

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
TOSHKENT KIMYO-TEXNOLOGIYA INSTITUTI**

KURS ISHI

Mavzu: Murakkab differensial tenglamalarni echish

Bajardi: Amirov A
10-13 guruh

Toshkent – 2013

I. Oddiy differensial tenglamalarning asosiy tushunchalari

Matematika va uning tatbiqlarining muhim masalalari x ni emas, balki uning biror noma'lum $y(x)$ funksiyasini topish masalasi qo'yilgan va tarkibida x , $y(x)$, shu bilan birga uning $y'(x)$, $y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$ hosilalarini o'z ichiga olgan murakkab tenglamalarni yechishga keltiriladi. Masalan, $y' + 2y - x^3 = 0$, $y'' = c \cdot ax$, $y''' + y = 0$.

Erkli o'zgaruvchi x ni, noma'lum $y(x)$ funksiyani va uning n tartibli hosilasiga qadar hosilalarini bog'lovchi tenglamaga n -tartibli oddiy differensial tenglama deyiladi. Yuqoridayozilgan tenglamalar, mos ravishda, birinchi, ikkinchi va uchinchi tartibli differensial tenglamalardir. Umumiy ko'rinishda n -tartibli differensial tenglama

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0 \quad (1)$$

shaklda yoziladi.

(1) tenglamani ayniyatga aylantiruvchi va kamida n marta differensial-lanuvchi har qanday $y = f(x)$ funksiyaga **differensial tenglama yechimi** deyiladi.

Masalan, $y = e^{-x}$ funksiya $y' + y = 0$ differensial tenglama yechimi bo'lib, tenglamaning cheksiz ko'p yechimlaridan biridir. Har qanday $y = c \cdot e^{-x}$ funksiya ham, bu yerda, c - ixtiyoriy o'zgarmas, tenglamani qanoatlantiradi. Ushbu differensial tenglama yechilganda, uning yechimi $y = c \cdot e^{-x}$ ko'rinishdan o'zgacha bo'lishi mumkin emasligini aniqlaymiz. Shu ma'noda, $y = c \cdot e^{-x}$ funksiya uning umumiy yechimi deyiladi. Umumiy yechimda ixtiyoriy o'zgarmas c qatnashgani uchun, tenglama yechimlari to'plami yagona ixtiyoriy c o'zgarmasga bog'liq deyiladi.

O'zgarmas c ga turli son qiymatlar berilganda, uning konkret yoki xususiy yechimlari kelib chiqadi.

$y''' = 0$ differensial tenglama yechimlarini bevosita qurish mumkin: $y'' = c_1$, $y' = c_1x + c_2$, $y = c_1x^2/2 + c_2x + c_3$. Bu yerda, c_1 , c_2 va c_3 ixtiyoriy o'zgarmaslar bo'lib, ularning har qanday qiymatlarida $y = c_1x^2/2 + c_2x + c_3$ funksiya differensial tenglamani qanoatlantiradi va umumiy yechim bo'lib hisoblanadi. $y'''=0$ differensial tenglama umumiy yechimi uch ixtiyoriy o'zgarmasga bog'liq va o'zgarmaslar har birining konkret qiymatlarida xususiy yechim hosil bo'ladi.

Yuqoridagi misollardan differensial tenglama umumiy yechimi o'zgarmaslari soni tenglamaning tartibiga teng ekanligini va uning xususiy yechimlari umumiy yechimdan o'zgarmaslarining konkret qiymatlarida kelib chiqishini xulosa qilish mumkin.

Differensial tenglama yechimlarini qurish jarayoniga differensial tenglamani integrallash deb yuritiladi. Differensial tenglamani integrallab, masalaning qo'yilishiga qarab, uning yoki umumiy yechimi tuziladi yoki xususiy yechimi topiladi.

Birinchi tartibli differensial tenglama umumiy $F(x; y; y') = 0$ yoki y' hosilaga nisbatan yechilgan

$$y' = f(x; y) \quad (2)$$

ko'rinishda yozilishi mumkin.

Ushbu tenglamalar ham, odatda, cheksiz ko'p yechimga ega bo'lib, ulardan biror-bir xususiy yechimni ajratib olish qo'shimcha shartni talab etadi. Ko'p hollarda ushbu shart Koshi masalasi shaklida qo'yiladi. Koshi masalasi $y' = f(x; y)$ differensial tenglamaning $y/x = x_0 = y_0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiravchi yechimini topishdan iborat.

Masala yechimi mavjudlik va yagonalik sharti quyidagi teoremdan aniqlanadi.

Teorema. Agar $f(x; y)$ funksiya boshlang'ich $(x_0; y_0)$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan, uzluksiz va uzluksiz $\partial f / \partial y$ xususiy hosilaga ega bo'lsa, u holda $(x_0; y_0)$ nuqtaning shunday bir atrofi mavjudki, ushbu atrofda $y' = f(x; y)$ differensial tenglama uchun $y/x = x_0 = y_0$ boshlang'ich shart Koshi masalasi yechimi mavjud va yagonadir.

Differensial tenglamaning umumiy va xususiy yechimlari tushunchalariga aniqlik kiritamiz.

Agar boshlang'ich $(x_0; y_0)$ nuqtaning berilishi (2) tenglama yechimining yagonaligini aniqlasa, u holda ushbu yagona yechimga xususiy yechim deyiladi. Boshqacha aytganda boshlang'ich shart bir qiymatni aniqlaydigan yechim xususiy yechimdir.

Differensial tenglamaning barcha xususiy yechimlari to'plamiga esa, umumiy yechim deyiladi.

Odatda, umumiy yechim yoki oshkor $y = \varphi(x, c)$ yoki oshkormas $\varphi(x, y, c) = 0$ ko'rinishda yoziladi. Boshlang'ich $(x_0; y_0)$ shart asosida c o'zgarmas $y_0 = \varphi(x_0; c)$ tenglamadan topiladi.

Tenglamaning umumiy integral) (yoki yechimi) deb, c o'zgarmasning turli qiymatlarida barcha xususiy yechimlari aniqlanadigan $\varphi(x, y, c) = 0$ munosabatga aytiladi.

Masalan, yechimning mavjudlik va yagonalik teorema shartlari yuqorida ko'rilgan $y' = -y$ tenglama uchun xy tekislikning har bir nuqtasida bajariladi. Tenglama umumiy yechimi $y = c \cdot c^x$ formuladan iborat bo'lib, har qanday boshlang'ich $y/x = x_0 = y_0$ shart mos c

o'zgaras tan-langanda, qanoatlantiriladi. O'zgaras c $y_0 = c \cdot c^{-x_0}$ tenglamadan topiladi va $c = y_0 \cdot e^{x_0}$.

Differensial tenglamani yechish uning umumiy yechimini (yoki umumiy integralini) topishni anglatadi.

(2) differensial tenglama yechimi mavjudligi va yagonaligini ta'minlaydigan muhim shartlardan $\partial f/\partial y$ xususiy hosilaning uzluksizligidir. Ba'zi bir nuqtalarda ushbu shart bajarilmasligi va ular orqali birorta ham integral chiziq o'tmasligi yoki, aksincha, bir nechta integral chiziqlar o'tishi mumkin. Bunday nuqtalarga differensial tenglamaning maxsus nuqtalari deyiladi.

Differensial tenglamaning integral chizig'i faqat uning maxsus nuqtalaridan iborat bo'lishi mumkin. Ushbu egri chiziqlar tenglamaning maxsus yechimlari deb yuritiladi.

2. O'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar.

Bir jinsii differensial tenglamalar

Birinchi tartibli ikkala qismini oddiy integrallash yo'li bilan yechiladigan sodda tenglama

$$y' = f(x) \quad (3)$$

ko'rinishga ega. Natijada, $y = \int f(x)dx$ va agar $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyalaridan biri $F(x)$ bo'lsa, umumiy yechim $y = F(x) + c$ ko'rinishda yoziladi.

(3) tenglamaning muhim umumlashmasi bo'lmish o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama:

$$y' = P(x) - q(y) \text{ yoki } dy/dx = P(x) \cdot q(y)$$

(4)

shaklda yozilishi mumkin.

