s -bo'linma deb nomlanadi

Misol

$27:3=9$ chunki, $27=3 \cdot 9$

Bo'lish amalining hossalari

1) $\forall a, v, s, \in \mathbb{N}$ uchun

$$(a+v):s=a:s+v:s$$

2) $\forall a, v, s \in \mathbb{N}$ uchun

$$(a \cdot v):s = a:s \cdot v = v:s \cdot a$$

3) $\forall a, v, s \in \mathbb{N}$ uchun

$$a(v:s) = (a:v) \cdot (a:s)$$

$$a:(v:s):s = (a:v):s = (a:s):v$$

4. $\forall a, v \in \mathbb{N}$ uchun

$$a(v:s) = as:v$$

Topshiriqlar

1. To'plam nazariyasiga asoslanib $4 < 5$, $7 > 3$, $4 = 4$ ekanligini ko'rsating.

2. Arifmetik amallarning to'plam nazariyasiga ko'ra ta'rifi asoslanib, $2 + 4$, $6 - 4$, $3 \cdot 4$, $10 : 2$ ni hisoblash yo'lini ko'rsating.

3. Ifoda qiymatini eng qulay usul bilan hisoblang va bunda arifmetik amallarning qanday qoidalaridan foydalanganingizni tushuntiring⁷:

a) $76+19+24+81=$

b) $3828+1562=$

d) $76:4=$

e) $2-13=$

f) $4-8-9-25-12 =$

g) $87 \cdot 11=$

e) $2 \cdot 13 \cdot 5=$

f) $4 \cdot 8$

4. Quyidagi masalalarni yechish amalining tanlanishini tushuntiring:

⁷ Kamoldinov M, Xolmatov R, Zokirova B. Boshlang'ich sinf o'quvchilari va amaliyotchilar uchun matematikadan dars ishlanmalari. Toshkent. "Talqin" 2003 – yil

3 qiz atlas ko'ylakda, 4 qiz oq ko'ylakda raqsga tushdi. Bu raqsda nechta qiz qatnashdi?

1-«A» sinfda a'lochi o'quvchilar 5 ta, 1-«B» sinfda undan 3 ta ortiq. «B» sinfda nechta a'lochi o'quvchi bor?

Maktab bog'iga 10 tup ko'chat o'tqazildi. Shundan 7 tasi olma, qolgani o'rik daraxti. Nechta o'rik daraxti o'tqazilgan?

To'qish to'garagiga 12 o'quvchi qatnashadi, naqsh to'garagiga qatnashuvchilar undan 3 ta kam. Naqsh to'garagiga nechta o'quvchilar qatnashadi?

Bitta paltoga 6 ta tugma qadaladi. 4 ta shunday palto uchun nechta tugma kerak bo'ladi?

Nigorada 5 ta rangli qalam bor, Sardorda undan 3 marta ko'p. Sardorda nechta qalam bor?

h) 10 ta daftar 5 o'quvchiga teng bo'lib berildi. Har bir o'quvchi nechtdan daftar olgan?

i) Durdona 12 tuvakda gul o'stirmoqda. Hilolaning gullari undan 3 marta kam. Hilolada nechta gul bor?⁸

⁸ Jumaev M.Ye. matematika o'qitish metodikasidan praktikum. Toshkent "O'qituvchi" 2004 yil

II-Bob. Arifmetik amallarning peano aksiomalari asosida kiritilishi.

2.1. Aksiomatik nazariyalar va ularga qo'yiladigan talablar.

Aksiomatik nazariyalarni yaratishda qo'llaniladigan aksiomatik metod - shu matematik nazariya obyektlari orasidagi eng sodda xossalarni ifoda qilishga asoslanganligi uchun matematik fanlarni aniq ifoda qilish imkonini beradi. Bu sodda xossalar aksiomalar deb atalib, ularga asoslanib teoremlar isbotlanadi.

Matematikada biror tushunchani ta'riflaganimizda boshqa soddaroq tushunchalardan foydalaniladi. Lekin o'sha sodda tushunchalarni ifodalash uchun yana boshqa bir tushunchalar ishlatilishi tabiiy va h.k. Shu nuqtai nazardan

qarasak, biz ba'zi bir tushunchalarni ta'rifsiz qabul qilishga majbur bo'lamiz. Bu tushunchalarni aksiomatik nazariyaning asosiy tushunchalari deb ataymiz.

Xuddi shunday, birorta matematik tasdiqni isbot qilganimizda boshqa isbot qilingan tasdiqlardan foydalanamiz, isbot qilingan tasdiqlar ham o'z navbatida boshqa tasdiqlarga asoslanib, isbotlanadi va h.k. Shuning uchun ba'zi to'g'riligi shubha tug'dirmaydigan tasdiqlarni isbotsiz qabul qilishga majburmiz. Bu tasdiqlarni aksiomalar deb ataymiz. Aksiomalarga asoslanib, teoremlar isbot qilinadi. Bu esa aksiomatik nazariyaning mazmunini tashkil etadi.

Aksiomatik nazariyalar formal va mazmunli (noformal) aksiomatik nazariyalar deb ataladigan ikki turga bo'linadi.

Mazmunli aksiomatik nazariyada keltirib chiqarish qoidalari aniq belgilab qo'yilmagan bo'lib, u ko'proq intuitsiyaga asoslangan nazariyadir. Ya'ni, bu nazariyada teoremlar intuitsiyaga asoslangan qoidalaridan foydalanib isbotlanadi.

Mazmunli aksiomatik nazariyaga gruppalar nazariyasi, halqalar nazariyasi misol bo'la oladi.

Formal aksiomatik nazariya esa quyidagi sxema asosida quriladi:

Nazariya tili beriladi.

Formula tushunchasi aniqlanadi.

Aksiomalar deb ataladigan asosiy formulalar ro'yxati beriladi.

Keltirib chiqarish qoidalari sanab chiqiladi.

Biz asosan birinchi tartibli matematik nazariyalar deb ataladigan nazariyalar bilan shug'ullanamiz. Bu nazariya bizga ma'lum bo'lgan asosiy matematik nazariyalarni isbotlash uchun yetarlidir. Bunday nazariyalar ba'zan elementar nazariyalar deb ham ataladi. Birinchi tartibli tilda predikatning argumenti, predikat yoki funksiya bo'lgan predikatlar, kvantor bilan bog'langan predikat yoki funksiyalar qaralmaydi.

Birinchi tartibli til.

Ixtiyoriy tabiatli simvollarning chekli to'plami - W berilgan bo'lsin. Bu to'plamni birinchi tartibli tilning alifbosi deb ataymiz. W alifbodagi simvollarning

chekli ketma- ketligini birinchi tartibli tilning so 'zlari deymiz. Ikkita $a_1, \dots, a_n$ va $b_1, \dots, b_n$ so'zlarning mos harflari teng, ya'ni $a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$ bo'lsa, bu so'zlar teng deyiladi.

Faraz qilaylik, biror bir aksiomatik nazariya qaralayotgan bo'lsin. W shu nazariyaning alifbosi, U esa shu nazariyadagi so'zlar to'plami bo'lsin. U holda, (W, U) juftlik qaralayotgan nazariyaning tili deyiladi.

Birinchi tartibli til orqali birinchi tartibli nazariyalar ifodalanadi. Birinchi tartibli nazariyalar, umuman olganda, yuqorida aytganimizdek, predikatlar hisobini qamrab oladi. Ya'ni, predikatlar hisobining simvollar, aksiomalari, formulalari, keltirib chiqariluvchi formulalari birinchi tartibli nazariyaga kiradi. Undan tashqari, birinchi tartibli nazariyada $f_i^{n_i}(i, n_i \in \mathbb{N})$ - n_i o'rinli funksiyaning simvollar qatnashishi mumkin. Shu munosabat bilan birinchi tartibli tilda formula tushunchasi biroz kengaytiriladi.

Birinchi tartibli nazariyalarda ikki xil ifodalar ishlatiladi. Bular term va formulalardir.

2.1 -ta'rif. 1. O'zgaruvchi predmetlar, doimiy predmetlar, ya 'ni konstantalar termdir.

2. Agar $t_1, \dots, t_n$ - lar termlar, A - n o'rinli algebraik amal bo'lsa, u holda $A(t_1, \dots, t_n)$ - termdir.

3. Boshqa termlar yo'q.

Ta'rifdan ko'rinadiki, algebraik amal bog'lovchilari vositasida termlarni bog'lab ham o'zgaruvchi predmetlar, konstantalardan farqli termlarni hosil qilishimiz mumkin ekan.

2.2-ta'rif. (Birinchi tartibli nazariyada formula tushunchasi). A - n - o'rinli predikat, $t_1, \dots, t_n$ - termlar bo'lsin, u holda $A(t_1, \dots, t_n)$ -formuladir.

Agar A va B lar formulalar bo'lsa, u holda $A \wedge B, A \vee B, A \Rightarrow B, \bar{A}$ lar ham formulalardir.

Agar formula, y - erkin o'zgaruvchi bo'lsa, u holda $\forall y A$ va $\exists t A$ ifodalar ham formulalardir.

1, 2, 3 bandlarda aniqlangan formulalardan tashqari boshqa formulalar yo'q.

Predikatlar hisobining barcha aksiomalari birinchi tartibli til uchun ham o'rinli bo'lib, bu aksiomalar birinchi tartibli tilning mantiqiy aksiomalari deyiladi. Bundan tashqari, birinchi tartibli til bilan ifoda qilinayotgan har bir nazariyaning o'ziga hos aksiomalari ham bo'ladi. Bu aksiomalar nazariyadan nazariyaga o'tganda o'zgarib turadi. Shuning uchun ularni maxsus aksiomalar deb ataymiz.

Birinchi tartibli til bilan ifoda qilinadigan deyarli barcha nazariyalarga tenglik aksiomalari kiritiladi. Ular quyidagilardan iborat:

$$V_1. x = x.$$

$$V_2. x = y \Rightarrow (A(x) \Rightarrow A(y)).$$

Birinchi tartibli tilda predikatlar hisobining keltirib chiqarish qoidalarining ba'zilariga o'zgartirishlar kiritiladi.

2.3 (O'zgaruvchi predmetlarni almashtirish qoidasi).

Agar A keltirib chiqariluvchi formula bo'lsa, u holda A dagi o'zgaruvchi predmetni A da bog'langan o'zgaruvchi predmetlar qatnashmagan term bilan almashtirsak, hosil bo'lgan ifoda yana keltirib chiqariluvchi formula bo'ladi.

