

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI ALOQA, AXBOROTLASHTIRISH VA
TELEKOMMUNIKATSIYA TEXNOLOGIYALARI DAVLAT QO'MITASI
TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI

DASTURIY INJINIRING FAKULTETI

SONLI USULLAR VA DASTURLASH fanidan ma'ruzalar matni

TOSHKENT 2015

Mualliflar:

A.N. Mirzayev- TATU, “Algoritmash va matematik modellashtirish” kafedrası dotsenti, f.- m.f.n.;

Yu. M. Abduraxmanova- TATU, “Algoritmash va matematik modellashtirish” kafedrası mudiri, t.f.n.,dotsent;

Taqrizchilar:

S.A. Baxromov- Mirzo Ulug’bek nomidagi UzMU “Hisoblash texnologiyalari va axborot tizimlari” kafedrası dotsenti f.- m.f.n

TATU “Kompyuter tizimlari” kafedrası professori, t. f.d.

Ushbu ma’ruzalar matni texnika oliy o’quv yurtlarining barcha yo’nalishlari bakalavrlari uchun mo’ljallangan.

TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI, 2015

1-MA'RUZA

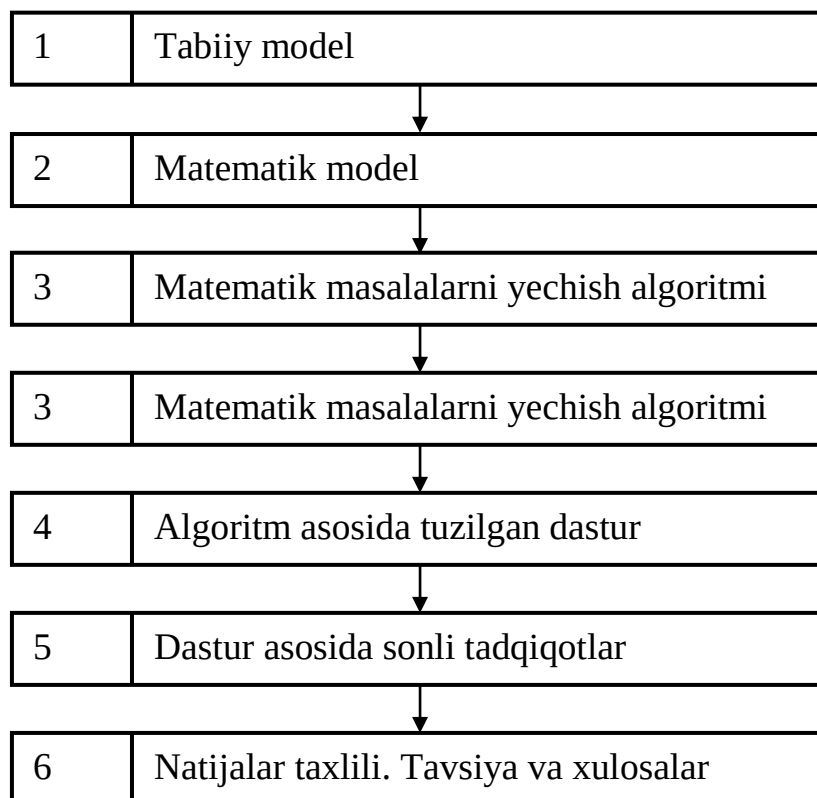
Mavzu: "Amaliy masalalarni yechishning asosiy bosqichlari. Ob'ekt yoki jarayonning matematik modeli. Xatolik manba'lari va turlari. Arifmetik va funksional amallar xatoliklari"

Reja:

1. Amaliy masalalarni yechishning asosiy bosqichlari.
2. Matematik model va uning ob'ekt yoki jarayonga muvofiqlik me'zonlari.
3. Xatolik manba'lari va turlari.
4. Absolyut va nisbiy xatoliklar va ularni hisoblash usullari.

Asosiy ibora va atamalar: Tabiiy model, matematik model, adekvat, xatolik, absolyut va nisbiy xatolik, ishonchli raqam.

Amaliy masala deganda xalq xo'jaligi, texnika yoki iqtisodiyot bilan bogliq bo'lgan biror bir ob'ekt yoki jarayon va uning turli xarakteristikalarini aniqlash masalalarini tushunamiz. Amaliy masalalarni yechish jarayonini bosqichlarga bo'lib sxematik tarzda quyidagicha ifodalash mumkin.



(1-rasm)

Biz bu yerda 1-rasmda keltirilgan sxemaning izoxini bir oddiy masalada taqlil qilamiz va shu asosida umumiy muloxazalar xaqida to'xtalamiz. Quyidagi masala berilgan bo'lsin. Massasi m bo'lgan jism boshlanqich V_0 tezlik bilan gorizontga qburchak ostida otilgan bo'lsin. Shu jismning xarakat traektoriyasi, maksimal balandligi va maksimal uzoqligi topilsin. Odatda masalaning bu ifodasini tabiiy model deb tushunamiz. Bunday jarayonni xayotda ko'p bora kuzatganmiz.

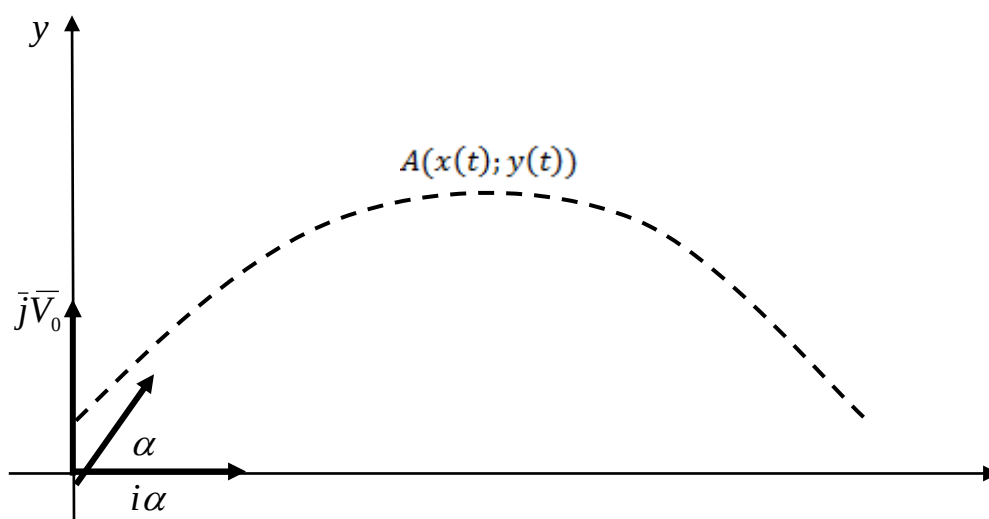
Tabiiy model parametrlari orasidagi miqdoriy boqlanishlarni ifodalovchi tengliklar, tengsizliklar majmuasi (tizimi) matematik modeldeyiladi.

Matematik modelga qo'yiladigan asosiy talablar: tabiiy modelga muvofiqlik (adekvat), yechimning mavjudligi, boshlanqich shartlarga uzviy boqliqligi. Bular barchasi bir so'z bilan, ya'ni korrekt qo'yilgan masala bo'lishi kerak.

Amaliy masalalarni yechish jarayonida uchraydigan xatolik manba'lari qaqida to'xtalamiz. Avvalo matematik modellashtirish jarayonida soddalik uchun ba'zi faktorlarni e'tibordan chetda qoldirish, ma'lum qonunlardan soddalarini tanlash kabi xollar uchraydi. Bu xollar, albatta, tuzilgan matematik modelning berilgan tabiiy modelga to'la muvofiq bo'lmasligiga olib keladi. Bu bosqichda vujudga keladigan xatoliklar modellashtirish xatoligi deb ataladi. Tuzilgan matematik model yechimini topishda turli taqribiy usullardan foydalanishga to'qri kelishi mumkin. Bunda qosil bo'ladigan xatolik usul xatoligi deyiladi. Masala tarkibiga kiruvchi parametrlar qiymatlari turli o'lchov vositalari yordamida aniqlanadi yoki zavod, fabrika ko'rsatkichlari bo'yicha ifodalangan bo'ladi. Bu qiymatlarda qam tabiiy xatolik bo'ladi. Bu xatoliklarni bartaraf qilib bo'lmas xatoliklar deb aytiladi. Bu qiymatlar xisoblash jarayonida ishtirok etib natijaga o'z ta'sirini o'tkazadi. Shuningdek barcha qiymatlar o'nlik yoki ikkilik sanoq sistemasida ifodalanadi. Bunda, xattoki kompyuterda qam , razryadlar soni cheklanganligi xisobiga qiymatlarni yaxlitlashga to'qri keladi. Bunda qosil bo'ladigan xatolik yaxlitlash xatoligi deyiladi. Umumiy xatolik shu barcha xatoliklar yiqindisidan iborat bo'ladi va bu xatoliklarni apriori (ya'ni tajribagacha)

baxolash zarurati paydo bo'ladi. Chunki olinadigan natijalarning qanchalik ishonchli bo'lishini bilishimiz va baqolashimiz shart.

Keltirilgan muloxaza va qoidalarni yuqorida ifodalangan masalaga tadbqiq qilamiz. Matematik model tuzishda soddalik uchun jismni moddiy nuqta deb qaraymiz, maqsad xavo qarshiligi bilan boqliq kuchlarni e'tibordan chetda qoldirish, masalani osonlashtirish. Shuningdek, tezlik kichik bo'lgani uchun Nyuton qonuni o'rinli deb faraz qilamiz. Balandlik uncha katta bo'lmaganligi uchun erkin tushish tezlanishi g qconst deb qisoblaymiz. Bu xolda masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishni oladi. Tekislikda jism joylashgan nuqtani koordinat boshi, gorizonta yo'nalishni OX o'qi, vertika yo'nalishni OY o'qi deb belgilaymiz. OXY dekart koordinat sistemasida jism koordinatalarini $x(t)$, $y(t)$ deb belgilaymiz. OX, OY o'qlari birlik vektorlarini $\bar{i}$, $\bar{j}$ deb belgilaymiz. (2-rasm).



2-rasm

Jismga qarakat jarayonida traektoriya ning ixtiyoriy $A(x(t); y(t))$ nuqtasida faqat bir kuch, ya'ni oqirlik kuchi ta'sir etadi. Jism qarakat jarayonida tezlikni $\vec{V} = V_x \bar{i} + V_y \bar{j}$ deb belgilasak masala shartlari va Nyuton qonunlariga ko'ra quyidagi tengliklarni xosil qilamiz.

$$\begin{cases} m \frac{\partial V_x}{\partial t} = 0; & V_x(x, o) = V_o \cdot \cos \alpha \\ m \frac{\partial V_y}{\partial t} = -mg; & V_y(x, o) = V_o \cdot \sin \alpha \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x; & x(o) = 0 \\ m \frac{\partial y}{\partial t} = v_y; & y(o) = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

(1.1) va (1.2) differensial tenglamalar sistemalari birgalikda keltirilgan masala matematik modelini ifodalaydi. Faqat bu yerda soddalashtirilgan model olingan bo'lib, uning yechimi berilgan tabiiy model uchun taqribiy yechim bo'ladi.

Biz bu yerda ortiqcha izoqlarda to'xtalib o'tirmay masala yechimini ifodalashga o'tamiz. (1.1) sistema echimi

$$\begin{cases} V_x = V_o \cos \alpha \\ V_y = V_o \sin \alpha - gt \end{cases} \quad (1.3)$$

(1.3) ni (1.2) ga qo'yilsa, (1.2) yechimi uchun quyidagi formulalar quyidagi formullar hosil bo'ladi.

$$\begin{cases} x = v_o \cos \alpha t \\ y = v_o \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \end{cases} \quad (1.4)$$

(1.4) formulalar jism qarakat qonunini ifodalaydi. Bu formulalardan maksimal uzoqlik $y=0$ ga ko'ra (1.4) 2-tenglamasidan $t = \frac{2V_o \sin \alpha}{g}$ ni aniqlab birinchisiga qo'yilsa

$$L = V_o \cdot \cos \alpha \cdot \frac{2V_o \sin \alpha}{g} = \frac{V_o^2 \sin^2 \alpha}{g} \quad (1.5)$$

(1.5) formuladan $\alpha = 45^\circ$ bo'lganida L o'zining eng katta fiymatini olishini ko'ramiz.

