МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ТАШКЕНТСКИЙ АВТОМОБИЛЬНО ДОРОЖНЫЙ ИНСТИТУТ

Кафедра: *Высшая математика*

Тема: *Кривые второго порядка*

Реферат

Выполнил: *Студент группы 463-13* ***Ахмаджонов М.З***

Принял*:* *Старший препадаватель*. **Сайдалиев.З**

Ташкент – 2014

Кривые второго порядка.

Содержание:

Понятие линии определилось в сознании человека в доисторические времена. Наблюдения за изгибами берега реки, траекторией брошенного камня, очертаниями листьев растений и цветов послужили основой для постепенного установления понятия кривой. Однако потребовалось очень много времени, прежде чем люди начали сравнивать между собой различные линии и отличать одну кривую от другой. Лишь в XVIIв. появилось абстрактное понятие линии, начались исследования свойств кривых.

Кривая (линия) - след, оставленный движущейся точкой или телом. Обычно кривую представляют лишь как плавно изгибающуюся линию, вроде параболы или окружности. Но математическое понятие кривой охватывает и прямую, и фигуры, составленные из отрезков прямых, например, треугольник или квадрат.

В школьном курсе математики в качестве кривых рассматриваются графики функций. В новых стандартах по математике профильного уровня обучения предусматривается изучение параболы, эллипса, гиперболы.

Некоторые понятия кривых встречаются нам в нашей повседневной жизни, хотя чаще всего мы этого не замечаем. Например, по круговой траектории движутся люди при катании на колесе обозрения, карусели, по гиперболе движутся альфа-частицы в опыте Резерфорда при рассеивании их ядром атома; по эллипсам движутся планеты вокруг Солнца, по параболе - тело в однородном поле силы тяжести, брошенное под углом к горизонту.

Знакомство с кривыми, изучение их свойств позволит расширить геометрические представления, углубить знания, повысить интерес к геометрии;

создаст содержательную основу для дальнейшего изучения математики, физики и других наук.

Все вышесказанное подчеркивает актуальность выбранной темы дипломной работы.

Целью является изучение теории замечательных кривых.

Объектом исследования явились замечательные кривые, а также задачи, связанные с ними.

Предметом исследования является изучение теории замечательных кривых.

Цель исследования обусловила выбор следующих частных задач:

1. отобрать теоретический материал по теме дипломной работы;
2. обобщить и систематизировать материал;

. рассмотреть основные типы задач и их решение.

Структура дипломной работы следующая. Первая глава содержит теоретический материал по теории кривых. Здесь рассматриваются такие кривые, как окружность, эллипс, гипербола, парабола, а также кривые, наиболее часто встречающиеся в математическом анализе: Анъези локон, Декартов лист, Бернулли лемниската, кардиоида, цепная линия, астроида, циклоида.

Вторая часть дипломной работы представлена в виде рабочей тетради. Данная тетрадь разработана для студентов I и II-го курсов. В ней предлагаются задания по степени возрастания сложности по данной теме.

При работе над дипломной работой использовались в качестве основных источников учебники Агапова П.Е., Далингера В.А., Ильина В. А., Позняка Г., Привалова И.И., Шипачева В.С.

Замечательные кривые

Кривые второго порядка. Общее уравнение кривой второго порядка.

Важной задачей аналитической геометрии является исследование общего уравнения линии второго порядка и приведение его к простейшим (каноническим) формам.

Определение: Кривой второго порядка называется множество точек $M(x;y)$ на плоскости XOY, координаты которых удовлетворяют следующему общему уравнению кривой второго порядка:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \quad (1)$$

где коэффициенты A, 2B, C, 2D, 2E и F - любые числа и, кроме того, числа A, B и C не равны нулю одновременно, т.е. $A^2+B^2+C^2\neq 0$. (Шипачев В.С.)

Уравнения окружности, эллипса, гиперболы и параболы являются частными случаями уравнения (1). (Привалов И.И.)

Теорема 1. Пусть в прямоугольной системе координат задано общее уравнение кривой второго порядка $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$. Тогда существует такая прямоугольная система координат, в которой это уравнение принимает один из следующих девяти канонических видов:

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (Эллипс);
2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ (Мнимый эллипс);
3) $a^2x^2+c^2y^2=0$ (Пара мнимых пересекающихся прямых);
4) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (Гипербола);
5) $a^2x^2-c^2y^2=0$ (Пара пересекающихся прямых);
6) $y^2=2px$ (Парабола);
7) $y^2-a^2=0$ (Пара параллельных прямых);
8) $y^2+a^2=0$ (Пара мнимых параллельных прямых):
9) $y^2=0$ (Пара совпавших прямых).