2.4 (O'zgaruvchi predikatni almashtirish qoidasi).

A keltirib chiqariluvchi formuladagi n o'rinli $F(t_1, \dots, t_n)$ predikatni kolliziya holati yuz bermaydigan qilib $B(0_1, \dots, 0_n)$ formula bilan almashtirsak, hosil bo'lgan ifoda yana keltirib chiqariluvchi formula bo'ladi. Bu yerda $t_1, \dots, t_n; 0_1, \dots, 0_n$ lar birinchi tartibli nazariyadagi termlardir.

Boshqa keltirib chiqarish qoidalari o'zgarishsiz qoladi.

Birinchi tartibli til uchun gipotezalardan keltirib chiqariluvchi formulalar tushunchasi, deduksiya teoremasi predikatlar hisobidagidan shaklan farq qilmaydi.

Shu sababli, ularni takroran keltirmaymiz. Lekin mazmunan keltirib chiqariluvchi formulalar haqida gapirganimizda, yuqorida keltirilgan keltirib chiqarish qoidalarini e'tiborga olishimiz zarur.

2.5. Nazariya tilining interpretatsiyasi.

Nazariya tilining interpretatsiyasi tushunchasi bilan tanishib chiqamiz.

Faraz qilaylik, W - to'plam nazariyaning alifbosi bo'lsin. W' esa boshqa birorta aksiomatik yoki intuitiv nazariyaning simvollari to'plami (alifbosi) bo'lsin. W to'plamning har bir elementiga W' ning aniq bitta elementini shunday mos qo'yamizki natijada, W dagi konstantaga W' dagi konstanta, W da o'zgaruvchi predmetga W' dagi o'zgaruvchi predmet yoki konstanta mos kelsin, W da aniqlangan har bir predikatga W' da aniqlangan yagona predikat, W da aniqlangan har bir funksional simvolga W' da aniqlangan aniq bitta funksional simvol mos kelsin. U holda birinchi nazariyada aniqlangan har bir ifodaga ikkinchi nazariyada aniqlangan aniq ifoda mos keladi. Aniqroq qilib aytadigan bo'lsak, birinchi nazariyadagi har bir termga ikkinchi nazariyadan aniq bitta term, birinchi nazariyadagi har bir formulaga ikkinchi nazariyadagi aniq bitta formula mos keladi. U holda ikkinchi nazariya birinchi nazariyaning ifodasi yoki interpretatsiyasi deyiladi.

Agar bir nazariyaning har bir keltirib chiqariluvchi formulasi shu nazariyaning interpretatsiyasida aynan rost formula yoki keltirib chiqariluvchi formula bo'lsa, u holda bunday interpretatsiya berilgan nazariyaning modeli deyiladi.

2.6-ta'rif. Berilgan nazariyaning ikkita W_1 , W_2 to'plamlarida aniqlangan ikkita interpretatsiyasi berilgan bo'lsin. W_1 , W_2 to'plamlar orasida shunday o'zaro bir qiymatli moslik, ya'ni biektiv moslik o'rnatilgan bo'lsin. Natijada, birinchi interpretatsiyadagi har bir o'zgaruvchi predmetga ikkinchi interpretatsiyadagi o'zgaruvchi predmet, birinchi interpretatsiyadagi konstantaga ikkinchi interpretatsiyadagi konstanta, birinchi interpretatsiyadagi har bir n ($n \geq 0$)

o'rinli funksional simvolga ikkinchi interpretatsiyadagi n -o'rinli funksional simvol, birinchi interpretatsiyadagi har bir n ($n \geq 0$) o'rinli predikat simvoliga ikkinchi interpretatsiyadagi n ($n \geq 0$) o'rinli predikat simvoli mos qo'yilgan bo'lib, natijada birinchi interpretatsiyadagi har bir keltirib chiqariluvchi (aynan rost) formulaga ikkinchi interpretatsiyaning keltirib chiqariluvchi (aynan rost) formulasi mos kelsa, u holda bunday ikkita interpretatsiya izomorf deyiladi.

2.1-ta'rif. Agar matematik nazariyaning har qanday ikkita modeli izomorf bo'lsa, bunday matematik nazariya qat'iy nazariya deyiladi.

Evklid geometriyasi, natural sonlar nazariyasi, butun sonlar nazariyasi, rasional sonlar nazariyasi, haqiqiy sonlar nazariyasi, kompleks sonlar nazariyasi qat'iy matematik nazariyalarga misol bo'la oladi.

Gruppalar nazariyasi esa noqat'iy aksiomatik nazariyaga misol bo'la oladi.

Matematik nazariyalarning zidsizlik, to'liqlik, yechilish muammolari

Zidsizlik muammosi.

Agar matematik nazariyada A va $\bar{A}$ formulalar keltirib chiqariluvchi bo'lsa, bunday matematik nazariyalar, ziddiyatli matematik nazariyalar deyiladi. Ziddiyatli nazariyani ko'rishning ma'nosi yo'q, chunki bunday nazariyada har qanday formula keltirib chiqariluvchi formula bo'ladi.

Haqiqatan ham, $\vdash A$ va $\vdash \bar{A}$ bo'lsa, u holda $\vdash A \wedge \bar{A}$ bo'ladi. Bundan ixtiyoriy B formula uchun $\vdash A \wedge \bar{A} \Rightarrow B$ ekanligi kelib chiqadi. Bu formulaga (MP) qoidani qo'llasak, $\vdash B$ bo'ladi.

3.2-ta'rif. Matematik nazariyada A va $\bar{A}$ formulalaridan kamida bittasi keltirib chiqarilmaydigan formula bo'lsa, bunday nazariya zidsiz nazariya deyiladi.

Matematik nazariyaning zidsizligini ko'rsatish uchun, shu nazariyaning kamida bitta zidsizligi ma'lum bo'lgan modelini ko'rsatish yetarli⁹.

Haqiqatan ham, berilgan nazariya ziddiyatli nazariya bo'lsa, u holda shunday A formula topilib, $\vdash A$ va $\vdash \bar{A}$ bo'lar edi. U holda A formulaga modelda mos kelgan A, $\bar{A}$ ga modelda mos keladigan $\bar{A}$ ' formulalar ham keltirib chiqariluvchi formulalar bo'lib, model ziddiyatli bo'lar edi.

3.3-misol. Gruppalar nazariyasi zidsiz nazariyadir. Haqiqatan ham, masalan $G = \{ -1, 1 \}$ ikki elementli mul'tiplikativ gruppalar nazariyasi uchun zidsiz model bo'ladi.

3.4. Matematik nazariyaning keng ma'noda to'liqligi.

Agar matematik nazariyadagi ixtiyoriy A formula uchun A yoki $\bar{A}$ formulalardan kamida bittasi keltirib chiqariluvchi formula bo'lsa, bunday aksiomatik nazariya keng ma'noda to'liq nazariya deyiladi.

Agar matematik nazariya keng ma'noda to'liq bo'lsa, bu nazariyaning ixtiyoriy A formulasi yoki bu formulaning inkori ixtiyoriy modelda keltirib chiqariluvchi formula bo'ladi.

3.5. Matematik nazariyaning tor ma'noda to'liqligi.

Agar matematik nazariya aksiomalari sistemasiga shu nazariyaga isbot qilinmaydigan formulani aksioma sifatida qo'shib, keltirib chiqarish qoidalarini o'zgarishsiz qoldirsak, natijada, hosil bo'lgan nazariya ziddiyatli nazariya bo'lsa, u holda matematik nazariya tor ma'noda to'liq deyiladi.

3.6. Matematik nazariyada yechilish muammosi.

Bu masala algoritmik masala bo'lib, u quyidagicha ifodalanadi.

⁹ Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi. "Yangi asr avlodi". Toshkent 2006 yil

Matematik nazariyaning ixtiyoriy A formulasi uchun A isbotlanuvchi (bajariluvchi) formulami, yoki yo'qmi ekanligini aniqlovchi algoritm bormi?

Matematik nazariyalarga na'munalar.

Qisman tartiblanish nazariyasi.

Bu nazariya ikki o'rinli P predikat qatnashgan $P(x, y)$ - bunda, $x < y$ munosabatni bildiradi.

Bu nazariyaning maxsus aksiomalari:

I $\forall x \overline{(x < x)}$ - antirefleksivlik munosabati.

II. $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 ((x_1 < x_2) \wedge (x_2 < x_3) \Rightarrow (x_1 < x_3))$ - tranzitivlik munosabati

Bu nazariyaning ixtiyoriy modeli qisman tartiblangan struktura deyiladi.

Gruppalar nazariyasi.

Gruppalar nazariyasini ifodalash uchun bitta predikat simvoli F va bitta funksional simvol f va bitta a, - konstanta yetarli.

$A(t, s), t = s$ - predikatni;

$f(t, s), t + s$ - amalni;

a, - 0 ni bildirsin.

Gruppalar nazariyasining maxsus aksiomalari quyidagilardan iborat:

$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3)$ - assotsiativlik.

$\forall x_1 (0 + x_1 = x_1 = x_1 + 0)$ - 0 ning xossasi.

$\forall x_1 \exists x_2 = x_2 + x_1 = 0$ - qarama-qarshi elementning mavjudligi.

Bu nazariyaning har qanday modeli gruppasi deyiladi. Masalan, $(\mathbb{Z}, +, 0)$ - butun sonlar gruppasidir.

Natural sonlar nazariyasi.

Natural sonlar nazariyasini ifoda qilish uchun konstanta 0; funksional simvollar. $+$, $\cdot$, $'$ (birni qo'shish); $\langle = \rangle$ predikat simvoli yetarli.

Bu nazariyaning maxsus aksiomalari quyidagilardan iborat:

- 1) $x_1 = x$
- 2) $x_1 = x_2 \Rightarrow x_2 = x_1$
- 3) $x_1 = x_2 \Rightarrow (x_1 = x_3 \rightarrow x_2 = x_3)$.
- 4) $x_1 = x_2 \Rightarrow x'_1 = x'_2$.
- 5) $0 \neq (x_1)'$.
- 6) $x'_1 = x'_2 \Rightarrow x_1 = x_2$.
- 7) $x_1 + 0 = x_1$
- 8) $x_1 + x'_2 = (x_1 + x_2)'$.
- 9) $x_1 \cdot 0 = 0$.
- 10) $x_1 \cdot x'_2 = x_1 \cdot x_2 + x_1$
- 11) $A(0) \Rightarrow (\forall x (A(x) \Rightarrow A(x')) \Rightarrow \forall x A(x))$,

bunda $A(x)$ - natural sonlar nazariyasining ixtiyoriy formilasidir.

