

**O'zbekiston Respublikasi SSV
Toshkent Farmasevtika instituti
Farmatsiya fakulteti
Farmatsiya yo'nalishi 1/2 guruh**

Mustaqil ish



Bajardi: Sharopov Doston

Tekshirdi: Sunnatova Dilfuza

Toshkent 2014

Reja:

- 1. Funksiyaning limiti**
- 2. Funksiya limitining asosiy xossalari**
- 3. Birinchi va ikkinchi ajoyib limitlar**

Funksiyaning limiti

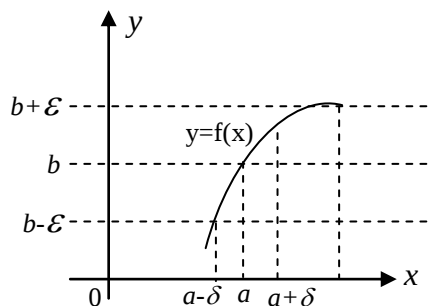
9.3.1-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya a quyuqlik (limitik) nuqtasiga ega bo'lgan D sohada aniqlangan (a ning o'zida shart emas) va biror b son mavjud bo'lib, $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday musbat δ son topilsaki, $0 < |x - a| < \delta$ munosabatni qanoatlantiruvchi $\forall x \in D$ uchun $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b son $f(x)$ funksiyaning $x \rightarrow a$ dagi (yoki a nuqtadagi) limiti deyiladi va

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad (9.3.1)$$

ko'rinishda yoziladi.

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, (9.3.1) mavjud bo'lsa, $\forall \varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta(\varepsilon) > 0$ topiladiki, x argument a nuqtaning δ -yaqin atrofidan D ga tegishli qiymat olganda funksiya qiymatlari b nuqtaning ε atrofida bo'ladi.

Boshqacha aytganda, bu atrofda funksiya grafigi 2ε bo'lgan o'qi $y=b$ to'g'ri chiziqdan iborat yo'l ichida yotadi (9.3.1- rasm).



9.3.1-rasm.

Misol tariqasida $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 1) = 1$

ekanligini ko'rsataylik. Bu yerda

$f(x) = 2x^2 - 1$ ning aniqlanish sohasi R dir.

$\forall \varepsilon > 0$ ni olaylik,

$$|(2x^2 - 1) - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |2x^2 - 2| < \varepsilon \Rightarrow 2|x+1||x-1| < \varepsilon. \quad (9.3.2)$$

Bu yerda $x \rightarrow 1$, ya'ni $x=1$ nuqta yaqin atrofini qaralayotganligi sababli $x \in [0;1) \cup (1;2]$ desak bo'ladi. U vaqtda, agar

$$2 \cdot (2+1) \cdot |x-1| < \varepsilon \Rightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{6}$$

tengsizlik bajarilsa, (9.3.2) albatta bajariladi. Demak, $\delta = \min \left\{ 1; \frac{\varepsilon}{6} \right\}$ deb olsak,

$0 < |x-1| < \delta$ bo'lganda (9.3.2) bajariladi. Ya'ni $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 1) = 1$ ekanligi kelib chiqadi.

1-eslatma. Agar funksiyaning a nuqtadagi limiti ta'rifida $0 < |x-a| < \delta$ munosabat o'rnida $0 < x-a < \delta$ ($-\delta < x-a < 0$) ishlatilsa, funksiyaning a nuqtadagi o'ng (chap) limiti ta'rifini olamiz. $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi o'ng (chap) limiti uchun

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x), f(a+0) \left(\lim_{x \rightarrow a-0} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x), f(a-0) \right)$$

belgilashlar ishlatiladi.

