

TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI  
DASTURIY INJINIRING FAKULTETI  
OLIY MATEMATIKA KAFEDRASI

# MUSTAQIL ISH

*Mavzu:* Ikk va uch o'lchovli integrallar va  
ularning fizik ma'nolari..

Toshkent 2015

## Икки ўлчовли интеграл.

**Таъриф:** Фараз қилайлик  $XOY$  текислигидаги бирор ёпиқ  $D$  соҳада  $Z = f(x, y)$  функция аниқланган ва чегараланган бўлсин.

$D$  соҳани ихтиёрий  $n$  та

$D_1, D_2 \dots D_n$  та бўлакчаларга бўлиб, бу бўлакчаларнинг юзаларини мос равишда

$\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$  деб ва ҳар бир

бўлакчалардан ихтиёрий  $M_i(\xi_i, \eta_i)$

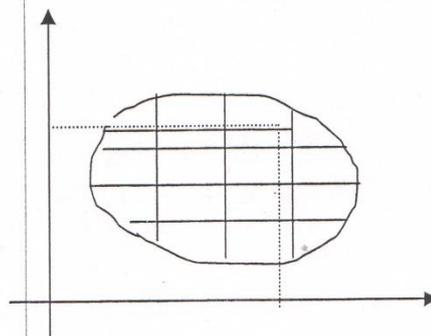
$(i = 1, 2, 3, \dots, n)$  нуқта олиб қуйидаги йиғиндини

тузайлик 
$$V = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i \quad (1)$$

Энг катта диаметрли  $D_i$  ни  $\lambda$  дейлик, яъни  $\lambda = \max \{D_i\}$

Агар (1) интеграл йиғиндининг  $\lambda \rightarrow 0$  да  $D$  ни  $\forall D_i$  бўлакчаларга ажратиш усулига ва ҳар бир  $D_i$  да  $\forall M_i(\xi_i, \eta_i)$  нуқтани танлаб олиш усулига боцлик бўлмаган лимити мавжуд бўлса, бу лимитга  $f(x, y)$  функциядан  $D$  соҳа бўйича олинган икки ўлчовли интеграл дейилади ва

$$\iint_D f(x, y) dx dy \text{ ёки } \iint_D f(x, y) ds \text{ кўринишларда белгиланади.}$$



### Икки улчовли интегралнинг хоссалари.

1.  $\iint_D k f(x, y) dx dy = k \iint_D f(x, y) dx dy.$  ( $k - \forall$  ўзгармас)

2.  $\iint_D [f_1(x, y) \pm f_2(x, y)] dx dy = \iint_D f_1(x, y) dx dy \pm \iint_D f_2(x, y) dx dy$

3. Агар  $D = D_1 + D_2$  бўлса

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$$

4. Агар  $f(x, y)$  функция  $D$  да узлуксиз бўлса бу соҳада шундай бир  $M(\xi_i, \eta_i)$  нуқта

топиладики, унда  $\iint_D f(x, y) dx dy = f(\xi_i, \eta_i) S$  муносабат ўринли бўлади.  $S$ -эса  $D$  соҳанинг юзаси.

## Икки улчовли интегрални хисоблаш.

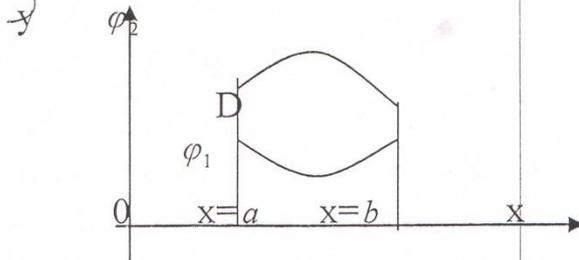
ХОУ текисликдаги ёпиқ  $D$  соҳамиз

$$y = \varphi_1(x), y = \varphi_2(x)$$

$$x = a, x = b$$

(2) чизиклар билан чегараланган бўлиб, уни  
координата ўқларига параллел тўғри чизиклар  $\varphi_1(x) < \varphi_2(x), a <$

$b$  икки нуктадан ортиқ нуктада кесмасин.



Бу соҳага ОХ ўқи йўналиши бўйича тўғри соҳа дейилади.