Noma'lum funksiya y ning qaralayotgan o'zgarish sohasida $q(y) \neq 0$ shart bajariladi deb, (4) tenglamani o'zgaruvchilari ajralgan.

$$dy/q(y) = P(x) \cdot dx$$

shaklda yozamiz va ikkala qismini integrallab,

$$\int dy/q(y) = \int P(x) \cdot dx$$

tenglikni olamiz. $Q(y)$ funksiya $1/q(y)$ funksiyaning, $P(x)$ esa $p(x)$ ning boshlang'ich funksiyalaridan biri bo'lsa, (4) tenglamaning umumiy integrali:

$$Q(y) = P(x) + c$$

ko'rinishdan iborat.

Masala. $y' = x - y^2$ tenglamaning barcha yechimlarini topish talab qilingan bo'lsin. $y \neq 0$ shart o'rinli deb, tenglama o'zgaruvchilarini ajratamiz.

$$dy/dx = x \cdot y^2 \quad \text{yoki} \quad dy/y^2 = x \cdot dx.$$

Tenglamani integrallab, $-1/y = 1/2 \cdot x^2 + c$ yoki $y = -\frac{1}{1/2 \cdot x^2 + c}$

ko'rinishda umumiy yechimni olamiz. Ushbu yechimga tenglamani yechish jarayonida yo'qotilgan $y = 0$ yechimni ham qo'shish lozim. Birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglama deb,

$$dy/dx = f(y/x) \quad (5)$$

ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi.

(5) tenglamani yechish uchun noma'lum $y(x)$ funksiyadan $u(x) = y(x)/x$ funksiyaga o'tamiz. Unda,

$$y = x \cdot u, \quad dy/dx = u + x \cdot du/dx$$

tengliklar o'rinli bo'lib, (5) tenglama:

$$u + x \cdot du/dx = f(u) \quad \text{yoki} \quad du/(f(u) - u) = dx/x$$

ko'rinishga keltiriladi. Oxirgi tenglama o'zgaruvchilari ajralgan differensial tenglamadir va ma'lum usulda yechiladi. Natijada,

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \ln|x| = c.$$

$u(x)$ funksiya topilgandan so'ng, $y(x) = x \cdot u(x)$ funksiyaga qaytiladi.

Masala.

$$y' = \frac{x+y}{x-y} = 0$$

tenglamani yeching.

Ushbu tenglama bir jinsli tenglama, chunki

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y+x}{y-x} = \frac{y/x+1}{y/x-1} = \frac{u+1}{u-1}$$

bu yerda, $u = y/x$.

Noma'lum u fiinksiyaga nisbatan o'zgaruvchilari ajralgan:

$$\frac{du}{\frac{u+1}{u-1} - u} = \frac{dx}{x} \quad \text{yoki} \quad \frac{(u-1) \cdot du}{-u^2 + 2u + 1} = \frac{dx}{x}$$

tenglama hosil bo'ladi. Tenglamani integrallasak,

$$-1/2 \cdot \ln|-u^2 + 2u + 1| = \ln|x| - 1/2 - \ln|C|$$

tenglikni va so'ngra,

$$|-u^2 + 2u + 1|^{-1/2} = |x| \cdot 1/\sqrt{C} \quad \text{yoki} \quad x^2 \cdot |-u^2 + 2u + 1| = |C|$$

yechimlarni va oxirida $y = x - u$ funksiyaga qaytib, oshkormas shaklda:

$$x^2 + 2xy - y^2 = C$$

umumiy integralni quramiz.

3. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar. Bernulli tenglamasi

Birinchi tartibli $F(x,y,y') = 0$ differensial tenglamaning chap qismi y va y' larga chiziqli bog'liq shakliga chiziqli tenglama deyiladi. Chiziqli, birinchi tartibli differensial tenglama,

$$y' + P(x) \cdot y = f(x) \quad (6)$$

ko'rinishda yozilishi mumkin.

(6) tenglamani integrallash jarayoni, odatda, ikki bosqichdan iborat. Dastlab, tenglama o'ng tomonidagi $f(x)$ funksiyani 0 bilan almashtiriladi va

$$y' + P(x) \cdot y = 0 \quad (7)$$

tenglamaning umumiy yechimi topiladi. (7) tenglama (6) tenglamaning mos chiziqli bir jinsli tenglamasi deyiladi. (6) tenglamaning o'zi esa, agar $f(x) \neq 0$ bo'lsa, bir jinsli bo'lmagan tenglama deyiladi. Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi qurilgandan so'ng, bir jinsli bo'lmagan tenglamaning biror-bir $y_1(x)$ xususiy yechimi topiladi.

Bir jinsli bo'lmagan (1) tenglama umumiy yechimi, ushbu tenglama biror-bir xususiy $y_1(x)$ yechimi bilan uning mos bir jinsli tenglamasi umumiy yechimlari yig'indisiga teng.

Birinchi bosqichda bir jinsli (7) tenglamani yechamiz.

Tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama bo'lgani uchun,

$$dy/y = -P(x) \cdot dx.$$

Oxirgi tenglamani integrallab, $y = C \cdot e^{-P(x)}$ umumiy yechimni quramiz, bu yerda, $P(x)$ flinksiya $p(x)$ ning boshlang'ich funksiyalaridan bin.

Ikkinchi bosqichda (6) tenglama xususiy yechimlaridan birini ixtiyoriy o'zgarmasni variatsiyalash usulida, ya'ni $y_1(x)$ xususiy yechimni $y_1(x) = u(x) \cdot e^{-P(x)}$ shaklda qidiramiz. Ushbu ifodani (6) tenglamaga qo'yamiz va $u(x)$ noma'lum funksiyaga nisbatan,

$$u' \cdot e^{-P(x)} - u \cdot P'(x) \cdot e^{-P(x)} + P(x) \cdot u \cdot e^{-P(x)} = f(x)$$

tenglamani olamiz. $P'(x) = p(x)$ munosabat o'rinli bo'lgani uchun, tenglamaning chap tomondagi ikkinchi va uchinchi hadlari o'zaro yeyishadi. Natijada,

$$u' \cdot e^{-P(x)} = f(x) \text{ yoki } du/dx = f(x) \cdot e^{P(x)}$$

tenglama kelib chiqadi. Uni integrallab, cheksiz ko'p

$$u(x) = \int f(x) \cdot e^{p(x)} dx$$

boshlang'ich funksiyalardan birini tanlaymiz.

Masala. $y' - 2x(y + 1) = 0$ tenglamani yeching.

Tenglama $y' - 2x - y = 2x$ shaklda yozilishi mumkin va chiziqli tenglamadir. Tenglamaning mos bir jinsli tenglamasi $y' - 2x - y = 0$ ko'rinishga ega. O'zgaruvchilarni ajratib, so'ngra integrallaymiz:

$$dy/y = 2x \cdot dx \leftrightarrow \ln|y| = x^2 + \ln|c| \leftrightarrow y = \pm c \cdot e^{x^2}$$

Dastlabki bir jinslimas tenglamaning xususiy yechimi $y_0(x)$ ni $y_0(x) = u(x) \cdot e^{x^2}$ ko'paytma ko'rinishida topamiz:

$$u' - e^{x^2} + 2x \cdot u \cdot e^{x^2} - 2x \cdot u \cdot e^{x^2} = 2x \leftrightarrow u' = 2x \cdot e^{-x^2}$$

va $u(x) = -e^{-x^2} + c$, umumiy yechimdan $u(x) = -e^{-x^2}$ xususiy yechimni tanlaymiz. Natijada, $y_0(x) = -e^{-x^2} \cdot e^{x^2} = -1$, shunday qilib, berilgan tenglamaning umumiy yechimini xususiy $y = -1$ va mos bir jinsli tenglama umumiy yechimi $y = c \cdot e^{x^2}$ larning yig'indisidan iborat:

$$y(x) = c \cdot e^{x^2} - 1;$$

Chiziqli differensial tenglamani yechishda qo'llanilgan usul ba'zi chiziqsiz tenglamalarni ham yechish imkonini beradi. Xususan, chiziqsiz

$$y' + P(x) \cdot y = q(x) \cdot y^n \quad (8)$$

Bernulli tenglamasi deb yuritiladigan tenglamani yuqoridagi usulni qo'llab, yechish mumkin. Dastlab, $y' + P(x) \cdot y = 0$ bir jinsli tenglamaning yechimlaridan biri $y_0(x)$ ni topamiz.

