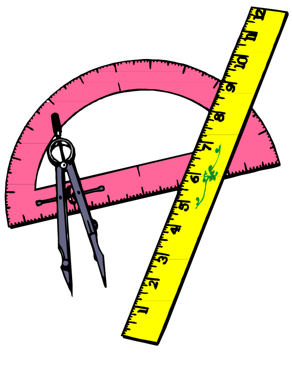
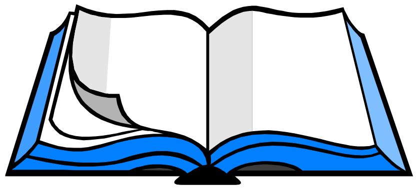
ӨЗБЕКСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ХАЛЫҚҚА БІЛІМ БЕРУ УӘЗІРЛІГІ

НАУАЙЫ МЕМЛЕКЕТТІК ПЕДАГОГИКА ИНСТИТУТЫ

Физика-математика факультеті

«Жалпы математика» кафедрасы

к□сіптік бітіру ж□мысы

Тақырыбы: *Кеңістікте координаталар методы және оларға сәйкес мәселелер шешу метоттары.*

Ғылыми жетекші: аға оқытушы **Кадырбаев Р. К.**

Орындаған: “Математика - информатика” бағытының 4 – “Б” курс талапкері

Төлегенов Медғат. Асилбекович.

Науайы-2013

“Мен XXI - ғасыр руханият ғасыры, білім-пән, мәдениет және ақпарат ғасыры болып қалуына сенемін”

АЛҒЫ СӨЗ

Өзбекстан Республикасы президенті И. А. Каримов жағынан қойылған үздіксіз тәлімнің жан-жақтама жаңа тізімі Өзбекстан халықтарының XXI-ғасыр ұрпағын жетістіруге мумкіндік жаратады.

Алдымен, ғылыми негізделмеген 11 жылдык жалпы орта тәлім тізімі 9 жылдык оку тізіміне келтірілді. Онда оку пәндерінің саны кемейтіріліп, білім беретін дәрежеге жеткізілді, оқу программасындағы көптеген қайталанулар алып тасталып, мазмуны жағынан оқу пәнін үлгеруін қиындататын кейбір баптар, бөлімдер тәлім дәстурінің жоғары басқыштарына өткізілді.

Жалпы айтканда, «Кадрлер даярлаудың ұлттық бағдарламасы»ның бастапқы бағыты – мемлекет, қоғам және жанұя алдындағы міндеттерін түсінетін, еркін пікірлей алатын, өзінің мүдделерін қорғай алатын еркін жеке адамды тәрбиелеуге каратылган. Бұл дәстур Өзбекстан Республикасының «Тәлім туралы заң» және «Кадрлер даярлаудың ұлттық бағдарламасын» өмірге ұсыну мақсатында істеп шығылган. «Жалпы орта тәлім стандарттары» негізінде түзілген. Дәстур Республика Тәлім орталығы қасындағы информатика және ақпарат банкі бөлімі ғылыми-методыкалық кеңес мәжілісінің 1998 жылы 2-июль 3-санды қарары мен сынау дәстурі ретінде, 1999 жылы 25-февраль 1-санды карары мен сынау дәстурі ретінде қолдауға берілді. Жалпы орта тәлім мектептерінде математика және информатика мәселетеу техникасын оқыту өз алдына казіргі заман талаптарына жауап бере алатын және әр бір мектеп бітірушісіне еркін түрде математика және информатика мәселетеу техникасы бойынша кейінгі Өмірінің өнімді қызметінде амалга асыру жағдайларын ашып беретін кепілдік дайындығын тәміндеуін мақсат қылып қойылған.

Геометрияны үйрету «***Кеңістікте координаталар методы және оларға сәйкес мәселелер шешу метоттары***» методыкасы оқушыларды практикалық қабілетінде қолдау, өзара байланысты анық білімдермен құралдандырады. Ол оқушылардың интеллектуал дамуына маңызды үлес қосады.

Оқушылардың геометрия бойынша дайындығына қойылатын талаптар: Жалпы орта тәлім мектептерінде және лицей коллеждерде оқытылатын «геометрия» курсының негізгі міндеті оқушыларды келешектегі қызметтерінде пайдалана алуына немесе институтта берілген геометриялық білімдерді планиметрия және стереометрия мәселелерін шешімі метоттарын сіңдіру мақсады тұрады. Осы предметі мектепте, лицей коллежде уйренуден негізгі мақсаты геометрия заңдарының жағдайын және оның өмірде қолдауды білетін негізгі принциптерін жетілдіретін кабілетіне ие болған және жаңа педагогикалық технологиясын ойлай алатын пайдаланушыны дайындауды көрсету:

Окушыларға егеменді Республикамыздың турлі салаларында геометрияның казіргі және келешектегі рөлін ашып беру;

Зерттеу мақсаты геометрия технологияларын қай дәрежеде білім системасына кіріп келе жаткандығын анализдеу аркылы, геометрия пәнін дәстурлер бойынша оқыту және практикалық мәселелерді шешіміге байланыстыру және де осы мәселелерді шешуде оптимал түрде анықтау және оның дәстүрлік тәмінделуін жарату жолдарын іздеуден тұрады.

Зерттеу объекті- жаратылған дәстурлер арқылы оқушыларда пракатикалық мәселелерді шешімі арқылы жетістікке жетелеуші пікірлеу қабілеттерінің жаңа көріністерін жарату мумкіндіктерін іздеу.

Зертеу предметі – геометрия окыту тізімінің негізін жаратушы оқу материалдарының электрон версияларын жарату жолдары, оны жузеге асыру тармақтары.

Зерттеу методтары

1. тәлім тізімінде геометрия бөліміндегі теориялық негіздер;
2. геометрия технологиялары түсінігі және маңызы;
3. геометриялық мәселелерді шешуде жазықтықтағы және кеңістіктегі заң және формулалардан пайдалану әдістері;

Зерттеудің ғылыми жаңалығы

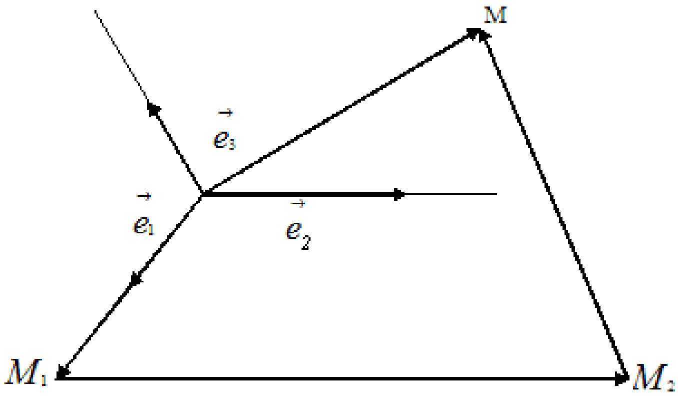
1. Мәселелерді жай көріністе және түсінерлі дәрежеде шешімі;
2. Мәселелерде педагогикалық технологиялардан пайдалану;

Жоғарғы оқу орындары ішінде яғни институт, академик лицейлер, кәсіп-өнер колледжері және жалпы тәлім беру мектептерін ораған жағдайда оқу жоспарында көзде тұтылган пәндер ішінде геометрия пәнін барлық пәндерге байланыстру арқылы жаңа дәрежедегі тәлім түрлерін түрлендіруге қаратылган. Ілгері сүрілген қорытындылардан талапкерлер, бөлім салаларында пайдаланулары мумкін.