Худди шунингдек  $D$  соҳамиз қуйидаги чизиклар билан чегараланган бўлса

$$x = \psi_1(y)$$

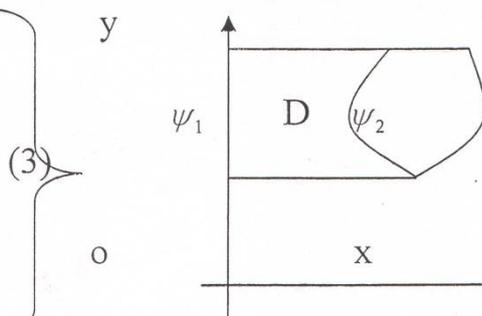
$$x = \psi_2(y)$$

$$y = c$$

$$y = d$$

$$\psi_1(y) < \psi_2(y)$$

$$c < d$$



бу соҳага ОУ ўқи йўналиши бўйича тўғри соҳа дейилади.

У ҳолда икки қаррали интегрални оддий интеграл каби ички интегралдан бошлаб интегралланади.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \quad \text{ёки}$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx.$$

**Мисол.**  $\int_0^1 \int_0^{x^2} xy dx dy = \int_0^1 x dx \int_0^{x^2} y dy$ , бу ерда  $\int_0^{x^2} y dy = \frac{y^2}{2} \Big|_0^{x^2} = \frac{x^4}{2}$ ; бўлгани

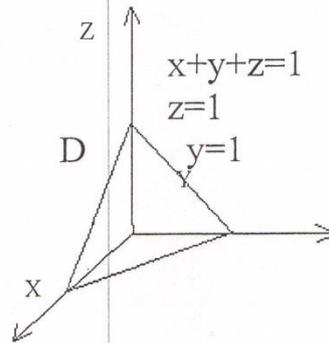
учун,  $\int_0^1 x dx \int_0^{x^2} y dy = \int_0^1 x \frac{x^4}{2} dx = \int_0^1 \frac{x^5}{2} dx = \frac{1}{2} \frac{x^6}{6} \Big|_0^1 = \frac{1}{12}$ .

**Эслатма.** Агар  $D$  ни координат ўқларига параллел тўғри чизиклар икки нуктадан ортиқ нуктада кесса у ҳолда  $D$  ни мураккаб соҳа дейилади. Агар  $D$  мураккаб соҳа бўлса уни бир неча тўғри соҳаларга ажратиб олиниб, шу тўғри соҳалар бўйича олинган интегралларнинг йиғиндиси шу  $D$  соҳа бўйича олинган интегрални беради.

**Мисол.**  $x=0, y=0, x+y+z=1, z=0$

сиртлар билан чегараланган жисмни ҳажмини топинг.

$$V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y) dy = \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx = \frac{1}{2} \frac{(1-x)^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{6} \text{ куб бирлик.}$$



$x=1$      $x+y=1$

**Юза ҳисоблаш.** Агар  $\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i$  интеграл йиғиндида  $f(x, y)$  ни бир десак

яъни  $f(x, y)=1$  деб,  $\lambda \rightarrow 0$  да лимитга ўтсак

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta s_i = s$$

Иккинчи томондан

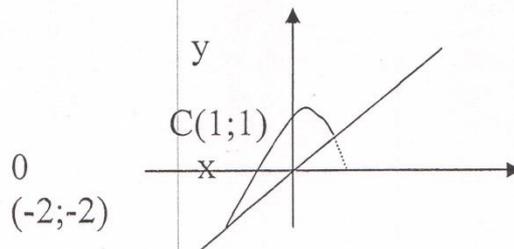
$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta s_i = \iint_D dx dy$$

демак  $s = \iint_D dx dy$  ёки соҳа (2) кўринишда бўлса

$$\iint f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] dx = s_2 - s_1 = s \text{ бўлади.}$$

**Мисол.**  $y=2-x^2$  ва  $y=x$  чизиқлар билан чегараланган юзани топинг.  
 $y=2-x^2$  ва  $y=x$  дан  $x^2+x-2=0$  бундан  $x=1, x=-2$

$$s = \int_{-2}^1 dx \int_x^{2-x^2} dy = 4,5 \text{ кв.бир.}$$



## Икки ўлчовли интегралда узгарувчиларни алмаштириш.

Икки ўлчовли интегралда ўзгарувчиларни алмаштириш формуласи

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f[\varphi(u, v); \psi(u, v)] |I(u, v)| du dv \quad (4)$$

$$I(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

**Масалан**  $z=f(x, y)$  функциядан  $D$  соҳа бўйича декарт системасида олинган интегрални кутб координаталар системасида ҳисоблайлик

Кутб координатаси билан декарт координатаси орасидаги боғланиш бизга маълум.