(1.4) tengliklar birinchisidan $t = \frac{x}{V_o \cos \alpha}$ ni aniqlab 2-siga o'rniga qo'ysak

$$y = V_o \sin \alpha \cdot \frac{x}{V_o \cos \alpha} - g \cdot \frac{x^2}{2V_o^2 \cos^2 \alpha} \quad (1.6)$$

traektoriya tenglamasini xosil qilamiz. Maksimal ko'tariladigan balandlik (1.6) parabolik traektoriya uchida bo'lib (1.4) ga ko'ra bunda $\dot{y}(t) = 0$, ya'ni

$$t = \frac{V_o \sin \alpha}{g} \text{ va } y_{max} = \frac{V_o^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad (1.7)$$

ekanligi topiladi. Yuqorida ta'kidlanganidek ma'lum shartlarga ko'ra (1.5),(1.6),(1.7) formulalar qo'yilgan savollar javoblarini beradi. Jism qajmi kichik, tezliklar nisbatan kichik (kosmik tezliklarga qaraganda), balandliklar qam kichik bo'lsa bu formulalar amaliyot uchun yetarli aniqlikdagi yechimlarni berar ekan.

Ma'lumki masala tarkibiga kiruvchi parametrlar qiymatlari turli o'lchash vositalarida aniqlanadi yoki tajribalar yordamida topiladi. Bunda olingan qiymat

taqribiy bo'ladi. Odatda aniq va taqribiy qiymatlarni farqlash uchun a, a^* ko'rinishida ifodalashga kelishilgan. Ular orasidagi farq $\Delta a = |a^* - a|$ absolyut xatolik deb ataladi. Bu qiymat qam noaniq bo'lganligi uchununing quyi chegarasi, ya'ni

$$|a^* - a| \leq \Delta a \quad (1.8)$$

shartni qanoatlantiruvchi Δa qiymatlar orasida eng kichigini limit absolyut xatolik deymiz. Biz asosan ana shu limit absolyut xatolik tushunchasi bilan ish ko'ramiz. Uni belgilash uchun qayozuvdan foydalanamiz. Amaliyotda asosan taqribiy miqdorlar $a^*, b^*, c^*, \dots$ va ularning absolyut xatoliklari $\Delta a, \Delta b, \Delta c, \dots$ lar berilgan bo'ladi. (1.8) tengsizlikka ko'ra aniq miqdor uchun

$$a^* - \Delta a \leq a \leq a^* + \Delta a \quad (1.9)$$

Ko'rinishida interval baxonigina bera olamiz. Xatolikning real mavqe, ta'sirini baqolashda nisbiy xatolik tushunchasidan foydalaniladi. Ta'rifga ko'ra nisbiy xatolik

$$\delta a = \frac{\Delta a}{|a^*|} \quad (1.10)$$

formula bo'yicha qisoblanadi.

Xatoliklarning natijaga ta'sirini xisoblash va baqolashda quyidagi qoidadan foydalaniladi.

Agar $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ taqribiy miqdorlar bo'lib,, $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ ularning absolyut xatoliklari bo'lsa,

$$Z^* = f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$$

xatoligini aniqlashda

$$\Delta Z = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta x_i \quad (1.11)$$

formuladan foydalanish mumkin. (1.11) formula to'la differensial tushunchasi bilan deyarlik bir xil ekanligi ko'rinib turibdi. Aytilgan muloxaza va qoidalarni quyidagi masalada taqlil qilamiz. Xona bo'yi va eni o'lchanganda $a^* = 6m; b^* = 5m$ chiqqan. Bu qiymatlarni o'lchashda $\Delta a = 5sm$ va $\Delta b = 4sm$

xatolikka yo'l qo'yilgan bo'lishi mumkin. Xona yuzasini xisoblashda qanday xatolik qosil bo'ladi? Bu erda

$$S^* = a^* \cdot b^* = 6m \cdot 5m = 30m^2$$

$$\Delta S = \left| \frac{\partial f}{\partial a} \right| \Delta a + \left| \frac{\partial f}{\partial b} \right| \Delta b = b^* \cdot \Delta a + a^* \cdot \Delta b = 5m \cdot 0,05m + 6m \cdot 0,49m^2$$

$$\delta S = \frac{\Delta S}{S^*} = \frac{0,49}{30} = 0,016$$

Nisbiy xatolik xatolikning umumiy miqdordagi xissasini ifodalaydi.
 $\delta S \cdot 100\% = 1,6\%$ xatolikning foizdagi qiymatini beradi.

Taqribiy qiymatdagi ishonchli raqamlar. Taqribiy miqdor qiymati o'nlik pozision sanoq sistemasida

$$X^* = \alpha_m, \alpha_{m-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0, \alpha_{-1}, \alpha_{-2}, \dots, \alpha_{-k}$$

ko'rinishida ifodalangan bo'lib, uningabsolyut xatoligi Δx ma'lum bo'lsa, X^* tarkibidagi ixtiyoriy α_s raqam uchun

$$\Delta x < \omega \cdot 10^s, \text{ bu erda } \omega = 0,56 \quad (1.12)$$

Tengsizlik bajarilsa, α_s raqam ishonchli, aks holda ishonchsiz bo'ladi. Masalan: $x^* = 739,5416$; $\Delta x = 0,003$ bo'lsa shu sonning ishonchli raqamlarini toping deyilgan bo'lsa, ohirgi raqamdan (1.12) tengsizlik bo'yicha tekshirishni boshlaymiz. 6 raqam uchun $s = -4$ $0,003 < 0,56 \cdot 10^{-4}$ tengsizlik bajarilmaydi. Demak 6 raqam ishonchli emas. Xuddi shunday 1 raqam xam ishonchsiz chiqadi. 4 raqam uchun $s = -2$ va (1.12) tengsizlik bu xolda $0,003 < 0,56 \cdot 10^{-2}$ ko'rinishini oladi va bajariladigan tengsizlik bo'ladi. Demak 4 raqam ishonchli bo'lar ekan. Bu yerda isbotsiz qam tushunarli bo'lgan amaliy qoidani tavsiya qilish mumkin. Taqribiy qiymatdagi biror raqam ishonchli bo'lsa undan oldingi raqamlar qamishonchli bo'ladi. Xuddi shuningdek biror raqam ishonchsiz chiqsa undan keyingi raqamlar qam ishonchsiz bo'lishi aniq. Xususan bizning misolda x^* ning ishonchli raqamlari $x^* = 739,54$ ko'rinishni olar ekan. Bu yerda yaxlitlash qisobiga qo'shimcha $\Delta x_{yaxl} = 0,0016$ xatolikka yo'l qo'yildi. Va

$\Delta x_{um} = 0,003 + 0,0016 = 0,0046$ bo'ladi. Bunda xam $\Delta x_{um} < 0,56 \cdot 10^{-2}$ o'rinli bo'ladi.

2-MA'RUZA

Mavzu: Funksiya taqribiy qiymatlarini qisoblashda qatorga yoyish usuli.

Reja:

1. Usul zarurati va moxiyati
2. Makloren qatori va uning xatoligi
3. Teylor qatori va uning xatoligi
4. qator qadlari sonini belgilashda amaliy tavsiyalar

Asosiy ibora va atamalar: transsendent funksiyalar, Makloren qatori, Teylor qatori, qator qoldiq qadi. Odatda biror arifmetik ifoda qiymatini xisoblash uchun ma'lum tartibda, ma'lum sondagi arifmetikamallarni bajariladi. Lekin amaliyotda shunday xollar uchraydiki, natijani chekli amallar orqali aniqlash mumkin bo'lmaydi. Transsendent funksiyalar sirasiga $\sin x, \ln x, e^x, \sqrt{x} \dots$ kabi funksiyalar kirib, ularning ixtiyoriy x ga mos aniq qiymatini qisoblash uchun bajarilishi kerak bo'lgan chekli amallar ketma-ketligini ko'rsatib bo'lmaydi. Bu funksiyalar qiymatlari qam aksariyat xolda mG'n ko'rinishidagi rasional son bo'lmas ekan. Shuning uchun bu funksiyalar uchun umumiy transsendent funksiyalar atamasi ishlatiladi. Amaliyotda aynan shu turdagi funksiyalar bilan boqliq xoldaechiladigan ko'plab masalalar uchraydi. Demak, ularning qiymatini xisoblash uchun biror usul, qoida yaratish zarurati paydo bo'ladi. Zamonaviy texnologiyalardan xabardor o'quvchi oddiygina kalkulyator yoki kompyuterda qisoblaymiz deyishi mumkin. To'qri, amalda shunday qilamiz. Lekin shu kalkulyator va kompyuterlar qam inson tomonidan yaratilgan algoritm asosida ishlaydi. Ana shu algoritmlar qanday prinsipga ko'ra tuzilganq Mabodo qech qanday kalkulyator, kompyuter bo'lmasaku, lekin $\sqrt{2}$ yoki $\sin 0,4$ ni 0,001 aniqlikdagi qiymatini topish talab qilinsa, qanday yo'l tutgan bo'lar edingizdesa javob olish qiyin. Shuning uchun, bu yerda maqsad qudratli mo'jiza qisoblanmish kalkulyator yoki kompyutersirli pardasini ochib, u yerda qanday jarayonlar , to'qriroqi meqnat ketayotganini

ko'rsatish. Texnik taraqqiyot tufayli qanchalik mashaqqatli mehnatdan ozod bo'lganimizni yana bir bor tassavur qilishdan iborat. Albatta, shu bilan birga ayrim amaliy ko'rsatma va tavsiyalarni qam ko'rib o'tamiz.

Matematik taqlildan ma'lumki, agar $y = f(x)$ funksiya $x = 0$ nuqta atrofida istalgan tartibdagi qosilaga ega bo'lsa uni shu $x = 0$ nuqta atrofida Makloren qatoriga yoyish mumkin va bu qator quyidagicha ifodalanadi.

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) = S(x) \quad (2.1)$$

Bu qatorning asosiy belgisi $x = 0$ nuqtada uning va barcha qosilalarining qiymati $y = f(x)$ funksiya va uning qosilalari qiymatlariga teng bo'ladi.

$$f^{(n)}(0) = S^{(n)}(0) \quad n = 0, 1, 2$$

(2.1) qator bo'yicha $f(x)$ qiymatini xisoblash uchun cheksiz qatorning qancha qadini olish yetarli bo'lar ekan degan savol paydo bo'ladi. Odatda (2.1) qator juda tez yaqinlashuvchi qator bo'lib umumiy qadi qam juda tez nolga intiladi.

Shuning uchun uning chekli yiqindisi

$$S_N = \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$$

dan foydalanish mumkin bo'lar ekan. Bunda xatolik tartibini birinchi tashlab yuborilgan xadi tartibi bilan baxolash mumkin ekan.

$$|S_n(x) - f(x)| = R_n(x) = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (2.2)$$

(2.2) formula Makloren qatori qoldiq qadi deyiladi va xatolik shu ifoda orqali baxolanadi. Bu yerda ba'zi ma'lum Makloren qatorlarini keltiramiz va ular asosida amaliy tavsiyalarni chiqarish qoidalarini ko'ramiz.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Qatorlar asosida $\sin 0,2$ va $e^{0,1}$ qiymatlari $0,001$ aniqlikda hisoblansin.

Birinchi misolda $f(x) = \sin x$ dema $f^n(x) = \begin{cases} \sin x \\ \cos x \end{cases}$ yoki va $|f^{n+1}(\xi)| \leq 1$ ekanligi aniq. Demak

$$R_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < 0,001$$

Shartga ko'ra $x = 0,2$ bo'lganligi uchun

$$0,2^{n+1} \leq (n+1)! 0,001$$

Tengsizlikdan n ni topish mumkin. $n = 3$ olsak

$$0,2^5 < 5! 0,001 = 0,120$$

Tengsizlik o'rinli. Demak

$$\sin 0,2 \approx 0,2 - \frac{0,2^3}{3!} 0,1986667$$

Ikkinchi misolda qoldiq hadi

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < 0,001$$

Bu yerda $x = 0,1$ bo'lgani uchun $n = 2$ olish yetarli ekanligi ko'rinib turibdi, demak

$$l^{0,1} \approx 1 + 0,1 + \frac{0,1^2}{2!} = 1,105$$

taqribiy qiymat olinishi mumkin. Kattaroq aniqlik talab qilinsa, shunga mos qator qadrlari sonini xam ko'proq olishga to'qri kelishi mumkin.