11-aksioma o'zida cheksiz ko'p aksiomalarni mujassamlangan sxemadir. Uni odatda matematik induksiya prinsipi deb ataydilar.

4.4. To'liqsizlik haqida Gyodel teoremasi.

1931-yil K. Gyodel formal arifmetikaning to'liq ernasligini ko'rsatib berdi. Ya'ni hech bo'lmaganda formal arifmetikani qamrab olgan har qanday formal nazariyada shunday yopiq A formula topilib, A ni ham $\bar{A}$ ni ham bu nazariyada isbot qilib bo'lmazligini ko'rsatib berdi. Bundan tashqari, ba'zi shartlar bajarilganda A formula sifatida shu nazariya zidsiz, degan tasdiq olinishi mumkinligini isbot qilib berdi.

2.2. Matematik induksiya metodi va uning tadbirlari.

To'liq va to'liqmas induksiya.

Matematik nazariyalarni o‘rganish deduktiv va induktiv metodga asoslanadi. Deduktiv metod -umumiy tasdiqdan xususiy tasdiqlarni hosil qilishdir. Induktiv metod - xususiy tasdiqlardan umumiy tasdiqni keltirib chiqarish demakdir.

Masalan: “To‘g‘ri to‘rtburchaklarning diagonallari o‘zaro teng bo‘ladi” – umumiy tasdiq. Bu tasdiqdan quyidagi xususiy tasdiq kelib chiqadi: “Berilgan to‘g‘ri to‘rtburchaklarning diagonallari o‘zaro teng”.

Mumkin bo‘lgan barcha xususiy tasdiqlarning to‘g‘riligini ko‘rsatish yo‘li bilan umumiy tasdiqning to‘g‘riligi ko‘rsatilsa, bunday induksiya to‘liq induksiya deyiladi.

Masalan: 4 dan 100 gacha bo‘lgan har bir juft sonni ikkita tub sonlar yig‘indisi ko‘rinishida yozish mumkinligi ko‘rsatilsin. Mumkin bo‘lgan barcha xususiy hollarni ko‘rib chiqamiz.

$$4=2+2, \quad 6=3+3, \quad 8=3+5, \quad 10=5+5$$

$$12=5+7, \quad 14=7+7, \quad 16=5+11, \quad \dots, \quad 100=97+3$$

Mumkin bo‘lgan barcha xususiy hollarda umumiy tasdiqning to‘g‘riligi tekshirildi. Demak, umumiy tasdiq ham to‘g‘ri.

Ba’zan umumiy natijaga, bir nechta xususiy xoldan keyin ham kelish mumkin. Lekin bu holda umumiy natijaning to‘g‘riligi isbotlanmagan bo‘ladi, ya’ni gipoteza bo‘ladi.

Biror umumiy natijaga bu natijaning bir nechta xususiy hollarda to‘g‘riligidan kelingan bo‘lsa, bunday induksiyaga to‘liqsiz induksiya deyiladi. To‘liqsiz induksiya umumiy tasdiqning to‘g‘riligini to‘liq isbotlab bermaydi, lekin shunday bo‘lsa ham ko‘p yangiliklarni ochishda to‘liqsiz induksiya metodining roli katta.

Masalan: n ta toq sonlar yig‘indisini topish kerak bo‘lsin:

$$1=1 \Rightarrow 1=1^2$$

$$1+3=4 \Rightarrow 4=2^2$$

$$1+3+5=9 \Rightarrow 9=3^2$$

$$1+3+5+7=16 \Rightarrow 16=4^2$$

$$1+3+5+7+9=25 \Rightarrow 25=5^2$$

Yana bir nechta shunga o'xshash xususiy hollarni ko'rib chiqib, quyidagi $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$ xulosaga kelish mumkin. Lekin bu xulosani isbotlash kerak bo'ladi.

To'liqsiz induksiya metodi yordamida olingan umumiy natija har doim ham to'g'ri bo'lmaydi:

Masalan, a, b lar raqamlar bo'lsin.

$$\overline{ab} - \overline{ba} \text{ son } 9 \text{ ga bo'linadi: } 32 - 23 = 9:9$$

$$51 - 15 = 36 : 9$$

$$\overline{abc} - \overline{cba} \text{ ayrima } 99 \text{ ga bo'linadi, bu fikr ham to'g'ri.}$$

$\overline{abcd} - \overline{dcba}$ ayrima 999 ga bo'linadi deyishimiz mumkin. Lekin bu fikr to'g'ri emas. Haqiqatdan ham $2231 - 1322 = 909$ ayrima 999 ga bo'linmaydi.

Fransuz matematigi P.Ferma $A = 2^{2^n} + 1$ sonni $n=1, n=2, n=3, n=4$ bo'lgan holda tekshirib, bu xususiy hollarda A tub son bo'lishini ko'rsatgan va u ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ uchun $2^{2^n} + 1$ tub son bo'lsa kerak deb tahmin qilgan, lekin L.Eyler $n=5$ bo'lganda $2^{2^n} + 1$ son murakkab son ekanligini ko'rsatgan. Bu son 641 songa bo'linadi. Shunday qilib, to'liqsiz induksiya noto'g'ri xulosaga olib kelishi ham mumkin.

Shunday bo'lsa ham to'liqsiz induksiya metodi ko'p yangiliklarni ochishga yordam beradi.

Misol 1. n ning 1 dan 100 gacha bo'lgan qiymatlarida

$A=n^2+n+17$ ning qiymatlari tub son bo'lish yoki bo'lmashini tekshiring. Agar $A=n^2+n+17$ ning qiymati n ning 1 dan 100 gacha bo'lgan qiymatlarida tub son bo'lsa ham bu A ning barcha natural son n lar uchun tub son bo'ladi deyishimizga to'liq asos bo'la olmaydi. Buni ham isbotlash kerak bo'ladi.

Matematik induksiya metodi.

Biz, to'liq va to'liqsiz induksiyalarning matematik masalalarni yechishda bir qator kamchiliklarga ega ekanligini ko'rib o'tdik. Bu kamchiliklarni matematik induksiya metodi yordamida bartaraf qilish mumkin.

$R(n)$ –natural songa bog'liq bo'lgan biror tasdiq bo'lib, bu tasdiqning to'g'riligini barcha natural sonlar uchun tekshirish kerak bo'lsin. Har bir natural son uchun $R(n)$ tasdiqning to'g'riligini tekshirib chiqishning iloji yo'q. Chunki, natural sonlar cheksizdir.

$R(n)$ tasdiqning to'g'riligi quyidagicha isbotlanadi. Dastlab $R(1)$ tasdiqning to'g'riligi isbotlanadi. Keyin ixtiyoriy k natural son uchun $R(k)$ ning to'g'riligidan $R(k+1)$ ning ham to'g'riligi keltirib chiqariladi. Shunda $R(n)$ tasdiqning ixtiyoriy natural son n uchun to'g'riligi isbotlangan bo'ladi. Haqiqatdan ham $R(1)$ to'g'ri. Isbotlaganimizga asosan $R(1+1)=P(2)$ ham to'g'ri, $R(2+1)=P(3)$ ham to'g'ri va hokazo, shu protsessni davom ettirib ixtiyoriy n uchun ham $R(n)$ tasdiqning to'g'ri ekanligiga kelimiz.

Shunday qilib, natural songa bog'liq bo'lgan $R(n)$ tasdiq, ixtiyoriy n natural son uchun to'g'ri bo'ladi, agarda quyidagi 2 ta shart bajarilsa:

a) $n=1$ uchun $R(n)$ tasdiq to'g'ri;

b) n ning ixtiyoriy k natural songa teng bo'lgan qiymati uchun $R(n)$ ning to'g'riligidan, n ning $k+1$ ga teng qiymati uchun ham $R(n)$ ning to'g'riligi kelib chiqadi.

Natural songa bog'liq bo'lgan biror $R(n)$ tasdiqning ixtiyoriy natural son uchun to'g'riligini, matematik induksiya metodi bilan isbotlash uchun, dastlab bu tasdiqning to'g'riligi $n=1$ isbotlanadi.

Keyin $n=k$ uchun $R(n)$ tasdiq to'g'ri deb olinib, $R(n)$ ning $n=k+1$ uchun ham to'g'riligi keltirib chiqariladi.

Misol: Quyidagi tenglikni isbot qiling.

$$(\forall n \in \mathbb{N})(1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2) \quad (1)$$

$$n=1 \text{ bo'lsin. } 1=1^2$$

Demak, (1) tenglik $n=1$ uchun to'g'ri. (1) tenglik $n=k$ uchun to'g'ri bo'lsin, ya'ni $1+3+5+\dots+(2k-1)=k^2$ (2) bo'lsin. (2) –tenglikdan foydalanib (1) –tenglikni $n=k+1$ uchun ham to'g'riligini ko'rsatamiz:

$$\begin{aligned} 1+3+5+\dots+(2(k+1)-1) &= 1+3+5+\dots+2k+1= \\ &= 1+3+5+\dots+2k-1+2k+1 = k^2+2k+1 = (k+1)^2 \end{aligned}$$

(1) –tenglik $n=k+1$ uchun ham to'g'ri ekan. Matematik induksiya metodiga asosan (1) tenglikning ixtiyoriy natural son n uchun to'g'riligi isbot bo'ldi.

Ba'zan $R(n)$ tasdiqning to'g'riligini barcha natural son (n) lar uchun emas balki, biror R natural sondan katta barcha natural sonlar uchun isbotlash kerak bo'ladi. Bu holda matematik induksiya metodi quyidagicha formulirovka qilinadi. Agar $R(n)$ tasdiq $n=p$ uchun to'g'ri bo'lsa va n ning ixtiyoriy $k \geq r$ qiymati uchun $R(n)$ ning to'g'riligidan, uning n ning $k+1$ ga teng qiymati uchun ham to'g'riligi kelib chiqsa, u holda $R(n)$ tasdiq barcha $n \geq p$ natural sonlar uchun to'g'ri bo'ladi.

Yig'indilarni hisoblash.