(8) tenglama umumiy yechimini $y(x) = u(x) \cdot y_0(x)$ ko'rinishda qidiramiz. Natijada, noma'lum $u(x)$ ga nisbatan,

$$u'(x) \cdot y_0(x) = q(x) \cdot u^n(x) - y_0^n(x)$$

o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama kelib chiqadi va integrallanadi.

Masala. $y' + 2y - e^{2x} \cdot y^2 = 0$ tenglamani yeching.

Dastlab, bir jinsli $y' + 2y = 0$ tenglamani integrallaymiz va uning $y = c \cdot e^{-2x}$ umumiy yechimini olamiz. Yechimlaridan biri sifatida $y_0(x) = e^{-2x}$ funksiyani qarash mumkin. So'ngra, berilgan tenglamada $y(x) = u(x) \cdot e^{-2x}$ almashtirish bajaramiz:

$$e^{-2x} \cdot u' = e^{-4x} \cdot e^{2x} \cdot u^2 \text{ yoki } du/u^2 = 1.$$

Oxirgi tenglamani integrallab, $u(x) = 1/(c - x)$ tenglikni olamiz. Natijada, tenglama umumiy yechimi:

$$y(x) = u(x) \cdot y_0(x) = e^{-2x}/(c - x).$$

1. Ikkinchi tartibli, o'zgarmas koeffitsientli, chiziqli differensial tenglamalar

Ikkinchi tartibli, o'zgarmas ko'effitsientli, chiziqli differensial tenglama

$$y = y'' + P \cdot y' + q \cdot y = f(x) \quad (1)$$

ko'rinishga ega bo'lib, tenglamada P va q o'zgarmas sonlar, $f(x)$ esa uzluksiz funksiyadir.

Agar (1) tenglamada $f(x) = 0$ bo'lsa, u holda

$$y'' + P \cdot y' + q \cdot y = 0 \quad (2)$$

tenglamaga (1) tenglamaning bir jinsli tenglamasi deyiladi.

Bir jinslimas (1) tenglama qaralayotganda uning mos bir jinsli (2) tenglamasi muhim ahamiyat kasb etadi. (2) tenglamaning yechimlari to'plami esa o'ziga xos xususiyatlarga egaligidan uni maxsus o'rganish maqsadga muvofiq.

Dastlab, chiziqli - erkli va chiziqli bog'liq funksiyalarga to'xtalamiz. Vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi, chiziqli erkliligi yoki chiziqli bog'liqligi tushunchalarini ixtiyoriy funksiyalarga ham yoyish mumkin.

Berilgan $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funksiyalarning $c_1, c_2, \dots, c_n$ o'zgarmas ko'effitsientli chiziqli kombinatsiyasi deb,

$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) + \dots + c_n \cdot y_n(x)$ funksiyaga aytiladi.

Agar $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funksiyalardan istalgan biri qolganlarining chiziqli kombinatsiyasi shaklida ifodalanmasa, ushbu funksiyalar sistemasiga **chiziqli erkli sistema** deyiladi. Aksincha, agar qaralayotgan funksiyalardan hech bo'lmaganda biri qolganlarining chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida ifodalansa, funksiyalar tizimiga **chiziqli bog'liq** deyiladi.

Bir necha funksiyalardan iborat sistemaning chiziqli erkliligi masalasini aniqlash usulmridan biri Bronskiy aniqlovchisi bilan bog'liq.

Ikki $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar tizimi uchun, Bronskiy aniqlovchisi

$$W(y_1; y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

ko'rinishga ega bo'lib, uning nafaqat elementlari, shu bilan birga o'zi ham x ning funksiyasidan iborat.

Aniqlovchi xossalariga ko'ra, agar y_1, y_2 funksiyalar chiziqli bog'liq bo'lsa, Bronskiy aniqlovchisining kattaligi x ning barcha qiymatlarida nolga teng. Demak, agar x ning biror-bir qiymatida $W(y_1; y_2) \neq 0$ bo'lsa, y_1 va y_2 funksiyalar chiziqli erklidir.

Bir jinsli (2) tenglama bir necha yechimlarining har qanday chiziqli kombinatsiyasi uning yechimi bo'la olishini tekshirib ko'rish mumkin.

Agar ikki $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar (2) tenglamaning chiziqli erkli yechimlari bo'lsa, u holda ularning $W(y_1; y_2)$ Bronskiy aniqllovchisi x ning hech bir qiymatida nolga teng bo'la olmaydi.

Yuqoridagi mulohazalarga asoslanib, chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar nazariyasida markaziy o'rinni egallagan bir jinsli tenglamaning barcha yechimlari tuzilishi haqidagi quyidagi teoremani isbotlash mumkin.

1 - Teorema. Agar $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar (2) tenglamaning chiziqli erkli yechimlari bo'lsa, u holda tenglamaning har bir yechimi ularning chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida ifodalanishi mumkin.)

(2) tenglamaning tartiblangan chiziqli erkli $y_1(x)$ va $y_2(x)$ yechimlari tizimiga uning fundamental yechimlari sistemasi deyiladi.

$y_1(x)$ va $y_2(x)$ yechimlarning fundamentallik zaruriy va ham yetarli sharti $W(y_1; y_2) \neq 0$ tengsizlikning bajarilishi hisoblanadi.

Ta'rifdan foydalanib, teoremani o'zgacha bayon qilish mumkin.

Agar $y_1(x)$ va $y_2(x)$ bir jinsli (2) tenglamaning fundamental yechimlari tizimlaridan biri bo'lsa, u holda uning umumiy yechimi:

$$y(x_0) = c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

ko'rinishga ega, bu yerda, c_1, c_2 - ixtiyoriy o'zgarmas sonlardip.

Masalan, $y'' + y = 0$ tenglama xususiy yechimlari sifatida $y_1 = \sin x$ va $y_2 = \cos x$ funksiyalarni tanlash mumkin.

Ularning Bronskiy aniqllovchisi

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1$$

Demak, y_1 va y_2 chiziqli erkli bo'lganidan, tenglama umumiy yechimi:

$$y(x) = c_1 \cdot \sin x + c_2 \cdot \cos x$$

o'zgarmas koeffitsientli bir jinsli (2) tenglama fundamental yechimlari sistemasini qurishning sodda usuli mavjud.

(2) tenglama xususiy yechimini $y = e^{\lambda x}$ ko'rsatkichli funksiya ko'rinishida qidiramiz. Funksiyani ikki marta differensiallab,

$$y' = \lambda \cdot e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$$

tengliklarni olamiz. y funksiya va uning hosilalarini (2) tenglamaga qo'ysak,

$$(\lambda^2 + P \cdot \lambda + q) \cdot e^{\lambda x} = 0$$

tenglama hosil bo'ladi. $e^{\lambda x} \neq 0$ (har doim musbat) ekanligini hisobga olsak, oxirgi tenglamaga teng kuchli

$$(\lambda^2 + P \cdot \lambda + q) = 0$$

(3)

tenglamani olamiz.

(3) algebraik tenglamaga (2) differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasi deyiladi.

(2) tenglamaning fundamental yechimlari sistemasini qurishning navbatdagi qadami quyidagicha: (3) kvadrat tenglama ikki λ_1 va λ_2 haqiqiy yoki kompleks ildizlarga ega bo'lsin. Unda $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ funksiyalarning har biri (2) tenglamaning yechimi bo'ladi. Agar ushbu funksiyalar chiziqli erkli bo'lsa, tenglama umumiy yechimi $c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ ko'rinishda yoziladi.

Agar fiinksiyalar chiziqli bog'liq bo'lsa, umumiy yechimni qurish jarayoni qo'shimcha mulohazalarni talab etadi.

Umumiy yechimni tuzishning xarakteristik tenglama yechimlari bilan bog'liq barcha hollarini qaraymiz:

1-hol: λ_1 va λ_2 ildizlar haqiqiy va turlicha. Ularga mos $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ va $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ yechimlar chiziqli erkli, chunki

$$W(y_1; y_2) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 \cdot e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 \cdot e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix}$$

Demak, y_1 va y_2 fundamental yechimlar sistemasini tashkil etadi.

Misol. $y'' - 8y' + 7y = 0$ tenglama umumiy yechimini quring.