Бұл тема методык характерге ие болып, «***Кеңістікте координаталар методы және оларға сәйкес мәселелер шешу метоттары***» талапкертерге, оқушыларға және де басқада қызығушыларға анық мәселелер жәрдемінде төменде түсіндірілген.

1. Кеңістікте нүктенің координаталары методы және оларға сәйкс мәселелер шешу методтары.

Анық тәртіпте алынған әр қандай үш нокомпланар векторлар системасы үш өлшеулі кеңістіктің базисін келтіріп шығарады. О нүкте және $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ базистер *кеңістікте аффин координаталар системасы* дейіледі және $0\ \vec{e}_1\, \vec{e}_2\, \vec{e}_3$ яғни $\left(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$ деп белгіленеді. О нүкте координаталар *басы*, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ векторлар *координата векторлары* деб аталады. Координаталар басынан өтуші, координата векторларына параллел және оң бағытты бұл векторлар менен анықталған бағытталған түзу сызықтарға *координаталар өстері* деп аталады. Оларды сәйкес түрде абциссалар, ординаталар және оппликаталар өстері дейіледі және Ox, Oy, Oz менен белгіленеді (1-сурет).

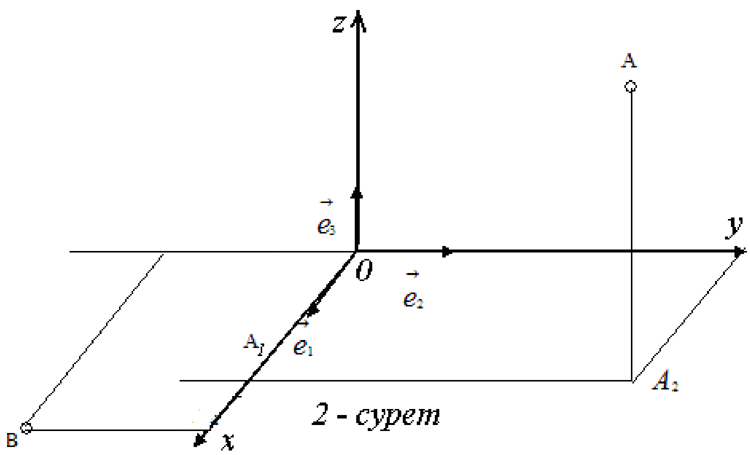


1 - сурет

Егер $x\vec{e}_1 = \overrightarrow{OM},\ \ y\vec{e}_2 = \overrightarrow{M_1M_2},\ \ z\vec{e}_3 = \overrightarrow{M_2M}$ болса, ол уақытта

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2M}$$

табайық. OM_1M_2M сынық сызыққа *координата сынық сызығы* дейіледі. Демек, M нүктені координаталары бойынша салу үшін координата сынық сызығы



2 - сурет

салу керек. 2-суретте $0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ аффин координаталар системасы сызылған және онда А(2, 5, 4) және В(3,-2, 0) нүктелерде жасалган. Егер

$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ болса,

M(x, y, z) табайық.

Егер $M_1(x_1, y_1, z_1)$ және $M_2(x_2, y_2, z_2)$ болса, $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ табайық.

Егер $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M(x, y, z)$ және $\overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{MM_2}$ болса, $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$; $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$; $z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$ табайық.

Тік бұрышты декарт координаталар системасында $M_1(x_1, y_1, z_1)$; $M_2(x_2, y_2, z_2)$ болса, $M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ болады.

2. Кеңістікте ориентация

Кез-келген $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ базисте $\vec{a}(a_1, a_2, a_2)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$ векторлар компланар болуы үшін

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = 0$$

болуы қажет және жеткілікті.

V векториал кеңістікте кез-келген екі $A(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ және $B(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ базис алсақ, В базис векторларын А базис векторлары арқылы жазамыз:

$$\vec{b}_1 = c_{11}\vec{a}_1 + c_{12}\vec{a}_2 + c_{13}\vec{a}_3;$$

$$\vec{b}_2 = c_{21}\vec{a}_1 + c_{22}\vec{a}_2 + c_{23}\vec{a}_3;$$

$$\vec{b}_3 = c_{31}\vec{a}_1 + c_{32}\vec{a}_2 + c_{33}\vec{a}_3;$$

Сонымен қатар

$$\begin{pmatrix} c_{11}c_{12}c_{13} \\ c_{21}c_{22}c_{23} \\ c_{31}c_{32}c_{33} \end{pmatrix}$$

матрицаны түземіз. Бұл матрица А базистен В базиске *өту матрицасы* дейіледі. Бұл матрицаның детерминанты төмендегіше белгіленеді:

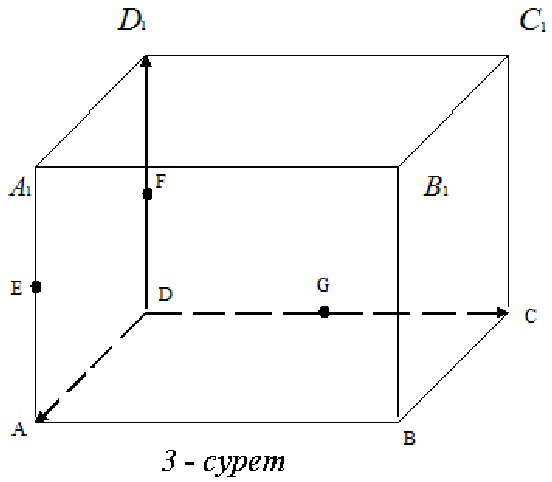
$$A/B = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)/(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) = \begin{vmatrix} c_{11}c_{12}c_{13} \\ c_{21}c_{22}c_{23} \\ c_{31}c_{32}c_{33} \end{vmatrix}$$

кеңістіктің кез-келген А, В және С базистері үшін төмендегі теңдіктер орынды:

1) A / A=1
2) (A / B)(B / C)=A / C
3) (A / B)(B / A)=1

Егер A / B >0 болса A және B базистер бір түрлі ориентацияланған, A / B<0 болса, әр түрлі ориентацияланған базистер дейіледі. Егер $0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ координаталар системасында алынған $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ базис оң базис болса, система *оң координаталар системасы* дейіледі. Кеңістікте ориентация беру үшін онда бірер базис алып және оны оң базис есебінде қабылдау жеткілікті. Сондықтанда, кеңістікте координаталар системасы берілген болса, ол уақытта кеңістік ориентацияга ие болады .

<u>1-мәселе</u>. 1) ABCD $A_1B_1C_1D_1$ параллелепипедте AA_1 қабырғасының ортасы E, DD_1 қабырғасының ортасы F, DC қабырғасының ортасы G берілген. Қабырғаларында орналасқан $\vec{DA}, \vec{DC}, \vec{DD_1}$ векторларды базистер деп алып $\vec{AA_1}, \vec{BB_1}, \vec{C_1B_1}, \vec{GD}, \vec{A_1G}$ векторлардың



3 - сурет

координаталарын табың.

2) $\left(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD_1}\right)$ координаталар системасында берілген параллелепипед ұштарының координаталарын табың (3-сурет).