Shuni ham aytyshimiz lozimki, funksiyaning a nuqtadagi chekli limiti mavjud bo'lishi uchun $f(a+0)$ va $f(a-0)$ chekli o'ng va chap limitlar mavjud hamda ular teng bo'lishi zarur va etarlidir:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a+0) = f(a-0).$$

2-eslatma. Agar $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ chekli limit mavjud bo'lsa, x argumentning x_0 ga yaqinlashuvchi va x_0 nuqtaning yaqin atrofidan olingan $f(x)$ funksiya aniqlangan $\{x_n\}$ ketma-ketligiga mos keluvchi $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\lim f(x_n) = b$$

ekanligi kelib chiqadi. Buning aksinchasi ham o'rinlidir, ya'ni x_0 nuqtaning yaqin atrofidan olingan $f(x)$ aniqlangan va x_0 ga yaqinlashuvchi har qanday $\{x_n\}$ ketma-ketliklar uchun $\{f(x_n)\}$ ketma-ketliklarning barchasi yaqinlashuvchi bo'lsa, ular bitta b limitga ega, ya'ni $\lim f(x_n) = b$ tenglik o'rinli bo'lib, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi chekli limiti mavjud va

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$$

bo'ladi.

9.3.2-ta'rif. Agar a son $f(x)$ funksiya aniqlanish sohasi bo'lgan D to'plamning limitik nuqtasi bo'lib, $\forall \varepsilon > 0$ olinganda shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$ munosabatlarni qanoatlantiruvchi D ga tegishli barcha x'' , x' nuqtalar uchun $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada *Koshi shartini* qanoatlantiradi deyiladi.

Bu ta'rif funksiya uchun *Koshi mezonidir*.

9.3.1-teorema. $f(x)$ funksiya chekli a nuqtada chekli limitga ega bo'lishi uchun shu nuqtada Koshi shartini qanoatlantirishi zarur va etarlidir.

Isbot. Zarurligi. Agar $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ chekli limit mavjud bo'lsa, funksiya limitining ta'rifiga ko'ra, $\forall \varepsilon > 0$ berilganda shunday $\delta > 0$ topiladiki, $0 < |x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $\forall x \in D$ nuqtalar uchun $|f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik bajariladi. U vaqtda, $0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$ munosabatlarni qanoatlantiruvchi D ga tegishli $\forall x''$, x' nuqtalarni olsak,

$$|f(x'') - f(x')| \leq |f(x'') - b| + |b - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

kelib chiqadi.

Yetarliligi. $f(x)$ funksiya a nuqtada Koshi shartini qanoatlantirsin. D to'plamdan a ga yaqinlashuvchi biror $\{x_n\}$ ketma-ketlikni olaylik, u vaqtda $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik Koshi shartini (mezonini) qanoatlantirib, uning chekli limiti mavjuddir. $\lim f(x_n) = b$ deb faraz qilsak, $\forall \varepsilon > 0$ bo'lganda shunday $n_0 \in N$ va $\delta > 0$ son topiladiki, $\forall x, x_n \in D, n_0 < n \in N, 0 < |x - a| < \delta, 0 < |x_n - a| < \delta$ munosabatlar bajarilganda $|f(x_n) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|f(x_n) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ o'rinli bo'lib,

$$|f(x) - b| \leq |f(x_n) - b| + |f(x_n) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

kelib chiqadi. Bu $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ bo'lishini ko'rsatadi. Teorema to'liq isbotlandi.

9.3.3-ta'rif (Argument cheksizga intilgandagi funksiya limiti). Agar $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasida absolut qiymati jixatidan ixtiyoriy musbat sondan ham katta nuqtalar (sonlar) mavjud bo'lib, ixtiyoriy olingan musbat ε son uchun

shunday musbat M sonni topish mumkin bo'lsaki, argumentning $|x| > M$ munosabat o'rinli bo'ladigan funksiya aniqlanish sohasiga tegishli qiymatlarida

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, b son $f(x)$ funksiyasining $x \rightarrow \infty$ dagi limiti deyiladi va

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

ko'rinishda yoziladi.