1 –misol. Quyidagi tasdiqni isbot qiling:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}) (1+x+x^2+\dots+x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}) \quad (1)$$

Isbot: $n=1$ bo'lsin: $1+x = \frac{x^2-1}{x-1}$

$n=1$ uchun (1) formula to'g'ri. k -ixtiyoriy natural son va (1) formula $n=k$ uchun to'g'ri bo'lsin, ya'ni

$$1+x+x^2+\dots+x^k = \frac{x^{k+1}-1}{x-1} \quad (2)$$

tenglik to'g'ri bo'lsin.

(1) –tenglikning $n=k+1$ uchun ham to'g'riligi ko'rsatamiz:

$$1+x+x^2+\dots+x^k+x^{k+1} = \frac{x^{k+1}-1}{x-1} + x^{k+1} =$$

$$= \frac{x^{k+1}-1+x^{k+2}-x^{k+1}}{x-1} = \frac{x^{k+2}-1}{x-1}$$

(1) –formula $n=k+1$ uchun ham to'g'ri ekan. Demak matematik induksiya metodiga asosan (1) formula barcha natural son (n) lar uchun to'g'ri.

2 –misol. Isbot qiling:

$$3+33+333+\dots+\underbrace{333\dots3}_{n \text{ marta}} = \frac{10^{n+1}-9n-10}{27}; \quad (3)$$

Isbot $n=1$ bo'lsin, $3 = \frac{10^2-9-10}{27}$ tenglik to'g'ri, chunki

$$\frac{10^2-9-10}{27} = \frac{81}{27} = 3.$$

(3) –formula $n=k$ uchun to'g'ri bo'lsin. Ya'ni

$$S_k = 3 + 33 + 333 + \dots + \underbrace{333\dots 3}_k = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27}; \quad (4) \quad \text{bo'lsin.}$$

(3) ni $n=k+1$ uchun to'g'riligini ko'rsatamiz.

$$\begin{aligned} & 3 + 33 + 333 + \dots + \underbrace{333\dots 3}_k + \underbrace{333\dots 3}_{k+1} = \\ & = S_k + 3 \cdot 10^k + 3 \cdot 10^{k-1} + 3 \cdot 10^{k-2} + \dots + 3 \cdot 10 + 3 = \\ & = S_k + 3(10^k + 10^{k-1} + 10^{k-2} + \dots + 10 + 1) = \frac{10^{k+1} - 9k - 10}{27} + 3 \cdot \frac{10^{k+1} - 1}{10 - 1} = \\ & = \frac{10^{k+1} - 9k - 10 + 9 \cdot 10^{k+1} - 9}{27} = \frac{10 \cdot 10^{k+1} - 9(k+1) - 10}{27} = \\ & = \frac{10^{(k+1)+1} - 9(k+1) - 10}{27}; \end{aligned}$$

(3) formula $n=k+1$ uchun ham to'g'ri ekan. Demak, matematik induksiya metodiga asosan (3) formula ixtiyoriy natural son n uchun to'g'ri.

3 -misol. $S_n = -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + \dots + (-1)^n n$ yig'indini hisoblash uchun formula chiqaring.

$$\text{Yechish. } S_1 = -1, S_2 = 1, S_3 = -2, S_4 = 2, S_5 = -3, S_6 = 3$$

$-1, +1, -2, +2, -3, +3, \dots$ ketma-ketlikni hosil qilamiz. Ikkinchi tomondan

$$1 = \left[\frac{1+1}{2} \right] = \left[\frac{2+1}{2} \right];$$

$$2 = \left[\frac{3+1}{2} \right] = \left[\frac{4+1}{2} \right];$$

$$3 = \left[\frac{5+1}{2} \right] = \left[\frac{6+1}{2} \right]; \quad ([x] - x \text{ ning butun qismi}). \text{ Yuqoridagi tengliklarga}$$

asoslanib, $\forall n \in \mathbb{N}$ uchun quyidagi

$$S_n = (-1)^n \left[\frac{n+1}{2} \right] \quad (5)$$

formula o‘rinli bo‘ladi deb tahmin qilishimiz mumkin. Yuqoridagi kuzatishlar (5) formulaning to‘g‘riligini isboti bo‘lmaydi. Shuning uchun (5) formulaning to‘g‘riligini isbotlash kerak.

Isbot: (5) –formulaning to‘g‘riligini matematik induksiya metodidan foydalanib ko‘rsatamiz.

$n=1$ uchun (5) formulaning to‘g‘riligi yuqorida ko‘rsatildi. (5) –formula $n=k$ uchun to‘g‘ri bo‘lsin:

$$S_k = (-1)^k \left[\frac{k+1}{2} \right] \quad (6) \quad \text{bo‘lsin. Bundan foydalanib (5) –formulaning}$$

$n=k+1$ uchun ham to‘g‘ri ekanligini keltirib chiqaramiz:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (-1)^{k+1}(k+1) = (-1)^k \left[\frac{k+1}{2} \right] + (-1)^{k+1}(k+1) = \\ &= (-1)^{k+1} \left(k+1 - \left[\frac{k+1}{2} \right] \right) = (-1)^{k+1} \left[\frac{k+2}{2} \right] \end{aligned}$$

Demak, (5) –formula $n=k+1$ uchun to‘g‘ri ekan. Shunday qilib, matematik induksiya metodiga asosan (5) –formula ixtiyoriy natural son uchun to‘g‘ri.

MAShQLAR:

1. Isbot qiling:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1)$$

2. Isbot qiling: $\frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n-1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}$;

$$n \in \mathbb{N}$$

3. Ixtiyoriy natural son n uchun

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

yig'indini hisoblash formulasini yozing.

$$4. (\forall n \in \mathbb{N}) (S_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot n^2)$$

yig'indini hisoblash formulasini aniqlang.

Tengsizliklarni isbotlash.

1-misol: a va b musbat sonlar $a > b$ tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda $(\forall n \in \mathbb{N}) (a^n > b^n)$ bo'lishini isbot qiling.

Isbot. $n=1$ uchun $a^1 > b^1$ tengsizlik to'g'ri. $(\forall k \in \mathbb{N})$ uchun $a^k > b^k$ bo'lsin. $a^{k+1} > b^{k+1}$ bo'lishini ko'rsatamiz.

$$a > 0 \text{ va } a^k > b^k \text{ dan } \Rightarrow a^{k+1} > ab^k \quad (1)$$

$$b^k > 0 \text{ va } a > b \text{ dan } \Rightarrow ab^k > b^{k+1} \quad (2)$$

(1) va (2) –tengsizliklardan $a^{k+1} > b^{k+1}$ tengsizlikni hosil qilamiz. Demak, matematik induksiya metodiga asosan barcha natural son (n) lar uchun $a^n > b^n$ tengsizlik to'g'ri.

2 –misol: $\forall n \geq 3$ natural son uchun $2^n > 2n+1$ bo'lishini isbot qiling. Isbot $n=3$ bo'lsa, $2^3 > 2 \cdot 3 + 1$ tengsizlik to'g'ri $n=k$ uchun $2^k > 2 \cdot k + 1$ tengsizlik to'g'ri bo'lsin. $n=k+1$ uchun ham berilgan tengsizlikni to'g'riligini tekshiramiz:

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2(2k+1) = 4k+2 =$$

$$= 2k+3+2k-1 > 2k+3 = 2(k+1)+1$$

$n=k+1$ uchun ham $2^{k+1} > 2(k+1)+1$ tengsizlik to'g'ri ekan. Demak, matematik induksiya metodiga asosan berilgan tengsizlik $\forall n \geq 3$ uchun to'g'ri.

3 –misol: quyidagi tengsizlikni isbot qiling.

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1 \right) \quad (3)$$

$$\text{Isbot: } n=1 \text{ uchun } \frac{1}{1+1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6+4+3}{12} > 1$$

(3) Tengsizlik to'g'ri ekan. $n=k$ uchun (3) to'g'ri bo'lsin, ya'ni

$$S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{3k+1} > 1 \quad (4)$$

bo'lsin. $n=k+1$ uchun ham (3) ning to'g'riligini ko'rsatamiz.

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{1}{k+1+1} + \frac{1}{k+1+2} + \dots + \frac{1}{3(k+1)+1} = \frac{1}{k+1} + \\ &+ \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1} = \\ &= S_k + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1} = \\ &= S_k + \frac{(3k+3)(3k+4) + (3k+2)(3k+4)}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)} \times \\ &\times \frac{(3k+2)(3k+3) - 3(3k+2)(3k+4)}{1} = S_k + \\ &+ \frac{9k^2 + 21k + 12 + 9k^2 + 18k + 8 + 9k^2 + 15k + 6 - 27k^2 - 54k - 24}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)} = \\ &= S_k + \frac{2}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)} > S_k \end{aligned}$$

$S_{k+1} > S_k$ tengsizlik hosil bo'ladi.

Bundan va (4) ga asosan $S_{k+1} > 1$ bo'ladi. Demak, matematik induksiya metodiga asosan (3) ($\forall n \in \mathbb{N}$) uchun to'g'ri.

4 –misol. Quyidagi ($\forall n \in \mathbb{N}$) $(2^{n-1}(a^n + b^n) \geq (a+b)^n)$ (5) tengsizlikni isbot qiling. Bu yerda a va b lar ixtiyoriy musbat sonlar.

Isbot: $n=1$ uchun (5) to'g'ri:

$2^0(a^1+b^1) \geq (a^1+b)^1$, $a+b \geq a+b$. $n=k$ uchun (5) to'g'ri bo'lsin, ya'ni

$$(2^{k-1}(a^k+b^k)) \geq (a+b)^k \quad (6)$$

bo'lsin. (6) dan foydalanib $n=k+1$ uchun ham (5) ning to'g'riligini ko'rsatamiz (6) –tengsizlikning har ikkala tomonini $a+b$ musbat songa ko'paytiramiz:

$$(2^{k-1}(a^k+b^k))(a+b) \geq (a+b)^{k+1} \quad (7)$$

Bu tengsizlikni chap tomonini baholaymiz:

$$\begin{aligned} (2^{k-1}(a^k+b^k))(a+b) &= 2^k \cdot \frac{(a^k+b^k)(a+b)}{2} = \\ &= 2^k \cdot \frac{a^{k+1} + ab^k + a^k b + b^{k+1}}{2} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} a^{k+1} + b^{k+1} - \frac{a^{k+1} + ab^k + a^k b + b^{k+1}}{2} &= \\ &= \frac{a^{k+1} + b^{k+1} - ab^k - a^k b}{2} = \frac{(a-b)(a^k - b^k)}{2} \geq 0 \end{aligned}$$

$$a^{k+1} + b^{k+1} - \frac{a^{k+1} + ab^k + a^k b + b^{k+1}}{2} \geq 0 \Rightarrow$$

$$a^{k+1} + b^{k+1} \geq \frac{a^{k+1} + ab^k + a^k b + b^{k+1}}{2} \quad (9)$$

(8) –va (9) – tengsizliklardan

$$2^{k-1}(a^k+b^k)(a+b) \leq 2^k(a^{k+1} + b^{k+1}) \quad (10)$$

tengsizlikni, (7) –va (10) –tengsizliklardan esa
 $2^k(a^{k+1}+b^{k+1}) \geq (a+b)^{k+1}$ tengsizliklarni hosil qilamiz. Bu tengsizlik (5) –

tengsizlikning $n=k+1$ uchun ham to'g'ri ekanligini ko'rsatadi. Demak, matematik induksiya metodiga asosan (5) –tengsizlik barcha natural sonlar uchun to'g'ri.