Шешімі. 1) вектордың берілген базиске сәйкес координаталарын табу үшін оны базис векторлар арқылы өрнектейміз:

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{DD_1} = 0 \cdot \overrightarrow{DA} + 0 \cdot \overrightarrow{DC} + 1 \cdot \overrightarrow{DD_1},$$

ол уақытта $\overrightarrow{AA_1}$ вектордың координаталары (0, 0, 1) табайық, яғни $\overrightarrow{AA_1}(0,0,1)$

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} = -\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DD_1},$$

$$\overrightarrow{BE}\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD},$$

$$\overrightarrow{B_1C_1}(-1,0,0)$$

$$\overrightarrow{GD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DC},$$

$$\overrightarrow{GD}\left(0,-\frac{1}{2},0\right)$$

$$\overrightarrow{A_1G} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = -\overrightarrow{DD_1} - \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC},$$

$$\overrightarrow{A_1G}\left(-1,\frac{1}{2},-1\right)$$

2) $\left(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD_1}\right)$ координаталар системасына сәйкес нүктенің координаталары оған сәйкес радиус - вектордың $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD_1}$ базиске

сәйкес координаталары болады. $\vec{DD}$, $\vec{DA}, \vec{DC}, \vec{DD_1}$ векторлар D, A, C, D_1 нүктелердедің радиус – векторы болғаны үшін бұл векторлар $\vec{DD}(0,0,0)$, $\vec{DA}(1,0,0)$, $\vec{DC}(0,1,0)$, $\vec{DD_1}(0,0,1)$ координаталарға ие. Соның үшін:

$$D(0,0,0), A(1,0,0), C(0,1,0), D_1(0,0,1).$$

$$\vec{DB} = \vec{DA} + \vec{DC} \Rightarrow \vec{DB}(1,1,0), B(1,1,0)$$

$$\vec{DA_1} = \vec{DA} + \vec{DD_1} \Rightarrow \vec{DA_1}(1,0,1), A_1(1,0,1)$$

$$\vec{DB_1} = \vec{DA} + \vec{DC} + \vec{DD_1} \Rightarrow \vec{DB_1}(1,1,1), B_1(1,1,1)$$

$$\vec{DC_1} = \vec{DC} + \vec{DD_1} \Rightarrow \vec{DC_1}(0,1,1), C_1(0,1,1)$$

2-мәселе. OABC тетраэдрде $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ лар базис векторлар болсын. Тетраэдр бинесін сызың және онда

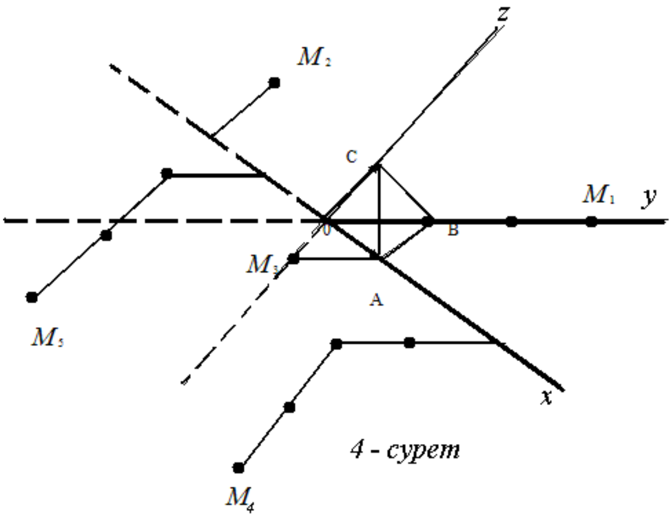
$$M_1(0,3,0), M_2(-2,0,1), M_3(1,-1,0), M_4(4,-2,-2), M_5(-1,-1,-2)$$

нүктелердедің орнын табың.

Шешімі. Координаталар системасында нүктенің координаталарға көре салу үшін оған сәйкес координаталар сынық сызығын салу керек.

3-мәселе. Ұштары A(2, -1, 8), B(3, 5, -2) нүктелерде болған кесіндіні координата жазықтықтарының әр біреуі қандай қатыста болуын табың.

Шешімі. AB түзу сызықты Oxy, Oxz, Oyz координата жазықтықтары сәйкес түрде M, N, P нүктелерде кессін. M нүкте AB кесіндіні λ қатыста болсын. M нүкте Oxy жазықтықта жатқаны үшін оның үшінші координатасы z нолге тең, яғни z=0 кесіндіні берілген қатыста бөлу



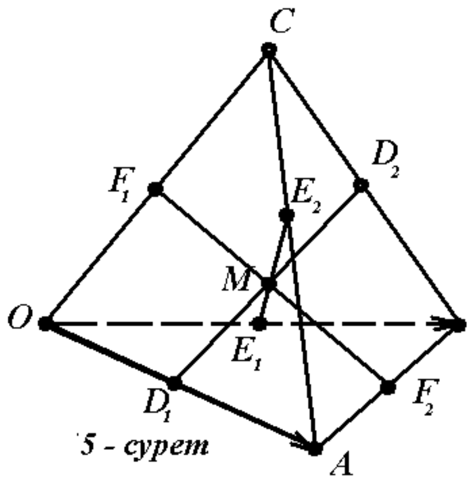
4 - сурет

формуласына сәйкес, яғни $z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$ дан $0=\dfrac{8+(-2)\lambda}{1+\lambda}$ сонымен қатар λ=4 екені табылады. Тап сондай, N және P лар менен AB кесінді қандай қатыста бөлінуін анықтаймыз (4-сурет).

4-мәселе. Тетраэдрде қарама - қарсы қабырғаларының орталарын бірлеструші кесінділер бір нүктеде қиылысып, бұл нүктеде әр біреуі тең екіге бөлінуін дәлелдеу.

Шешімі. OABC – берілген тетраэдр болсын. $D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2$ нүктелерде сәйкес түрде A және BC, OB және AC, OC және AB қабырғаларының орталары болсын. $0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ аффин координаталары системасын сондай таңдайық, нәтижеде $\vec{e}_1=\overrightarrow{OA},\ \vec{e}_2=\overrightarrow{OB},\ \vec{e}_3=\overrightarrow{OC}$ болсын (5-сурет).

Ол уақытта бұл системада тетраэдр ұштары төмендегі координаталарға ие: O(0, 0, 0), A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1) кесіндідің ортасы болған M нүктенің координаталарын табамыз. D_1 және D_2 нүктелерде OA ва BC кесіндідің орта нүктелері болғаны үшін: $D_1\left(\frac{1}{2},0,0\right)$, $D_2\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Демек, M нүкте $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ координаталарға ие.



5 - сурет

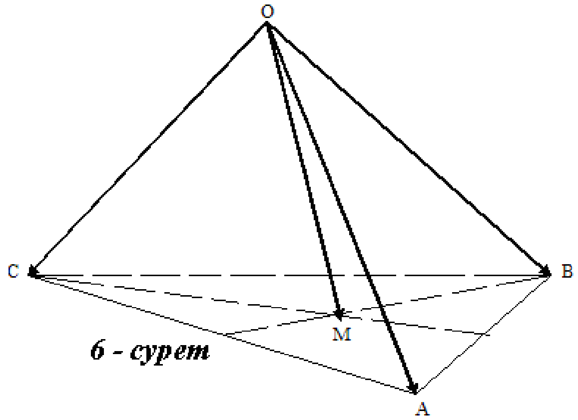
Тап сондай, E_1E_2 және F_1F_2 кесінділердің орта нүктелерідің координаталарын тауып, олар да $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ координаталарға ие екендігін келтіріп шығарамыз. Соның үшін бұл орта нүктелерде де M менен устма - уст түседі.

5-мәселе. $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ үшбұрыштың ауырлық центірі (медианалардың қиылысқан нүктесі) координаталарын есептеп формулаларын табың.

Шешімі. M(x, y, z) нүкте - ABC үшбұрыш медианаларының қиылысқан нүктесі, оның координаталары (x, y, z) болсын (6-сурет).