Bu ta'rifda $|x| > M$ ni $x > M$ bilan almashtirilsa, funksiyaning $x \rightarrow +\infty$ dagi; agar $x < -M$ bilan almashtirilsa, $x \rightarrow -\infty$ dagi limitning ta'riflari kelib chiqadi. Mos ravishda quyidagi yozuvlar o'rinli:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \text{ yoki } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

Misol. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+3}{x} = 5$ ni isbot qiling.

Isbot. $f(x) = \frac{5x+3}{x}$, $b = 5$ va $f(x)$ funksiya $x \neq 0$ bo'lgan barcha nuqtalarda

aniqlangan. Ixtiyoriy musbat ε son olamiz va $f(x) - b$ ayirmaning absolut qiymatini qaraymiz:

$$|f(x) - b| = \left| \frac{5x+3}{x} - 5 \right| = \left| \frac{3}{x} \right| = \frac{3}{|x|}$$

Bu ayirma ε dan kichik bo'lishi, ya'ni

$$\left| \frac{5x+3}{x} - 5 \right| = \frac{3}{|x|} < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilishi uchun $|x| > \frac{3}{\varepsilon}$ bo'lishi yetarli.

Bundan limitning 9.3.3- ta'rifida ko'rsatilgan M son $M = \frac{3}{\varepsilon} > 0$ bo'lishini olamiz.

Shunday qilib, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+3}{x} = 5$ ekan.

Izoh. Agar D sonli to'plamning $\forall M > 0$ olinganda $|x| > M$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x elementi mavjud bo'lsa, ∞ uning quyuqlik (limitik) nuqtasi deb qabul qilinadi. Shuningdek, yuqoridagi $|x| > M$ o'rnida $x > M$, $(-x > M)$ tengsizlik ishlatilsa, $+\infty(-\infty)$ limitik nuqta tushunchasiga kelamiz.

3-eslatma. Agar 9.3.2-ta'rifda $a = \infty$ deb faraz qilinsa, $0 < |x' - a| < \delta \wedge 0 < |x'' - a| < \delta$ munosabatlar $|x'| > \delta \wedge |x''| > \delta$ larga almashadi.

9.4 Funksiya limitining asosiy xossalari

9.4.1-ta'rif. Agar x_0 $f(x)$ funksiya aniqlanish sohasining quyuqlik (limitik) nuqtasi bo'lib, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ bo'lsa, uni x_0 nuqtada *cheksiz kichik funksiya* yoki *cheksiz kichik miqdor* deyiladi.

9.4.2-ta'rif. Agar x_0 $\varphi(x)$ funksiya aniqlanish sohasining limitik nuqtasi bo'lib, ixtiyoriy olingan musbat M son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki,

argumentning $0 < |x - x_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi va funksiya aniqlanish sohasidan olingan barcha qiymatlarida

$$|\varphi(x)| > M$$

bajarilsa, u x_0 nuqtada *cheksiz katta funksiya (miqdor)* deyiladi va

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$$

ko'rinishda yoziladi. Bu holda *shartli ravishda funksiya cheksiz limitga ega* deb ham yuritiladi.

Xuddi yuqoridagidek, agar $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ bo'lsa, $f(x)$ $x \rightarrow \infty$ da *cheksiz kichik funksiya*; $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$ bo'lsa, $\varphi(x)$ $x \rightarrow \infty$ da *cheksiz katta funksiya* deb ataladi.

Bu yerda ham cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar orasida ketma-ketliklardagi kabi bog'lanish mavjud ekanligini, ya'ni birining teskari qiymati ikkinchisidan iborat bo'lishini aytamiz.

1-eslatma. $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty(\pm\infty)$,

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty(\pm\infty), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

yozuvlarning ma'nolari haqida fikrlab ko'rishni o'quvchining o'ziga tavsiya qilamiz.

Ketma-ketliklar uchun ko'rilgan limitning barcha xossalari bu yerda ham o'z kuchida qoladi. Ulardan ba'zilarini keltiramiz.