Xatolik formulasi (2.2) dan ko'rinib turibdiki, x ortgan sari, $x = 0$ dan uzoqlashgan sari xatolik qam ortib boradi. Demak, (2.1) qatorni qam faqat $x = 0$ ning yaqin atrofida samarali tadbiq qilish mumkin. Boshqa xollarda Teylor qatoridan foydalanishtavsiya qilinadi.

Agar $x = x_0$ nuqta atrofida $y = f(x)$ funksiya uzluksiz va istalgan tartibdagi uzluksiz xosilalarga ega bo'lsa uni shu nuqta atrofida Teylor qatoriga yoyish mumkin. Bu qator

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} \cdot f^n(x_0) = S(x) \quad (2.3)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu yerda qam qator chekli yiqindisini $S_n(x)$ deb belgilasak, qator qoldiq qadi

$$R_n(x) = (S_n(x) - f(x)) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (2.4)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

$y = \sqrt{x}$ funksiya qiymatlarini qisoblash uchun Teylor qatoriga yoyish usulidan foydalanish mumkin. Masalan $\sqrt{100,1}$ qiymatini 0,001 aniqlikda topilsin deyilsa $x_0 = 100$ deb olgan ma'qul. Berilgan qiymatga eng yaqin bo'lgan ildizdan aniq chiqadigan sonni tanlanadi.

$$f(x) = \sqrt{x}; \quad f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}; \quad f'' = -\frac{1}{2^2}x^{-\frac{3}{2}};$$

$$f''' = \frac{3}{2^3}x^{-\frac{5}{2}}; \dots; \quad f^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(2n-3)!!}{2^n} x^{-\frac{2n-1}{2}}$$

$x_0 = 100$ olinadigan bo'lsa,

$$f^n(100) = (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2^n} 10^{-(2n-1)}$$

$x = 100,1$ deb olinsa $x - x_0 = 0,1$ bo'ladi.

Teylor qatori quyidagi ko'rinishni oladi.

$$\sqrt{x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) - \frac{1 \cdot 3}{2^2 \sqrt{x_0^3}}(x - x_0)^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \sqrt{x_0^5}}(x - x_0)^3 - \dots$$

Dastlabki uchta xadini olamiz.

$$\sqrt{100,1} \approx 10 + \frac{1}{20} \cdot 0,1 - \frac{3}{4000} 0,1^2 = 10,004993$$

qiymat chiqar ekan. Aniq qiymati esa $\sqrt{100,01} = 10,004998$ bo'lib, xatolik 0,000005 bo'lar ekan. Bu esa juda ishonchli natija. Shunday usulda barcha elementar funksiyalarni xisoblash algoritmi kompyuter dasturiy ta'minotida mavjud bo'lib, talab qilingan aniqlikka ko'ra n-qadrlar sonini aniqlab xisoblash mumkin.

3-MA'RUZA

Mavzu: "Algebraik tenglamalar ildizlarini ajratish. Lobachevskiy usuli."

Reja:

1. Tenglama va uning ildizlari.
2. Tenglama yagona ildizi joylashgan oraliq belgilari.

3. Ko'pqadlar ildizlari qaqida algebraning asosiy teoremasi.

4. Algebraik ko'pqadlar qaqiqiy ildizlarini ajratishda Lobachevskiy usuli.

Asosiy ibora va atamalar: tenglama, tenglama ildizi, funksiya monotonlik oraliqlari, ildizlarni ajratish.

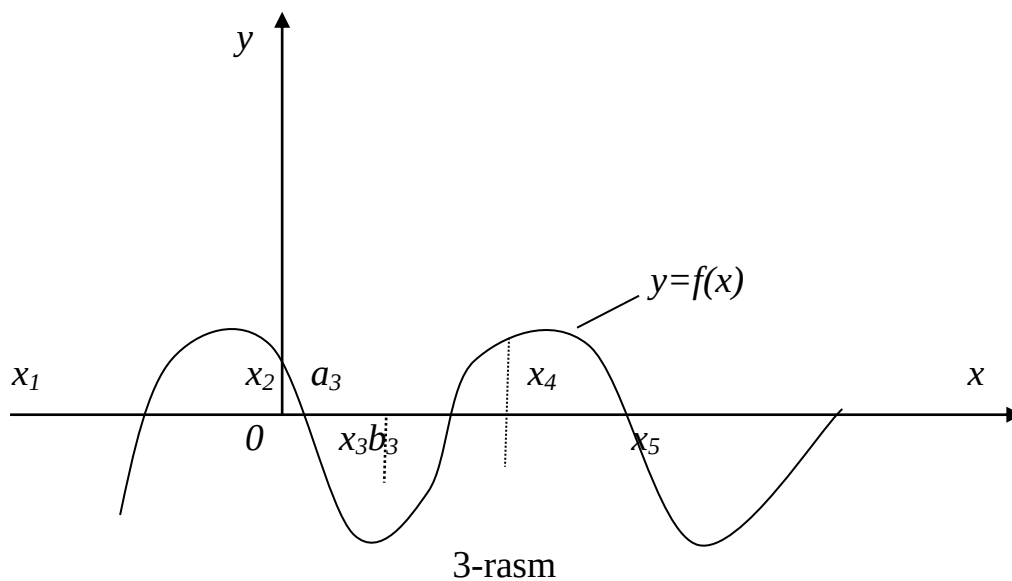
Matematikada tenglama deb x o'zgaruvchining faqat ayrim qiymatlaridagina bajariladigan

$$f(x) = 0 \quad (3.1)$$

ko'rinishidagi tenglik tenglama deyiladi. xning (3.1) tenglik bajariladigan qiymatlari tenglamaning ildizlari deyiladi. Odatda tenglama tushunchasi bilan funksiya tushunchasi boqliq tarzda taqlil qilinadi. Xususan (3.1) tenglama tarkibidagi $f(x)$ ifodani funksiya deb qaralsa,

$$y = f(x)$$

funksiyani qosil qilamiz. Bu funksiya grafigini sxematik tarzda 3-rasmda ifodalangan.



(3.1) tenglama ildizlari $f(x)$ funksiyaning nolga teng bo'lgan nuqtalari absissalari bo'lar ekan. Xususan $y = f(x)$ funksiyaning grafigi 3-rasmdagi ko'rinishga ega bo'lsa, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 nuqtalarda funksiya qiymatlari nol, grafigi esa ox o'qi bilan

kesishishini ko'ramiz. Demak bu xolda x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 qiymatlar $f(x) = 0$ tenglama ildizlari bo'lar ekan.

Shu o'rinda 3-rasmdagi geometrik tasvirga asoslangan va funksiya differensial xususiyatlariga suyanan xolda quyidagi xolatni aks ettirish mumkin ekan. Agar biror $[a; b]$ oraliqda $y = f(x)$ funksiya uzluksiz bo'lib $f(a) \cdot f(b) < 0$ bo'lsa, $[a; b]$ oraliqda $f(x) = 0$ tenglamaning kamida bitta ildizi bo'ladi. Chunki bu xolda $A(a; f(a))$ va $B(b; f(b))$ nuqtalar ox o'qining turli tarafida bo'ladi va funksiya uzluksiz bo'lganligi uchun uning grafigi A nuqtada B nuqtaga yetish uchun albatta ox o'qini kesib o'tishi kerak bo'ladi. ox o'qini kesib o'tgan nuqtani absissasi esa $f(x) = 0$ tenglamaning ildizi bo'ladi. Demak tenglama ildizini topish uchun eng avvalo $f(a) \cdot f(b) < 0$ shartni qanoatlantiruvchi $[a; b]$ oraliqni topish kerak ekan. Agar shu $[a; b]$ oraliqda funksiya monoton (o'suvchi yoki kamayuvchi) bo'lsa, ildiz faqat bitta bo'ladi. Biz bu yerda jiddiy isbotlar bilan shuqullanmaymiz, lekin ishonchli izoxlar bilan amaliy qoidalar keltirib chiqaramiz. Yuqorida keltirilgan muloxazalar asosida quyidagi qoidani ifodalaymiz. Agar biror $[a; b]$ oraliqda $y = f(x)$ uzluksiz bo'lib, birinchi tartibli uzluksiz qosilaga ega bo'lsa va

$$\begin{cases} f(a) \cdot f(b) < 0 \\ f'(x)[a; b] \end{cases} \text{ da ishorasi o'zgarmaydi} \quad (3.2)$$

shartlar bajarilsa, $[a; b]$ oraliqda $f(x) = 0$ tenglama yagona xaqiqiy ildizga ega bo'ladi.

Xususan 3-rasmda ifodalangan funksiya grafigidan ko'rinadiki $[a_3, b_3]$ oraliqda (3.2) shartlar bajariladi. Bu yerda $f(a_3) < 0; f(b_3) > 0$ va $f'(x) > 0$ ekanligi ko'rinib turibdi. Chunki $[a_3, b_3]$ oraliqda funksiya o'suvchi, demak $f'(x) > 0$ bo'ladi. Shu oraliqda yagona ildiz mavjud ekanligi qam ko'rinib turibdi.

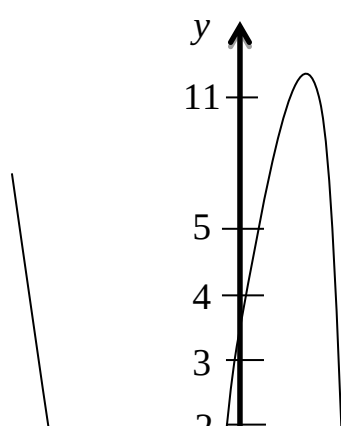
Albatta amaliyotda 3-rasm singari tayyor ko'rgazma doim bo'lavermaydi. Shuning uchun asosiy mezon sifatida (3.2) shartlarni ishlatiladi.

Shartga ko'ra $x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 3$ stasionar nuqtalari topiladi. Bu nuqtalar sonlar o'qini to'rtta intervalga ajratadi. Bu intervallarda birinchi tartibli xosila $P_4'(x)$ ishorasiga qarab funksiyaning o'sish, kamayish oraliqlari topiladi. $y = P_4(x)$ funksiya $(-\infty; -1) \cup (1; 3)$ oraliqda kamayuvchi, $(-1; 1) \cup (3; +\infty)$ da o'suvchi bo'lishini ko'ramiz.