Xarakteristik tenglama $\lambda^2 - 8\lambda + 7$ ko'rinishga ega va uning ildizlari $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 7$. Natijada, chiziqli erkli $y_1 = e^x$ va $y_2 = e^{7x}$ xususiy yechimlarni olamiz. Tenglama umumiy yechimi

$$y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{7x}.$$

2-hol: λ_1 va λ_2 ildizlar o'zaro qo'shma $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ va $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ kompleks sonlar, bu yerda $-\beta \neq 0$.

Ildizlarga mos kompleks yechimlarni Z_1 va Z_2 deb belgilaymiz:

$$Z_1 = e^{(\alpha + \beta i)x}, \quad Z_2 = e^{(\alpha - \beta i)x}$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ bo'lganidan, ular chiziqli erkli.

Eyler formulasidan foydalanib,

$Z_1 = e^{\alpha x} \cdot (\cos \beta x + i \cdot \sin \beta x)$, $Z_2 = e^{\alpha x} \cdot (\cos \beta x - i \cdot \sin \beta x)$, funksiyalarni olamiz. Funksiyalarining quyidagi chiziqli kombinatsiyalarini tuzamiz:

$$y_1 = 1/2 (Z_1 + Z_2) = e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x, \quad y_2 = 1/(2 \cdot i)(y_1 - y_2) = e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x.$$

y_1 va y_2 funksiyalar (2) tenglamaning haqiqiy yechimlari bo'lib, chiziqli erklidir. Natijada, umumiy yechim

$y = c_1 \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x + c_2 \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x = e^{\alpha x} \cdot (c_1 \cdot \cos \beta x + c_2 \cdot \sin \beta x)$ ko'rinishda yoziladi.

Misol. $y'' - 6y' + 10y = 0$ tenglama umumiy yechimini toping.

Xarakteristik tenglama

$$\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$$

bo'lib, uning ildizlari $\lambda_1 = 3+i$, $\lambda_2 = 3-i$. Shunday qilib, xususiy yechimlar

$$y_1 = e^{3x} \cdot \cos x, \quad y_2 = e^{3x} \cdot \sin x.$$

Umumiy yechim:

$$y = e^{3x} \cdot (c_1 - \cos x + c_2 \cdot \sin x).$$

3-hol: λ_1 va λ_2 ildizlar o'zaro teng va haqiqiy. $\lambda_1 = \lambda_2$ ildizlarga xususiy $e^{\lambda_1 x}$ va $x \cdot e^{\lambda_1 x}$ chiziqli erkli (tekshirib ko'ring) yechimlarni mos qo'yish mumkin. Shunday qilib, umumiy yechim

$$y = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + c_2 \cdot x \cdot e^{\lambda_1 x} = e^{\lambda_1 x} \cdot (c_1 + c_2 \cdot x).$$

Misol. $y'' + 4y' + 4y = 0$ tenglama umumiy yechimini toping.

Xarakteristik tenglama $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ va $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$.

Umumiy yechim

$$y = e^{-2x} \cdot (c_1 + c_2 \cdot x).$$

2 - Teorema. Bir jinsli masala (1) differensial tenglamaning umumiy yechimi ushbu tenglama biror $y_0(x)$ xususiy yechimi va mos bir jinsli (2) tenglama umumiy yechimlari yig'indisiga teng.

(1) tenglama biror-bir xususiy yechimini ixtiyoriy o'zgarmaning variatsiyalash usulida qurish mumkin.

Agar (1) tenglamaning o'ng tomoni $f(x) = P(x) \cdot e^{\alpha x}$ ko'rinishda bo'lsa, bu yerda, $P(x)$ - ko'phad, u holda tenglamaning xususiy yechimini qurishning oddiy usuli mavjud.

I hol: Agar α xarakteristik tenglamaning ildizlaridan biri bo'lmasa, xususiy yechim $y = Q(x) \cdot e^{\alpha x}$ ko'rinishda qidiriladi. Bu yerda: $Q(x)$ - darajasi $P(x)$ ning darajasiga teng aniqmas koeffitsiyentli ko'phad. $y = Q(x) \cdot e^{\alpha x}$ ifoda (1) tenglamaga qo'yiladi, $e^{\alpha x}$ ga qisqartirilgandan so'ng, ko'phadlar tengligidan, $Q(x)$ ko'phadning aniqmas koeffitsiyentlari aniqlanadi.

Misol. $y'' - 6y' + 8y = (3x - 1) \cdot e^x$ tenglamaning xususiy yechimini toping.

Ushbu holda $a = 1$, xarakteristik tenglama ildizlari esa 2 va 4 ga teng. Masala yechimini $y = (ax + b) \cdot e^x$ ko'rinishda qidiramiz. Funksiya hosilalarini aniqlaymiz:

$$y' = a \cdot e^x + (ax + b) \cdot e^x = (ax + a + b) \cdot e^x$$

$$y'' = a \cdot e^x + (ax + a + b) \cdot e^x = (ax + 2a + b) \cdot e^x$$

y, y', y'' ifodalarni tenglamaga qo'yiladi va e^x ga qisqartirilgandan so'ng:

$$(ax + 2a + b) - 6(ax + a + b) + 8(ax + b) = x - 1 \quad \text{yoki} \\ 3ax - 4a + 3b = 3x - 1.$$

Mos koeffitsiyentlarni tenglab, $a = 1, b = -1$ natijani olamiz. Izlanayotgan xususiy yechim:

$$y = (x - 1) \cdot e^x;$$

II hol: Agar α xarakteristik tenglamalardan biriga teng bo'lib, ikkinchisidan, farq qilsa, xususiy yechim $y = x \cdot Q(x) \cdot e^{\alpha x}$ ko'rinishida izlanadi.

III hol: Agarda a xarakteristik tenglama ikki karrali ildizlariga teng bo'lsa, u holda xususiy yechim $y = x^2 \cdot Q(x) \cdot e^{\alpha x}$ ko'rinishida qidiriladi.

2. Differensial tenglamalar sistemalari haqida umumiy ma'lumotlar

Agar bir noma'lum funksiyaning emas, balki bir yoki bir nechta noma'lum funksiyaning topish masalasi qo'yilgan bo'lsa, umuman olganda, masala chekli shartlari - tenglamalari ham bir nechta bo'lishi zarur bo'ladi. Agarda masala tenglamalari differensial tenglamalardan iborat bo'lsa, u holda differensial tenglamalar sistemasi haqida gapirish mumkin.

Sistema har bir tenglamasida hosila tartibi 1 dan oshmasa, sistema bi-rinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasi deb yuritiladi. Ikki noma'lum funksiya ikki birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasi, odatda,

$$\begin{cases} \varphi(x, y_1, y_2, dy_1/dx; dy_2/dx) = 0 \\ \psi(x, y_1, y_2, dy_1/dx; dy_2/dx) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

ko'rinishda yoziladi.

Bir tenglama uchun Koshi masalasining qo'yilishi tabiiy ravishda differensial tenglamalar sistemasi uchun umimlashtiriladi. Masalan, (4) sistema uchun Koshi masalasi boshlang'ich $y_1(x_0) = y_1^0, y_2(x_0) = y_2^0$ shartlarni qanoatlantiruvchi $y_1(x), y_2(x)$ yechimlarni topishni anglatadi.

Har qanday yuqori tartibli differensial tenglamani yoki tenglamalar sistemasini birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasiga keltirish mumkin.

Masalan, $y'' = f(x, y, y')$ tenglamani

$$\begin{cases} y' = u \\ u' = f(x, y, u) \end{cases} \quad \text{sistema bilan almashtirish mumkin.}$$

3. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar sistemalari. Yuqori tartibli yagona differensial tenglamaga keltirish

Differensial tenglamalar sistemasining maxsus ko'rinishi, chiziqli sistemalarni qarash bilan cheklanamiz.

Ikki noma'lum $y_1(x)$, $y_2(x)$ funksiyalar holi uchun chiziqli sistema

$$\begin{cases} dy_1/dx = a_{11} \cdot y_1 + a_{12} \cdot y_2 \\ dy_2/dx = a_{21} \cdot y_1 + a_{22} \cdot y_2 \end{cases} \quad (5)$$

ko'rinishga ega bo'lib, umuman olganda, α_{ij} koeffitsiyentlar erkli o'zgaruvchi x ning uzluksiz funksiyalaridir.