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}\left(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}\right) \quad (1)$$

формуладан файдаланамыз. $\vec{OM}, \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ векторлар M, A, B, C нүктелердің радиус – векторлары болғаны үшін бұл векторлар $\left(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}\right)$ базиске сәйкес



6 - сурет

$\vec{OM}(x, y, z)$, $\vec{OA}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{OB}(x_2, y_2, z_2)$, $\vec{OC}(x_3, y_3, z_3)$ координаталарын (1) формуладан келтіріп шығарамыз :

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},$$

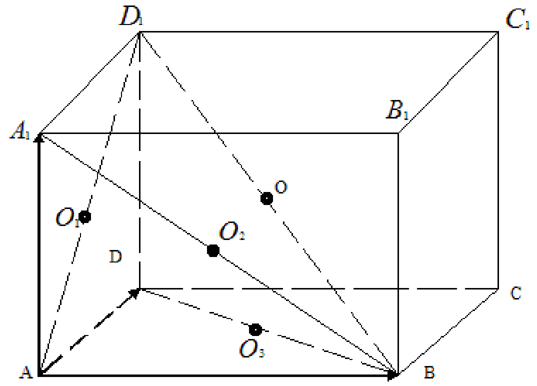
$$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3},$$

$$z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

6-мәселе. O нүкте ABCD$A_1B_1C_1D_1$ параллелепипед диагоналдарыдің қиылысқан нүктесі болсын. O_1, O_2, O_3 нүктелерге сәйкес түрде $ADD_1A_1, ABB_1A_1, ABCD$ бүйірлерінің центрлері болсын.

$R=\left(A,\vec{AB},\vec{AD},\vec{AA_1}\right)$ координаталар системасыннан $R`=\left(0,\vec{OO_1},\vec{OO_2},\vec{OO_3}\right)$ системаға өту формулаларын жазың.

Шешімі. Бұның үшін О нүкте ва $\vec{OO_1},\vec{OO_2},\vec{OO_3}$ векторлардың координаталарын табамыз (7-сурет).



7 - сурет

R – координаталар системасына сәйкес параллелепипед ұштары төмендегі координаталарға ие:

A(0, 0, 0), B(1, 0, 0), C(1, 1, 0), D(0, 1, 0), $A_1(0,0,1), B_1(1,0,1), C_1(1,1,1), D_1(0,1,1)$.

Кесінді орта нүктесін табу формуласына сәйкес:

$$O\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\quad O_1\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\quad O_2\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right),\quad O_3\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right).$$

Соның үшін $\vec{OO_1}\left(-\frac{1}{2},0,0\right)$, $\vec{OO_2}\left(0,-\frac{1}{2},0\right)$, $\vec{OO_3}\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$ координаталарға ие.

Ол уақытта ізделген формулалар төмендегіше болады:

$$\begin{aligned} x&=-\frac{1}{2}x'+0\cdot y'+0\cdot z'+\frac{1}{2}\\ y&=0\cdot x'+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot y'+0\cdot z'+\frac{1}{2}\\ z&=0\cdot x'+0\cdot y'+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot z'+\frac{1}{2}\end{aligned} \quad \text{яғни} \quad \begin{aligned} x&=-\frac{1}{2}\cdot x'+\frac{1}{2}\\ y&=-\frac{1}{2}\cdot y'+\frac{1}{2}\\ z&=-\frac{1}{2}\cdot z'+\frac{1}{2}\end{aligned}.$$

7-мәселе. Ұштары A(2, -1, 8), B(3, 5, -2) нүктелерде болған кесіндіні координаталар жазықтықтарының әр біреуі қандай қатыста бөлуін табың.

Шешімі. AB түзу сызық Oxy, Oxz, Oyz координата жазықтықтарының әр біреуі менен сәйкес түрде M, N, P нүктелерде қиылыссын. Болжаймыз, M нүкте AB кесіндіні x қатыста бөлсін. M нүкте Oxy жазықтықта жатқаны үшін оның үшінші координатаси нолге тең , яғни z=0 кесіндіні берілген қатыста бөлу формуласына сәйкес $z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$ ға ие боламыз. $0=\frac{8+(-2)\lambda}{1+\lambda}$ сонымен қатар λ=4 екені табылады. Тап осындай тәртіпте N және P нүктелер менен AB кесінді қандай қатыста бөлуін анықтаймыз.

<u>8-мәселе</u>. $A_1(-7,3,-2)$, $A_2(0,2,1)$, $A_3(4,-1,0)$, $A_4(-1,0,-3)$ нүктелерде берілген. $\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}\right)$ векторлар системасы базис келтіріп шығаруын дәлелдеу және берілген базис оң ориентацияга ие деп есептеп, оның ориентациясын табың.

Шешімі. $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$ векторлар системасының базис келтіріп шығаруын көрсетіу үшін бұл векторлардың сызықты еріктілігін көрсетеміз:

$$\overrightarrow{A_1A_2}(7,-1,3),\ \overrightarrow{A_1A_3}(11,-4,2),\ \overrightarrow{A_3A_4}(6,-3,-1)$$

векторлардың координаталарынан түзілген матрицаның сыныпын есептегенде, расындада 3 ке теңдігін келтіріп шығарамыз. Сонымен қатар бұл векторлар системасының сызықты еріксіз, яғни базис ташкил килиши келіп шығады. Берілген базиске сәйкес бұл базистің ориентациясын анықтау үшін бұл векторлардың координаталарынан (баған бойынша) детерминант түзіп, таңбасын анықтаймыз:

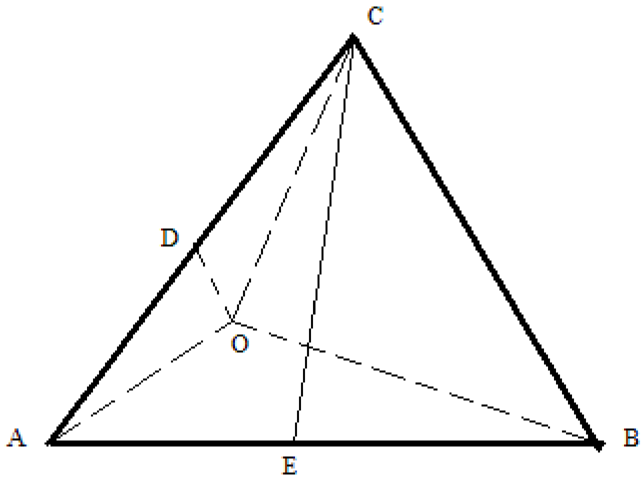
$$\begin{vmatrix} 7 & 11 & 6 \\ -1 & -4 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 20 \succ 0$$

Демек, $\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}\right)$ базис оң ориентацияга ие екен.

<u>9- мәселе</u>. Ұшындағы тегіс бұрыштары тік болған дұрыс үшбұрышты пирамидада ұшынан қабырғасына өткізілген медиана және оған қайшылас негіз медианасы арасындағы бұрышты табың.

Шешімі. OABC берілген үшбұрышты пирамида болсын (8-сурет).

Бұнда ұшындағы тегіс бұрышлар $\angle AOB, \angle AOC, \angle BOC$ тік бұрыш болсын; OD және CE лар сәйкес түрде Δ AOC және Δ ABC лардың медианалары қайшылас болсын. Бұл медианалар арасындағы бұрышты $\vec{OD}$ және $\vec{CE}$ векторлар арасындағы бұрыш деп караймиз. Ол уақытта



8-сурет

$$cos\varphi = \frac{\vec{OD} \cdot \vec{CE}}{\left|\vec{OD}\right| \cdot \left|\vec{CE}\right|}, \qquad (2)$$

$0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ тік бұрышты координаталар системасын бұндай таңдап алсақ, $\vec{i} = \vec{OA}$, $\vec{j} = \vec{OB}$, $\vec{k} = \vec{OC}$ болсын. Бұл системада берілген дұрыс үшбұрышты пирамидадің ұштары төмендегі координаталарға ие :

O(0, 0, 0), A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1), AB және AC кесінділердің E және D орта нүктелері координаталарын табамыз: $E\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $D\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$.