MAShQLAR:

Tengsizliklarni isbotlang:

1. $(\forall n \in \mathbb{N})(5^n > 7n - 3)$
2. $(\forall n \in \mathbb{N})(3^n \geq 2n + n)$
3. $(\forall n \geq 2)(4^n > 3^n + 2^n)$
4. $(\forall n \geq 7)(2^{n-1} > n(n + 1))$
5. $(\forall n \in \mathbb{N})(4^n \geq 3^n + n^2)$
6. $(\forall n \in \mathbb{N}) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}\right)$
7. $(\forall n \in \mathbb{N}) \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}\right)$
8. $(\forall n \geq 10, t \in \mathbb{N})(2^n > n^3)$
9. $(1+a)^n > 1+na, (a > -1, a \in \mathbb{R}, n > 1, n \in \mathbb{N})$
10. $(\forall n \in \mathbb{N}) \left(\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} < n\right)$

Sonli ketma –ketliklar.

Matematik induksiya metodidan foydalanib ba'zi sonli ketma –kelliklarning xossalari o'rganamiz.

1 –misol. $\{a_n, n=0, 1, 2, \dots\}$ sonli ketma –ketlik quyidagicha aniqlangan:

$$a_0=2, a_1=3, a_{n+1}=a_1 \cdot a_n - a_0 \cdot a_{n-1}, n \in \mathbb{N}$$

Bu ketma –ketlik uchun $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n = 2^n + 1)$ (1)

formula o'rinli bo'lishini isbot qiling.

Isbot. $n=1$ uchun $3=2^1+1$ bo'lib, (1) formula to'g'ri. Faraz qilaylik $n=k$ uchun $a_k=2^k+1$, (2) bo'lsin. (2) dan foydalanib $n=k+1$ uchun (1) ning to'g'riligini, ya'ni $a_{k+1}=2^{k+1}+1$ bo'lishini ko'rsatamiz.

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_1 \cdot a_k - a_0 \cdot a_{k-1} = 3a_k - 2a_{k-1} = \\ &= 3(2^k+1) - 2(2^{k-1}+1) = 3 \cdot 2^k + 3 - 2^k - 2 = 2^{k+1} + 1 \end{aligned}$$

(1) formula $n=k+1$ uchun to'g'ri ekan. Demak, (1) –formula barcha natural sonlar uchun ham to'g'ri.

2 –misol $\{a_n, n=0,1,2,\}$ –ayrimasi d ga teng bo'lgan arifmetik progressiya bo'lsin. $S=a_1+a_2+\dots+a_n$

Quyidagi formulalarning to'g'riligini isbot qiling.

$$a_n = a_1 + d(n-1) \quad (3)$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad (4)$$

Isbot. $n=1$ uchun (3) formula to'g'ri:

$$a_1 = a_1 + d(1-1) = a_1 + d \cdot 0 = a_1 + 0 = a_1$$

(3) –formula $n=k$ uchun to'g'ri bo'lsin:

$$a_k = a_1 + (k-1)d \quad (5)$$

bo'lsin. $n=k+1$ uchun ham (3) ning to'g'riligini ko'rsatamiz.

$$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k-1)d + d = a_1 + kd \Rightarrow$$

(3) –formula $n=k+1$ uchun to‘g‘ri ekan. Demak, matematik induksiya metodiga asosan (3) –formula barcha natural sonlar uchun to‘g‘ri.

Endi (4) –formulani isbot qilamiz:

$n=1$ bo‘lsin. $S_1 = a_1 = \frac{a_1 + a_1}{2} \cdot 1 \Rightarrow$ (4) –formula $n=1$ uchun to‘g‘ri ekan. $n=k$ uchun $S_k = \frac{a_1 + a_k}{2} \cdot k$ formula to‘g‘ri bo‘lsin. Bu formuladan foydalanib $n=k+1$ uchun ham (4) ning to‘g‘riligini ko‘rsatamiz:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + a_{k+1} = \frac{a_1 + a_k}{2} \cdot k + a_{k+1} = \frac{ka_1 + ka_{k+1}}{2} = \\ &= \frac{ka_1 + k(a_1 + (k-1)d) + a_{k+1} + a_{k+1}}{2} = \\ &= \frac{2a_1(k+1) + (k+1)kd}{2} = \frac{(2a_1 + kd)(k+1)}{2} = \\ &= \frac{a_1 + a_1 + kd}{2} (k+1) = \frac{a_1 + a_{k+1}}{2} (k+1); \end{aligned}$$

Shunday qilib, (4) –formula $n=k+1$ uchun ham

to‘g‘ri ekan. Demak, matematik induksiya metodiga asosan (4) –formula $\forall n \in \mathbb{N}$ uchun to‘g‘ri.

3 –misol: $\{b_n, n=0, 1, 2, \dots\}$ –maxraji q ga teng bo‘lgan geometrik progressiya va $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ bo‘lsin. Quyidagi formulalarning to‘g‘riligini isbot qiling:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(b_n = b_1 \cdot q^{n-1}) \quad (6)$$

$$\forall (n \in \mathbb{N})(S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}) \quad (7)$$

Isbot: $n=1$ uchun $b_n = b_1$ va $b_1 q^{n-1} = b_1 q^{1-1} = b_1 q^0 = b_1 \cdot 1 = b_1$ bo‘lib, (6) –formula to‘g‘ri. $n=k$ uchun (6)-formula to‘g‘ri bo‘lsin ya’ni $b_k = b_1 q^{k-1}$ bo‘lsin. U holda

$b_{k+1}=b_k \cdot q=(b_1q^{k-1}) \cdot q=b_1 \cdot q^k$ bo‘ladi. Ya’ni (6)-formula $n=k+1$ uchun ham to‘g‘ri. Demak, (6)-formula matematik induksiya metodiga asosan barcha $n \in \mathbb{N}$ lar uchun to‘g‘ri. Endi (7) –formulani isbot qilamiz. $n=1$ bo‘lsin, u holda $S_n=S_1=b_1$,

$$\frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1(q^1 - 1)}{q - 1} = b_1 \quad \text{Demak, (7) –formula } n=1 \text{ uchun to‘g‘ri ekan. Faraz}$$

qilaylik $n=k$ uchun $S_k = \frac{b_1(q^k - 1)}{q - 1}$ tenglik to‘g‘ri bo‘lsin. Bu tenglikdan foydalanib $n=k+1$ uchun ham (7) ning to‘g‘riligini keltirib chiqamiz:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + b_{k+1} = \frac{b_1(q^k - 1)}{q - 1} + b_1 \cdot q^k = \\ &= \frac{b_1q^k - b_1 + b_1q^{k+1} - b_1q^k}{q - 1} = \frac{b_1(q^{k+1} - 1)}{q - 1} \end{aligned}$$

(7) –formula $n=k+1$ uchun ham to‘g‘ri ekan. Matematik induksiya metodiga asosan (7) –formulaning $(\forall n \in \mathbb{N})$ uchun to‘g‘riligi kelib chiqadi.

4 –misol: $\{d_n\}$ ketma –ketlikning n - hadi qavariq n burchakning dioganallari soniga teng. Quyidagi formulani isbot qiling:

$$(\forall n \geq 3)(d_n = \frac{n(n-3)}{2}) \quad (8)$$

Isbot: $n=3$ bo‘lsin. Uchburchakning dioganali yo‘q, ya’ni $d_3=0$. Shuning uchun $n=3$ bo‘lganda (8) –formula to‘g‘ri bo‘ladi. Faraz qilaylik qavariq k burchakning dioganallari soni d_k uchun (8) –formula to‘g‘ri bo‘lsin, ya’ni $n=k$ uchun $d_k = \frac{k(k-3)}{2}$ (9) bo‘lsin. Bu tenglikdan foydalanib $n=k+1$ uchun ham

(8) –formulaning to‘g‘riligini ko‘rsatamiz. Qavariq $A_1A_2A_3...A_kA_{k+1}$ dan iborat $(k+1)$ burchakning dioganallari sonini hisoblash uchun, $A_1A_2...A_k$

dan iborat k burchakning dioganallari soni d_2 ga yana $(k+1)$ burchakning A_{k+1} uchidan chiqqan dioganallarini va A_1A_k dioganalini qo‘shish kerak.

Ko‘pburchakning A_{k+1} uchidan chiqqan dioganallari

$k+1-3=k-2$ ta

Shuning uchun,

$$\begin{aligned}d_{k+1} &= d_k + (k+2) + 1 = \frac{k(k-3)}{2} + k - 1 = \frac{k^2 - k - 2}{2} = \\&= \frac{(k+1)(k-2)}{2} = \frac{(k+1) \cdot [(k+1) - 3]}{2} \\d_{k+1} &= \frac{(k+1) \cdot [(k+1) - 3]}{2}\end{aligned}$$

bo'ldi. (8) –formula $n=k+1$ uchun ham to'g'ri ekan, Demak, matematik induksiya metodiga asosan (8) –formula ixtiyoriy qavariq ko'p burchak uchun to'g'ri.

2.3. Arifmetik amallarning peano aksiomalari asosida kiritish.

Nazariyani aksiomatik qurash tushunchasi.