1⁰. Agar $f_i(x)$ ($i=1,2,\dots,n$) funksiyalar x_0 ning yetarlicha yaqin atrofida aniqlanish sohalari bir xil qismaniy to'plamga ega bo'lgan holda bu nuqtada ularning chekli limitlari mavjud bo'lsa,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{i=1}^n f_i(x) = \sum_{i=1}^n \lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \prod_{i=1}^n f_i(x) = \prod_{i=1}^n \lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x)$$

o'rinlidir.

2⁰. Agar $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ chekli limit mavjud va $b \neq 0$ bo'lsa, $x = x_0$ nuqtaning shunday yaqin atrofi mavjud bo'ladiki, argument qiymati undan va funksiya yaqinlanish sohasiga tegishli qilib olinganda $f(x)$ ning ishorasi b ning ishorasi bilan bir xil bo'ladi, xatto aytilgan yaqin atrofni toraytirish hisobiga $|f(x)| > \frac{|b|}{2}$ ni o'rinli qilish mumkin.

3⁰. Agar $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar x_0 nuqtaning yetarlicha yaqin atrofida bir xil qismaniy aniqlanish sohaga ega va bu nuqtada ularning chekli limitlari mavjud bo'lib, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \neq 0$ bo'lsa,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}$$

o'rinlidir.

4⁰. Agar $\varphi(x)$ funksiya x_0 nuqta yaqin atrofida aniqlangan bo'lib, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = z_0$ chekli limit mavjud va $f(z)$ funksiya z_0 nuqta yaqin atrofida aniqlangan bo'lib, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = b$ chekli limit mavjud bo'lsa, $f[\varphi(x)]$ murakkab funksiyaning x_0 nuqtadagi chekli limiti mavjud bo'lib, $\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = b$ o'rinli bo'ladi, ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = z_0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z).$$

2-eslatma. Keltirilgan bu xossalardagi shartlar faqat yetarli shartlar bo'lib, ular zaruriy emasdir. Masalan, $\chi(x)$ Dirixle funksiyasini olsak (8.4-va 8.5-bandlarga qarang), uning birorta ham nuqtada limiti mavjud emasligi ravshandir. Endi,

$$\bar{\chi}(x) = \begin{cases} 0, & x \in Q, \\ 1, & x \in J \end{cases}$$

funksiyani qarasak, u birorta nuqtada ham limitga ega bo'lmagan funksiyadir. Ammo,

$$\begin{aligned} \chi(x) + \bar{\chi}(x) &= 1, & \chi(x) \cdot \bar{\chi}(x) &= 0, \\ \chi[\bar{\chi}(x)] &= 1, & \bar{\chi}[\chi(x)] &= 0 \end{aligned}$$

funksiyalar o'zgarishlardan iborat bo'lib, ular ixtiyoriy x_0 nuqtada chekli limiti mavjuddir.

5⁰. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning limitlari (chekli yoki cheksiz) ma'lum bo'lsa, u vaqtda yettita shartli

$$\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; 0 \cdot \infty; \infty - \infty; 0^0; \infty^0; 1^\infty \quad (9.4.1)$$

simvollar bilan tavsiflanadiganlardan boshqa hamma hollarda

$$f(x) \pm g(x); \quad f(x) \cdot g(x); \quad \frac{f(x)}{g(x)}; [f(x)]^{g(x)} \quad (9.4.2)$$

ifodalarning limitlarini hisoblashda yuqorida keltirilgan funksiya limitining xossaligidan foydalanish mumkin. Bu (9.4.1) yettita simvollar bilan tavsiflangan hollarda esa (9.4.2) ifodalar *aniqmasliklarni* bildiradi. Bunday aniqmasliklarni ochish uchun $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning limitlarini bilishning o'zi yetarli bo'lmay, bu funksiyalarning o'zgarish qonunlarini ham hisobga olishga to'g'ri keladi.

Misolalar:

1) $\lim_{x \rightarrow 2} x^3$ topilsin.