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ x = \rho \sin \varphi & 0 \leq \rho < \infty \end{cases}$$

1) Кутб соҳадан ташқарида бўлса

$$\iint_{D'} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\varphi d\rho = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$$

формула билан ҳисобланади

2) Агар кутб соҳанинг чегарасида бўлса

$$\iint_{D'} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\varphi d\rho = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$$

формула билан ҳисобланади

3) Агар кутб соҳанинг ичида бўлса, у ҳолда қуйидаги формула билан ҳисобланади.

$$\iint_{D'} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\varphi d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$$

**Мисол.**  $I = \iint_S \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  интеграл ҳисоблансин

Икки ўлчовли интеграл кутб координаталари  $\varphi$  ва  $r$  ларга ўтиб ҳисоблансин, бу ерда  $S$ -радиуси  $R=1$  бўлиб, маркази  $O(0,0)$  нуқтада бўлган айлананинг биринчи чораги.

Ечиш.  $\sqrt{x^2 + y^2} = r$  формулани қўллаб  $I = \iint_S \frac{r dr d\varphi}{r} = \iint_S d\varphi dr$  ни чиқарамиз.  $S$ —

соҳа  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq r \leq 1$ . тенгликлар билан аниқланади.

Шунинг учун формулага асосан  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 dr = \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2}$

**Мисол.**  $I = \iint_S (x^2 + y^2 + 1) dx dy$  интеграл кутб координаталарига ўтиб ҳисоблансин.

Интеграллаш соҳаси  $S$  марказлари координаталар бошида, радиуслари эса  $R=1$  ва  $R=2$  бўлган концентрик айланалар ва  $y=0$ ,  $y=x$  тўғри чизиқлар билан чегараланиб, биринчи чоракда ётган соҳа.

Ечиш.  $x^2 + y^2 = r^2$ ,  $dx dy = r dr d\varphi$  формулага асосан,

$$I = \iint_S (r^2 + 1) r dr d\varphi.$$

Бу ерда  $S$  соҳа  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ ,  $1 \leq r \leq 2$  тенгсизликлар билан аниқланади. Демак формулага асосан

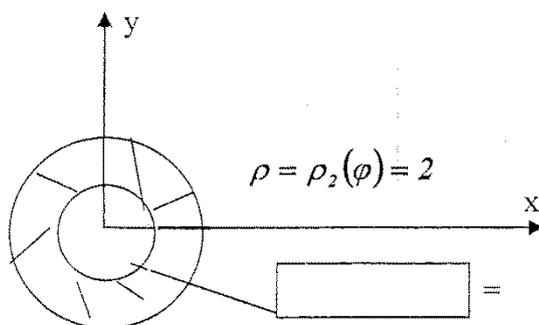
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_1^2 (r^3 + r) dr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2} \right) \Big|_1^2 d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{21}{4} d\varphi = \frac{21}{16}$$

**Мисол.**  $\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy$ ,  $D: x^2 + y^2 = 4$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \Rightarrow \rho^2 = x^2 + y^2, \rho = 2 \\ x = \rho \sin \varphi \quad 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{4 - \rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi} \rho d\rho d\varphi = \int_0^2 \rho d\rho \int_0^{2\pi} \sqrt{4 - \rho^2} d\varphi = 2\pi \int_0^2 \sqrt{4 - \rho^2} \rho d\rho =$$

$$= \left. \begin{array}{l} 4 - \rho^2 = t^2 \\ -2\rho d\rho = 2t dt \\ \rho = 0 \text{ да } t = 2 \\ \rho = 2, \text{ да } t = 0 \end{array} \right\} = 2\pi \int_2^0 t^2 dt = -2\pi \frac{t^3}{3} \Big|_2^0 = \frac{16}{3} \pi.$$



## Uch karrali integral va uni hisoblash.

Avvalo uch karrali integralga keladigan masalalarni ko'rib chiqaylik. Ulardan biri jismning massasini hisoblash haqida masala [1-5].

Massa bilan to'ldirilgan biror  $(V)$  jism berilgan bo'lsin. Uning har bir  $M(x, y, z)$  nuqtasida bu jismning  $\rho = \rho(M) = \rho(x, y, z)$  zichligi ma'lum bo'lsin. Shu jismning  $m$  massasini aniqlash talab etilgan bo'lsin.