п.1. Окружность

Окружность - замкнутая плоская кривая, все точки которой одинаково удалены от данной точки (центра). Окружность (рис.1) с центром в точке $C(a,b)$ и радиусом R имеет уравнение в прямоугольных координатах:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \quad (2)$$

Раскрывая скобки, придадим уравнению (2) вид:

$$x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-R^2)=0, \quad (2')$$

или $x^2+y^2+Dx-Ey+F=0,$ (2'')
где положено $D=-2a,\ E=-2b,\ F=a^2+b^2-R^2.$

Уравнение (2") является уравнением второй степени. Итак, окружность имеет уравнение второй степени относительно текущих координат. Но, очевидно не всякое уравнение второй степени определяет окружность. Действительно, из уравнения (2") усматриваем, что в уравнении окружности коэффициенты при квадратах координат равны, а член с произведением координат (xy) отсутствует.

Обратно, если эти два условия (равенство коэффициентов при x^2 и y^2 и отсутствие члена xy) осуществлены, то уравнение, вообще говоря, определяет окружность, так как оно приводится к виду (2") путем деления на коэффициент при x^2. (Привалов И.И)

Итак, по виду данного уравнения второй степени мы можем решить, является ли оно уравнением окружности или нет. Например, уравнение $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ определяет окружность, так как в нем коэффициенты при квадратах координат равны между собой, а член с произведением отсутствует. Желая построить эту окружность, мы должны предварительно определить координаты ее центра и радиус. С этой целью данное уравнение мы приведем к виду (2). Такое представление есть не что иное, как представление уравнения (2") в виде (2). Возьмем в данном уравнении члены, содержащие x, т.е. $x^2-2x,$ и представим этот двучлен в виде:

$$x^2-2x=(x-1)^2-1,$$

т.е. выделим из членов, содержащих x, полный квадрат линейного двучлена $(x-1)$. Далее возьмем члены, содержащие y, т.е. $y^2+4y.$ И, преобразуя, этот двучлен таким же образом, получим:

$$y^2+4y=(y+2)^2-4.$$

После этого данное уравнение запишется так:

$$(x-1)^2-1+(y+2)^2-4-4=0.$$

Перенося свободные члены вправо, будем иметь: $(x-1)^2+(y+2)^2=9.$

Сравнивая это уравнение с уравнением окружности (2), усматриваем, что $a=1$, $b=-2,$ $R=3.$ Таким образом, центром окружности является точка $(1;-2)$ и радиус окружности равен 3. По этим данным можно построить окружность.

Параметрические уравнения окружности: $\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \end{cases}$

Уравнение окружности в полярных координатах: $r = 2a\cos\varphi.$

Отметим, что движение по окружности часто встречается в физике и технике, по круговой траектории движутся люди при катании на колесе обозрения, карусели, по круговым орбитам могут двигаться искусственные спутники Земли. Хорошо известна планетарная модель атома водорода по Резерфорду. В центре атома находится ядро, а электрон вращается вокруг него. (Энц. словарь юного математика)

п.2. Эллипс

Название "Эллипс" ввёл Аполлоний Пергский, рассматривая эллипс как одно из конических сечений. Эллипс (греч. elleipsis - недостаток) - линия пересечения прямого кругового конуса плоскостью, не проходящей через вершину конуса и пересекающей все прямолинейные образующие одной полости этого конуса.

Определение: Эллипсом называется геометрическое место точек, для которых сумма расстояний от двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина; требуется, чтобы эта постоянная была больше расстояния между фокусами. Фокусы эллипса принято обозначать через F1 и F2. (Шипачев В.С.)

Пусть M - произвольная точка эллипса (рис 2.) с фокусами F1 и F2. Отрезки F1M и F2M (так же как и длины этих отрезков) называются фокальными радиусами точки M. Постоянную сумму фокальных радиусов точки эллипса принято обозначать через 2a. Таким образом, для любой точки M эллипса имеем:

M + F2M = const=2a> F1 F2 (3)

Данное неравенство необходимо: оно означает, что сумма двух сторон Δ F1 F2 M больше третьей. Если точки F1 и F2 сливаются, то условие (3) сводится к тому, что FM= const; точки с этим условием образуют окружность. Она считается частным (иногда вырожденным) случаем эллипса. (Александров А.Д.)