Har qanday fanni qurashda turli tushunchalar asos qilib olinadi. Bu tushunchalar asosida nazariyaning aksiomalari tuziladi. Aksiomalar isbotsiz qabul qilinadigan jumlar bo'lib, ularni biri ikkinchisidan kelib chiqmasligi hamda biri ikkinchisini inkor qilmasligi lozim. Nazariyani aksiomati qurishda qabul qilingan aksiomalar teoremlarni isbotlash uchun yetarli bo'lishi kerak. Amaliyotdan ko'rinadiki bitta nazariyani bir necha yillar bilan aksiomatik qo'rish mumkin. Bu yo'llarni har birida turli boshlang'ich tushuncha, munosabatlar ularga oid aksiomalar sistemasi bir-biridan farq qiladi. Natural sonlar nazariyasi ham turlicha yo'llar bilan aksiomatik qurilgan.

Ular qo'yidagilar:

- 1) Natural sonlar nazariyasini to'plamlar nazariyasi asosida qurish
- 2) Natural sonlar nazariyasini Peano aksiomalari asosida qurish
- 3) Natural sonlar nazariyasini miqdor tushunchasi asosida qurish

Natural son tushunchasi matematikaning asosiy tushunchalaridan biri sanaladi. U yillar davomida kishilarni ehtiyojlari natijasida vujudga kelgan vaqt o'tishi bilan odamlar sonlarni atalishi, belgilanishi hamda ularning yozilishi va ular ustida amallarni bajarishni ham o'rganib oldilar Xindistonda sonlar yozish uchun o'nli sistemani yaratilishi natijasida odamlar natural sonlarni cheksizligini ham anglab yetdilar. Sonlar va ular ustidagi amallarni o'rgana boshlagan fan arifmetika deb atala boshladi. Arifmetika qadimgi SHarq mamlakatlari: Vivilon, Xitoy, Xindiston va Misrda vujudga keldi. O'rta asrlarga kelib Xind va Arab dunyosi mamlakatlarida arifmetika fani rivojlandi va XVIII asrdan boshlab Yevropalik olimlar tomonidan bir qator kashfiyotlar qilindi. Natural son atamasini birinchi bo'lib Rimlik olim A.A.Boetsiy qo'lladi.

1858-1932 yillarda yashab ijod qilgan Italiya olimi Juzeppe Peano boshlang'ich tushuncha sifatida «natural son» va «...dan keyin keladi» munosabatni asos qilib olib, qo'yidagi aksiomalar asosida nomanfiy butun sonlar to'plamini aksiomatik asosda quradi.

Peanoninq 1-aksiomasi.

Hech qanday sondan keyin kelmaydigan 1 soni mavjud. Bundan natural sonlar to'plamida birinchi element 1 sonidan iborat ekanligi kelib chiqadi.

Peanoninq 2-aksiomasi.

Har qanday a natural uchun undan keyin keladigan birgina a_1 soni mavjud

Bu natueral sonlar to'plamini cheksiz ekanilgini anglatadi.

Peanoninq 3-aksiomasi.

Istalgan son bevosita bittadan ortiq bo'lmagan sondan keyin keladi. Bu aksioma natural sonlar to'plamining qat'iy tartiblanganligini anglatadi.

Peanoninq 4-aksiomasi.

Agar biror D qoida yoki qonun 1 soni uchun to'g'ri bo'lib, bu qoida yoki qonunni $n=k$ natural soni uchun to'g'ri ekanligidan navbatdagi $n=k+1$ son uchun to'g'riligi kelib chiqsa, bunday qoida yoki qonun barcha natural sonlar uchun ham

to'g'ri bo'ladi. Bu aksiomasi matematik induksiya aksiomasi deb Yuritiladi va unga matematik induksiya metodi asoslanadi¹⁰.

1-Misol

Birinci qatordagi odam ayol kishi ekanligi ma'lum, n-qatordagi turgan kishi ayol bo'lib n+1-qatordagi turgan kishi ayol ekanligidan qatordagilarni barchasi ayol ekanligi kelib chiqadi.

2-Misol

n natural son bo'lganda 2n-ko'rinishdagi barcha sonlar juft sonlardir xaqiqatan ham 4- aksiomaga ko'ra n=1 da 2 juft son, n=2 k juft son bo'lsa, $2(k+1)=2k+2$ juft son. Demak 2 n ko'rinishdagi barcha sonlar n natural son bo'lganda juft sondan iborat ekan. Natural sonlar to'plamida "tenglik" munosabati ko'yidagi xossalarga ega

1. Refleksiv xossasi har qanday natural son o'zi-o'ziga teng ya'ni

$$\forall a \in \mathbb{N} \text{ bo'lsa} \quad a=a$$

2. Simmetrilik hossasi

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \text{ uchun} \quad a=b \text{ bo'lsa} \quad u \text{ holda } b=a \text{ bo'ladi}$$

3. Transizivlik hossasi

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} \text{ uchun} \quad a=b \text{ va } b=c \text{ bo'lish uchun } u \text{ holda } a=c \text{ bo'ladi}$$

Natural sonlarni qo'shish va ularning xossalari.

Qo'shish amalining ta'rifi Germon Grossman (1809-1877) tomonidan berilgan qo'shish amalining induktivlik ta'rifiga asoslanadi. Bu ta'rif ikki qismdan iborat bo'lib, quyidagicha:

¹⁰ N.Hamedova, Z.Ibragimova, T.Tasetov, "Matematika". Iqbol turon Toshkent 2007 yil.

1) Ixtiyoriy a natural songa 1 ni qo'shish, bevosita a dan keyin keladigan sonni beradi. Ya'ni $(\forall a \in N)(a+1=a')$.

2) $a+b'$ amali, a songa bevosita b sondan keyin keladigan b' sonni qo'shish natijasida $a+b$ sondan bevosita keyin keladigan natural $(a+b)'$ sonni beradi. Ya'ni $(\forall a, b \in N)[(a+b)' = (a+b)+1]$.

Peanoning ikkinchi aksoimasidan ma'lumki, n –natural son bo'lsa, $n+1$ ham albatta natural son bo'ladi. Bunda a va $a+b$ lar natural son bo'lganda $a+b'=(a+b)'$ ham natural son bo'lishi kelib chiqadi. Shuningdek, $a+1=a'$ dan Peanoning 4-aksiomasiga asosan a natural son bilan b natural sonning yig'indisi to'la aniqlangan va natural sondan iborat bo'ladi.

Demak, qo'shish amali natural sonlar to'plamida hamma vaqt bajariladigan bir qiymatli amal ekan.

Natural sonlarni qo'shish ta'rifidan ko'rinadiki, haq qanday natural son o'zidan oldingi natural son bilan birning yig'indisiga teng bo'lar ekan. Ya'ni

$$2=1+1 \qquad 6=5+1$$

$$3=2+1 \qquad 7=6+1$$

$$4=3+1 \qquad 8=7+1$$

$$5=4+1 \qquad 9=8+1.$$

Bo'ladi. Natijada biz 1 ni qo'shish jadvalini hosil qildik.

Endi 2 ni qo'shish jadvalini tuzaylik:

$$2+2=2+(1+1)=(2+1)+1=3+1=4.$$

Demak, 2 ni qoshish jadvali:

$$1+2=1+(1+1)=(1+1)+1=2+1=3$$

$$2+2=2+(1+1)=(2+1)+1=3+1=4$$

$$3+2=3+(1+1)=(3+1)+1=4+1=5$$

$$4+2=4+(1+1)=(4+1)+1=5+1=6$$

3 ni qo'shish jadvali:

$$1+3=1+(2+1)=(1+2)+1=3+1=4$$

$$2+3=2+(2+1)=(2+2)+1=4+1=5$$

$$2+4=2+(3+1)=(2+3)+1=5+1=6.$$

Xuddi shu yo'l bilan bir xonali sonlarni qo'shish jadvalini tuzishimiz mumkin. Yuqoridagilardan ko'rinadiki, agar natural sonlar qatorida a dan bevosita keyin keladigan b ta sonni sanasak, natijada oxirgi sanalgan son a va b sonlarning yig'indisi bo'ladi. Bunda a -birinchi qo'shiluvchi, b -ikkinchi qo'shiluvchi, $a+b$ esa yig'indi deb yuritiladi.

Qo'shish amali quyidagi xossalarga ega:

1⁰. Guruhlash (assotsiativlik) xossasi.

$$(\forall a, b, c \in N)[(a + b + c) = a + (b + c)].$$

Bu xossani matematik induksiya metodi yordamida isbotlaylik.

Isbot.

1) $c=1$ bo'lsin. U holda $(a+b)+1=a+(b+1)$ (ta'rifga asosan).

Demak, $c=1$ uchun guruhlash xossasi o'rinli.

2) $c=n$ uchun $(a+b)+n=a+(b+n)$ o'rinli deb faraz qilaylik.

3) $c=n+1$ uchun to'g'riligini isbotlaylik.

$$\begin{aligned} (a+b)+(n+1) &= [(a+b)+n]+1 = (\text{ta'rifga asosan}) [a+(b+n)]+1 = (\text{farazga asosan}) \\ & a+[(b+n)+1] = (\text{ta'rifga asosan}) = a+[b+(n+1)] (\text{ta'rifga asosan}). \end{aligned}$$

Demak, $(a+b)+(n+1)=a+[b+(n+1)]$.

Peanoning 4-aksiomasiga asosan, $(a+b)+c=a+(b+c)$ ekanligi kelib chiqdi.

2⁰. O'rin almashtirish (kommutativlik) xossasi.

$$(\forall a, b, \in N)(a + b = b + a).$$

Bu xossani ham matematik induksiya metodidan foydalangan holda isbotlaymiz.

Isbot.

1) $a=1$ bo'lsa, $1+b=b+1$ bo'lishini isbotlaylik.

$b=1$ bo'lsa, $1+1=1+1$ bo'ladi.

Demak, $b=1$ uchun $1+b=b+1$ tenglik to'g'ri.

$b=n$ uchun $1+n=n+1$ to'g'ri deb faraz qilaylik.

$b=n+1$ uchun $1+(n+1)=(n+1)+1$ to'g'riligini isbotlaymiz.

$1+(n+1)=(1+n)+1$ (ta'rifga asosan) $= (n+1)+1$ (farazga asosan).

Demak, $1+(n+1)=(n+1)+1$ bo'ladi.

Endi yuqoridagi xossa $\forall a \in N$ uchun o'rinli ekanligini isbotlaylik.

$a=1$ uchun o'rinli ekanligini ko'rdik.

$a=m$ uchun $m+b=b+m$ deb faraz qilaylik.