$\vec{OD}$ және $\vec{CE}$ төмендегі координаталарға ие:

$$\vec{OD}\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right),\ \vec{CE}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right).$$

(2) формулаға сәйкес:

$$\cos\varphi = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot(-1)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

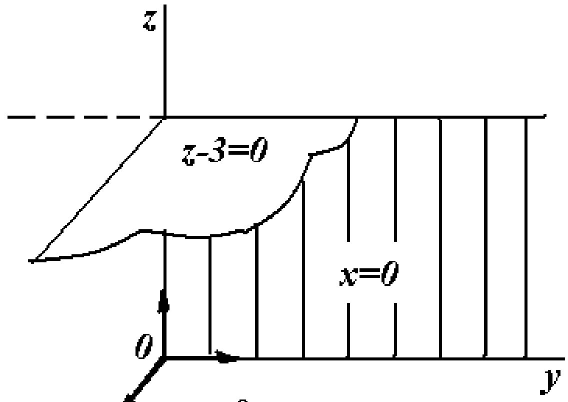
Кеңістік геометриясында жазықтықтағыға ұқсас координаталар методы төмендегіше құрылған, геометрик фигуралар нүктелерідің координаталары арқылы, сандар, теңдеу, теңсіздік яғни олардың системалары арқылы аналитик түрде анықталады. Бұл есе теоремаларды дәлелдеу яғни геометрик мәселелерді шешуде аналитик методтарды қолдауға үлкен қолайлықтар жаратады. Бұл метод пенен іс көргенде координаталар системасын таңдап алу керек, тиісті нүктелердедің координаталарын табу және фигуралардың теңдеулерін түзу ансан және қарапайым болсын. Егер берілген координаталар системасына сәйкес F фигураның әр қандай нүктесінің координаталары берілген теңдеу яғни теңсіздігін (яғни олардың системасын) қанағаттандырса, F да жатпаған нүкте есе каноғатандырмаса, бұл теңдеу яғни теңсіздік (яғни олардың системасы) F фигураны анықтайтын *аналитик шарт* деб айтылады. Мәселен, z=0 теңдеу берілген координаталар системасына сәйкес Oxy жазықтық теңдеуі z >0 теңсіздік есе шекарасы Oxy жазықтықтан құралған (0, 0, 1) нүкте жатқан жарты кеңістікті анықтайды.

10-мәселе. 1) x+5=0 , x > -5 , x< -5 лардың әр біреуі менен анықталушы фигураларды табың;

2) $\begin{cases} x-3=0 \\ x=0 \end{cases}$ система қандай фигураны анықтайды?

3) $x^2 + y^2 + 3z^2 + 5 = 0$ теңдеу қандай фигураны анықтайды ?

Шешімі. 1) x+5=0 теңдеуді қарайық, абциссасы 5 ке тең болған кеңістіктегі барлық нүктелер жиыны осы теңдеуді қаноғатандырады. Бұндай жиын Ox өсіне параллел болып, Ox өсін (-5, 0, 0) де кесіп өтуші жазықтықтан құралған болады. x > -5 теңсіздік x <-5 теңсіздік пенен шекараланған және 0 нүктені өз ішіне алған ашық жарты кеңістік, x<-5 есе 0 ні өз ішіне алмаған ашық жарты кеңістікті анықтайды (9-сурет).



9 - сурет

2) z-3=0, Oz өсінеу үш бірлік кесіп Oxy ке параллел болып өткен жазықтық, x=0 есе Ozy жазықтығы олардан түзілген $\begin{cases} z-3=0 \\ x=0 \end{cases}$ система екі жазықтықтың қиылысқан сызығын білдіреді.

3) Теңдеуде барлық мүшелер оң, айнымалытердінг бұл $x^2+y^2+3z^2+5$ өрнекті нолге айналтырушы сандар жоқ, фигура бос жиын.

11-мәселе. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ теңдеу қандай фигураны анықтауын табың.

Шешімі. Берілген теңдеу тікы бұрышты декарт координаталар системасына сәйкес бағытаушысы Oz өсіне параллел болып, x0y жазықтығында жатқан $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ эллипстегі нүктелерден өтуші түзу сызықтар жиыны, яғни цилиндрик бетті өрнектейді.

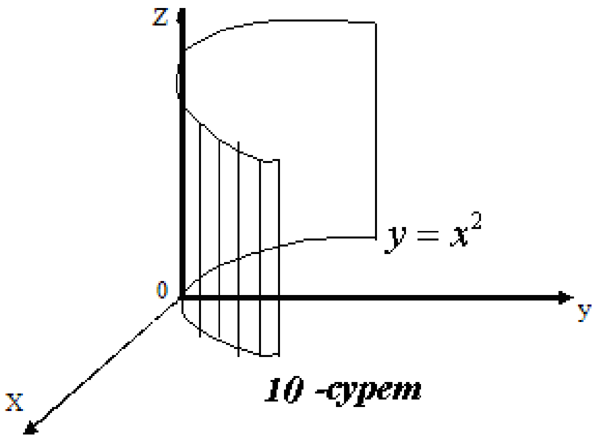
12-мәселе. $\begin{cases} x^2-y=0 \\ z=4 \end{cases}$ система қандай нүктелер жиынынан құралған?

Шешімі. $x^2-y=0$ яғни $y=x^2$ деп алсақ, жазықтықта жатқан $y=x^2$ параболадағы нүктелердің әр бірінен өтіп, Oz өске параллел болған түзу сызықтар жиыны (10, 11-сурет) z=4 есе M(0 0, 4) нүктеден өтуші XOY координаталар жазықтығына параллел болған жазықтықты өрнектейді.

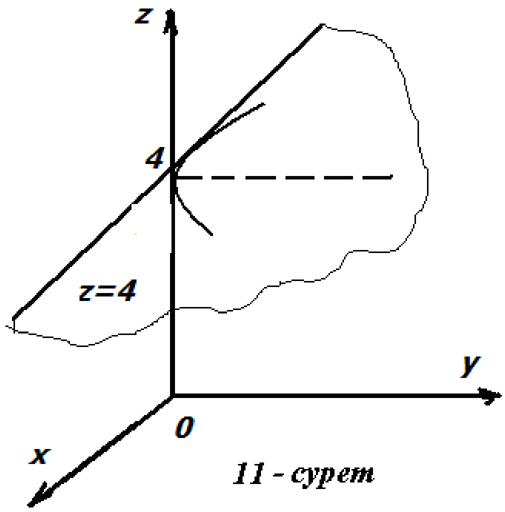
Сондай қылып, берілген система бұл екі беттің қиылыспасынан, яғни ұшы Oz өсіндегі M(0, 0, 4) нүктеде орналасқан жәнеде z=4 жазықтықта жатушы параболани анықтайды.