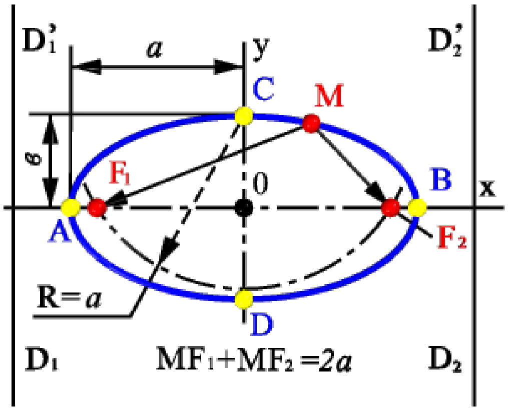


Рис.2.

Середина 0 отрезка F1F2 (фокусного расстояния) называется центром эллипса. Расстояние F1 и F2 между фокусами обозначают через 2c.

Вывод канонического уравнения эллипса

Пусть дан какой-нибудь эллипс с фокусами F1, F2. (рис.3).

Возьмем на плоскости произвольную точку M и обозначим ее координаты через x и y. Обозначим, далее, через r1 и r2 расстояния от точки M до фокусов (r1 = F1M, r2 = F2M).

Точка М будет находиться на данном эллипсе в том и только в том случае, когда

r1 + r2 = 2a. (4)

Чтобы получить искомое уравнение, нужно в равенстве заменить переменные r1 и r2 их выражениями через координаты x, y.

Заметим, что, так как F1 F2 = 2c и так как фокусы F1 и F2 расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат, то они имеют соответственно координаты (-c; 0) и (+c; 0); учитывая это и применяя формулу расстояния между двумя точками, находим

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad (5)$$

Заменяя r1 и r2, получаем:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad (6)$$

Это и есть уравнение рассматриваемого эллипса, так как ему удовлетворяют координаты точки М (x; y), когда точка М лежит на этом эллипсе. Возведём обе части равенства в квадрат, получим:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$

или

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx. \quad (7)$$

Возводя в квадрат обе части последнего равенства, найдем:

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,$$

Откуда

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \quad (8)$$

Здесь мы введем в рассмотрение новую величину

$b = \sqrt{a^2 - c^2}$; (9)

Так как по условию a>c, следовательно, $a^2 - c^2 \rangle 0$ и величина b- положительное число. Из равенства (8) имеем

$b^2 = a^2 - c^2$,

тогда уравнение (8) можно переписать в виде
$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

Разделив обе части этого равенства на a2b2, окончательно получим

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. (10)

Это уравнение называется каноническим уравнением эллипса, где a и b - длины большой и малой полуосей эллипса. При a = b фокусы F1 и F2 совпадают, и указанное уравнение определяет окружность, которая рассматривается как частный случай эллипса. Уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, определяющее эллипс в некоторой системе декартовых прямоугольных координат, есть уравнение второй степени; таким образом, эллипс есть линия второго порядка.

Эксцентриситет эллипса

Определение: Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами этого эллипса к длине его большой оси (Шипачев); обозначив эксцентриситет буквой ε, получаем:

$\varepsilon = \frac{c}{a}$.

Так как c<a, то ε<1, т. е. эксцентриситет каждого эллипса меньше единицы. Заметим, что $c^2 = a^2 - b^2$; поэтому

$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2$;

отсюда

$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$ и $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$

Следовательно, эксцентриситет определяется отношением осей эллипса, а отношение осей, в свою очередь, определяется эксцентриситетом. Таким образом, эксцентриситет характеризует форму эллипса. Чем ближе эксцентриситет к единице, тем меньше 1- ε2, тем меньше, следовательно, отношение $\frac{b}{a}$; значит, чем больше эксцентриситет, тем более эллипс вытянут вдоль большей оси.(Агапов П.Е.) В случае b=a, уравнение (10) принимает вид:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$ или $x^2 + y^2 = a^2$.