Bu masalani echish uchun  $(V)$  sohani bo'laklarga ajratamiz:  $(V_1), (V_2), \dots, (V_n)$  uning bo'laklari bo'lsin va har bir bo'lakdan  $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  nuqtani tanlaylik. Har bir  $(V_i)$  bo'lakda zichlik o'zgarmas va  $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  ga teng. U holda bo'lakning massasi  $m_i$  taqriban

$$m_i \approx \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)V_i$$

ga teng. Butun jismning massasi esa taqriban

$$m \approx \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)V_i$$

teng bo'ladi. Bo'laklarning diametrini  $d(V_i)$  desak, bo'linishning diametri  $d_V = \max_{1 \leq i \leq n} d(V_i)$  nolga intilsa, u holda bu taqribiy tenglik aniq bo'lib,

$$m = \lim_{d_V \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)dV \quad (0.1)$$

va masala echildi.

Bu masalani echimidan ko'rinadiki, bunday qatorlardan limit olish integral Yig'indilardan limit olishga o'xshash bo'layapti. Bunday limitlar ko'proq mexanika va fizika masalalarida uchraydi. Bu limitning qiymati uch karrali integral deb ataladi. U holda jismning massasi

$$m = \iiint_{(V)} \rho(x, y, z)dV \quad (0.2)$$

ko'rinishda yoziladi.

Endi uch karrali integralning mavjud bo'lish shartlarini keltiramiz.

Biror  $(V)$  sohada  $f(x, y, z)$  funksiya berilgan bo'lsin. Bu sohani fazoviy to'r orqali chekli sondagi  $(V_1), (V_2), \dots, (V_n)$  bo'laklarga bo'lamiz. Bu bo'laklar mos ravishda  $V_1, V_2, \dots, V_n$  hajmlarga ega bo'lsin.  $i$ -chi  $(V_i)$  bo'lakdan ixtiyoriy  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  nuqta olib, bu nuqtadagi funksiyaning  $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  qiymatini shu bo'lakchanning hajmi  $V_i$  ga ko'paytiramiz. Barcha bo'lakchalardagi bunday ko'paytmalarni yig'ib, ushbu

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) dV_i$$

integral yig'indini tuzamiz [1,2].

**Ta'rif.**  $(V_i)$  bulaklarning diametri nolga intilganda integral yig'indining chekli  $J$  limiti  $f(x, y, z)$  funksiyaning  $(V)$  soha bo'yicha uch karrali integrali deyiladi va

$$J = \iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz$$

kabi belgilanadi [1].

Bu chekli limit faqat chegaralangan funksiyalar uchun mavjud bo'ladi. Bunday funksiyalar uchun  $\sigma$  integral yig'indidan tashqari yana Darbu yig'indilarini ham tuzib olishimiz kerak:

$$s = \sum_{i=1}^n m_i V_i, \quad S = \sum_{i=1}^n M_i V_i,$$

bu erda

$$m_i = \inf_{(V_i)} \{f\}, \quad M_i = \sup_{(V_i)} \{f\}.$$

Uch karrali integralning mavjud bo'lishi uchun

$$\lim_{\lambda_V \rightarrow 0} (S - s) = 0$$

yoki

$$\lim_{\lambda_V \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i V_i = 0$$

shartni bajarilishi zarur va etarli. Bu erda  $\omega_i = M_i - m_i$   $f(x, y, z)$  funksiyaning  $(V_i)$  sohadagi tebranishi deyiladi.

Bundan har qanday uzluksiz funksiyaning integrallanuvchiligi kelib chiqadi.

Integrallanuvchi funksiyalar va uch karrali integralning ba'zi muhim xossalarini keltiramiz [3,4].

1<sup>0</sup>. Agar  $(V) = (V') + (V'')$  bo'lsa,

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \iiint_{(V')} f(x, y, z) dV + \iiint_{(V'')} f(x, y, z) dV.$$

Chap tomondagi integrallarning mavjudligidan o'ng tomondagi integralning ham mavjudligi kelib chiqadi va aksincha.