$y'' = P_4''(x) = 4(3x^2 - 6x - 1) = 0$ deb $x_1 \approx -\frac{1}{6}$; $x_2 \approx 2\frac{1}{6}$ ildizlar topiladi va $P_4''(x)$ ishorasiga qarab, funksiya grafigi $(-\infty; -\frac{1}{6}) \cup (2\frac{1}{6}; +\infty)$ oraliqda botiq, $(-\frac{1}{6}; 2\frac{1}{6})$ oraliqda esa qavariq ekanligini ko'ramiz. Bunga ko'ra $y = P_4(x)$ funksiya $x_1 = -1, x_3 = 3$ nuqtalarda minimum; $x_2 = 1$ da esa maksimumga erishishini ko'ramiz. Bevosita qisoblashlar orqali

$$P_4(-1) = -5; P_4(1) = 11; P_4(3) = -5; f(0) = 4$$

ekanligini ko'ramiz. Bu qiymatlar funksiya grafigining ekstremumlari bo'lib, grafigini chizishda asosiy rol o'ynaydi. Koordinat tekisligida bu nuqtalarni belgilaymiz va funksiya o'sish, kamayish, botiq, qavariqlik xususiyatlariga ko'ra grafigini sxematik tarzda ifodalaymiz. $y = P_4(x)$ funksiya grafigi va xususiyatlaridan kelib chiqqan xolda $P_4(x) = 0$ tenglamaning to'rtta ildizlari bo'lib bu ildizlar joylashgan oraliqlar sifatida $(-2; -1), (-1; 0), (1; 2), (3; 4)$ oraliqlarni ko'rsatish mumkin. Bu usul, tabiiy, universal va ishonchli bo'lish bilan ko'p mexnat talab qiladi, xamda bu jarayonni avtomatlashtirish ancha mushkul. Shuning uchun bu xolda Lobachevskiy qoyasi va usulidan foydalanish mumkin. (3.3) tenglamada x o'rniga $-x$ ni qo'yadigan bo'lsak xosil bo'lgan tenglama ildizlari $-x_1, -x_2, -x_3, \dots, -x_n$ lar bo'ladi. Tenglama esa $a_0x^n - a_1x^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1}a_{n-1}x^n + a_nx^n(-1)^n = 0$ ko'rinishini oladi. Uning ildizlari orqali ifodalasak,



$a_0(x + x_1)(x + x_2) \dots (x + x_n) = 0$ (3.5) tenglik qosilbo'ladi. Bu tenglikni berilgan tenglama bilan ko'paytirilsa,

$$a_0(x - x_1^2)(x - x_2^2) \dots (x - x_n^2) = 0$$

ko'rinishidagi, ya'ni ildizlari $x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$ bo'lgan tenglama qosil bo'ladi. Agar (3.4) tenglama ildizlari barchasi xaqiqiy va turli bo'lsa va qulaylik uchun kamayish tartibida nomerlangan bo'lsa, ya'ni $|x_1| > |x_2| > \dots > |x_n|$ unga yuqorida keltirilgan almashtirishlar ketma-ket tatbiq qilib borilsa ildizlari

$$x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$$

$$x_1^4, x_2^4, \dots, x_n^4$$

.....

$$x_1^{2^k}, x_2^{2^k}, \dots, x_n^{2^k}$$

bo'lgan tenglamalarni qosil qilamiz.

Algoritmnı yaxlit xolda namoyish qilish uchun k-qadamda xosil bo'lgan tenglama koeffisientlarini $a_0^{(k)}, a_1^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}$ ko'rinishda ifodalasak

$$a_0^{(k)} x^n + a_1^{(k)} x^{n-1} + \dots + a_{n-1}^{(k)} x + a_n^{(k)} = 0 \quad (3.6)$$

Tenglama ildizlari $x_1^{(k)} = x_1^{2^k}; x_2^{(k)} = x_2^{2^k} \dots x_n^{(k)} = x_n^{2^k}$ ekanligini yuqorida qayd etildi. (3.6) tenglama uchun Vietta teoremasi tengliklarini yozadigan bo'lsak,

[illegible]

umumiy qoya va qoidani tasavvur qilish uchun (3.7) sistema birinchi tenglamasida $x_1^{(k)}$ ni 2-sidan $x_1^{(k)} \cdot x_2^{(k)}$ ni qavsdan chiqaramiz.

$$x_1^{(k)} \left(1 + \frac{x_2^{(k)}}{x_1^{(k)}} + \frac{x_3^{(k)}}{x_1^{(k)}} + \dots + \frac{x_n^{(k)}}{x_1^{(k)}} \right) = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$x_1^{(k)} x_2^{(k)} \left(1 + \frac{x_3^{(k)}}{x_2^{(k)}} + \dots + \frac{x_{n-1}^{(k)}}{x_1^{(k)}} \cdot \frac{x_n^{(k)}}{x_2^{(k)}} \right) = \frac{a_2}{a_0}$$

Bu yerda $x_i^{(k)} = x_i^{2^k}$ tenglikni esga olsak, quyidagi ko'rinishni oladi.

$$\begin{aligned} x_1^{2^k} \left(1 + \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{2^k} + \left(\frac{x_3}{x_1} \right)^{2^k} + \dots \left(\frac{x_n}{x_1} \right)^{2^k} \right) &= \frac{a_1^{(k)}}{a_0^{(k)}} \\ x_1^{2^k} \cdot x_2^{2^k} \left(1 + \left(\frac{x_3}{x_2} \right)^{2^k} + \dots + \left(\frac{x_{n-1}}{x_1} \cdot \frac{x_n}{x_2} \right)^{2^k} \right) &= \frac{a_2^{(k)}}{a_0^{(k)}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dastlabki farazga ko'ra, $|x_1| > |x_2| > \dots |x_n|$ bo'lganligi uchun qavsdan barcha kasrlar birdan kichik va k ortgani sari ular nolga intilib boradi va $k \rightarrow \infty$ da (3.8) tenglamadan quyidagi munosabat xulosani chiqarish mumkin ekan. K ortgan sari

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(-\frac{a_1^{(k)}}{a_0^{(k)}} \right) \approx x_1^{2^k} \\ \left(\frac{a_2^{(k)}}{a_0^{(k)}} \right) \approx x_1^{2^k} \cdot x_2^{2^k} \\ \left(\frac{a_3^{(k)}}{a_0^{(k)}} \right) \approx x_1^{2^k} \cdot x_2^{2^k} \cdot x_3^{2^k} \\ \dots\dots\dots \\ \left(\frac{a_n^{(k)}}{a_0^{(k)}} \right) \approx x_1^{2^k} \cdot x_2^{2^k} \dots\dots x_n^{2^k} \end{array} \right. \quad (3.9)$$

tengliklar ishonchli bo'lib borar ekan. (3.9) tengliklardan keltirilgan tartibda

$$x_1 \approx \sqrt[2^k]{-\frac{a_1^{(k)}}{a_0^{(k)}}}; \quad x_2 \approx \sqrt[2^k]{\frac{a_2^{(k)}}{a_0^{(k)} \cdot x_1^{2^k}}}; \quad (3.10)$$

$$x_3 \approx \sqrt[n]{-\frac{a_3^{(k)}}{a_0^{(k)}} / (x_1 \cdot x_2)}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_n \approx \sqrt[n]{-\frac{a_n^{(k)}}{a_0^{(k)}} / (x_1 \cdot x_2 \cdot x_{n-1})}$$

Ishchi formulalarni qosil qilamiz. Demak, $a_i^{(k)}$ koefitsentlarining aniqlash algoritmi topilsa (3.10) formulalar bilan birgalikda masala to'liq algoritmini ifodalagan bo'lamiz. Bu jarayonning bir qadamini ifodalasak umumiy qoida o'z-o'zidan kelib chiqadi.

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

$$P_n(-x) = (-1)^n (a_0 x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} a_{n-1} x + (-1)^n a_n)$$

$$P_n(x) \cdot P_n(-x) = (-1)^n (a_0^2 x^{2n} + (2a_0 a_2 - a_1^2) x^{2(n-1)} + \dots) \sum 0$$

Xosil bo'lgan tenglamani $(-1)^n$ ga bo'lib yuborilsa qam bo'ladi. Uning koefitsentlari uchun $a_0^{(1)} = a_0^2$; $a_1^{(1)} = -(a_1^2 - 2a_0 a_2)$;

$$a_s^{(1)} = (-1)^s (a_s^2 + \sum_{k=1}^s (-1)^k 2a_{s-k} \cdot a_{s+k}) \quad (3.11)$$

$S - k = 0$ ёки $S + k = 4$ gacha.

Hosil bo'lgan tenglamada $x^2 = x$ belgilash

$$a_0^{(1)} x^n + a_1^{(1)} x^{n-1} + \dots + a_n^{(1)} x + a_n^1 = 0$$

kiritilgan, ya'ni tenglama darajasi n xolda saqlanib qolgan. Faqat ildizlari $x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$ ko'rinishda o'zgarib boradi.

Lobachevskiy usuli algoritmi: berilgan tenglama koefitsentlari asosida (3.11) bo'yicha yangi tenglama xosil bo'ladi. Uning koefitsentlari bo'yicha (3.10) formulaga ko'ra berilgan tenglama ildizlari taqribiy qiymatlari topiladi.

Misol tariqasida ildizlari $x_1 = 3$; $x_2 = 2$; $x_3 = 1$ bo'lgan $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ tenglamaga Lobachevskiy usulini tadbiq qilamiz. Usul bo'yicha qadam nomerini S deb belgilasak va koefitsentlarini xisoblashda (3.11) formulalarga ko'ra

$$a_0^{(S+1)} = \left(a_0^{(S)}\right)^2; \quad a_1^{S+1} = -\left(\left(a_1^{(S)}\right)^2 - 2a_0^{(S)} \cdot a_2^{(S)}\right);$$

$$a_2^{S+1} = \left(a_1^{(S)}\right)^2 - 2a_1^{(S)} \cdot a_3^{(S)}; \quad a_3^{S+1} = -\left(a_3^{(S)}\right)^2$$

$S = 0$	$S = 1$	$S = 2$	$S = 3$
$a_0^{(0)} = 1$	$a_0^{(1)} = 1$	$a_0^{(2)} = 1$	$a_0^{(3)} = 1$
$a_1^{(0)} = -6$	$a_1^{(1)} = -14$	$a_1^{(2)} = -98$	$a_1^{(3)} = -6818$
$a_2^{(0)} = 11$	$a_2^{(1)} = 49$	$a_2^{(2)} = 1393$	$a_2^{(3)} = 1937857$
$a_3^{(0)} = -6$	$a_3^{(1)} = -36$	$a_3^{(2)} = -1296$	$a_3^{(3)} = -1679616$

Ildizlar taqribiy qiymatlarini qisoblash uchun (3.10) formulalardan foydalanamiz.

$$x_1 \approx \sqrt[3]{-6818/\lambda} = 3,014; \quad x_2 \approx \sqrt[3]{a_2^{(3)}/a_1^{(3)}} \approx 2,027;$$

$$x_3 \approx \sqrt[3]{a_3^{(3)}/a_2^{(3)}} = 0,982$$

Topilgan qiymatlar qaqiqatdan qam tenglama ildizlariga yaqin ekanligi ko'rinib turibdi.

qisoblarda foydalanilgan qoidani eslatib o'tamiz. Umumiy tavsiya sifatida

$$x_k^{(S)} \approx \sqrt[2^S]{-a_k^{(S)}/a_{k-1}^{(S)}}; \quad k = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.12)$$

ishchi formulani tavsiya qilish mumkin. Bu yerda S Lobachevskiy usuli bo'yicha qo'yilgan qadamlar soni.

Agar tenglama ildizlari orasida karralilari yoki komplekslari bo'lsa, buni qisoblash jarayonida sezish mumkin ekan. U xolda xam kerakli o'zgartirishlar asosida yechim taqribiy qiymatini aniqlash mumkin.

Shuningdek usul dinamikasini qam yuqorida keltirilgan misolda namoyish qilish mumkin. Bunda (3.12) formulalar va qisoblangan $a_k^{(S)}$ qiymatlariga ko'ra quyidagi ketma ketlik qosil bo'lar ekan.

$x_1^{(0)} = 6$	$x_2^{(0)} = 11/6$	$x_2^{(0)} = 6/11$
$x_1^{(1)} = 3,74$	$x_2^{(1)} = 1,87$	$x_2^{(1)} = 0,857$
$x_1^{(2)} = 3,146$	$x_2^{(2)} = 1,94$	$x_2^{(2)} = 0,982$
$x_1^{(3)} = 3,014$	$x_2^{(3)} = 2,026$	$x_2^{(3)} = 0,982$

Bu ketma-ketlik aniq Ildizlar $x_1 = 3; x_2 = 2; x_3 = 1$ qiymatlariga intilib borayotganligini ko'ramiz. Lobachevskiy usulida jarayonni to'xtatish, belgisi sifatida $|x_i^{(S+1)} - x_i^{(S)}| < \varepsilon; i = 1, 2, \dots, n$ shartning bajarilishini olish mumkin.

Lobachevskiy usuli bo'yicha bajariladigan barcha qisoblashlarni avtomatlashtirish, ya'ni dastur asosida kompyuterda bajarilishi mumkin.

4-MA'RUZA

MAVZU: Algebraik va transsendent tenglamalarni taqribiy yechish usullari. qisqartma akslantirish usuli. Iterasion usullar. Nyuton va vatarlar usuli. Ularning yaqinlashishi tezligini baqolash.