Это уравнение является уравнением окружности с центром в начале координат и с радиусом равным a. Значит, окружность можно рассматривать как частный случай эллипса, когда полуоси его равны между собой и эксцентриситет равен нулю:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - a^2}}{a} = \frac{0}{a} = 0$$

Эксцентриситет эллипса характеризует меру вытянутости эллипса.

Как известно, планеты и некоторые кометы движутся по эллиптическим орбитам. Оказывается, что эксцентриситеты планетных орбит весьма малы, а кометных - велики, т.е. близки к единице. Таким образом, планеты движутся почти по окружности, а кометы то приближаются к Солнцу (Солнце находится в одном из фокусов), то удаляются от него.

Директрисы эллипса

Определение: Две прямые, перпендикулярные к большой оси эллипса и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от него, называются директрисами эллипса. (a - большая полуось, ε - эксцентриситет эллипса). (Погорелов А.В.)

Уравнения директрис в выбранной системе координат имеют вид:

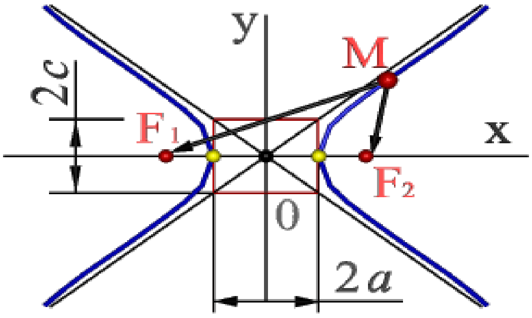
$x = -\frac{a}{\varepsilon}$ и $x = +\frac{a}{\varepsilon}$.

Первую из них мы условимся называть левой, вторую - правой. Так как для эллипса $\varepsilon < 1$, то $\frac{a}{\varepsilon} > a$. Отсюда следует, что правая директриса расположена правее правой вершины эллипса; аналогично, левая директриса расположена левее его левой вершины (рис.4).

п.3. Гипербола

Гипербола (греч. hyperbole) - плоская кривая линия. Это линия пересечения прямого кругового конуса плоскостью, не проходящей через вершину конуса и пересекающая обе его полости. (Политехнический словарь)

По гиперболе движутся тела, навсегда покидающие Землю, скорость которых больше, чем 2-я космическая (11,2 км/с). Также по гиперболе движутся альфа-частицы в опыте Резерфорда при рассеивании их ядром атома. (Математический энциклопедический словарь)



$MF_1 - MF_2 = 2a$

Определение: Гиперболой называется геометрическое место точек, для которых разность расстояний от двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина; (Шипачев В.С.) указанная разность берется по абсолютному значению; кроме того, требуется, чтобы она была меньше расстояния между фокусами и отлична от нуля. Т.е. если F1 и F2 - данные точки, то гипербола образуется точками M, для которых $|F_1M - F_2M| = const$ $< F_1F_2$. Неравенство здесь выражает, что разность двух сторон Δ F1F2M меньше третьей. (Александров А.Д.) Рис.5.

Фокусы гиперболы принято обозначать через F1 и F2, а расстояние между ними - через 2с.

Пусть M - произвольная точка гиперболы с фокусами F1 и F2. (рис.5) Отрезки F1M и F2M (так же, как и длины этих отрезков) называются фокальными радиусами точки M и обозначаются через r1 и r2 ($r_1 = F_1M$, $r_2 = F_2M$). По определению гиперболы разность фокальных радиусов ее точки M есть постоянная величина; эту постоянную принято обозначать через 2a. (Шипачев В.С.)

Вывод канонического уравнения гиперболы

Пусть дана какая-нибудь гипербола с фокусами F1 и F2. (Рис.6). Возьмем на плоскости произвольную точку M и обозначим ее координаты через x и y, а фокальные радиусы F1M и F2M через r1 и r2. Точка M будет находиться на (данной) гиперболе в том и только в том случае, когда

$$r_1 - r_2 = \pm 2a \quad (11)$$

Так как F1F2=2c и так как фокусы F1 и F2 расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат, то они имеют соответственно координаты (-c; 0) и (+c; 0); приняв это во внимание, находим:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},\ r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \quad (12)$$

Заменяя r1 и r2, получаем:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \quad (13)$$

Это и есть уравнение рассматриваемой гиперболы, так как ему удовлетворяют координаты точки M (x; y), когда точка M лежит на гиперболе. Возведём обе части равенства в квадрат; получим:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$

или

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \quad (14)$$

Возводя в квадрат обе части этого равенства, найдем:

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2,$$

откуда

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2). \quad (15)$$

Здесь мы введем в рассмотрение новую величину

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}; \quad (16)$$

c>a, следовательно, c2-a2>0 и величина b-положительное число. Из равенства (15) имеем

$b^2 = c^2 - a^2$,

Поэтому уравнение (15) принимает вид:
$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$,

или

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad . (17)$$

Уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$,определяющее гиперболу в некоторой системе декартовых прямоугольных координат, есть уравнение второй степени; таким образом, гипербола есть линия второго порядка.