(5) sistemani integrallash usullaridan biri, bir noma'lumli ikkinchi darajali differensial tenglamaga keltirishdir. (5) sistemaning birinchi tenglamasi ikkala qismini x bo'yicha differensiallaymiz,

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \alpha_{11} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \alpha_{12} \cdot \frac{dy_2}{dx} + \frac{d\alpha_{11}}{dx} \cdot y_1 + \frac{d\alpha_{12}}{dx} \cdot y_2$$

tenglamada dy_1/dx , dy_2/dx hosilalar sistemadagi ifodasi bilan almashtirilganda,

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \alpha_{11}(\alpha_{11} \cdot y_1 + \alpha_{12} \cdot y_2) + \alpha_{21}(\alpha_{21} \cdot y_1 + \alpha_{22} \cdot y_2) + \frac{d\alpha_{11}}{dx} \cdot y_1 + \frac{d\alpha_{12}}{dx} \cdot y_2$$

tenglama o'ng qismida y_1 va y_2 qatnashgan hadlar guruhlanganda

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \beta_1 \cdot y_1 + \beta_2 \cdot y_2 \quad (6)$$

ko'rinishni oladi, bu yerda β_1 va β_2 koeffitsiyentlar α_{ij} koeffitsiyentlar va ularning hosilalari orqali aniq va ravshan ifodalanadi.

(6) tenglamani (5) sistemaning birinchi tenglamasi bilan birgalikda qarab,

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = \alpha_{11} \cdot y_1 + \alpha_{12} \cdot y_2 \\ \frac{d^2 y_1}{dx^2} = \beta_1 \cdot y_1 + \beta_2 \cdot y_2 \end{cases} \quad (7)$$

sistemani olamiz.

Erkli o'zgaruvchi x ning qaralayolgan sohasida $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0$ munosabat o'rinli bo'lsa, (7) sistemani y_1 va y_2 ga nisbatan yechish, ya'ni $\frac{dy_1}{dx}$ va $\frac{d^2 y_1}{dx^2}$ lar orqali ifodalash mumkin. Natijada,

$$y_1 = a \cdot \frac{dy_1}{dx} + b \cdot \frac{d^2 y_1}{dx^2} \quad (8)$$

$$y_2 = c \cdot \frac{dy_1}{dx} + d \cdot \frac{d^2 y_1}{dx^2} \quad (9)$$

tenglamalarga ega bo'lamiz. (8) tenglama yagona $y_1(x)$ noma'lum funksiyali, ikkinchi tartibli chiziqli tenglamadir. Agar dastlabki (5) sistemada α_{ij} koeffitsiyentlar o'zgarmas bo'lsa, (8) tenglama ham o'zgarmas koeffitsiyentli bo'lib, ushbu tenglamani yuqorida ko'rilgan qulay usulda yechish mumkin.

Misol. Sistemani yeching.

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -y_1 - 2y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = -2y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

Birinchi tenglamani ikkala qismini differensiallaymiz, natijada

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = -\frac{dy_1}{dx} - 2 \cdot \frac{dy_2}{dx} = -(-y_1 - 2y_2) - 2 \cdot (2y_1 + 3y_2) = -3y_1 - 4y_2.$$

sistemaning birinchi tenglamasi bilan birgalikda

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -y_1 - 2y_2 \\ \frac{d^2 y_1}{dx^2} = -3y_1 - 4y_2 \end{cases}$$

ko'rinishni oladi.

Oxirgi sistemani y_1 va y_2 larga nisbatan yechamiz:

$$\begin{cases} y_1 = 2 \frac{dy_1}{dx} - \frac{d^2 y_1}{dx^2} \\ y_2 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 y_1}{dx^2} \end{cases}$$

Natijada, noma'lum $y_1(x)$ funksiyaga nisbatan

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} - 2 \cdot \frac{dy_1}{dx} + y_1 = 0$$

tenglama hosil boladi. Ushbu tenglamani ma'lum usulda yechamiz va

$$y_1 = (c_1 + c_2 \cdot x) \cdot e^x$$

funksiyani olamiz. Oxirgi sistema ikkinchi tenglamasi yordamida

$$y_2 = -1/2 \cdot (2c_1 + c_2 + 2c_2 x) \cdot e^x$$

yechim ham kelib chiqadi.

Quyidagi almashtirishlarni kiritamiz:

$$\frac{dy_1}{dx} = \dot{y}_1, \quad \frac{dy_2}{dx} = \dot{y}_2, \quad A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \dot{Y} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix}$$

Yuqoridagi almashtirishlar yordamida, (5) sistemani ixcham

$$\dot{Y} = A \cdot Y \quad (10)$$

matritsali tenglama ko'rinishida yozish mumkin.)

Masalan, quyidagi

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 4y_1 - y_2 \\ \dot{y}_2 = 2y_1 - 3y_2 \end{cases}$$

sistemaning matritsa ko'rinishi

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

4. O'zgarmas koeffitsiyentli differensial tenglamalarning chiziqli sistemasi va uning umumiy yechimini toping

(5) sistemaning α_{ij} koeffitsiyentlari o'zgarmas bolsa, sistemani yechishda chiziqli algebra usullarini qo'llash imkoni mavjud.

Dastlab boshida (5) sistema Trivial (nol) $y_1(x) = 0$, $y_2(x) = 0$ yechimlarga ham ega ekanligini tekshirib ko'rish qiyin emas. Sistemamng notrivial (nolmas) yechimlarini $y_1 = P_1 \cdot e^{\lambda x}$, $y_2 = P_2 \cdot e^{\lambda x}$

yoki matritsa $y = P \cdot e^{\lambda x}$, bu yerda, $P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$ ko'rinishida qidiramiz.

$Y = \lambda P \cdot e^{\lambda x}$ bo'lganidan, Y va $\dot{Y}$ larni (10) tenglamaga qo'yib, $e^{\lambda x}$ ga qisqartirilgandan so'ng, λ , P juftliklarni topish uchun matritsali

$$A \cdot P = \lambda \cdot P \quad (11)$$

tenglamani olamiz. (11) tenglamani yechish A matritsaning xos P vektorlari va λ qiymatlarini topish masalasidir. A matritsaning xos qiymatlari

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (12)$$

xarakteristik tenglama ildizlari bo'lib, so'ngra xos qiymatlarining har birigategishli xos vektorlar quriladi.)

λ_1 va λ_2 sonlar (12) xarakteristik tenglamaning turli haqiqiy ildizlari bo'lsin. Agar P_1 vektor λ_1 xos qiymatga tegishli biror-bir xos vektor, P_2 esa λ_2 xos qiymatga mos biror xos vektor bo'lsa, u holda (10) tenglamaning ikki xususiy yechimlari $Y_1 = P_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x}$, $Y_2 = P_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}$ formulalardan aniqlanadi.

Umumiy yechim

$$Y = C_1 \cdot Y_1 + C_2 \cdot Y_2,$$

ko'rinishga ega, bu yerda C_1 va C_2 ixtiyoriy o'zgarmaslar.

Agar $\lambda_1 = \lambda_2$ bo'lsa, unda ikki Y_1 va Y_2 xususiy yechimlarning o'rniga birgina Y_1 yechimni olamiz. Ushbu holda ikki xususiy yechim sifatida Y_1 va $x \cdot Y_1$ lar tanlanadi.

Agarda X_1 va X_2 sonlar haqiqiy sonlar bo'lmasa, u holda $\lambda_1 = \alpha + \beta \cdot i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta \cdot i$ - bu yerda $\beta \neq 0$. λ_1 va λ_2 kompleks xos qiymatlarga mos xos vektorlar quriladi. Xususiy $Y_1 = P_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x}$, $Y_2 = P_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}$ yechimlar ham o'zaro qo'shma kompleks bo'ladi. Haqiqiy yechimlarni olish uchun Y_1 va Y_2 larning chiziqli kombinatsiyasini quyidagi ko'rinishda

$$Y_{10} = Y_1 + Y_2, \quad Y_{20} = (1/2i)(Y_1 - Y_2)$$

quramiz.

Misol. Sistemani yeching.

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 4y_1 + 2y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = -3y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

Ushbu sistema uchun

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

A matritsaning xos qiymatlari $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$ va ularga tegishli xos $P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorlar qurilgan (I - qism, §17 ga qarang).

$$\text{Xususiy yechimlar } Y_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot e^x, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{6x}$$

Matritsa ko‘rinishda umumiy yechim $Y = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot e^x + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{6x}$

ko‘rinishda yozilib, undan esa

$y_1(x) = -2C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{6x}$, $y_2(x) = 3C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{6x}$ umumiy yechimlar olinadi.