2<sup>0</sup>. Agar  $k = const$  bo'lsa,

$$\iiint_{(V)} kf(x, y, z) dV = k \iiint_{(V)} f(x, y, z) dV.$$

Chap tomondagi integrallarning mavjudligidan o'ng tomondagi integralning ham mavjudligi kelib chiqadi va aksincha.

3<sup>o</sup>. Agar  $(V)$  sohada  $f(x, y, z)$  va  $g(x, y, z)$  funksiyalar integrallanuvchi bo'lsa,  $f \pm g$  funksiya ham  $(V)$  sohada integrallanuvchi va

$$\iiint_{(V)} (f(x, y, z) \pm g(x, y, z)) dV = \iiint_{(V)} f(x, y, z) dV \pm \iiint_{(V)} g(x, y, z) dV$$

munosabat o'rinli.

4<sup>o</sup>. Agar  $(V)$  sohada integrallanuvchi  $f(x, y, z)$  va  $g(x, y, z)$  funksiyalar uchun  $f \leq g$  tengsizlik bajarilsa,

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV \leq \iiint_{(V)} g(x, y, z) dV$$

tengsizlik ham o'rinli bo'ladi.

5<sup>o</sup>.  $f(x, y, z)$  funksiya integrallanuvchi bo'lsa,  $|f(x, y, z)|$  funksiya ham integrallanuvchi bo'ladi va

$$\left| \iiint_{(V)} f(x, y, z) dV \right| \leq \iiint_{(V)} |f(x, y, z)| dV$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

6<sup>o</sup>.  $(V)$  sohada integrallanuvchi  $f(x, y, z)$  funksiya uchun

$$m \leq f(x, y, z) \leq M$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa,

$$mV \leq \iiint_{(V)} f(x, y, z) dV \leq MV$$

tengsizlik ham o'rinli bo'ladi.

Shu o'rinda o'rta qiymat haqida teorema uchun

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \mu V \quad (m \leq \mu \leq M)$$

tenglikdan foydalanamiz.  $f(x, y, z)$  funksiya uzluksiz bo'lgan holda ushbu formulani quyidagi

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) V \quad (0.3)$$

ko'rinishda ham yozish mumkin, bu erda  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  nuqta  $(V)$  sohaning biror nuqtasi.

Chegarasi o'zgaradigan soha bo'yicha uch karrali integralni kiritamiz.

$(v)$  - chegarasi o'zgaruvchili soha bo'lsin. U holda

$$\Phi((v)) = \iiint_{(v)} f(x, y, z) dV \quad (0.4)$$

munosabat o'rinli.

Endi xuddi shunga o'xshash  $\Phi((v))$  funksiyadan berilgan  $M$  nuqtada soha bo'yicha hosila tushunchasini ham kiritish mumkin, ya'ni ushbu

$$\lim_{(v) \rightarrow M} \frac{\Phi((v))}{v}$$

limit  $\Phi((v))$  funksiyadan  $(v)$  soha bo'yicha hosilasini ifodalaydi.

7<sup>0</sup>. Agar integral ostidagi funksiya uzluksiz bo'lsa, (1.4) integraldan  $M$  nuqtada soha bo'yicha hosilasi integral ostidagi funksiyaning shu nuqtadagi qiymatiga teng.

$$f(M) = f(x, y, z).$$

Shuning uchun yuqoridagi (1.4) integral  $f(x, y, z)$  funksiya uchun qaysidir ma'noda «boshlang'ich» funksiya sifatida qabul qilsa bo'ladi.

Uch karrali integralni hisoblashning ba'zi hollarini keltiramiz [3,4].

Faraz qilaylik qaralayotgan sohamiz  $(T) = [a, b, c, d; e, f]$  to'g'ri burchakli paralleloipeddan iborat bo'lsin. Shu sohada  $f(x, y, z)$  funksiya berilgan bo'lsin.  $(T)$  sohaning  $yz$  tekislikdagi proeksiyasi  $(R) = [c, d; e, f]$  to'g'ri to'rtburchakdan iborat.

**Teorema.** Agar  $f(x, y, z)$  funksiya uchun

$$\iiint_{(T)} f(x, y, z) dV \quad (0.5)$$

uch karrali integral mavjud va  $[a, b]$  oraliqdagi har bir tayinlangan  $x$  uchun

$$I(x) = \iint_{(R)} f(x, y, z) dR \quad (0.6)$$

ikki karrali integral va shuningdek

$$\int_a^b dx \iint_{(R)} f(x, y, z) dR \quad (0.7)$$

takroriy integral mavjud bo'lsa

$$\iiint_{(T)} f(x, y, z) dT = \int_a^b dx \iint_{(R)} f(x, y, z) dR \quad (0.8)$$

tenglik o'rinli bo'ladi [3,4,5].