Эксцентриситет гиперболы

Гипербола состоит из двух ветвей (правой и левой) и имеет две асимптоты:

$y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$

Оси симметрии называются осями гиперболы, а центр симметрии (точка пересечения осей) - центром гиперболы. Одна из осей пересекается с гиперболой в двух точках, которые называются ее вершинами (на рис.7 они обозначены буквами A и A′). Эта ось называется действительной осью гиперболы. Другая ось не имеет общих точек с гиперболой и называется мнимой осью гиперболы. Прямоугольник со сторонами 2a и 2b (см. рис.7) называется основным прямоугольником гиперболы. Величины a и b называются соответственно действительной и мнимой полуосями гиперболы.

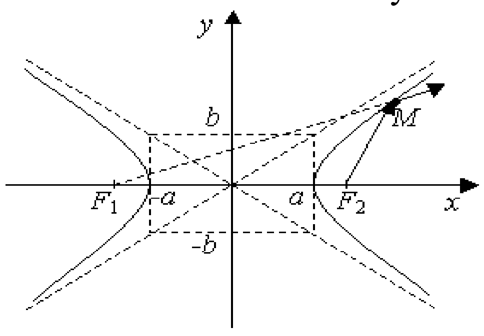


Рис. 1.15

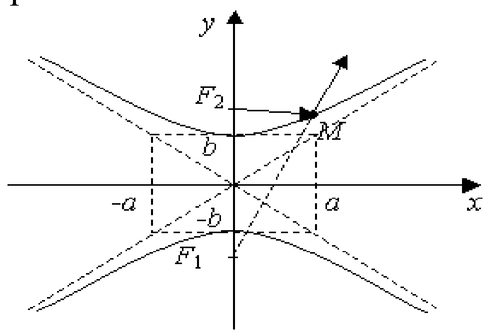


Рис. 1.16

Рис.7.

Уравнение

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1, \quad (18)$$

переставляя буквы x и y, a и b, можно привести к виду (17). Отсюда ясно, что уравнение (18) определяет гиперболу, расположенную так, как показано на рис.7 справа; вершины ее лежат на оси Oy. Эта гипербола называется сопряженной по отношению к гиперболе (17) (Погорелов А.В.). Обе гиперболы имеют одни и те же асимптоты.

Гипербола с равными полуосями (a = b) называется равносторонней, и ее каноническое уравнение имеет вид

$$x^2-y^2=a^2. \quad (19)$$

Так как основной прямоугольник равносторонней гиперболы является квадратом, то асимптоты равносторонней гиперболы перпендикулярны друг другу.

Определение: Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами этой гиперболы к расстоянию между ее вершинами (Шипачев В.С.); обозначив эксцентриситет буквой ε, получим:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}.$$

Так как c > a, то ε > 1, т. е. эксцентриситет гиперболы больше единицы.

Заметим, что $c^2=a^2+b^2$; находим:

$$\varepsilon^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}=1+\left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

откуда

$$\varepsilon=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2} \text{ и } \frac{b}{a}=\sqrt{\varepsilon^2-1}.$$

Из последнего равенства легко получить геометрическое истолкование эксцентриситета гиперболы. Эксцентриситет определяется отношением $\frac{b}{a}$, а отношение $\frac{b}{a}$ в свою очередь определяется эксцентриситетом. Таким образом, эксцентриситет гиперболы характеризует форму ее основного прямоугольника, а значит, и форму самой гиперболы.

Чем меньше эксцентриситет, т. е. чем ближе он к единице, тем меньше ε^2-1, тем меньше, следовательно, отношение $\frac{b}{a}$; значит, чем меньше эксцентриситет гиперболы, тем более вытянут ее основной прямоугольник (в направлении оси, соединяющей вершины). (Агапов П.Е.)