Ko'paytmaning limiti haqidagi xossani qo'llasak:

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = \lim_{x \rightarrow 2} (x \cdot x \cdot x) = \lim_{x \rightarrow 2} x \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.$$

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$ topilsin.

Bu yerda maxrajning limiti nolga teng bo'lgani uchun bo'linmaning limiti haqidagi xossani qo'llab bo'lmaydi.

Bundan tashqari, kasr suratining limiti ham nolga teng bo'lgani uchun berilgan ifoda $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslikdir. Bu limit ostidagi kasrning surati

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

bo'lgani uchun, $x \rightarrow 2$ da $x - 2 \neq 0$ ekanligini e'tiborga olib,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-3) = -1$$

ga ega bo‘lamiz.

6⁰. Biror $(a; b)$ oraliqda aniqlangan va monoton (keng manoda bo‘lishi ham mumkin) funksiya uchun $f(b-0)$ – chekli yoki $\pm\infty$; $f(a+0)$ – chekli yoki $\mp\infty$ limitlar (∞ oldidagi yuqori ishora funksiya kamaymovchi, quyi ishora esa o‘smovchi bo‘lgan holga to‘g‘ri keladi); undan tashqari, $\forall x_0 \in (a; b)$ uchun $f(x_0+0)$ va $f(x_0-0)$ chekli limitlar mavjud hamda $f(x_0-0) \leq f(x_0) \leq f(x_0+0)$ ($f(x_0-0) \geq f(x_0) \geq f(x_0+0)$) o‘rinlidir.

Bularning isboti monoton ketma-ketlikning chekli yoki cheksiz limitining mavjudligidan kelib chiqadi.

9.5. Birinchi va ikkinchi ajoyib limitlar

Matematik analizda muhim ahamiyatga ega bo‘lgan va *ajoyib (muhim) limitlar* deb ataluvchi ikkita limitni keltiramiz.

9.5.1. Birinchi ajoyib limit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (9.5.1)$$

bo‘lishini ko‘rsataylik. Buning uchun $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiya 0 nuqtada aniqlanmagan, ammo, uning yaqin atrofida mavjud va juft funksiyadir. Demak, $x > 0$ holni qarash yetarlidir. Undan tashqari, $x \rightarrow 0$ ekanligidan $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ deb olsak bo‘ladi.

Dastlab, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ ekanligini isbotlaylik. Buning uchun birlik doira olib (9.5.1-rasm), x markaziy burchak $(0; \frac{\pi}{2})$ oraliqda bo‘lsin deylik. U vaqtda AB yoy uzunligi radianlarda ifodalangan x markaziy burchak o‘lchoviga tengdir. 9.5.1- rasmdan ko‘rinadiki, BD kesma $\sin x$ ga, AC esa $\tan x$ ga teng bo‘lib, $0 < BD < AB < AC$ o‘rinlidir. Bundan

$$0 < \sin x < x$$

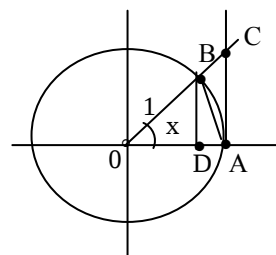
kelib chiqadi. Bu tengsizliklardan va limitning mavjudligi haqidagi ikkinchi teoremdan $\lim_{x \rightarrow +0} \sin x = 0$ ni olamiz. Funksiyaning toqlik xossasiga ko‘ra $\lim_{x \rightarrow -0} \sin x = 0$ va olinganlar asosida $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ ga ega bo‘lamiz.

Endi,

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

ekanligini e‘tiborga olsak,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - 2 \cdot \sin^2 \frac{x}{2} \right) = 1 - 2 \cdot 0^2 = 1$$



9.5.1- rasm

kelib chiqadi.