**Isbot.**  $[a, b]$ ,  $[c, d]$  va  $[e, f]$  oraliqlarni

$$\begin{aligned} x_0 &= a < x_1 < \dots < x_l < \dots < x_n = b, \\ y_0 &= c < y_1 < \dots < y_j < \dots < y_m = d, \\ z_0 &= e < z_1 < \dots < z_k < \dots < z_l = f, \end{aligned}$$

nuqtalar yordamida bo'laklarga bo'lamiz, o'z navbatida  $(T)$  parallelepiped ham

$$(T_{i,j,k}) = [x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1}; z_k, z_{k+1}]$$

$$(i = 0, 1, \dots, n-1; j = 0, 1, \dots, m-1; k = 0, 1, \dots, l-1)$$

elementar parallelepipedlarga bo'linadi. Bir vaqtda  $(R)$  to'g'ri to'rtburchak ham

$$(R_{j,k}) = [y_j, y_{j+1}; z_k, z_{k+1}]$$

elementar to'g'ri to'rtburchakka bo'linadi. Agar

$$m_{i,j,k} = \inf_{(T_{i,j,k})} \{f\}, \quad M_{i,j,k} = \sup_{(T_{i,j,k})} \{f\},$$

deb olsak,  $6^0$  xossaga ko'ra  $\forall x \in [x_i, x_{i+1}]$  uchun

$$m_{i,j,k} \Delta y_j \Delta z_k \leq \iint_{(R_{j,k})} f(x, y, z) dy dz \leq M_{i,j,k} \Delta y_j \Delta z_k$$

ega bo'lamiz.  $\forall x = \xi_i$  qiymatlarni fiksirlab  $j$  va  $k$  larning barcha qiymatlari bo'yicha tengsizlikda yig'ib chiqamiz va

$$\sum_j \sum_k m_{i,j,k} \Delta y_j \Delta z_k \leq I(\xi_i) \leq \sum_j \sum_k M_{i,j,k} \Delta y_j \Delta z_k$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bu erda

$$I(\xi_i) = \iint_{(R)} f(\xi_i, y, z) dy dz.$$

Bu tengsizlikni  $\Delta x_i$  ga ko'paytirib  $i$  ning qiymatlari bo'yicha yig'ib chiqamiz:

$$\sum_i \sum_j \sum_k m_{i,j,k} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \leq \sum_i I(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_i \sum_j \sum_k M_{i,j,k} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k.$$

Chetki hadlar (1.5) integral uchun Darbu yig'ndilari hisoblanadi.  $\Delta x_i, \Delta y_j, \Delta z_k$  lar nolga intilganda (1.5)

integralga teng bo'ladi. O'rta had esa  $I(\xi_i)$  funksiyaning integral yig'indisi bo'lib,  $\Delta x_i \rightarrow 0$  da (1.7)

integralga teng bo'ladi va (1.8) tenglikning bajarilishi kelib chiqadi. Teorema isbotlandi [3,4].

Agar

$$\int_e^f f(x, y, z) dz \quad (0.9)$$

integral ham fiksirlangan  $\forall x \in [a, b]$  va  $\forall y \in [c, d]$  lar uchun mavjud bo'lsa, (1.8) dagi ikki karrali

integral takroriy integral bilan almashtirilib

$$\iiint_{(T)} f(x, y, z) dT = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f f(x, y, z) dz \quad (0.10)$$

hosil qilamiz.

Shunday qilib, uch karralli integralni

hisoblash uchta sodda integralni ketma-ket hisoblashga keltiriladi. (1.10) da  $x, y, z$  o'zgaruvchilarni joylashishini ixtiyoriy ravishda olish mumkin.