Reja:

1. Taqribiy yechimni aniqlash usullari.
2. qisqartma akslantirish.
3. Ketma-ket yaqinlashish, iterasion usullar.
4. Nyuton usuli.
5. Vatarlar usuli.

Asosiy atama va iboralar: akslantirish, iterasiya, urinmalar usuli, vatarlar usuli, iterasion usul yaqinlashishi.

Tenglama va uning yechimlari qaqida avvalgi mavzulardama'lumotlar berildi. Shuningdek, aksariyat xollarda tenglamaning aniq yechimlarini topish formulalari mavjud emasligini qam aytib o'tildi. Ayrim turdagi algebraik, trigonometrik, logarifmik, irrasional yoki ko'rsatkichli tenglamalarni echishni bilamiz. Lekin bular tenglamalar to'plamiga nisbatan dengizdan tomchidek kam qismini tashkil qilar ekan. Shuning uchun tenglamalarni yechishning universal, ya'ni ko'rinishiga boqliq bo'lmagan, usullarini yaratish ustida izlanishlar olib borilgan. Bu ma'ruzada ana shu izlanishlar natijalaribilan tanishamiz.

Biz bu yerda tenglamalarni asosan ikki turi bilan shuqullanamiz.

$$x = \varphi(x) \quad (4.1)$$

$$f(x) = 0 \quad (4.2)$$

Tenglama ildizi deganda (4.1) yoki (4.2) tenglikni qanoatlantiruvchi qar qanday sonni tushunamiz. (4.1) va (4.2) tenglamalar ko'rinishini istalgan paytda biridan ikkinchisiga o'tkazish mumkinligini eslatib o'tamiz. Xususan (4.1) tenglamani

$$f(x) = x - \varphi(x) = 0$$

(4.2) tenglamani esa

$$x = x + k \cdot f(x)$$

ko'rinishda ifodalab berilgan tenglamaga ekvivalent tenglama xosil qilish mumkin.

Berilgan tenglamalar aniq yechimni topish mumkin bo'lmagan xolda taqribiy yechimni topiladi. (4.1) tenglama xaqida gapiradigan bo'lsak, biror $x = a$ nuqtada $a = \varphi(a)$ tenglik o'rinli bo'lsa, $x = a$ qiymat (4.1) tenglama yechimi deyiladi. U xolda $|x - a| < \varepsilon$ shartni qanoatlantiruvchi istalgan x qiymat (4.1) tenglamaning taqribiy yechimi deb ataladi va uning aniq echimdan uzoqligi uning aniqligi deyiladi. Demak $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ bo'lgan ixtiyoriy qiymat tenglamaning q aniqlikdagi yechimi deb qaralishi mumkin.

Avvalgi ma'ruzalarda tenglama ildizlarini ajratish qoida va usullari xaqida to'xtaldik. Bu yerda esa $[a, b]$ oraliqda (4.1) tenglamaning yagona ildizi mavjud ekanligi ma'lum, shu ildizni topish masalasi bilan shuquullanamiz.

Avvalo chiziqli fazo, norma, akslantirish tushunchalari xaqida to'xtalamiz. Agar biror x elementlar to'plami X da xar bir elementi uchun $\|x\|$ musbat son mos qo'yilgan bo'lib u quyidagi xossalarga ega bo'lsa

$$\begin{aligned} 1) & \|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X \\ 2) & \|x\| = 0 \quad \text{faqat } x \equiv 0 \text{ bo'lganda} \\ 3) & \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X \end{aligned} \quad (4.3)$$

x normalangan chiziqli fazo deyiladi.

Biz bu yerda X to'plam sifatida xaqiqiy sonlar to'plamini qaraydigan bo'lsak $\|x\|$ norma sifatida x ning absolyut qiymatini qabul qilishimiz mumkin. Norma shartlari barchasi bajariladi.

Agar ma'lum qoidaga ko'ra ixtiyoriy $x \in X$ uchun $y \in X$ ni aniqlash qoidasi berilgan bo'lsa uning qisqacha

$$\forall x \in X \text{ uchun } y = \varphi(x) \text{ va } y \in X \quad (4.4)$$

deb belgilashimiz mumkin. X -to'plam moxiyati xamda $\varphi(x)$ funksional ta'rifiga boqlanmagan xolda muxim tushuncha va qisqartma akslantirish ta'rifiga o'tamiz.

Agar X to'plamda (4.3) shartlarga ko'ra norma aniqlangan, xamda ixtiyoriy $x \in X$ uchun $y = \varphi(x)$ formula bo'yicha aniqlangan $y \in X$ mavjud bo'lsa $y = \varphi(x)$ formula x ni o'z o'ziga akslantirish deyiladi.

Agar $\forall x_1, x_2 \in X$ lar uchun

$$y_1 = \varphi(x_1); y_2 = \varphi(x_2) \quad (4.5)$$

$y_1, y_2 \in X$ bo'lib $\|y_1 - y_2\| < k \cdot \|x_1 - x_2\|$; $0 < k < 1$ tengsizlik bajarilsa $y = \varphi(x)$ akslantirish qisqartma akslantirish deyiladi. Bu yerda x_1, y_1 ga, x_2, y_2 ga akslantirilgan bo'lsa, ya'ni y_1, y_2 lar x_1, x_2 larning tasviri desak, tasvirlar orasidan masofa originallar orasidagi masofadan yaqinroq (qisqaroq) bo'ladi deganini bildiradi. (4.5) shartlar bilan aniqlangan qisqartma akslantirish tushunchasi juda ko'plab matematika bo'limlarida aynan shu tarzda xossasi bo'yicha tadbiiq qilinadi. Bunga o'zimiz xam guvox bo'lamiz.

Algebraik tenglamalarni taqribiiy yechish usullari aynan shu prinsip asosida qurilgan. Xususan (4.1) tenglama uchun oddiiy interasiya usuli qaqida to'xtalamiz. Agar (a, b) oraliqda (4.1) tenglama yagona ildiz mavjud bo'lib, shu oraliqda (4.1) tenglik qisqartma akslantirish shartini qanoatlantirsa, ya'ni

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b) \text{ uchun } |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < k \cdot |x_1 - x_2| \quad 0 < k < 1 \quad \text{bo'lsa, } x_0 \in (a, b)$$

olib navbatdagi qiymatlarni $x_{m+1} = \varphi(x_m)$; $m = 0, 1, 2, \dots$ formulalar bilan xisoblansa x_m ketma-ketlik $k \rightarrow \infty$ da tenglama ildiziga intiladi. Xaqqatdan xam

$$x_m = \varphi(x_{m-1})$$

$$x_{m+1} = \varphi(x_m)$$

Tenglamalarni ayirsak

$$|x_{m-1} - x_m| = |\varphi(x_m) - \varphi(x_{m-1})| < k|x_m - x_{m-1}| \quad (4.6)$$

Rekkurent tengsizlikni hosil qilamiz uning o'ng tarafiga yana (4.6) ning o'zini tatbiiq qilsak

$$|x_m - x_{m-1}| < k|x_{m-1} - x_{m-2}|$$

hosil bo'ladi va (4.6) tengsizlik

$$|x_{m+1} - x_m| < k^2|x_{m-1} - x_{m-2}|$$

ko'rinishini oladi. Bu jarayonni m marta takrorlasak

$$|x_{m+1} - x_m| < k^m |x_1 - x_0|$$

tengsizlik xosil bo'ladi. Undan esa $k < 1$ bo'lganligi uchun

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |x_{m+1} - x_m| = 0$$

ekanligi kelib chiqadi va $x_{m+1} = f(x_m)$ bo'lganligi uchun $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \alpha$ bo'lsa

$\alpha = f(\alpha)$ ya'ni $x = \alpha$ tenglama ildizi bo'lishi kelib chiqadi.

(4.1) tenglamaga oddiy iteratsiya usulini tadbiq qilish mumkin bo'lishi uchun etarli shart $|\varphi'(x)| < 1$ bo'lishi kerak ekan. Buni tekshirish esa unchalik qiyin emas.

Quyidagi misolni qo'ramiz.

$$x = \sqrt{x+12}$$

Tenglama ildizi $x = 4$ ekanligi aniq.

Biz bu erda yagona ildizi mavjud bo'lgan oraliq sifatida (1;5) oraliqni olishimiz mumkin. Bu misolda $\varphi(x) = \sqrt{x+12}$ bo'lgani uchun $\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+12}}$

bo'lib $x \in (1;5)$ da $|\varphi'(x)| < 1$ ekanligi ko'rinib turibdi. Demak bu tenglamaga oddiy iteratsiya usulini tadbiq qilish mumkin. $x_0 = 1$ deb olib keyingi qiymatlarni

$x_{m+1} = \sqrt{x+12}$ formula bo'yicha xisoblaymiz. Bund

$$x_1 = 3,60555; x_2 = 3,950386; x_3 = 3,99379; x_4 = 3,99922$$

qiymatlar xosil bo'ladi va ular aniq ildiz 4 ga intilayotgani ko'rinib turibdi.

ESLATMA: $|\varphi'(x)| < 1$ shart bajarilmagan xolda bu usulni aslo tadbiq qilib bo'lmaydi.

Lekin ma'lum almashtirishlar yordamida berilgan tenglamani qisqartma akslantirishlar shartiga mos ekvivalent tenglamaga almashtirish mumkin bo'lar ekan. Biz bu erda bu usullardan ba'zilarini ko'rib o'tamiz.

$$f(x) = 0$$

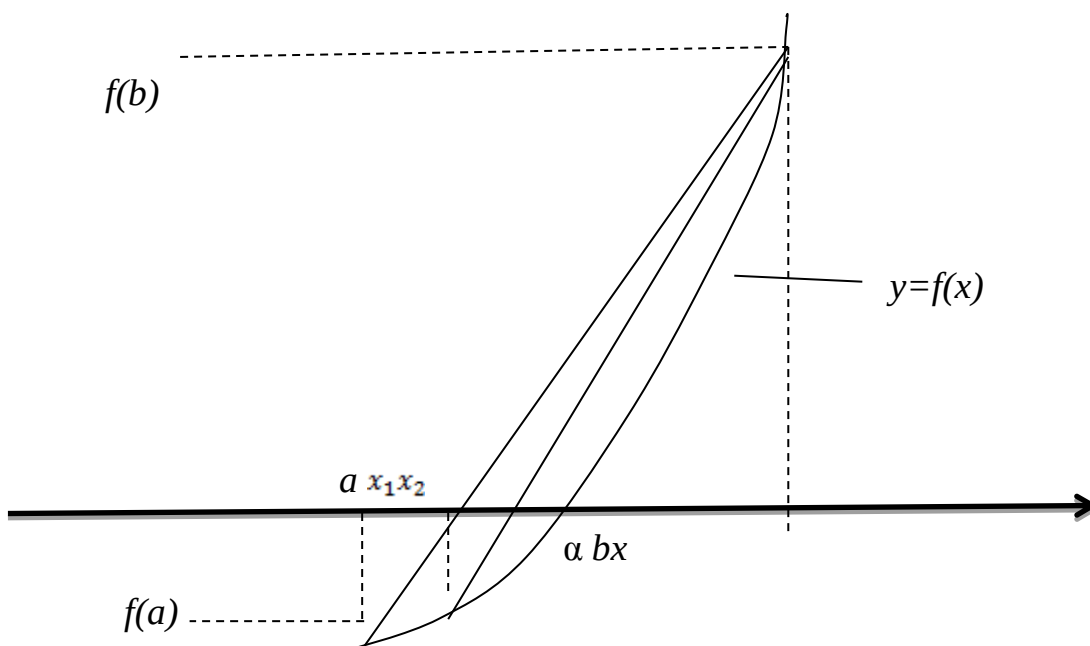
tenglamaning (a, b) oraliqda yagona ildizi mavjud bo'lsin, ya'ni

$$f(a) \cdot f(b) < 0; f''(x) > 0 (f''(x) < 0); x \in (a, b)$$

Vatarlar usuli.

Funktsiya grafigi asosida usul mohiyatini va algoritmini ifodalaymiz.





5-rasm

Chizmadan $\alpha \in (a, b)$ qiymat $f(\alpha) = 0$ shartga mos, ya'ni tenglama ildizi ekanligi ko'rinib turibdi.