9.5.1- rasmdan $\triangle OAB$, $\triangle OAC$ va OAB sektor yuzlari uchun

$$S_{\triangle OAB} < S_{\text{sektor } OAB} < S_{\triangle OAC}$$

o'rinli ekanligini ko'ramiz.

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \sin x = \frac{1}{2} \sin x, \quad S_{\text{sektor } OAB} = \frac{1}{2} OA^2 x = \frac{1}{2} x, \quad S_{\triangle OAC} = \frac{1}{2} OA \cdot AC = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x.$$

Yuqoridagi tengsizliklarda bularni va $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ni hisobga olsak,

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

ni, bundan

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

ni olamiz va, nihoyat,

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

ga ega bo'lamiz. Oxirgida $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ ni hisobga olib $x \rightarrow +0$ dagi limitga o'tsak,

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

kelib chiqadi. Funksiyaning juftligidan

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ekanligi ham kelib chiqadi. Bulardan *birinchi ajoyib limit* deb ataluvchi (9.5.1) ning o'rinli ekanligiga kelamiz.

Misollar.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(k \cdot \frac{\sin kx}{kx} \right) = k \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx} = k \cdot 1 = k;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = \frac{1}{1} \cdot 1 = 1.$$

9.5.2. Ikkinchi ajoyib limit

Avvalo, $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$ ketma-ketlikning limiti mavjud ekanligini isbotlaymiz.

Umumiy hadlari mos ravishda $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ va $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ bo'lgan $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$

ketma-ketliklarni olsak, ular orasida $y_n = x_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ bog'lanish bordir.

Endi, $\{y_n\}$ ketma-ketlikni tekshiramiz.

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > 1^{n+1} = 1$$

ekanligi ravshandir. Demak, $\{y_n\}$ quyidan chegaralangan ketma-ketlik ekan. Bu ketma-ketlikning kamayuvchi ekanligini ko'rsatishda tubandagi tasdiq qo'l keladi.

Lemma (Bernulli). $m \in N$ va $\alpha > -1$ bo'lganda $(1+\alpha)^m \geq 1+m\alpha$ tengsizlik o'rinaldir.

Isbot. Matematik induksiya uslubidan foydalanamiz:

1) $m=1 \Rightarrow (1+\alpha)^1 = 1+\alpha$ o'rinli;

2) $m=k$ uchun $(1+\alpha)^k \geq 1+k\alpha$ tengsizlik o'rinli deb faraz qilaylik;

3) U holda, $1+\alpha > 0$ ni hisobga olsak,

$$\begin{aligned}(1+\alpha)^{k+1} &= (1+\alpha)^k \cdot (1+\alpha) \geq (1+k\alpha)(1+\alpha) = 1+\alpha+k\alpha+k\alpha^2 = \\ &= 1+(k+1)\alpha+k\alpha^2 \geq 1+(k+1)\alpha,\end{aligned}$$

ya'ni $m=k+1$ uchun ham tengsizlik o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Lemma isbotlandi.

Eslatma. Agar $m > 1$ va $\alpha \neq 0, \alpha > -1$ bo'lsa, $(1+\alpha)^m > 1+m\alpha$ o'rinli bo'ladi.

Endi, $\frac{y_n}{y_{n+1}}$ nisbatni olsak,

$$\begin{aligned}\frac{y_n}{y_{n+1}} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n+1}}\right)^{n+2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n+1}{n} = \\ &= \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} > \left(1+\frac{n+2}{n(n+2)}\right) \cdot \frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1,\end{aligned}$$

ya'ni $\frac{y_n}{y_{n+1}} > 1 \Rightarrow y_n > y_{n+1}$. Bundan $\{y_n\}$ kamayuvchi ketma-ketlik ekanligi kelib chiqadi.

Demak, $\{y_n\}$ kamayuvchi quyidan chegaralangan ketma-ketlik sifatida, limitning mavjudligi haqidagi birinchi teoremaga asosan, chekli limitga egadir.