Endi ixtiyoriy soha bo'yicha uch karrali integralni hisoblaymiz.  $(V)$  - ixtiyoriy jism berilgan bo'lsin. Agar  $f(x, y, z)$  funksiya  $(V)$  sohada aniqlangan bo'lib, bu funksiya bilan birga  $f^*(x, y, z)$  funksiya ham berilgan bo'lsin. Bu funksiya  $(V)$  sohani to'ldiruvchi  $(T)$  to'g'ri to'rtburchakli parallelipedda aniqlangan, ya'ni

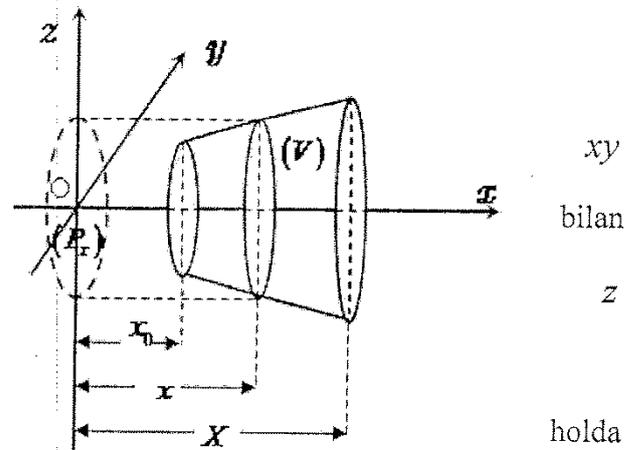
$$f^*(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & (V) \text{ da} \\ 0 & (V) \text{ ning tashqarisida.} \end{cases}$$

Shu yo'l orqali yuqorida keltirilgan usulga kelamiz.  $(V)$  jism  $x = x_0$  va  $x = X$  tekisliklar orasida joylashgan bo'lsin.  $(P_x)$  orqali bu jismning  $yz$  tekislikdagi proeksiyasini belgilaylik. U holda ikki va uch karrali integralning mavjudligidan

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \int_{x_0}^X dx \iint_{(P_x)} f(x, y, z) dy dz \quad (1.8^*)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu (1.8) formulani analogi bo'ladi.

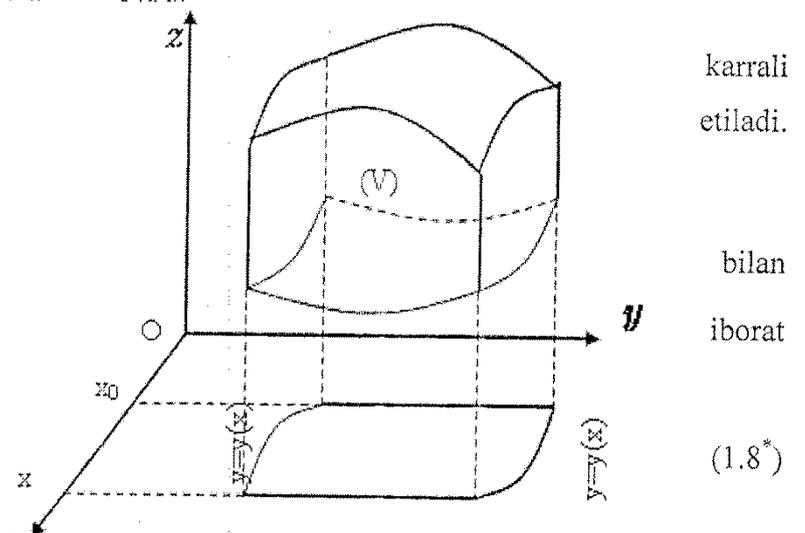
Endi  $(V)$  jism mos ravishda yuqori va quyidan  $z = z(x, y)$  va  $z = Z(x, y)$  sirtlar bilan chegaralangan «silindrik brus»dan bo'lsin. Bu sohaning tekislikdagi proeksiyasi  $(D)$  figura va  $(K)$  egri chiziq chegaralangan bo'lsin. Demak,  $(V)$  jism yon tomondan o'qiga parallel bo'lgan silindrik sirt va  $(K)$  yo'naltiruvchi egri chiziq bilan chegaralangan ekan. U (1.7) formulaning analogi



$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \iint_{(D)} dx dy \int_{z(x, y)}^{Z(x, y)} f(x, y, z) dz \quad (1.7^*)$$

ko'rinishda bo'ladi. Buning uchun ikki va oddiy integralning mavjudligi talab

Agar  $(D)$  soha  $y = y_0(x)$  va  $y = Y(x)$  ( $x_0 \leq x \leq X$ ) chiziqlar chegaralangan egri chizikli trapetsiyadan bo'lsa,  $(V)$  jism yuqoridagi ikkinchi tipdagidek bo'ladi. Ikki karrali integralni



karrali etiladi. bilan iborat (1.8\*)

yoki (1.7\*) kabi almashtirsak,

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \int_{x_0}^X dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} dy \int_{z_0(x, y)}^{Z(x, y)} f(x, y, z) dz \quad (1.10^*)$$

formulani hosil qilamiz. Bu formula (1.10) formulaning umumlashgan holi hisoblanadi.