Koordinat tekisligida $A(a; f(a))$ va $B(b; f(b))$ nuqtalarni tutashtiruvchi AV kesmalarni chizamiz. Bu kesma ox o'qi bilan kesishgan nuqtasini x_1 deb belgilaymiz. Keyingi qadamda $(x_1, f(x_1))$ va $(b; f(b))$ nuqtalar orqali vatar o'tkazamiz. Keyingi qadamda $(x_2, f(x_2))$ va $(b; f(b))$ orqali vatar o'tkazamiz. Shu tartibda $x_2, x_3, x_4, \dots$ ketma-ketlik xosil bo'ladi. Bu ketma-ketlik α – ildizga intilayotganligi ko'rinib turibdi. Bu erda $f''(x) > 0$, funktsiya grafigi botiq $(b; f(b))$ nuqta qo'zg'almas bo'layapti $x_1, x_2, \dots$ ketma-ketlikchapdan monoton o'sib α ga intilyapti. Agar $f''(x) < 0$, ya'ni grafik qavariq bo'lsa, $(a; f(a))$ nuqta qo'zg'almas bo'lar ekan. Usul algoritmini ifodalash uchun AV kesma tenglamasini tuzamiz.

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

Bu tenglamadan x_1 ni topish uchun OX bilan kesishgan nuqtada $y = 0$ bo'lishi

$$\text{kerakligidan } x_1 = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

5-rasmda keltirilgan (botiq grafik, $f''(x) > 0$) bo'lgan xol uchun algoritmi ko'rinishi $x_0 = a$ deb,

$$x_{m+1} = x_m - \frac{f(x_m)(b-x_m)}{f(b)-f(x_m)} \quad (4.7)$$

$m = 0, 1, 2, \dots$

ishchi formulani tavsiya qilish mumkin. Hisoblashlar

$$|x_{m+1} - x_m| < \varepsilon \quad (4.8)$$

shart bajarilguncha davom ettiriladi. Bu erda ε talab qilinayotgan aniqlik.

Agar grafik qavariq ($f''(x) < 0$) bo'lsa algoritmda $x_0 = b$ deb olib, navbatdagi yaqinlashishlarni

$$x_{m+1} = x_m - \frac{f(x_m)(a-x_m)}{f(a)-f(x_m)}; \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.9)$$

formula bo'yicha hisoblash mumkin. Demak usul algoritmi $f''(x) > 0$ bo'lgan xolda (4.7) formula, $f''(x) < 0$ bo'lgan xolda (4.9) formula bilan ifodalanadi. Xisoblar esa (4.8) shart bajarilguncha davom ettiriladi.

Namuna sifatida $x^4 - 16 = 0$ tenglamani olamiz. Aniq ildiz $x = 2 \in (1; 3)$ oraliqni olamiz va shu oraliqda vatarlar usulini tadbiiq qilamiz. Bu erda $f''(x) = 12x^2 > 0$ bo'lgani uchun hisoblar (4.7) formulalar bo'yicha olib boriladi.

Bu misol uchun (4.7) formula

$$x_{m+1} = x_m - \frac{(x_m^4 - 16)(3 - x_m)}{(81 - x_m^4)}$$

ko'rinishini oladi. Boshlang'ich $x_0 = 1$ nuqtaga ko'ra keyingi qiymatlar

$$x_1 = 1,37; \quad x_2 = 1,6325; \quad x_3 = 1,7972; \quad x_4 = 1,8921$$

kelib chiqadi. Bu ketma-ketlik monoton tarzda aniq ildiz $x = 2$ ga intilayotganligini ko'ramiz. Bu o'rinda, umuman barcha mavzular bo'yicha tanlanayotgan misollarning soddaligi, avvalo xisob-kitoblar sodda bo'lishi, asosiysi o'quvchiga keltirilayotgan usullarning ishonchli tadbiiqlarini sodda namoyishqilish va unda amaliyotga ishonch shakllantirishdan iborat. Aslida bu usullar universal bo'lib $f(x)$ ko'rinishiga hech qanday cheklanishlar talab qilmaydi. Faqat qaralayotgan (a, b) oraliqda $f(x)$ uzluksiz, hamda 2-tartibgacha uzluksiz hosilagacha ega bo'lsa bo'ldi.

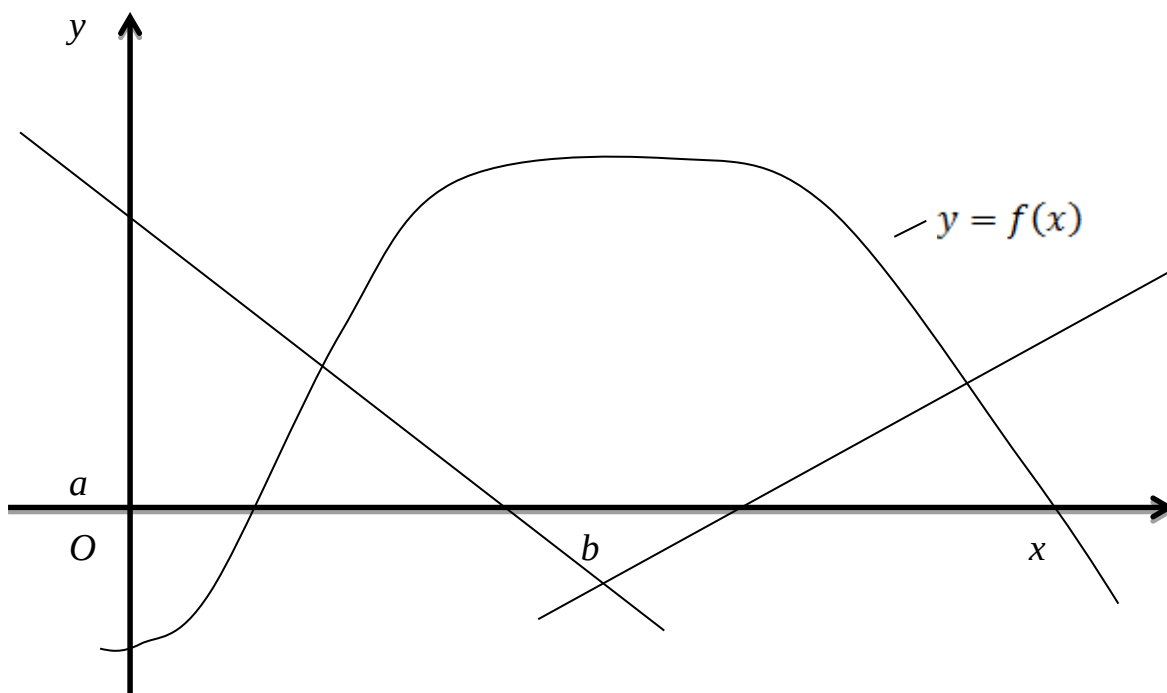
Bu usulga ham qisqartma akslantirish, ya'ni oddiy iteratsiya usuli nuqtai nazaridan qaraladigan bo'lsa $f''(x) > 0$ bo'lgan xolda $f(x) = 0$ tenglama unga ekvivalent

$$x = x - \frac{f(x) \cdot (b - x)}{f(b) - f(x)} = \varphi(x)$$

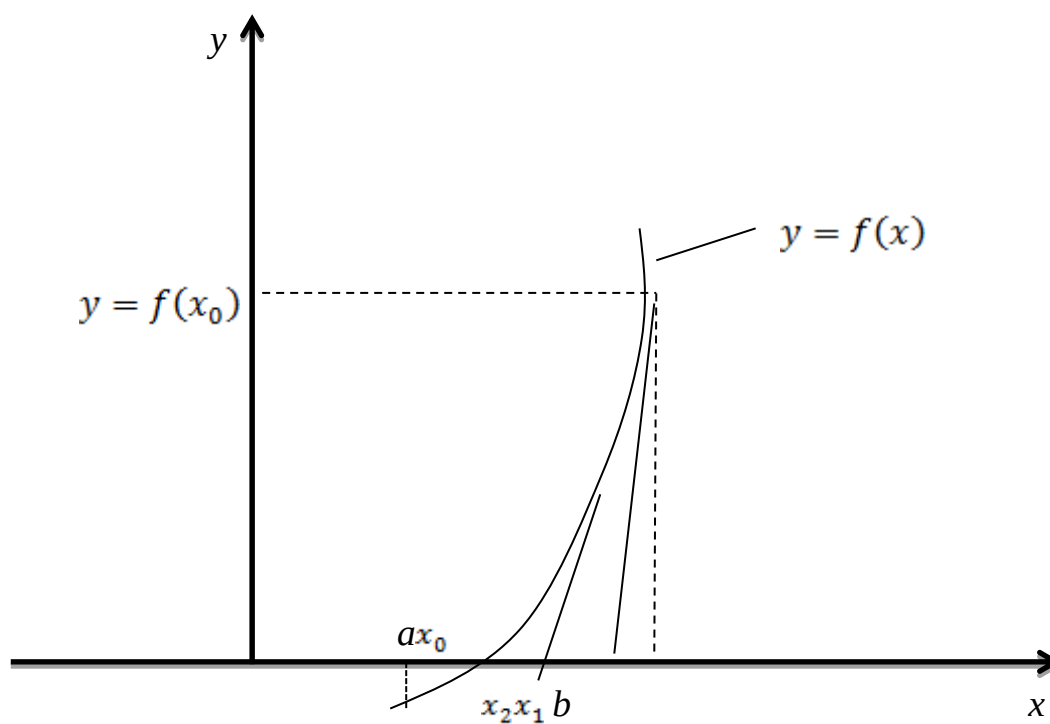
Tenglama bilan almashtirilayapti. $\varphi'(x)$ ifodasini topib qiymatini taxlil qilinsa xaqiqatdan xam $|\varphi'(x)| < 1$ shart o'rinli bo'lishini qo'ramiz.

Urinmalar usuli (Nyuton usuli).

Bu usul g'oyasining soddaligi, lekin g'oyat samaradorligi bilan ajralib turadi. Shuningdek bu usul g'oyasini tenglamalar sistemasiga xam tadbqiq qilsa bo'lar ekan. Usul g'oyasining geometrik ta'rifini keltiramiz. So'ngra esa bu ta'rif asosida usulning xisoblash algoritmini ifodalaymiz. $f(x) = 0$ tenglama echimini, ya'ni $y = f(x)$ funktsiya grafigining OX o'qi bilan kesishgan nuqtalarini topish talab qilinayotgan bo'lsin. Tenglamaning yagona ildizini o'z ichiga olgan $(a; b)$ oraliq aniqlangan bo'lsin. Bu xolat 6-rasmda ifodalangan.



Usul g'oyasiga ko'ra ixtiyoriy $x_0 \in (a; b)$ olinadi. Bu qiymat noma'lum ildiz uchun boshlang'ich yaqinlashish deb ataladi.



6-rasm

Tanlangan x_0 qiymatga mos funktsiya grafigi nuqtasi $(x_0; f(x_0))$ orqali grafikka urinma o'tkaziladi. Urinmaning OX o'qi bilan kesishgan nuqtasini navbatdagi yaqinlashish, ya'ni x_1 deb belgilaymiz. Bu x_1 ga mos grafik nuqtasi $(x_1; f(x_1))$ dan yana urinma o'tkazamiz va uning OX o'qi bilan kesishgan nuqtasini x_2 deb belgilaymiz. Bu jarayon 6-rasmda sxematik tarzda ifodalangan. Shu zaylda $x_3, x_4, \dots$ qiymatlarni ham aniqlash mumkin. Chizmadan $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ ketma-ketlik tenglama ildizi, ya'ni grafikning OX o'qi bilan kesishish nuqtasiga qarab intilishi yaqqol ko'rinib turibdi. Usulning analitik ifodasini chiqarish uchun $(x_0; f(x_0))$ nuqtadan o'tgan urinma tenglamasini tuzamiz.