В случае равносторонней гиперболы a = b и ε = √2.

Директрисы гиперболы

Определение: Две прямые, перпендикулярные к той оси гиперболы, которая ее пересекает, и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от него, называются директрисами гиперболы.

Уравнения директрис в выбранной системе координат имеют вид

$x = -\frac{a}{\varepsilon}$ и $x = +\frac{a}{\varepsilon}$.

Первую из них мы условимся называть левой, вторую - правой.

Так как для гиперболы ε >1, то $\frac{a}{\varepsilon} < a$. Отсюда следует, что правая директриса расположена между центром и правой вершиной гиперболы; аналогично, левая директриса расположена между центром и левой вершиной (рис.8).

Установленное свойство эллипса и гиперболы можно положить в основу общего определения этих линий:

Множество точек, для которых отношение расстояний до фокуса и до соответствующей директрисы величина постоянная, равная ε, это эллипс, если ε < 1, и гипербола, если ε > 1. (Шипачев В.С.)

Возникает вопрос, что представляет собой множество точек, определенное аналогичным образом при условии $\varepsilon = 1.$ Оказывается, это новая линия второго порядка, называемая параболой.

п.4. Парабола

Парабола (греч. parabole) - кривая второго порядка.

Определение: Параболой называется геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, называемой директрисой (предполагается, что эта прямая не проходит через фокус). (Шипачев В.С.)

Фокус параболы принято обозначать буквой F, расстояние от фокуса до директрисы - буквой p. Величину p называют параметром параболы.

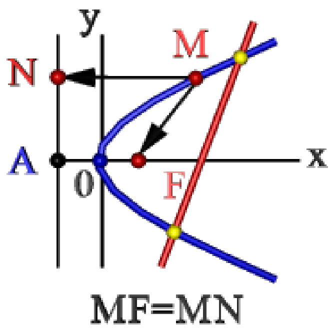


Рис.9.

Пусть дана какая-нибудь парабола (рис.11). Возьмем на плоскости произвольную точку M и обозначим ее координаты через x и y. Обозначим далее через r расстояние от точки M до фокуса F($r=|FM|$), через d-расстояние от точки M до директрисы. Точка M будет находиться на (данной) параболе в том и только в том случае, когда

r=d. (20)

Вывод канонического уравнения параболы

Чтобы получить искомое уравнение, нужно заменить переменные r и d их выражениями через текущие координаты x, y.

Заметим, что фокус F имеет координаты $\left(\frac{p}{2};0\right)$; приняв это во внимание, находим:

$$r=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}\ .\ (21)$$

Обозначим через N основание перпендикуляра, опущенного из точки M на директрису. Очевидно, точка N имеет координаты $\left(-\frac{p}{2};y\right)$; тогда с помощью формулы, выражающей расстояние между точками M и N, получаем:

$$d=MN=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2}=x+\frac{p}{2}\quad (22)$$

$(x+\frac{p}{2})-$ число положительное; это следует из того, что M (x; y) должна находиться с той стороны от директрисы, где находится фокус, т. е. должно быть

$x > -\frac{p}{2}$, откуда $x + \frac{p}{2} > 0$.

Заменяя в равенстве (20) r и d выражениями (21) и (22), найдем

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}. \quad (23)$$

Это и есть уравнение рассматриваемой параболы, так как ему удовлетворяют координаты точки M (x; y), когда точка M лежит на данной параболе. Приведем его к более удобному виду, для чего возведем обе части равенства (23) в квадрат. Получаем:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

или

y2=2px. (24)

Проверим, что уравнение (24), полученное возведением в квадрат обеих частей равенства (23), не приобрело «лишних» корней. Для этого достаточно показать, что для любой точки, координаты x и y которой удовлетворяют уравнению (22), выполнено соотношение (20). Действительно, из уравнения (24) вытекает, что $x \geq 0$, поэтому для точек с неотрицательными абсциссами имеем d = $\frac{p}{2}$ + x. Подставляя значение y2 из уравнения (24) в выражение (21) и учитывая, что $x \geq 0$, получаем r = $\frac{p}{2}$ + x, т.е. величины r и d равны, что и требовалось доказать. Таким образом, уравнению (24) удовлетворяют координаты точек данной параболы, и только они, т.е. это уравнение является уравнением параболы.