3. Кеңістікте координаталарын алмастырыу формулалары

Кеңістікте екі $R(0,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ ескі және $R`(0`,\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3')$ жаңа аффин координаталар системасы берілген болсын. Бұнда



10 -сурет



11 - сурет

$$\vec{e}_1'(c_{11},c_{21},c_{31}), \quad \vec{e}_2'(c_{12},c_{22},c_{32}), \quad \vec{e}_3'(c_{13},c_{23},c_{33}),$$

$$O`(x_0,y_0,z_0), \quad M(x,y,z), \quad M`(x`,y`,z`).$$

Ол уақытта координаталар алмастырыу формулалары төмендегіше табайық:

$$x = c_{11}x'+c_{12}y'+c_{13}z'+x_0,$$
$$y = c_{21}x'+c_{22}y'+c_{23}z'+y_0,$$
$$z = c_{31}x'+c_{32}y'+c_{33}z'+z_0,$$

бұнда,

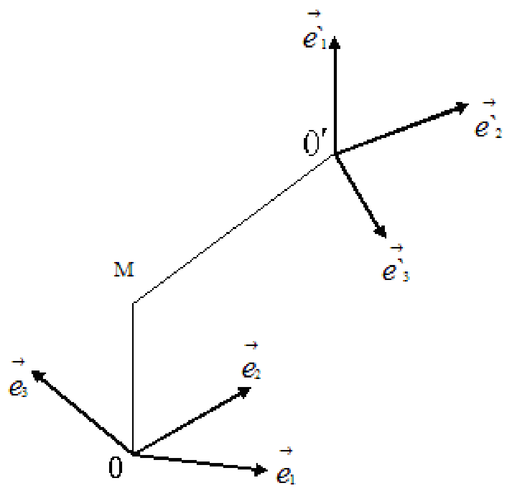
$$\overrightarrow{OO`} = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 + z_0\vec{e}_3,$$
$$\vec{e}_1' = c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 + c_{31}\vec{e}_3,$$
$$\vec{e}_2' = c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 + c_{32}\vec{e}_3,$$
$$\vec{e}_3' = c_{13}\vec{e}_1 + c_{23}\vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3.$$

$R\left(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ ден $R`\left(0`, \vec{i}`, \vec{j}`, \vec{k}`\right)$ ге өтіуде төмендегі теңдіктер бжеріледі:

$$c_{11} = cos\left(\vec{i}', \vec{i}\right), \qquad c_{12} = \cos\left(\vec{j}', \vec{i}\right), \qquad c_{13} = \cos\left(\vec{k}', \vec{i}\right),$$
$$c_{21} = \cos\left(\vec{i}', \vec{j}\right), \qquad c_{22} = \cos\left(\vec{j}', \vec{j}\right), \qquad c_{23} = \cos\left(\vec{k}', \vec{j}\right),$$
$$c_{31} = \cos\left(\vec{i}', \vec{k}\right), \qquad c_{32} = \cos\left(\vec{j}', \vec{k}\right), \qquad c_{33} = \cos\left(\vec{k}', \vec{k}\right).$$

Бұнда: $\vec{i}'(c_{11}, c_{12}, c_{13})$, $\quad \vec{j}'(c_{21}, c_{22}, c_{23})$, $\quad \vec{k}' = (c_{31}, c_{32}, c_{33})$.

$$c = \begin{pmatrix} c_{11}c_{12}c_{13} \\ c_{21}c_{22}c_{23} \\ c_{31}c_{32}c_{33} \end{pmatrix}$$



12 - сурет

Матрицаның әр бір жолындағы мүшелер квадраттарының қосындысы 1 ге тең болып, әр қандай екі жолындың қосындысы сәйкес элементтері көбейтіндісінің қосындысы нолге тең болса, яғни

$c_{i_1}{}^2 + c_{i_2}{}^2 + c_{i_3}{}^2 = 1$; $c_{i_1}c_{j_1} + c_{i_2}c_{j_2} + c_{i_3}c_{j_3} = 0$; i≠j; j=1,2,3; i=1,2,3;

бұндай матрица *ортогонал матрица* дейіледі (12-сурет).

Ортонормал реперлердің бірінен екіншісіга өту матрицасы ортогонал матрица болады.

13-мәселе. $R = \left(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$ системасына сәйкес $\vec{e}_1'(1,0,0)$; $\vec{e}_2'(0,1,0)$; $\vec{e}_3'(0,0,1)$; 0`(1,-3,5) берілген. R ден $R` = \left(0, \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\right)$ қа өтіудегі координаталарын алмастырыу формулаларын жазың. R де берілген

M(1, 1, 3) нүктенің R` тағы координаталарын табың.

Шешімі. $0`(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{e}_1{}'(c_{11}, c_{21}, c_{31})$, $\vec{e}_2{}'(c_{12}, c_{22}, c_{23})$, $\vec{e}_3{}'(c_{13}, c_{23}, c_{33})$.

$$\begin{cases} x = x`+1 \\ y = y`-3 \\ z = z`+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x` = x-1 \\ y` = y+3 \\ z` = z-5 \end{cases}, \ M(0,4,-2)_R$$

14-мәселе. M нүкте $R = (0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ де M(0, 1, -3) көріністе $R` = (0, \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')$де есе M(2, -3, 5) берілген болса, координаталар басы көшірілген O` нүктенің R дегі координаталарын табың.

Шешімі. $\vec{e}_1{}'(1,0,0)$; $\vec{e}_2{}'(0,1,0)$; $\vec{e}_3{}'(0,0,1)$;болғаны үшін:

$$\begin{cases} x = x`+x_0 \\ y = y`+y_0 \\ z = z`+z_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 2 + x_0 \\ 1 = -3 + y_0 \\ -3 = 5 + z_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_0 = -2 \\ y_0 = 4 \\ z_0 = -3 \end{matrix}, \text{ O`(-2 , 4 , -8).}$$

15-мәселе. $R = (0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $\vec{e}_1{}'(1,0,2)$, $\vec{e}_2{}'(1,0,-2)$, $\vec{e}_3{}'(1,1,1)$ векторлар берілген. $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ система базис екендігін көрсетің және $R` = (0, \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')$ дегі $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ лардың координаталарын табың.

Шешімі. $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'$векторлар базис болуы үшін олар нокомпланар, яғни

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

болуы керек. (2) формуладан $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ және $(\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')$ реперлердегі базис векторлар арасындағы байланысты жазамыз:

$$\vec{e}_1{}' = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3, \qquad \vec{e}_2{}' = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_3, \qquad \vec{e}_3{}' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3,$$

$$2\vec{e}_1 = \vec{e}_1{}' + \vec{e}_2{}', \ \vec{e}_1 = \frac{1}{2}\vec{e}_1{}' + \frac{1}{2}\vec{e}_2{}',$$

$$4\vec{e}_3 = \vec{e}_1{}' - \vec{e}_2{}', \vec{e}_3 = \frac{1}{4}\vec{e}_1{}' - \frac{1}{4}\vec{e}_2{}'$$

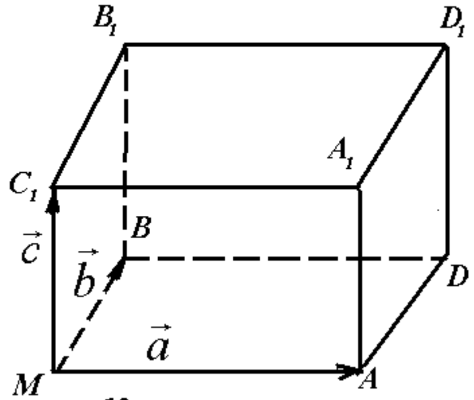
$$\vec{e}_2{}' = \vec{e}_3{}' - \frac{3}{4}\vec{e}_1{}' - \frac{1}{4}\vec{e}_2{}',$$

$\vec{e}_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$; $\vec{e}_2\left(-\frac{3}{4},-\frac{1}{4},1\right)$; $\vec{e}_3\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{4},0\right)$.