2. ODDIY DIFFERENSIYAL TENGLAMALARNING TAQRIBIY YECHIMLARINI TOPISHNING SONLI USULLARI

2.1 Eyler usuli

Analitik usullar bilan topilgan yechimni aniqlik darajasi haqida fikr yuritish birmuncha murakkab bo'ladi. Amaliy masalalarni yechganda, yechimlarni formula ko'rinishda emas, balki jadval ko'rinishda olinadi. $y'=f(x,y)$ differensial tenglama yechimini sonli usul bilan toppish, argumentlarning berilgan $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ ketma – ketligini va nomalum funksiyaning boshlang'ich qiymati y_0 uchun $y=F(x)$ funksiyani aniqlamasdan, $y_1=F(x_1)$ ($i=1,2,\dots,n$) va $F(x_0)=y_0$ ni qanoatlantiruvchi $y_1, y_2, \dots, y_n$, larning topishdan iboratdir.

Amaliy masalalarni yechishda ko'p qo'llaniladigan Eyler va Runge – Kutta usullarini ko'rib chiqamiz.

Biriinchi tartibli n diferensial tenglama $y'=f(x,y)$ (1)

Berilgan bo'lsin va uni $[a,b]$ – kesmada boshlang'ich shart $x=x_0$ da $y=y_0$ tenglikni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin. $[a,b]$ kesmani $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ nuqtalar bilan n ta teng bo'laklarga ajratamiz. Bu yerda $x_i=x_0+ih$ ($i=0,1,2,\dots,n$), $h=(b-a)/n$ – qadam.

(1)– tenglamani $[a,b]$ kesmaga tegishli bo'lgan biror $[x_k, x_{k+1}]$ kesmada integrallasak:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y) dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} y' dx = y(x_{k+1}) - y(x_k) = y_{k+1} - y_k$$

yani

$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y) dx$$

Ushbu holda $a = 1$, xarakteristik tenglama ildizlari esa 2 va 4 ga teng. Masala yechimini $y = (ax + b) \cdot e^x$ ko'rinishda qidiramiz. Funksiya hosilalarini aniqlaymiz:

$$y' = a \cdot e^x + (ax + b) \cdot e^x = (ax + a + b) \cdot e^x$$

$$y'' = a \cdot e^x + (ax + a + b) \cdot e^x = (ax + 2a + b) \cdot e^x$$

y, y', y'' ifodalarni tenglamaga qo'yiladi va e^x ga qisqartirilgandan so'ng:

$$(ax + 2a + b) - 6(ax + a + b) + 8(ax + b) = x - 1 \quad \text{yoki}$$

$$3ax - 4a + 3b = 3x - 1.$$

Mos koeffitsiyentlarni tenglab, $a = 1$, $b = -1$ natijani olamiz. Izlana-yotgan xususiy yechim:

$$y = (x - 1) \cdot e^x;$$

II hol: Agar α xarakteristik tenglamalardan biriga teng bo'lib, ikkinchisidan, farq qilsa, xususiy yechim $y = x \cdot Q(x) \cdot e^{\alpha x}$ ko'rinishida izlanadi.

2.2 Eyler usuli bilan xisoblash algoritimi.

(2) tenglamaning haqiqiy yechimlari bo'lib, chiziqli erklidir. Natijada, umumiy yechim

$y = c_1 \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x + c_2 \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x = e^{\alpha x} \cdot (c_1 \cdot \cos \beta x + c_2 \cdot \sin \beta x)$
ko'rinishda yoziladi.

Misol. $y'' - 6y' + 10y = 0$ tenglama umumiy yechimini toping.

Xarakteristik tenglama

$$\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$$

bo'lib, uning ildizlari $\lambda_1 = 3+i$, $\lambda_2 = 3-i$. Shunday qilib, xususiy yechimlar

$$y_1 = e^{3x} \cdot \cos x, y_2 = e^{3x} \cdot \sin x.$$

Umumiy yechim:

$$y = e^{3x} \cdot (c_1 - \cos x + c_2 \cdot \sin x).$$

3-hol: λ_1 va λ_2 ildizlar o'zaro teng va haqiqiy. $\lambda_1 = \lambda_2$ ildizlarga xususiy $e^{\lambda_1 x}$ va $x \cdot e^{\lambda_1 x}$ chiziqli erkli (tekshirib ko'ring) yechimlarni mos qo'yish mumkin. Shunday qilib, umumiy yechim

$$y = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + c_2 \cdot x \cdot e^{\lambda_1 x} = e^{\lambda_1 x} \cdot (c_1 + c_2 \cdot x).$$

Misol. $y'' + 4y' + 4y = 0$ tenglama umumiy yechimini toping.

Xarakteristik tenglama $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ va $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$.

Umumiy yechim

$$y = e^{-2x} \cdot (c_1 + c_2 \cdot x)$$

Berilgan $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ funksiyalarning c_1 , c_2 , ..., c_n o'zgarmas koeffitsientli chiziqli kombinatsiyasi deb,

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) + \dots + c_n \cdot y_n(x) \text{ funksiyaga aytiladi.}$$

λ_1 va λ_2 sonlar (12) xarakteristik tenglamaning turli haqiqiy ildizlari bo'lsin. Agar P_1 vektor λ_1 xos qiymatga tegishli biror-bir xos vektor, P_2 esa λ_2 xos qiymatga mos biror xos vektor bo'lsa, u holda (10) tenglama-ning ikki xususiy yechimlari $Y_1 = P_1 \cdot e^{\lambda_1 x}$, $Y_2 = P_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$ formulalardan aniqlanadi.

Umumiy yechim

$$Y = C_1 \cdot Y_1 + C_2 \cdot Y_2,$$

ko'rinishga ega, bu yerda C_1 va C_2 ixtiyoriy o'zgarmaslar.

2.3 Runge – Kutta usuli

Runge – kutta usuli ko'p jihatdan Eyler usuliga o'xshash , ammo aniqlik darajasi Eyler usuliga nisbatan yuqori bo'lgan usullaridan biridir. Runge – Kutta usuli bilan amaliy masalalarni yechish juda qulay. Buning sababai, bu usul orqali nomalum funktsiyani x_{i+1} dagi qiymatini topish uchun x_i dagi qiymati aniq bo'lishi yetarli.

Runge – Kutta usulini uning aniqlash darajasi bo'yicha bir necha usullarga ajratadilar. Shulardan amaliyotda eng ko'p qo'llanadigani to'rtinchi darajali aniqlikdagi Runge – Kutta usulidir.

Birinchi tartibli differensial tenglama $y' = f(x, y)$ uchun $x = x_i$ $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ni topish uchun quydagi ketma – ket xisoblash jarayonini amalga oshirmoq lozim bo'ladi :

$$K_1^{(i)} = hf_i(x_i, y_i)$$

$$K_2^{(i)} = hf_i(x_i + h/2, y_i + K_1^{(i)}/2)$$

$$K_3^{(i)} = hf_i(x_i + h/2, y_i + K_2^{(i)}/2)$$

$$K_4^{(i)} = hf_i(x_i + h, y_i + K_3^{(i)})$$

$$\text{Funksiyaning ortirmasi } Dy_i = (1/6) * (K_1^{(i)} + 2 K_2^{(i)} + 2 K_3^{(i)} + K_4^{(i)})$$

Bu yerda $h = (b-a)/n$ – integrallash qadami. Tenglamaning yechimi qidirilayotgan kesma $[a, b]$, $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) nuqtalar bilan bir – biriga teng n ta bo'laklarga bo'lingan.