Уравнение (24) называется каноническим уравнением параболы. Уравнение y2=2px, определяющее параболу в некоторой системе декартовых прямоугольных координат, есть уравнение второй степени; таким образом, парабола есть линия второго порядка. (Агапов П.Е.)

Исследование формы параболы

Исследуем теперь форму параболы по ее каноническому уравнению. Так как уравнение (24) содержит y только в четвертой степени, то парабола симметрична относительно оси Ox. Следовательно, достаточно рассмотреть только ее часть, лежащую в верхней полуплоскости. Для этой части $y \geq 0$, поэтому, разрешая уравнение (24) относительно y, получаем:

y = $\sqrt{2px}$. (25)

Из равенства (25) вытекают следующие утверждения:

1. если x < 0, то уравнение (25) дает мнимые значения y и поэтому левее оси Оy ни одной точки параболы нет;

2. если x = 0, то y = 0, т.е. начало координат лежит на параболе и является самой «левой» ее точкой;

3. при возрастании x возрастает и y, причем если x → +∞, то и y → +∞.

Таким образом, переменная точка М(x; y), перемещающаяся по параболе, исходит из начала координат и с ростом x движется «вправо» и «вверх», причем при x → +∞ точка М бесконечно удаляется как от оси Оy, так и от оси Оx.

Симметрично отражая рассмотренную часть параболы относительно оси Оx, получаем всю параболу (рис.10, а), заданную уравнением (24).

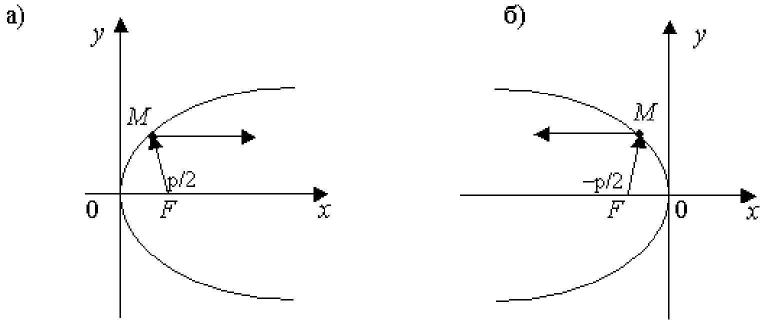


Рис. 1.17

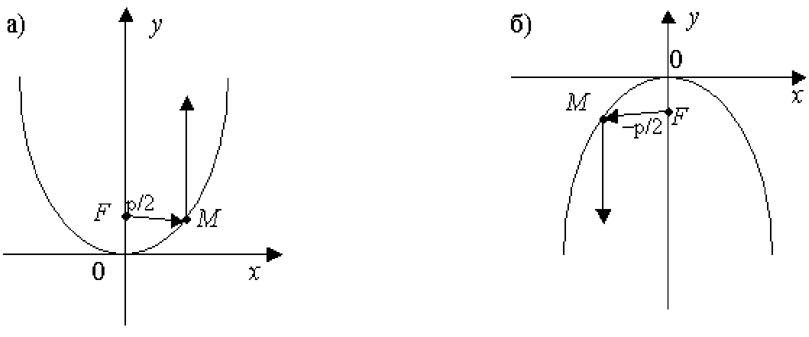


Рис. 1.18

Рис.10

Точка О называется вершиной параболы, ось симметрии (ось Оx) - осью параболы. Число p, т.е. параметр параболы, как известно, выражает расстояние от фокуса до директрисы. Выясним, как влияет параметр параболы на ее форму. Для этого возьмем какое-нибудь определенное значение абсциссы, например, $x = 1$, и

из уравнения (24) найдем соответствующие значения ординаты: y = $\pm\sqrt{2p}$.
Получаем на параболе две точки M1(1; $\sqrt{2p}$) и M2(1; -$\sqrt{2p}$), симметричные относительно ее оси; расстояние между ними равно $2\sqrt{2p}$. Отсюда заключаем, что это расстояние тем больше, чем больше p. Следовательно, параметр p характеризует «ширину» области, ограниченной параболой. В этом и состоит геометрический смысл параметра p.

Парабола, уравнение которой y2 = -2px, p > 0, расположена слева от оси ординат (Рис.10, б). Вершина этой параболы совпадает с началом координат, осью симметрии является ось Ox.