4. Векторлардың аралас көбейтіндісі

$\vec{a},\vec{b}$ және $\vec{c}$ компланар болмаған векторлар болсын деп болжвйық. Кеңістіктің бірер М нүктесінен $\overrightarrow{MA}=\vec{a},\ \overrightarrow{MB}=\vec{b},\ \overrightarrow{MC}=\vec{c}$ векторларды қоямыз және қабырғалары МА, МВ, МС кенсінділерден түзілген

$MADBC_1\ A_1D_1B_1$ паралелепипедке $\vec{a},\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторлардан құрылған паралелепипед деп айтамыз. (13-сурет) Ориентацияланған кеңістікте берілген тәртіпте алынған $\vec{a},\vec{b}$ және $\vec{c}$ компланар болмаған векторлардың аралас көбейтіндісі деп, осы векторлардан жасалған паралелепипедтің көлеміне айтылады. Бұнда $\vec{a},\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторлар оң базисті келтіріп шығарса, көлем “+” таңба менен сол базисті келтіріп шығарса, көлем “-” таңба менен алынады.



13-сурет

Векторлар компланар болса, векторлардың аралас көбейтіндісі нолге тең. Аралас көбейтінді $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ яки $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ менен белгіленеді.

Әр қандай $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ базис және $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ ортогонал оң базис үшін

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})\,\mathrm{I}\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$$

Егер $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ векторлар ортогонал базисте

$\vec{a}\,(a_1,\,a_2,\,a_3),\ \vec{b}(b_1,\,b_2,\,b_3)\ \vec{c}(c_1,\,c_2,\,c_3)$ координаларға ие болса,

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \varepsilon \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ бұнда, егер $\vec{i}$, $\bar{j}$, $\vec{k}$ оі базис болса, ε = -1

Әр қандай $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ және кез- келген α саны үшін төмендегі теңдіктер бежеріледі:

1. $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\,\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\,\vec{b}$
2. $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = -\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c};\ \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = -\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}$
3. $(\alpha\,\vec{a})\vec{b}\,\vec{c} = \alpha\,(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c});\ \vec{a}\,(\alpha\,\vec{b})\,\vec{c} = \alpha\,(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c});\ \vec{a}\,\vec{b}(\alpha\,\vec{c}) = \alpha\,(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$
4. $(\vec{a}+\vec{b})\,\vec{c}\vec{d} = \vec{a}\,\vec{c}\vec{d} + \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{d};\ \vec{a}\,(\vec{b}+\vec{c})\,\vec{d} = \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d} + \vec{a}\,\vec{c}\vec{d};$

   $\vec{a}\,\vec{b}(\vec{c}+\vec{d}) = \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} + \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d};$

Егер ***A(x_1, y_1, z_1); B(x_2, y_2, z_2); C(x_3, y_3, z_3); D(x_4, y_4, z_4);*** болса,

$\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}$

векторлардан жасалған паралелепипедтің көлеміні:

$$V = \left|\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right| = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} \tag{4}$$

ABCD тетраэдрдың көлемі:

$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right| \tag{5}$$

көріністе өрнектеледі.

4. Векторлардың вектор көбейтіндісі

Анық тәртіпте алынған әр қандай екі ноколинеар $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлардың ортогонал базисте $\vec{a}(a_1,\ a_2, a_3),\ \vec{b}(b_1, b_2,\ b_3)$ векторлардың вектор көбейтіндісі деп, сондай $\vec{P}$ векторға айтылады, оның ұзындығысан өрнегі $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларға жасалған параллелограммның ауданына тең; Бұл вектор $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлар перпендикуляр болып, оң базис келтіріп шығарады.

Ортогонал базисте $\vec{a}\,(a_1,\, a_2,\, a_3),\, \vec{b}(b_1,\, b_2,\, b_3)$ векторлардың векторлардың вектор көбейтіндісі төмендегі координаталарға ие:

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,] = (\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix})$$ яки шартты көріністе төмендегіше

жазылады:

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \vec{i} \\ a_2 & b_2 & \vec{j} \\ a_3 & b_3 & \vec{k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

Ортогонал базисте A(x_1, y_1, z_1); B(x_2, y_2, z_2); C(x_3, y_3, z_3); болса, $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$ векторларға жасалған параллелограммның ауданы төмендегі формула менен табылады:

$$S = \left|[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}]\right|$$

16-мәселе. Ұштары A(1, 6, 4), B(3, 1, 0), C(4, -1, -6) нүктелерде орналасқан үшбұрыштың ауданын есептең, A ұшынан BC түзуге дейінгі ара қашықтықты табың.

Шешімі: ΔABC ауданын ұштарының координаталарына көре табамыз:

$$s_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} 1-6 & -1-6 \\ 0-4 & -6-4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0-4 & -6-4 \\ 3-1 & 4-1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 3-1 & 4-1 \\ 1-6 & -1-6 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}\sqrt{549},$$

$$h = \frac{2S_{\Delta ABC}}{BC}$$ ара қашықтықты есептеу формуласы.

17-мәселе. $\overrightarrow{AB}(4,\, 3,\ 0);\ \overrightarrow{AD}(2,\, 1,\, 2);\ \overrightarrow{AA_1}(-3,\, -2,\ 5)$ векторларға жасалған $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллпипед көлемін есептеп, A_1 ұшынан ABCD негізіне түсірілген биіктігінің ұзындығын табың.

Шешімі: $\overrightarrow{AB}(4,3,\ 0);\ \overrightarrow{AD}(2,1,\ 2);\ \overrightarrow{AA_1}(-3,-2,\ 5)$ векторлар координаталары берілген болса, оларға жасалған паралелепипедтің көлемі:

$$V=\left|\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA_1}\right|=\mathrm{mod}\begin{vmatrix}4 & 2 & -3\\ 3 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 5\end{vmatrix}=\left|20-18+16-30\right|=42\,\textit{куб. бірлік}$$

$\overrightarrow{AB}(4,3,\ 0);\ \overrightarrow{AD}(2,1,\ 2);$ векторлар жасалған паралелограмның ауданы:

$$S=\left|[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}]\right| \text{ бұнда}$$

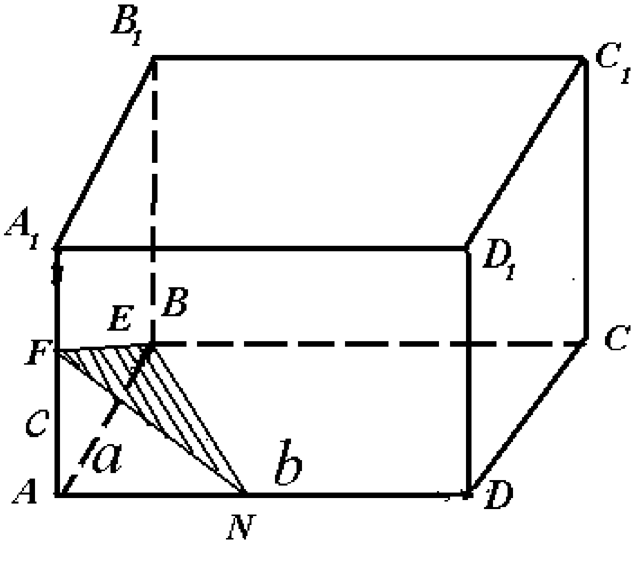
$$[\overrightarrow{AB}(4,3,\ 0),\overrightarrow{AD}(2,1,\ 2)]\left(\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0 & 2\\ 4 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}4 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}\right)\ \textit{ягни}\ [\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}](6,\ -8,\ \ -2)$$

$S=\left|[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}]\right|=\sqrt{36+64+4}=\sqrt{104}$ (квадрат бірлік) $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA_1}$ векторлар жасалған паралелепипедтің ұшынан түсірілген биіктігінің ұзындығы табу үшін оның көлемін негізінің ауданына бөлеміз.