Natijada nomalum funktsiyaning qiymatlarini (tenglamaning yechimlarini) quydagi fo'rmuladan topamiz :

$$Y_{i+1} = y_i + dy_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

2.4 Runge – Kutta usuli bilan xisoblash algoritimi

Birinchi tartibli oddiy differensial tenglamaning sonli yechimlarini Runge – Kutta usuli bilan xisoblash uchun quydagi algaritimdan foydalanamiz :

- 1 Tenglama yechimini sonli usul bilan toppish, argumentlarning berilgan $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ ketma – ketligini va nomalum funksiyaning boshlang'ich qiymati y_0 uchun $y=F(x)$ funksiyanani aniqlamasdan, $y_1=F(x_i)$ ($i=1,2,\dots,n$) va $F(x_0)=y_0$ ni qanoatlantiruvchi $y_1, y_2, \dots, y_n$, larning topishdan iboratdir.
- 2 Natijada nomalum funksiyaning qiymatlarini (tenglamaning yechimlarini) quydagi fo'rmuladan topamiz :
 $Y_{i+1}=y_i+dy_i$ ($i=0,1,2,\dots,n$)

Agar $\lambda_1 = \lambda_2$ bo'lsa, unda ikki Y_1 va Y_2 xususiy yechimlarning o'rniga birgina Y_1 yechimni olamiz. Ushbu holda ikki xususiy yechim sifatida Y_1 va $x \cdot Y_1$ lar tanlanadi.

Agarda X_1 va X_2 sonlar haqiqiy sonlar bo'lmasa, u holda $\lambda_1 = \alpha + \beta \cdot i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta \cdot i$ - bu yerda $\beta \neq 0$. λ_1 va λ_2 kompleks xos qiymatlarga mos xos vektorlar quriladi. Xususiy $Y_1 = P_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x}$, $Y_2 = P_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}$ yechimlar ham o'zaro qo'shma kompleks bo'ladi. Haqiqiy yechimlarni olish uchun Y_1 va Y_2 larning chiziqli kombinatsiyasini quyidagi ko'rinishda

$$Y_{10} = Y_1 + Y_2,$$

$$Y_{20} = (1/2i)(Y_1 - Y_2)$$

quramiz.

ILOVA 2

Runge - Kutta usuli bilan taqribiy yechishning TURBO PASKAL algoritmik tilida yechilish dasturi.

Program CCCR;

Uses crt;

Label 1;

Const a=0; b=1; n=10; y0=0.3;

Var h,x,y,y1,k1,k2,k3,k4,k:real;

Function F(x,y:real):real;

Begin

F:=sin(y)+x*y;

End;

Begin

h:=(b-a)/n;

x:=a; y:=y0;

1:k1:=h+F(x,y);

```
k2:=h*F(x+h/2, y+k1/2);  
k3:=h*F(x+h/2, y+k2/2);  
k4:=h*F(x+h, y+k3);  
k:=(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);  
y1:=y+k;  
writeln('y1=',y1:5:5);  
if x<b then begin  
y:=y1;  
x:=x+h; goto 1  
end;  
end.
```

Pascal ABC

Файл Правка Вид Программа Сервис Помощь



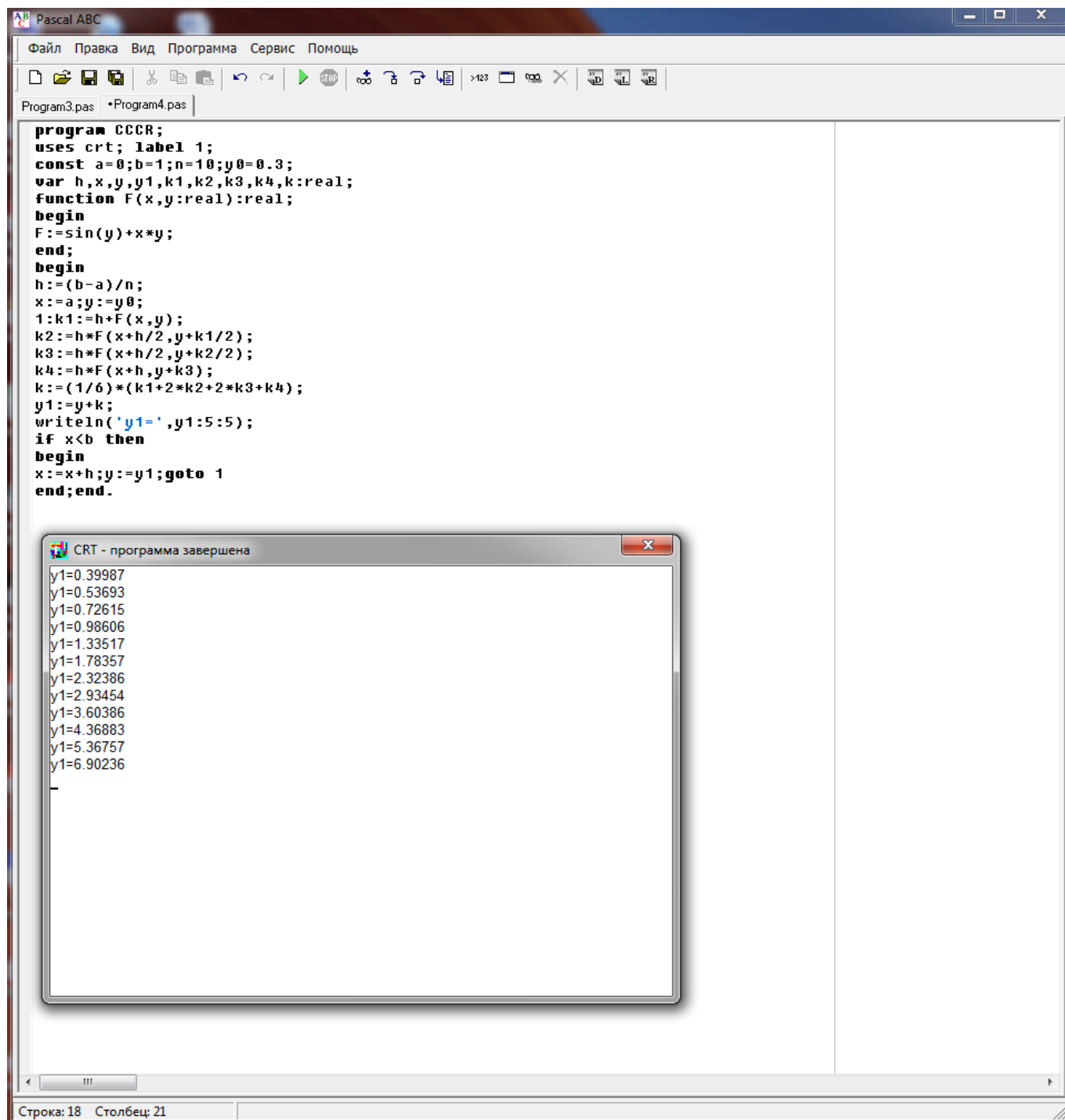
Program3.pas

```
program CCCR;  
uses crt;  
const a=0;b=1;n=10;y0=0.3;  
var h,x,y,y1,F:real;  
begin  
h:=(b-a)/n;  
x:=a;y:=y0;  
while x<=b do begin  
F:=sin(x)+x*y;  
y1:=y0+F*h;  
writeln('y1=',y1:5:5);  
x:=x+h;  
y:=y1;  
end;end.
```