$a=m+1$ uchun $(m+1)+b=b+(m+1)$ ekanligini isbotlaylik. U holda

$(m+1)+b=m+(1+b)=m+(b+1)$ (1^0 -xossaga asosan) $(m+b)+1$ (ta'rifga asosan) $= (b+m)+1=b+(m+1)$ (farazga asosan).

Demak, $a+b=b+a$ (4-aksiomaga asosan)¹¹.

¹¹ N.Hamedova, Z.Ibragimova, T.Tasetov, "Matematika". Iqbol turon Toshkent 2007 yil.

Ayirish amalining ta'rif va xossalari.

Aytaylik, bizga ikkita qo'shiluvchuning yigindisi a va qo'shiluvchilardan biri b berilgan holda ikkinchi qo'shiluvchini topish talab qilinsin. Demak, shunday x sonini topish kerakki, bunda $a=b+x$ bo'lsin.

1-ta'rif. Berilgan a sonidan b sonni ayirish deb, b ga qo'shganda a hosil bo'ladigan x sonni topishga aytiladi.

Bunda: a -kamayuvchi; b -ayiriluvchi; x -ayirma deb yuritiladi va $x=a-b$ ko'rinishda yoziladi.

Ta'rifdan ko'rinadiki, kamayuvchi ayiriluvchi bilan ayirmaning yig'indisidan iborat bo'ladi.

Demak, $a-b=x \rightarrow a=b+x$.

Bundan ko'rinadiki, kamayuvchi ayiriluvchidan katta bo'ladi, ya'ni $a>b$. Nomanfiy butun sonlar to'plamida kamayuvchi ayiriluvchidan katta yoki unga teng bo'lgan holdagina ayirish amali aniqlangan bo'ladi.

Ayirish amalining quyidagi xossalarga ega:

1⁰. Agar ikki sonning ayirmasiga ayiriluvchi qo'shilsa, kamayuvchi hosil bo'ladi, ya'ni

$a-b=c$ bo'lsa, $a=b+c$ bo'ladi.

Isbot. Ta'rifga asosan $a=b+c$ yoki $c+b=a$. Lekin

$c=a-b \rightarrow c+b=(a-b)+b=a$.

2⁰. Agar ikki son yig'indisidan qo'shiluvchilardan biri ayirilsa, ikkinchi qo'shiluvchi hosil bo'ladi. Ya'ni

$(\forall a, b \in N)[(a+b)-b=a]$.

3⁰. Berilgan songa ikki sonning ayirmasini qo'shish uchun kamayuvchini qo'shib, ayiriluvchini ayirish kifoya, ya'ni

$$(\forall a, b, \in N)[a + (b - c) = (a + b) - c].$$

4⁰. Berilgan sondan yig'indini ayirish uchun bu sondan qo'shiluvchilarni birin-ketin ayirish kifoya, ya'ni

$$(\forall a, b, \in N)[(a - (b + c) = a - b - c].$$

5⁰. Berilgan sondan ayirmani ayirish uchun kamayuvchini ayirib, ayiriluvchini qo'shish kifoya, ya'ni

$$(\forall a, b, c \in N)[a - (b - c) = (a - b) + c].$$

Natural sonlarni ko'paytirish amali ta'rif va xossalari. Har biri a ga teng bo'lgan b ta natural son yig'indisi $\underbrace{a + a + a + \dots + a}_{b \text{ ta}}$ ni topish talab qilingan bo'lsin.

Bunday ko'rinishdagi yig'indini hisoblash ko'p hollarda amaliy jihatdan qiyinchilik tug'diradi. Shuning uchun bir xil qo'shiluvchilar yig'indisini topishni osonlashtirish maqsadida yangi amal kiritiladi. Bu amal ko'paytirish amali deb yuritiladi.

2-ta'rif. Har biri a ga teng bo'lgan b ta qo'shiluvchining yig'indisini topishga ko'paytirish amali deyiladi.

U axb yoki $a \cdot b$ ko'rinishda belgilanib, a sonining b soniga ko'payitmasi deb ataladi.

Demak, $a \cdot b = \underbrace{a + a + a \dots + a}_{b \text{ ta}}$. Bunda $a \cdot b$ -ko'payitma, a , b -ko'paytuvchilar deb yuritiladi.

Ko'paytirish amalining aksiomatik ta'rif quyidagicha:

3-ta'rif. a natural sonining b natural soniga ko'payitmasi deb, shunday algebraic operatsiyaga aytiladiki, unda

$$1) a \cdot 1 = a$$

$$2) a \cdot (b+1) = a \cdot b + a \text{ bo' ladi.}$$

Bu ta'rif yordamida bir xonali sonlar uchun ko'paytirish jadvalini tuzishimiz mumkin.

Masalan,

a) 2 ni ko'paytirish jadvalini tuzaylik.

$$2 \cdot 1 = 2$$

$$2 \cdot 2 = 2 \cdot (1+1) = 2 \cdot 1 + 2 = 2 + 2 = 4$$

$$2 \cdot 3 = 2 \cdot (2+1) = 2 \cdot 2 + 2 = 4 + 2 = 6$$

$$2 \cdot 4 = 2 \cdot (3+1) = 2 \cdot 3 + 2 = 6 + 2 = 8$$

b) 3 ni ko'paytirish jadvalini tuzaylik:

$$3 \cdot 1 = 3$$

$$3 \cdot 2 = 3 \cdot (1+1) = 3 \cdot 1 + 3 = 6$$

$$3 \cdot 3 = 3 \cdot (2+1) = 3 \cdot 2 + 3 = 6 + 3 = 9$$

$$3 \cdot 4 = 3 \cdot (3+1) = 3 \cdot 3 + 3 = 9 + 3 = 12$$

Ko'paytirish amali quyidagi xossalarga ega.

1^0 . Distributivlik xossasi (chapdan).

$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$, ya'ni natural sonning boshqa ikki natural son yig'indisiga ko'payitmasi, shu sonning har bir qo'shiluvchisi bilan ko'payitmasining yig'indisiga teng.

Isbot. Bu xossani isbotlashda matematik induksiya metodidan foydalanamiz.

$c=1$ uchun $a \cdot (b+1) = a \cdot b + a \cdot 1 = a \cdot b + a$ to'g'ri bo'ladi.

$c=n$ uchun $a \cdot (b+n) = ab + an$ to'g'ri deb faraz qilamiz.

$c=n+1$ uchun bu xossaning to'g'riligini isbotlaymiz.

$a \cdot (b+n+1) = a \cdot [(b+n)+1] = a(b+n) + a \cdot 1 = (\text{tarifga asosan}) = ab + an + a = (\text{farazga asosan}) = ab + a(n+1) = (\text{ta'rifga asosan})$.

Demak, $a \cdot (b+c) = ab + ac$.

2⁰. Distributivlik xossasi (o'ngdan).

$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ bo'ladi, ya'ni ikkita son yig'indisining uchunchisi son bilan ko'payitmasi, har bir sonning uchunchi son bilan ko'payitmasining yig'indisiga teng.

Isbot. Buni matematik induksiya metodi yordamida amalga oshiramiz.

$c=1$ uchun $(a+b) \cdot c = (a+b) \cdot n + (a+b) = (\text{ta'rifga asosan}) = an + bn + a + b = (\text{farazga asosan}) = an + a + bn + b = (\text{yig'indini o'rin almashtirish xossasiga asosan}) = a(n+1) + b(n+1) (\text{ko'paytirish ta'rifga asosan})$.

Demak, $(a+b)(n+1)$ uchun yuqoridagi xossa to'g'ri ekan.

Bundan $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ bo'ladi.

3⁰. Ko'paytirishning o'rin almashtirish xossasi.

$a \cdot b + b \cdot c$, ya'ni ko'paytuvchilarning o'rnini o'zgartirish bilan ko'payitma o'zgarmaydi.

Isbot. Bu xossani ham matematik induksiya metodi yordamida amalga oshiramiz.

$a+1$ uchun $1 \cdot b = b = b \cdot 1$ bo'lib, bu xossa o'rinli bo'ladi.

$a=n$ uchun $n \cdot b = b \cdot n$ deb faraz qilaylik.

$a=n+1$ uchun to'g'ri ekanligini isbotlaylik.

$a \cdot b = (n+1) \cdot b = n \cdot b + 1 \cdot b = (\text{ko'paytirishning chapdan distributivlik xossasiga asosan}) = b \cdot n + b = (\text{farazga asosan}) = b \cdot (n+1)$ (ko'paytirishning o'ngdan distributivlik xossasiga asosan).

Demak, $(n+1) \cdot b = b \cdot (n+1)$. Bundan $a \cdot b = b \cdot a$ ekanligi kelib chiqadi.

4⁰. Ko'paytirishning quruhlash xossasi.

$a \cdot b = b \cdot a$ bo'ladi.

Isbot. Bu xossani ham matematik induksiya metodi yordamida isbotlaymiz.

$(a \cdot b) \cdot 1 = a \cdot b = a \cdot (b \cdot 1)$ to'g'ri bo'ladi.

$c = n$ uchun $(a \cdot b) \cdot n = a \cdot (b \cdot n)$ deb faraz qilamiz.

$c = n+1$ uchun to'g'riligini isbotlaymiz.

$(a \cdot b) \cdot (n+1) = (a \cdot b) \cdot n + ab = (\text{ko'paytirish ta'rifiga asosan}) = a \cdot (b \cdot n) + a \cdot b = (\text{farazga asosan}) = a(b \cdot n + b) = a(b \cdot (n+1))$ (ko'paytirishning distributivlik xossasiga asosan).

Demak, $(a \cdot b)(n+1) = a \cdot (b \cdot (n+1))$. Bundan, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Natija. Har qanday natural sonning 0 soni bilan ko'payitmasi nolga teng ekan.

Haqiqatan ham, $0 \cdot a = \underbrace{0 + 0 + 0 + \dots + 0}_{\text{ata}} = 0$.

Natural sonlarni bo'lish ta'rifi va xossalari.

4-ta'rif. Ikki ko'paytuvchining ko'payitmasiva bir ko'paytuvchi berilgan holda ikkinchi ko'paytuvchini toppish amali bo'lish amali deyiladi.

Bunda berilgan ko'payitmani ifodalovchi son-bo'linuvchi, berilgan ko'paytuvchi-bo'luvchi, izlanayotgan ko'paytuvchi-bo'linma deyiladi.