$$h=\frac{V}{S}=\frac{12}{\sqrt{104}}=\sqrt{\frac{144}{104}}=\sqrt{\frac{18}{13}}=3\sqrt{\frac{2}{13}}\ \text{(ұзындық бірлігі)}$$

18-мәселе. Тік бұрышты паралелепипедтің өлшемдері ***a, b, c*** П бір ұшынан шығушы қабырғаларының орталарынан өтсе, W=П∩F

Шешімі: AB=a, AD=b, AA_1=c болсын (14-сурет). $(A,\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AA_1})$ координаталар системасын қараймыз. Бұнда N(*a/2, 0, 0), E(0, b/2, 0),F(0, 0, c/2)*



14-сурет

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{FN},\ \overrightarrow{FE}]\right|;\ \overrightarrow{FN}\left(\frac{a}{2},\ 0,\ -\frac{c}{2}\right);\overrightarrow{EF}\left(0,\ -\frac{a}{2},\ -\frac{c}{2}\right)$$

$$[\overrightarrow{FN},\ \overrightarrow{FE}]=\begin{vmatrix}\frac{a}{2} & 0 & \vec{i}\\ 0 & \frac{b}{2} & \vec{j}\\ -\frac{c}{2} & -\frac{c}{2} & \vec{k}\end{vmatrix}=\frac{bc}{4}\vec{i}+\frac{ac}{4}\vec{j}+\frac{ab}{4}\vec{k};\ \ S_{\Delta}=\frac{1}{8}\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}$$

19-мәселе. $\overrightarrow{AB}(2,0,\ 0);\ \overrightarrow{AC}(3,4,0);\ \overrightarrow{AD}(3,\ \ 4,\ 2)$ векторлар координаталары берілген болса, оларға жасалған тетраэдр көлемін емептеп, D ұшынан (ABC) негізге түсірілген биіктігінің ұзындығы табың.

Шешімі: $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}$ векторлар координаталары берілген болса, ABCD тетраэдрдің көлемі темендегідей табылады:

$$V=\left|\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right|=\frac{1}{6}\mathrm{mod}\begin{vmatrix}2 & 3 & 3\\ 0 & 4 & 4\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=\frac{1}{6}16=\frac{8}{3}\ \ (\textit{куб. бірлік})$$

ΔABC ның ауданы:

$$S=\frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}]\right|$$

Бұнда:

$$[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}]\left(\begin{vmatrix}0 & 4\\ 0 & 0\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}0 & 0\\ 2 & 3\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 4\end{vmatrix}\right)\ \textit{ягни}\ [\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}](0,\ \ 0,\ \ 8)$$

$$S=\frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{64}=4\ \ (\textit{кв. бірлік})\ \ V=\frac{1}{3}S\cdot h\Rightarrow h=\frac{V}{\frac{1}{3}S}=\frac{\frac{8}{3}}{\frac{1}{3}\cdot 4}=2\ (\textit{узунлик бірлігі})$$

ҚОРЫТЫНДЫ.

Болашақ кадрлерде терең және сапалы білімді беру, ұлттык егемендік идеяларында саналы, отанды сүйетін, бұл жолда білімді талапкерлерді тәрбиелеуді жалғастыру жоғарғы білімінің негізгі міндеттерінің бірі болып табылады.

Соныңмен қатар тыс пән, техника және технологияларынан өнімді пайдалану ғылыми дәлелдеу жетістігін асыру, оқыту барысында жаңа педагогикалық және информациялық технологияларын енгізу бүгінгі күн тәлімінің негізгі мақсаты болып табылады.

Өзбекстан Республикасы «Кадрлер даярлаудың ұлттык дәстурі», «Тәлім туралы заң» және «Мемлекеттік тәлім сандарты» талаптарынан келіп шыққан жағдайда, геометрияны оқытуда, жаңаша және жаңа технологиялар негізінде ұйымдастыру негізгі міндеттерімізден бірі.

Мен бұл кәсіптік бітіру жұмысымда ***«Кеңістікте координаталар методы және оларға сәйкес мәселелер шешу метоттары»*** атты әдістемелік қолданбаны жазуда жоғары сынып оқушылары және талапкерлер үшін мәселелер шешіміді уйретуді оз алдыма мақсат етіп қойдым. Пәнді оқытатын оқытушыға өз сабағында методык жәрдем береді деген үміттемін. Мұнда осы метоттар жәрдемінде түсінік берілді. Осы берілгендерді пайдаланып оқушы және талапкерлер өз білімдерін әрі қарай жалғастыру ушін өз беттерінше орындауға берілген мысалдарды шешімі ушін колданылады.

Мен жоғарыда көріп өткен тақырып негізінде мектеп оқушыларының мәселелерін шешімідің қажетігі туралы түсініктерін дамытуға жетерліше әрекет еттім. Мұнда бірнеше мәселені алып толығымен шешілуін уйретеді. Сонымен қатар, бұл оқушылардың және талапкерлердің практикалык білімдерін одан әрі жетілдіре түседі. Сонымен бірге, бұл тақырыптың өту әдісін де шешімге келтірдім. Ойлаймын бұл орындалған іс орта және жалпы тәлім мектеп оқушылары және жоғарғы оқу орындарындағы талапкерлер ушін методык жәрдем береді деп есептеймін.

«Кеңістікте координаталар методы және оларға сәйкес мәселелер шешу метоттары» атты әдістемелік метрдикадан тереңірек өз беттерінше істеуінде және пәнге болған қызығушылығының арта түсуіне қызмет етеді деген үміттемін.

Әдебиет

1. I. A. Karimov “Yuksak ma’naviyat yengilmas kuch”. T. “Ma’naviyat” 2008 й, 176 бет.

2. I. A. Karimov “Jahon moliyaviy iqtisodiy inqirozi, O‘zbekiston sharoitida uni bartaraf etishning yo‘llari va choralari”. T. “O‘zbekiston” 2009y, 56 bet.

3. O‘zbekiston respublikasining ta’lim to‘g‘risidagi qonuni. O‘quvchi ma’naviya tini shakllantirihs “Sharq” nashriyoti. T. 2000 y, 7-18 betlar.

4. Кадрлар тайёрлаш миллий дастури. Ўқувчи маънавиятини шакллантириш “Шарқ” нашриёти. Т. 2000 й, 20-54 бетлар.

5. Н. Д. Додажонов, М. Ш. Жўраева. Геометрия I - қисм Т. “Ўқитувчи»” 1996 й. 383 бет.

6. Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев Геометрия часть I-II М. “Просващание” 1987 Г.

7. Л. С. Атанасян, Г. В. Гуревич часть I-II М. “ Просващание ” 1976 г. 352 – 447 стр.

8. В. Т. Базылев, и.др. Сборник задач по геометрии М. “Прос-ние” 1987 г.

9. Х. Х. Назаров ва бошқалар. Геометриядан масалалар тўплами I- қисм 1997. II-қисм 1993

10. В. Погорелов “Геометрия” для 7-11 классоқ М., 1990 г.

11. Р. Кадырбаев ва бошқалар. Аналитик геометрия, Ўқув қўлланма Бухоро, 2001 й. 204 бет.

12. Х. И. Ибрашев пен Ш. Т. Еркеғұлов Математикавлық анализ курсы I том Қазақстан мемлекеттік оқу – педагогика баспасы. Алматы – 1963 ж.

13. М. Орифхонова, А. Умирбеков, А. Муханов Математика. ”Ўқитувчи” Нашриёти. Тошкент – 1974 й. 406 бет.

14. Интернет сайти W.W.W. edu.uz.

15. Интернет сайти W.W.W. google. uz.

16. Интернет сайти W.W.W. ziyonet. uz.

МАЗМУНЫ