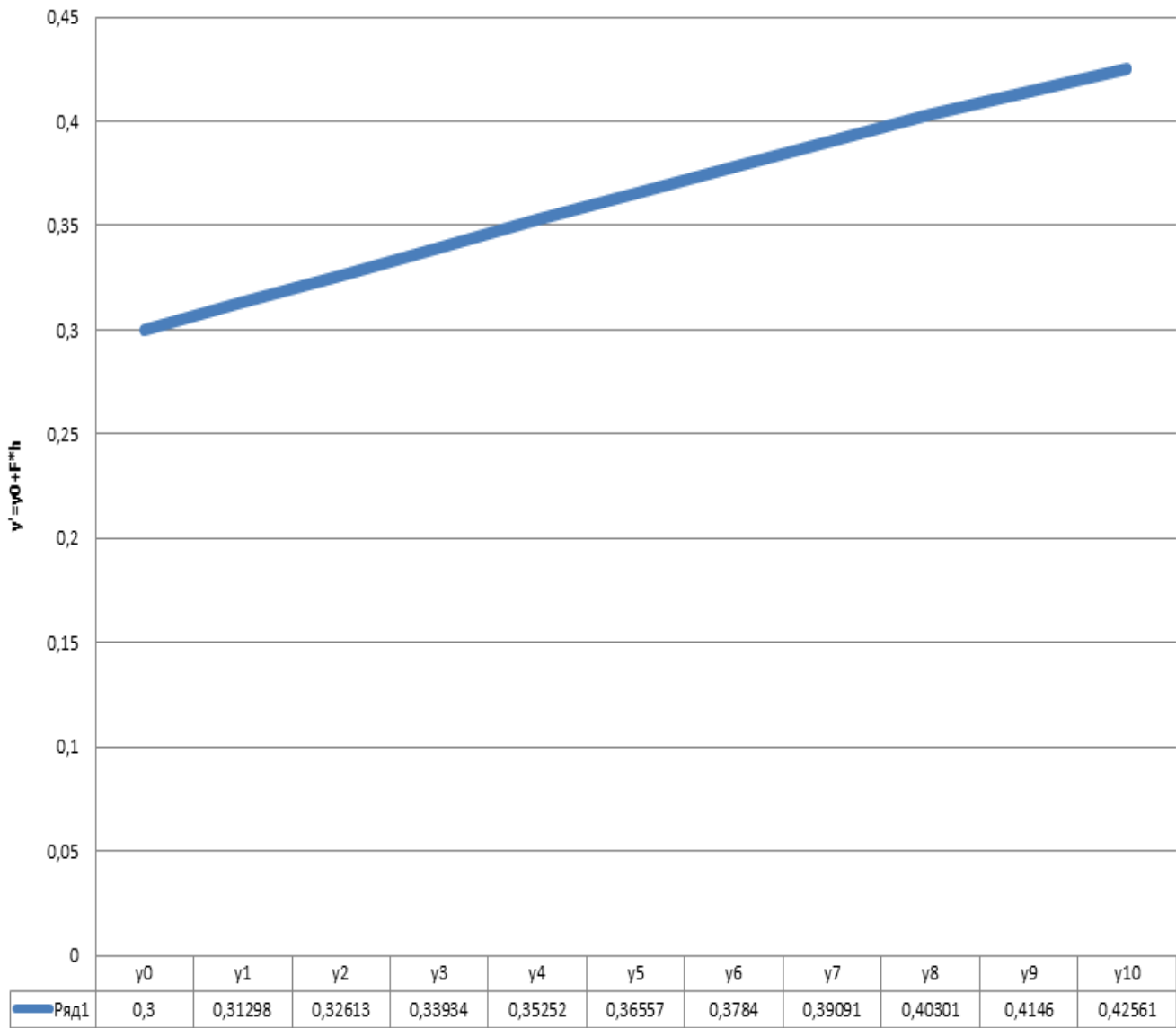
CRT - программа завершена

```
y1=0.30000  
y1=0.31298  
y1=0.32613  
y1=0.33934  
y1=0.35252  
y1=0.36557  
y1=0.37840  
y1=0.39091  
y1=0.40301  
y1=0.41460  
y1=0.42561
```

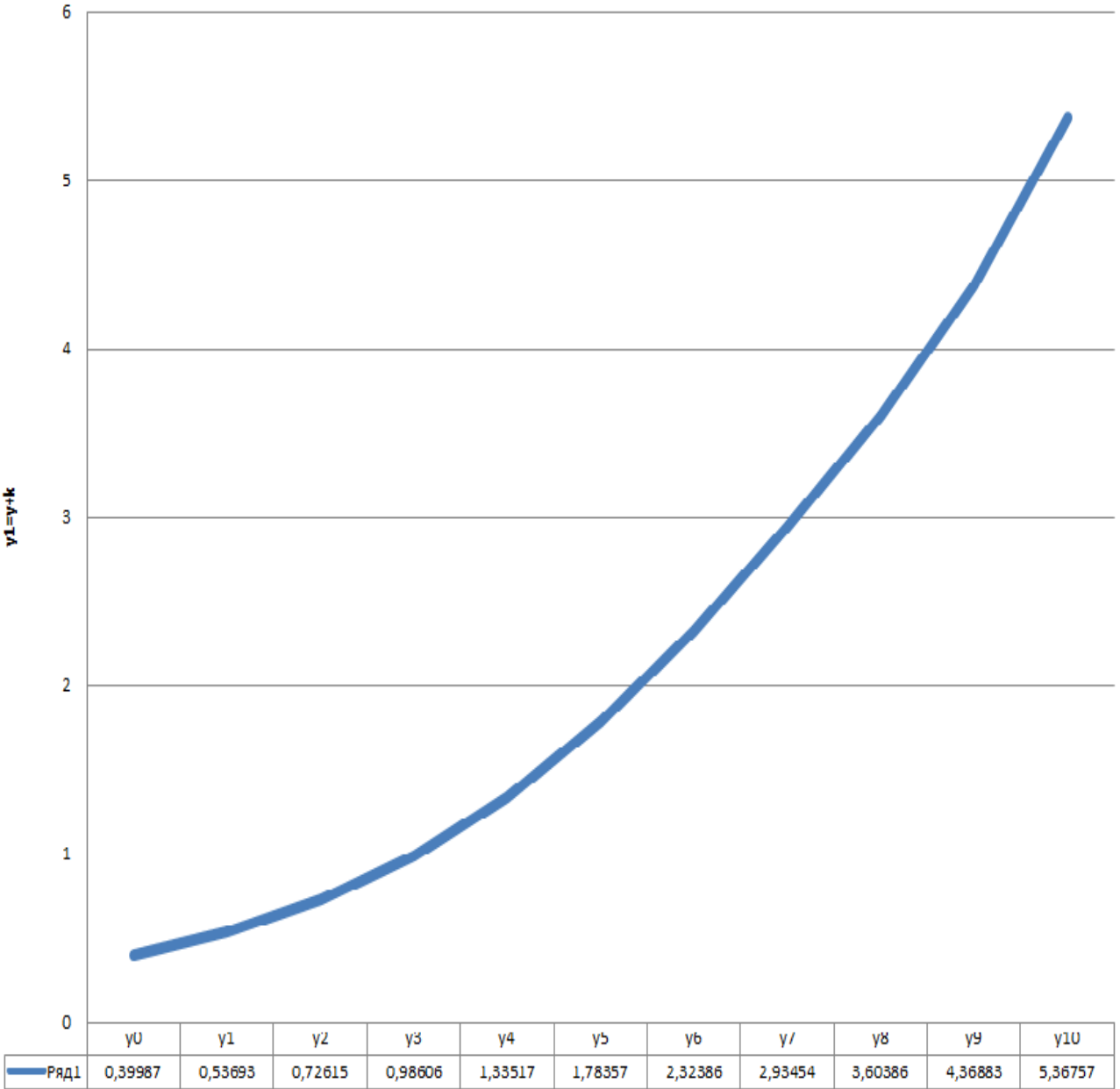
строка: 11 Столбец: 21



Eyler



Runge - Kutta



Xulosa

. Informatika darslarida pedagogic texnologiyalar asosida dars o'tish, sifat va samaradorlikka erishishni ta'minlaydi. O'quvchilar avvalgi darslarda olgan bilim, ko'nikma va malakalarini yetarlicha mustahkamlaydi.

Talabalar tўgarakda va baхs кечасида республикамиз олимлари, инженер-техниклари эришган ва қўлга киритган ютуқлари билан танишади.

Biz kurs loyixa tayorlashda avvalom bor differsial tengalama nima ekanligin va nima uchun ishlatilishi tushunib yettik. Informatika orqali dastur tuzish o'rgandik. ***Ta'lim va tarbiya uzviylikda olib boriladi.*** Bu qadimdan ota –bobolarimiz davridan ham anglab yetilgan haqiqat. “Ta’limdan oldin-tarbiya”. Buning mohiyati shundaki , tarbiyalab ta’lim berishimiz kerak. Ta’limda tarbiyaning ahamiyati, noan’anaviy darslarda o’yinlardan foydalansh.

Milliy qadriyatlarimizga sodiq qolgan holda ota-bobolarimiz foydalangan, o’ynagan o’yinlardan foydalanishimiz mumkin. Darsning har bir mavzusini hayotga, atrof olamga, atrof muhitga, tarixga bog’lab o’tish tarbiyaning asosiy omilidir. Tarbiyaning inson hayotidagi o’rni xaqida A.Avloniyning misollarida yaqqol namoyon bo’lgan.

interfaol usullardan har bir darsda qo’llashimiz mumkin. Bu usulda o’quvchilar mustaqil fikrlashga, ishlashga, guruhlarda o’z o’rnini topishga o’rganadilar.