Yuqorida keltirilgan hollar uchun misollar ko'rib chiqamiz.

1-misol. Ushbu

$$K = \iiint_{(V)} z dx dy dz$$

integral hisoblansin. Bu erda  $(V) - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$  ellipsoidning yuqori yarim qismidan iborat soha bo'lsin.

Bu  $(V)$  jismning  $xy$  tekislikdagi proeksiyasi  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$  ellipsdan iboratdir. Shuning uchun  $x$  ning o'zgarish oralig'i  $-a$  dan  $a$  gacha bo'ladi, tayinlangan  $x$  ning qiymatlarida  $y$  o'zgaruvchi  $-\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$  dan  $\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$  gacha o'zgaradi. Berilgan  $(V)$  jism pastdan  $xy$  tekislik, yuqoridan

ellipsoid sirt bilan chegaralangan, tayinlangan  $x$  va  $y$  lar uchun  $z$  o'zgaruvchi  $0$  dan  $c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$  gacha o'zgaradi.

Shunday qilib, (1.10\*) formulaga ko'ra

$$\begin{aligned} I &= \int_{-a}^a dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} z dz = \frac{c^2}{2} \int_{-a}^a dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = \\ &= c^2 \int_{-a}^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = \frac{2bc^2}{3a^3} \int_{-a}^a (a^2 - x^2)^{3/2} dx = \\ &= \frac{4bc^2}{3a^2} \int_0^a (a^2 - x^2)^{3/2} dx = \frac{\pi}{4} abc^2. \end{aligned}$$

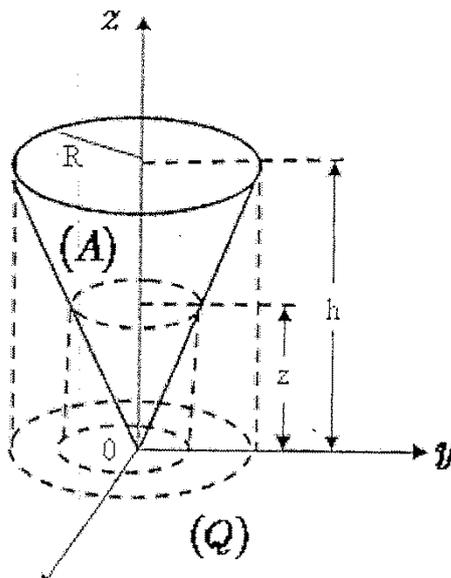
2-misol. Ushbu

$$I = \iiint_{(A)} z dx dy dz$$

integral hisoblansin. Bu erda  $(A)$  jism

$z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$  konusli sirt va  $z = h$  tekislik

chegaralangan soha.



bilan

(a) konusli sirtni  $xy$  tekislikdagi proeksiyasi  $(Q)$   $x^2 + y^2 \leq R^2$  doiradan iborat. (1.7\*)

formuladan foydalanib

$$I = \iint_{(Q)} dx dy \int_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^h z dz = \frac{1}{2} \iint_{(Q)} \left[ h^2 - \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2) \right] dx dy$$

bo'ladi. Bundan qutb koordinatalariga o'tib,

$$I = \frac{h^2}{2R^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \frac{\pi R^2 h^2}{4}.$$

(b) boshqa usulda integralning qiymatini

$$I = \int_0^h z dz \iint_{(D)} dx dy$$

ko'rinishda ham hisoblab topish mumkin [1-8]. Bu erda  $(D)$   $xy$  tekislikdagi proeksiyasi bilan balandlik

yotgan  $z$  tekislikning kesishmasi. Bu proeksiya  $\frac{Rz}{h}$  radiusli doiradan iborat. Shuningdek ikki karrali

integral doiraning yuzi  $\frac{\pi R^2}{h^2} z^2$  ga teng. Bundan

$$I = \int_0^h \frac{\pi R^2}{h^2} z^3 dz = \frac{\pi R^2 h^2}{4}$$

bo'lishini topamiz.