Endi,

$$x_n = \frac{y_n}{1+\frac{1}{n}}$$

ekanligidan

$$\lim x_n = \frac{\lim y_n}{\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{\lim y_n}{1} = \lim y_n,$$

ya'ni $\{x_n\}$ ketma-ketlik ham $\{y_n\}$ limitiga teng limitga ega ekanligi kelib chiqadi, uni e bilan belgilanadi va e soni deb ataladi.

Demak, e soni, uning ta'rifi bo'yicha,

$$e = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

dan iboratdir. Bu son irratsional, (2;3) oraliqga tegishli bo'lib,

$$e=2,7182818284459045\dots$$

Matematik analizda,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}} = e \quad \text{yoki} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

ikkinchi ajoyib (muhim) limit deb yuritiladi.

Yuqoridagi munosabatlar biridan ikkinchisi cheksiz katta miqdorning teskari qiymati cheksiz kichik ekanligidan bevosita kelib chiqadi.

Endi,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

ekanligini isbotlaylik. Buning uchun, avvalo, $x \rightarrow +\infty$ bo'lgan holni qaraymiz. Bu holda, $x > 1$ desak, har bir bunday x uchun shunday n natural son topiladiki,

$$n \leq x < n+1$$

o'rinli bo'ladi. Oxirgidan

$$1 < 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

ni olamiz. Bundan esa,

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

kelib chiqadi.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = \frac{e}{1} = e,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e$$

ekanligidan va $n \rightarrow +\infty \Leftrightarrow x \rightarrow +\infty$ bo'lishini hisobga olsak, limitning mavjudligi haqidagi ikkinchi teoremaga asosan,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

kelib chiqadi.

Endi, $x \rightarrow -\infty$ bo'lgan holni qarasak va $x = -y$ almashtirish qilsak, quyidagilarni olamiz:

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty \Rightarrow (y-1) \rightarrow +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y = \lim_{y-1 \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)\right] = e \cdot 1 = e \end{aligned}$$

Shunday qilib, ikkinchi ajoyib limit isbotlandi.

Misol. Ushbu $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{m}{x}\right)^x = e^m$, $m \in \mathbb{N}$ limitning to'g'riligini ko'rsating.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{m}{x}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{m}{x}\right)^{\frac{x}{m} \cdot m} = \lim_{\frac{1}{m}x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{m}{x}\right)^{\frac{x}{m}}\right]^m = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^m = e^m \quad \left(\frac{m}{x} = \alpha; x \rightarrow \infty \Rightarrow \alpha \rightarrow 0\right).\end{aligned}$$

Eslatma. Matematik analizda asosi e sonidan iborat bo‘lgan ko‘rsatkichli va logarifmik funksiyalar aloxida ahamiyatga egadir. Masalan, e asosli logarifmlar maxsus

$$\log_e a = \ln a$$

belgilashga ega bo‘lib, uni *natural logarifm* deb yuritiladi.

Adabiyot

1. Т. Жшраев ва бошыалар. Олий математика асослари. Т. «Шзбекистон», 1995 й. I ыисм.
2. Ё. У. Соатов. Олий математика. Т. «Шыитувчи», 1994 й. I ыисм.
3. Я. С. Бугров, С. М. Никольский. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М. «Наука», 1990 г.
4. А.Г. Курош. Курс высшей алгебры. М. «Наука». 1971 г.
5. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1984 г.
6. Фихтенголрц Г.М. Дифференциал ва интеграл ыисоб курси. I том. Т. 1951 й.
7. Уваренков И.М., Малер М.З. Курс математического анализа. I том. М. 1966 г.
8. Фролов С.В., Шостак Р.Я. Курс высшей математике. I том. М. 1973 г.
9. Л.С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., «Наука», 1970г.
10. Ы. Бойышзиев. Дифференциал тенгламалар. Т. «Шыитувчи» 1983й.
11. Н.С Пискунов дифференциальные и интегральное исчисление для ВТУЗ ов. М. Наука, в 2 х частях, 1985 г.