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Urinmaning OX o'qi bilan kesishgan nuqtasida $y = 0$ bo'lganligi uchun x_1 uchun $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ formula hosil qilamiz. Har qadamda bir xil jarayon takrorlanganligi uchun usulning umumiy ko'rinishi

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.10)$$

shaklda ifodalanadi. (4.10) formula bo'yicha xisoblashlar $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ shart bajarilguncha davom ettiriladi. Bu erda $\varepsilon > 0$ talab qilinayotgan aniqlik tartibi. Urinmalar usuli uni kashf qilgan olim nomi bilan Nyuton usuli deb xam yuritiladi. Nyuton usulini namoyish qilish, xamda uning qanchalik samarali ekanligini ko'rsatish uchunquyidagi misolni ko'ramiz. Quyidagi $x^2 - 4 = 0$ tenglama ildizlari $x_1 = -2$ va $x_2 = +2$ ekanligi aniq. Xususan $(1;3)$ oraliqda $x_2 = 2 \in (1;3)$ ildiz joylashgan. Bu tenglama uchun Nyuton usuli ko'rinishi quyidagicha bo'ladi.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 4}{2x_k} = \frac{2x_k^2 - x_k^2 + 4}{2x_k} = \frac{x_k^2 + 4}{2x_k}$$

Xususan $x_0 = 3$ deb olinsa keyingi yaqinlashishlar qiymatlari quyidagicha bo'lar ekan.

$$\begin{aligned} x_1 &= 2,167 \\ x_2 &= 2,0061 \\ x_3 &= 2,0000092 \end{aligned}$$

Bu qiymatlar tenglamaning aniq ildiziga juda tez intilayotganiga guvoh bo'lamiz.

Xususan bu misol asosida $x^2 - a = 0$ tenglama ildizi bo'lgan $x = \sqrt{a}$ qiymatni aniqash uchun

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2 + a}{2x_k}$$

iteratsion, ya'ni ketma-ket yaqinlashish formulasini tavsiya qilish mumkin.

Masalan $\sqrt{5}$ qiymatni hisoblash uchun $x_0 = 3$ deb olsak

$$\begin{aligned} x_1 &= 2,333 \\ x_2 &= 2,23808 \\ x_3 &= 2,2360688 \end{aligned}$$

Qiymatlar $\sqrt{5} = 2,2360679$ qiymatga intilayotganligini ko'ramiz.

Demak

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2 + a}{2x_k}$$

Formulani $\sqrt[n]{a}$ ni hisoblash uchun ketma-ket yaqinlashish formula sifatida tavsiya qilish mumkin. Bu albatta chamalab qayta-qayta hisoblab ildizni aniqlashga qaraganda nixoyatda effektiv usuldir. Bu usulni istalgan tartibdagi ildizni hisoblashga ham moslashtirish mumkin. Masalan $\sqrt[n]{x}$ Qiymat

$$x^n - a = 0$$

tenglama ildizi deb qaraladigan bo'lsa, uni aniqlash uchun Nyuton usuliga ko'ra

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^n - a}{n \cdot x_0^{n-1}} = \frac{(n-1)x_0^n + a}{n \cdot x_0^{n-1}}$$

Istalgan tartibdagi ildizni hisoblash uchun qulay iteratsion formulani hosil qilamiz.

Nyuton usulining formulasidan qisqartma akslantirish shartlarini tekshiramiz

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \varphi(x)$$

bo'lganligi uchun bu formuladan

$$\varphi(x) = 1 - \frac{f'(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$(a; b)$ oraliq ildizi atrofi bo'lib $x = \alpha$ ildizga teng bo'lganda $f(x') = 0$, demak $\varphi'(\alpha) = 0$ bo'ladi. Bundan esa $x \in (a; b)$ da $(\varphi'(\alpha)) < 1$ bo'lishiga kafolat bo'lar ekan.

5-MA'RUZA.

Mavzu: Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini echishning aniq va taqribiy usullari. Oddiy iteratsiya va Zaydel usullari. Ularning yaqinlashish shartlari.

Sistemalarning shartlanganligi va ta'sirchanligi.

Reja:

1. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi. Ifodalash usullari.
2. Sistemalarni echishning aniq usullari.
3. Oddiy iteratsiya usuli. Yaqinlashish sharti.
4. Zaydel usuli. Yaqinlashish sharti.
5. Sistemalar ta'sirchanligini baxolash usullari.

Asosiy ibora va atamalar: matritsa, vektor, norma, determinant, iteratsiya, ta'sirchanlik.

Ma'lumki, n noma'lumli n tachiziqli algebraik tenglamalar sistemasi umumiy xolda

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (5.1)$$

ko'rinishda ifodalanadi. Berilgan a_{ij} va b_i qiymatlariga ko'ra (5.1) sistema tenglamalarining barchasini qanoatlantiruvchi $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ qiymatlar to'plamini topish talab qilinadi. Biz bu erda faqat noma'lumlar va tenglamalar soni bir xil bo'lgan xol bilan shug'ullanamiz. Amaliyotda boshqa xollar xam bo'lishi mumkin. Agar (5.1) sistema koeffitsientlaridan tuzilgan kvadrat sonlar jadvalini

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

kvadrat matritsa, noma'lumlar va tenglama o'ng taraflarini ustun matritsa

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

deb qaralsa (5.1) sistemani matritsa ko'rinishida

$$A\bar{x} = \bar{b} \quad (5.2)$$

ifodalash mumkin. (5.1); (5.2) sistemalarni echishda aniq usullar: noma'lumlarni yo'qotish, Kramer usullari yoki teskari matritsani topish mumkin bo'lsa matritsa usullarini tadbiq qilish mumkin. Faqat n ortgan sari bu usullarni tadbiq qilish murakkablashib, samaradorligikamayib borverar ekan. Shuning uchun nisbatan samarador bo'lgan taqribiy usullardan foydalanish ma'qul bo'lar ekan.

Biz bu erda umumiy g'oya va ayrimtaqribiy usullar bilan tanishib o'tamiz. Buning uchun A matritsani 3 ta:diagonal, yuqori uchburchak, quyi uchburchak qismlari yig'indisi sifatida ifodalaymiz.

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1}n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Bu erda D – diagonal, V -quyi uchburchak, S –yuqori uchburchak shaklidagi matritsalar.

$A = D + B + C$ bo'lgani uchun sistemani

$$D\bar{x} + B\bar{x} + C\bar{x} = \bar{b} \quad (5.3)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin.(5.3) tenglamadan

$$D\bar{x} = \bar{b} - B\bar{x} - C\bar{x}$$

tenglik hosil bo'ladi. Uni D^{-1} ga ko'paytirib yuborsak

$$\bar{x} = D^{-1}\bar{b} - D^{-1}B\bar{x} - D^{-1}C\bar{x} \quad (5.4)$$

tenglama hosil qilamiz. (5.4) tenglama taqribiy usullar uchun asos bo'lib hizmat qilarg ekan. Bunda sistemaning echimi uchun boshlang'ich yaqinlashish $\bar{x}^T = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ ma'lum bo'lsa $\bar{x}_{nn}^{(1)}$ topishda (5.4)dan kelib chiqadigan

$$\bar{x}^{(k+1)} = D^{-1}\bar{b} - D^{-1}(B + C)\bar{x}^{(k)} \quad (5.5)$$

Formula kelib chiqadi. (5.5) formula qisqartmasi akslantirish bo'lsa bu formula bo'yicha xisoblangan $\bar{x}^{(k)}$ ketma-ketlik sistema echimga intilar ekan. (5.50) tenglikdan undan kelib chiqadigan

$$\bar{x}^{(k)} = D^{-1}\bar{b} - D^{-1}(B + C)\bar{x}^{(k-1)}$$

Tenglikni ayirsak

$$\bar{x}^{(k+1)} - \bar{x}^{(k)} = D^{-1}(B + C)(\bar{x}^{(k-1)} - \bar{x}^{(k)}) \quad (5.6)$$

Formulani xosil qilamiz. Bu formula qisqartma akslantirish bo'lish shartini keltirib chiqaramiz. Norma sifatida

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} ; \quad \|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

Ma'lum normalardan foydalanamiz. Bu erda $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ A matritsa xos sonlari (5.6) tenglik ikki tarafidan norma olsak va norma xossalaridan foydalansak

$$\|\bar{x}^{(k-1)} - \bar{x}^{(k)}\| \leq \|D^{-1}(B + C)\| \cdot \|\bar{x}^{(k-1)} - \bar{x}^{(k)}\|$$

Tengsizlik kelib chiqadi. Bunda qisqartma akslantirish, ya'ni usul yaqinlashish sharti sifatida $\|D^{-1}(B + C)\| < 1$ shartni belgilasabo'lar ekan. Bu shartning bajarilishi etarli mezon sifatida A-matritsa dioganal elementlari modul bo'yicha qolgan elementlari modullari yig'indisidan yuqori bo'lishi, ya'ni

$$\|a_{ii}\| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad i = 1, 2, \dots, n$$

shartdan foydalanish mumkin ekan.

Zaydel usulida (5.3) tenglik o'zgacha guruxlanadi, ya'ni

$$(D + B)\bar{x} = \bar{b} - c\bar{x}$$

$$\bar{x}^{(k-1)} = (D + B)^{-1}\bar{b} - (D + B)^{-1} \cdot C \cdot \bar{x}^{(k)} \quad (5.7)$$

Bu usulning yaqinlashish sharti sifatida

$\|(D + B)^{-1} \cdot C\| < 1$ shartni keltirish mumkin. Bu erda ham etarli shart sifatida A matritsa diogonal elementlari modul bo'yicha o'zi joylashgan qatordagi qolgan elementlari modullari yig'indisidan katta bo'lishini talab qilish mumkin.

Bu usullar moxiyati va algoritmini namoyish qilish uchun quyidagi misolni qaraymiz.

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 17 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 14 \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 = 28 \end{cases}$$

Bu sistema uchun oddiy iteratsiya va Zeydel usullari yaqinlashish shartlari bajariladi, ya'ni diogonal elementlar ancha katta.

Oddiy iteratsiya usuli uchun

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = 1,7 - 0,2x_2^{(k)} - 0,1x_3^{(k)} \\ x_2^{k+1} = 2,8 - 0,2x_1^{(k)} - 0,2x_3^{(k)} \\ x_3^{k+1} = 3,5 - 0,25x_1^{(k)} - 0,125x_2^{(k)} \end{cases} \quad (5.8)$$

formulalar hosil bo'ladi. Odatda $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$ deb olinadi. U xolda formulalarga ko'ra

$x_1^{(1)} = 1,7$; $x_2^{(1)} = 2,8$; $x_3^{(1)} = 3,5$ kelib chiqadi. Keyingi qadamda bu qiymatlar asosida

$$x_1^{(2)} = 0,79 ; x_2^{(2)} = 1,76 ; x_3^{(2)} = 2,725$$

Uchinchi qadam esa

$$x_1^{(3)} = 1,0755 ; x_2^{(3)} = 2,097 ; x_3^{(3)} = 3,0825$$

qiymatlar xosil bo'ladi. Bu qiymatlar sistema aniq echimlari

$x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$ qiymatlarga intilayotganini ko'ramiz.

Zeydel usulining oddiy iteratsiyadan yagona farqi hisoblangan noma'lum qiymatlari bevosita tadbiq qilib borilishidan iborat. Xususan yuqoridagi misolda Zeydel usulini tadbiq qilsak (5.8) formulalar quyidagicha o'zgarar ekan.

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1,7 - 0,2x_2^{(k)} - 0,1x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 2,8 - 0,2x_1^{(k+1)} - 0,2x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 3,5 - 0,25x_1^{(k+1)} - 0,125x_2^{(k+1)} \end{cases} \quad (5.9)$$

Keltirilgan muloxazalar va misol asosida usullarning umumiy xisoblash formulalarini ifodalash mumkin. Agar tadbiq qilish shartlari bajarilgan bo'lsa (5.1) sistema uchun oddiy iteratsiya usuli xisoblash formulalari

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right); \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.10)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots \quad x_i^{(0)} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Zaydel usuli uchun esa

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right); \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$k = 0, 1, 2, \dots \quad x_i^{(0)} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.11)$$

Ko'rinishni oladi. (5.10) va (5.11) formulalar bo'yicha kompyuterda xisoblash dasturini tuzish va barcha Hisoblashni kompyuterda bajarish mumkin. Hisoblashlarni yakunlash sharti sifatida esa

$$\left(\sum_{j=1}^n (x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)})^2 \right)^{1/2} < \varepsilon$$

shartni olish mumkin. Bu erda $\varepsilon > 0$ tanlab olingan aniqlik.