Agar a -ko'payitma, b -berilgan ko'paytuvchi, c -izlanayotgan ko'paytuvchi bo'lsa, u holda bo'lish amali yordamida $\frac{a}{b} = c$ yoki $a:b=c$ ko'rinishda belgilanadi. Ta'rifdan ko'rinadiki, bo'lish amali ko'paytirish amaliga teskari amal ekan.

Bo'lish amali bir qiymatlidir.

Masalan, a) $9:3=3$; b) $21:7=3$; d) $111:3=37$.

Bo'lish amali quyidagi xossalarga ega.

1⁰. Ko'payitmani noldan farqli biror songa bo'lish uchun ko'paytuvchilardan birini shu songa bo'lish kifoya, ya'ni

$(a \cdot b):c = (a:c) \cdot b$, bunda

$a:c$ bo'ladi, ya'ni a soniga butun marta bo'linadi.

Isbot. $(a \cdot b):c = x$ desak, $a \cdot b = c \cdot x$. Lekin, $(a:b) \cdot c = x$ bo'ladi.

U holda $(a:c) \cdot c \cdot b = c \cdot x \rightarrow (a:c) \cdot b = x \rightarrow (a:c) \cdot b = (a \cdot b):c$ bo'ladi.

2⁰. Biroro sonni ikki sonning bo'linmasiga ko'paytirish uchun shu sonni bo'luvchiga ko'paytirish va hosil bo'lgan ko'payitmani bo'luvchiga bo'lish kifoya, ya'ni $(\forall a, b, c \in N) [a \cdot (b:c) = (a \cdot b):c]$.

Isbot. $a \cdot (b:c) = x$ bo'lsin.

Tenglikning ikkala tomonini c ga ko'paytirsak, $a \cdot (b:c) \cdot c = x \cdot c$ bo'ladi.

Lekin $(b:c) \cdot c = b$ bo'ladi.

Bundan $a \cdot b = x \cdot c$. U holda ta'rifga asosan $(a \cdot b):c = x$ bo'ladi.

Demak, $(a \cdot b):c = a \cdot (b:c)$.

3⁰. $(\forall a, b, c \in N) [a:(b \cdot c) = (a:b):c = (a:c):b]$.

Isbot. $a:(b \cdot c) = x$ desak, $a = b \cdot c \cdot x$ bo'ladi. Tenglikning ikkala tomonini b ga bo'lsak $a:b = c \cdot x$ bo'ladi. U holda bo'lish ta'rifga asosan $(a:b):c = x$ bo'ladi.

Demak, $(a:b):c=(a:c):b$ bo'ladi.

$$4^0. (\forall a, b, c \in N) [a:(b:c)=ac:b].$$

Isbot. $a(b:c)=x$ desak, $a=(b:c) \cdot x$ bo'ladi. U holda tenglikning ikkala tomonini c ga ko'paytirsak, $a \cdot c=[(b:c) \cdot c] \cdot x$ bo'ladi. Bunda $(b:c) \cdot c=b$ ekanligidan $a \cdot c=b \cdot x$ bo'ladi. Bundan $(a:c):b=x$ bo'ladi. Demak, $a(b:c)=(ac):b$.

$$5^0. (\forall a, b \in N_0, c \in N)(a:c \wedge b:c) \rightarrow [(a+b):c = a:c + b:c].$$

Isbot. $(a+b):c=x$ bo'lsin. U holda $a=(a:c) \cdot c$ va $b=(b:c) \cdot c$.

Bundan,

$$(a:c) \cdot c + (b:c) \cdot c = cx \text{ yoki } [(a:c) + (b:c)] : c = cx \text{ yoki } a:c + b:c = x.$$

Bundan,

$$a:c + b:c = (a+b):c \text{ bo'ladi.}$$

$$6^0. (\forall a, b \in N_0, \forall c \in N)(a:c \wedge b:c) \rightarrow (a-b):c = a:c - b:c.$$

Isbot. $(a-b):c=x$ desak, $a-b=cx$ bo'ladi. $a=(a:c) \cdot c$ va $b=(b:c) \cdot c$ desak, $(a:c) \cdot c - (b:c) \cdot c=cx$, bundan $[(a:c)-(b:c)] : c=cx$. U holda tenglikning ikkala tomonini c ga bo'lsak, $a:c-b:c=x$.

$$\text{Demak, } a:c-b:c=(a-b):c.$$

Yuqoridagi aytilgan fikirlarni umumlashtirib, nomanfiy butun sonlar to'plamining xossalarini sanab o'tish mumkin:

1. Momanfiy butun sonlar to'plamida eng kichik element mavjud va u 0 ga teng. Bu esa to'plamning quyidan chegaralanganligini bildiradi.

2. Nomanfiy butun sonlar to'plami cheksiz va yuqoridan chegaralanmagan.

3. Nomanfiy butun sonlar to'plami diskret.

Diskretlik nomanfiy butun sonlar to'plamida har bir natural sondan keyin va oldin keladigan sonlarni ko'rsatish mumkinligi bilan izohlanadi. Faqat 0 hech qanday sondan keyin kelmaydi. Boshqacha ayitganda, ikkita ixtiyoriy nomanfiy butun son orasida chekli sondagi nomanfiy sonlar joylashgan.

4. Nomanfiy butun sonlar to'plami " $<$ " munosabati orqali tartiblangan.

Xulosa

Boshlag'ich sinflarda matematika o'qituvchi har tomonlama mukammal bilishga ega bo'lishi va yuksak kasb mahoratiga ega bo'lishi darkor. Bundan tashqari o'quvchilarning berilayotgan yangi materialni qay darajada boshlag'ich sinflarda qabul qilayotganligini bilishi muhim rol o'ynaydi.

Boshlang'ich sinf o'quvchilari matematika darsini oladigan bo'lsak, ular masala va misollar yechishda aksariyat xollarda masala shartini ongli ravishda tushunmay turib, masalada berilgan sonlar bo'yicha masala shartini yechishga harakat qiladilar. Lekin mana shunday mehanik tarzda ishlaganlarida ham masalani to'g'ri yechadilar.

Boshlag'ich sinf o'qituvchisining asosiy vazifalaridan biri o'quvchilarning ongli ravishda bilimlarini qabul qilishini ta'minlashdan iboratdir. Mana shu vazifani amalga oshirish uchun esa o'qituvchi birinchi navbatda o'qitish metodlarini yaxshi bilishi va ulardan unumli foydalana olishi darkor. Shundagina o'qituvchi o'z oldiga qo'ygan maqsadiga erisha olishi mumkin. Chunki o'qitish metodi o'qituvchi bilan o'quvchilarning bog'langan faoliyati va uning jarayonida o'quvchilar tomonidan bilim, o'quv va ko'nikmalar o'zlashtiriladi, idrok qilish qobiliyatlari kengayadi shu bilan birgalikda dunyoqarashi shakllanadi. Bu esa hozirgi zamonning asosiy talablaridan biri bo'lib turgan komil insonni tarbiya qilib voyaga yetkazishga xizmat qilishi muqarrar.

Shu bilan birgalikda masalalar yechishni o'rgatishda hayotiy materiallardan noan'naviy usullardan, muammoli vaziyatlardan foydalanish dars samaradorligini yanada oshiradi. Shunday ekan, matematika darslarini tashkil etishda turli pedagogik texnologiyalardan foydalanishimiz lozim.

Boshlag'ich sinf matematika kursida olingan bilimlar o'quvchi hayotida muhim rol o'ynaydi. Shuning uchun ham bugungi kunda boshlang'ich ta'limga katta e'tibor berilmoqda. Demak, boshlag'ich sinf o'qituvchilariga ham bo'lgan talab kuchayib bormoqda.

Bizga ma'lumki boshlang'ich sinfda matematika kursining asosiy tushunchalarining elementlari tushuntiriladi. Masalan, algebraik material va geometrik materiallari haqida dastlabki ma'lumot beriladi. Bu holatni pedagogik amaliyot davomida ishonch hosil qildik.

Xulosa qilib aytadigan bo'lsak boshlag'ich sinflarda olingan bilimlar o'quvchining kelajagini belgilab beradi.

Adabiyotlar ro'yxati

1. Karimov I.A. “Yuksak ma’naviyat-engilmas kuch” T; “Ma’naviyat” 2008yil.
2. Karimov I.A “Barkamol avlod-O‘zbekiston taraqqiyotining poydevori” T; “Sharq” 1997yil.
3. Karimov I.A “Barkamol avlod orzusi” T; “O‘zbekiston” 1999yil.
4. Bikbaeva N.U. Boshlang‘ich sinflarda matematika o‘qitish metodikasi Toshkent “O‘qituvchi” 1996yil
5. “Xalq ta’limi”, “Boshlang‘ich ta’lim” jurnallari, 2010-2011yil.
6. Bikbaeva. N. U. Va boshqalar. 1 – 4 sinflar uchun “matematika” darsliklari. Toshkent. “O‘qituvchi” 1996 – 1998 yil
7. Bikbaeva. N. U. Va boshqalar. 1 – 4 sinflar uchun “matematika” darsliklari. Toshkent. “O‘qituvchi” 1996 – 2000 yil
8. Jumaev M.Ye. “Boshlang‘ich sinflarda matematika o‘qitish metodikasi” Toshkent 2005yil.
9. Jumaev M.Ye. matematika o‘qitish metodikasidan praktikum. Toshkent “O‘qituvchi” 2004 yil
10. Kamoldinov M, Xolmatov R, Zokirova B. Boshlang‘ich sinf o‘quvchilari va amaliyotchilar uchun matematikadan dars ishlanmalari. Toshkent. “Talqin” 2003 – yil
11. Levenberg L.Sh. Boshlang‘ich sinflarda matematika o‘qitish metodikasi Toshkent “O‘qituvchi” 1985 yil

12. Oliy ta'lim tizimida boshlang'ich sinf o'quvchilarini tayyorlash istiqbollari. Respublika ilmiy - amaliy konferensiyasi materiallari. Toshkent 2003 yil
13. Uzliksiz ta'lim tizimida matematika fanini o'qitishni takomillashtirish masalalari. Respublika ilmiy anjumani materiallari. Andijon. 2006 yil
14. "Xalq ta'limi", "Boshlang'ich ta'lim" jurnallari, 2000 – 2007 yil sonlari
15. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi. "Yangi asr avlodi". Toshkent 2006 yil
16. N.Hamedova, Z.Ibragimova, T.Tasetov, "Matematika". Iqbol turon Toshkent 2007 yil.
17. WWW.edu.uz
18. WWW.Ziyonet.uz
19. WWW.adu.uz