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining yaxshi yoki yomon shartlanganligi va ta'sirchanligi.

Agar (5.1) sistemada o'ng tarafi $(\bar{b})$ ning kichik o'zgarishlariga $(\bar{x})$ echimning ham oz o'zgarishlari mos kelsa sistema yaxshi shartlangan deyiladi. Bu sifatlar asosan sistemaning asosiy matritsasi A va uning normalari bilan bog'liq. Biz bu erda asosan masalaning amaliy taraflari va belgilari bilan shug'ullanamiz. Agar (5.1) sistema uchun $\det A \neq 0$ bo'lib, ya'ni sistema yagona echimga ega bo'lib $\|A\|$ juda kichik bo'lmasa sistema yaxshi shartlangan deyiladi. Bu erda matritsa normasi sifatida ma'lum normalardan birortasini olish mumkin. Bu erda $\|A\| = \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k|$, xos sonlarning modul bo'yicha eng kattasi qiymatini olamiz. Yomon shartlangan sistema va uning oqibatlarini quyidagi misolda namoyish qilamiz.

$$\begin{cases} 0,01x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6,01 \\ 0,01x_2 + 3x_3 = 3,01 \\ 0,01x_3 = 0,01 \end{cases}$$

Sistema aniq echimlarini $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ ekanligi ko'rinib turibdi. Xos sonlari esa

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 0,01 - \lambda & 4 & 2 \\ 0 & 0,01 - \lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0,01 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(0,01 - \lambda)^3 = 0$$

Tenglamadan topiladi. Bundan barcha xos sonlari bir xil

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,01$ kichik va $\|A\| = 0,01$ xam kichik ekanligini ko'ramiz. Demak sistema yomon shartlangan. Buning oqibatlarini o'rganish uchun sistema oxirgi tenglamasi o'ng tarafini ozgina, ya'ni 0,001ga o'zgartirilsa nima bo'lishini ko'raylik. Sistema quyidagi ko'rinishni oladi.

$$\begin{cases} 0,01x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6,01 \\ 0,01x_2 + 3x_3 = 3,01 \\ 0,01x_3 = 0,011 \end{cases}$$

Bu sistema echimlarini oxirgi tenglamasidan boshlab topadigan bo'lsak,

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{0,011}{0,01} = 1,1 \\ x_2 &= \frac{3,01 - 3 \cdot 1,1}{0,01} = \frac{-0,29}{0,01} = -29 \\ x_1 &= \frac{6,01 - 4 \cdot (-29) - 2 \cdot 1,1}{0,01} = \frac{119,81}{0,01} = 11981 \end{aligned}$$

Bu echimlar sistemaning aniq echimi $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ bilan taqqoslabbo'lmas darajada farq qiladi. Bundan ko'rinadiki, sistema yomon shartlangan bo'lsa sistema juda ta'sirchan bo'lib, arzimagan xatolik xam natijani butunlay ishonchsiz darajaga olib kelishi mumkin. Bunday xollarda xatto yaxlitlash xatoliklari ham havfli qadam bo'lishi mumkinligi ko'rinib turibdi.

6-MA'RUZA.

Mavzu: Jadval ko'rinishida berilgan funktsiyalar uchun approksimatsiya masalasi.

Tengmas va teng oraliqlar uchun Lagranj interpolatsion ko'pxadi. Ko'pxadning xatoligi.

Reja:

1. Approksimatsiya masalasi va uni echish usullari.
2. Interpolyatsiya masalasi, matematik ifodasi. Echimning mavjudligi.
3. Lagranj interpolatsion ko'phadi.
4. Interpolyatsion ko'phad xatoligi.

Asosiy ibora va atamalar: approksimatsiya, interpolyatsiya, interpolyatsiyalash tugunlari va qadami, interpolyatsiyalash xatoligi

Amaliyotda jarayonning parametrlari tajriba asosida jadval ko'rinishida aniqlangan bo'lishi mumkin. Xususan jarayonning X va U parametrlari ustida o'tkazilgan kuzatuvlar quyidagi jadval ko'rinishida ifodalangan bo'lsin.

x_i	x_0	x_1	x_2		x_{n-1}	x_n
$f(x_i)$	f_0	f_1	f_2		f_{n-1}	f_n

Ana shu jadval qiymatlar asosida X va U o'zgaruvchilar orasidagi funktsional bog'lanishni $Y = P(x)$ aniqlash masalasi approksimatsiya masalasi deyiladi. Bu erda ikkita savol hal qilinishi kerak. Birinchidan $P(x)$ funktsiya ko'rinishini tanlash, ikkinchisi esa uning jadvalga muvofiq yoki yaqinligini ta'minlash. Birinchi savol javobi sifatida funktsiyalar to'plamidan hisoblash va tahlil qilish nuqtai nazaridan eng qulayi, ya'ni ko'pxadlarni tanlaymiz. Ikkinchi savol ya'ni jadvalga muvofiqlik belgisi sifatida tenglikni talab qilamiz.

Natijada quyidagi matematik masalani xosil qilamiz

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n \quad (6.1)$$

ko'pxadlar orasidan shundayi topilsinki, jadval tugunlari x_i nuqtalarda noma'lum funktsiya jadval qiymatlariga teng bo'lsin.

$$P_n(x_i) = f_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

[illegible]
$$\begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & \dots & x_1 & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \dots & \dots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & & & \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix} = W$$

Interpolyatsion ko'phad tuzishning original usuli Lagranj tomonidan kashf qilingan. Interpolyatsion ko'pxadni (6.1) ko'rinishda emas

ko'rinishda izlaymiz. Bu erda f_i lar funktsiyaning jadval qiymatlari $P_{in}(x)$ lar esa xar biri n – darajali ko'pxad. U xolda (6.3) ifoda xam n – darajali ko'pxad bo'ladi.

$$P_{in}(x_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

topiladi. Bu ifodalarni (6.3) formulaga qo'yilsa

38

ko'rinishdagi ko'phadni hosil qilamiz. (6.4) ko'phad tengmas oraliqlar uchun Lagranj interpolatsion ko'phadi deyiladi.

Lagranj interpolatsion ko'phadini tuzishni quyidagi misolda ko'rib chiqamiz.

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	5	3	5	17

Jadval bilan berilgan funktsiya uchun Lagranj interpolatsion ko'phadi tuzilsin deyilgan bo'lsa, (6.4) formula bo'yicha quyidagi ko'phadni hosil qilamiz. Bu erda $n = 3$

$$\begin{aligned}
 L_n(x) &= 5 \cdot \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} + 3 \cdot \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} + 5 \cdot \frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(1+1)(1-0)(1-2)} + 17 \cdot \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)} \\
 &= -\frac{5}{6}(x^3 - 3x^2 + 2x) + \frac{3}{2}(x^3 - 2x^2 - x + 2) - \frac{5}{2}(x^3 - x^2 - 2x) + \frac{17}{6}(x^3 - x) \\
 &= \frac{1}{6}(-5x^3 + 15x^2 - 10x + 9x^3 - 18x^2 - 9x + 18 - 15x^3 + 15x^2 + 30x + 17x^3 - 17x) = \frac{1}{6}(6x^3 + 12x^2 - 6x + 18) = x^3 + 2x^2 - x + 3
 \end{aligned}$$

Demak $L_n(x) = x^3 + 2x^2 - x + 3$ berilgan masala echimi bo'lar ekan. Bevosita tekshirish bilan bu ko'phad jadvalga to'la mosligini ko'ramiz.

Interpolatsion ko'phadning qoldiq hadi

$f(x) - L_n(x) = R_n(x)$ Interpolatsion ko'phadning qoldiq hadi, yoki xatoligi deyiladi. Shartga ko'ra barcha x_i ; $i = 0, 1, 2, \dots, n$ nuqtalarda $R_n(x_i) = 0$ bo'ladi. Shuning uchun uni

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n) \quad (6.5)$$

Ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lar ekan. Bu erda $\xi \in (x_0; x_n)$ Roll teoremasi bo'yicha kelib chiqadigan nuqta. Agar $f^{(n+1)}(\xi)$ xosilalar chegaralangan bo'lsa, n ortgan sari xatolik nolga intilib borishi ko'rinadi.

Agar $x_0, x_1, \dots, x_n$ nuqtalar teng oraliqlar bo'yicha joylashgan bo'lsa, ya'ni

$$x_i = x_0 + i \cdot h; \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

formulaga muvofiq kelsa, Lagranj interpolatsion ko'pxadi ko'rinishini soddalashtirish mumkin bo'lar ekan. Haqiqatdan ham $x - x_0 = t \cdot h$ formula bo'yicha yangi o'zgaruvchi t ga o'tadigan bo'lsak va

$$x - x_i = x - (x_0 + ih) = (t - i)h$$

$$x_i - x_j = (x_0 + ih) - (x_0 + jh) = (i - j)h$$

munosabatlarni e'tiborga olsak yangi t o'zgaruvchilarda (6.4) ko'pxad quyidagi ko'rinishni oladi.

$$L_n(t) = \sum_{i=0}^n f_i \frac{t(t-1)\dots(t-i+1)(t-i-1)\dots(t-n)}{i!(-1)^{n-i}(n-i)!} \quad (6.6)$$

(6.6) formula teng oraliqlar uchun Lagranj interpolatsion ko'pxadi deyiladi. Uning qulayligi, (6.6) formulada x_i qiymatlar umuman qatnashmaydi va (6.4) ga qaraganda soddaligi va universalligi bor. Bu almashtirish (6.5) xatolik formulasiga qo'yilsa xatolik tartibi bo'yicha $O(h^{n+1})$ bo'lishini ko'ramiz.

7-MA'RUZA

MAVZU: Tengmas va teng oraliqlar uchun Nyuton interpolatsion ko'phadlari.

Xatoligini baholash. Tadbiqi bo'yicha tavsiyalar.

Reja:

1. Bo'lingan ayirmalar.
2. Tengmas oraliqlar uchun Nyuton interpolatsion ko'phadi.
3. Chekli ayirmalar
4. Teng oraliqlar uchun Nyuton interpolatsion ko'phadi.
5. Ko'pxad xatoligi. Tadbiqi bo'yicha tavsiyalar.

Asosiy ibora va atamalar: bo'lingan ayirma, chekli ayirma, bartaraf qilib bo'lmas xatolik, qoldiq hadi, chekli ayirmalar jadvali.

Lagranj interpolatsion ko'phadi universal va sodda bo'lishi bilan ayrim kamchiliklarga ham ega ekan. Xususan interpolatsion ko'pxadi bo'yicha funktsiya qiymatini hisoblash uchun bajarilishi kerak bo'lgan amallar juda ko'p. Shuningdek, funktsiya qiymatlar jadvaliga yana bir $(x_{n+1}; f(x_{n+1}))$ qiymat qo'shilsa barcha ishni qaytadan bajarish kerak bo'ladi. Bu kamchiliklardan xoli

bo'lgan interpolatsionko'phad Nyuton tomonidan kashf qilingan. Biz bu erda bevosita ko'pxadni tuzish bosqichlari va jarayonini keltiramiz. Avvalo,bo'lingan ayirmalar tushunchasini kiritamiz. Funktsiya qiymatlar jadvali $(x_i, f(x_i))_{i=0,1,2,...,n}$ berilgan bo'lsa birinchi tartibli bo'lingan ayirmalar

$$\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i} = f(x_i; x_{i+1}) ; \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (7.1)$$

Formulalar bo'yicha xisoblanadi. $f(x_0; x_1), f(x_1; x_2), \dots, f(x_{n-1}; x_n)$ nta birinchi tartibli bo'lingan ayirmalar topilgach, ikkinchi tartibli bo'lingan ayirmalar

$$\frac{f(x_i; x_{i+1}) - f(x_{i-1}; x_i)}{x_{i+1} - x_{i-1}} = f(x_{i-1}; x_i; x_{i+1}) \quad (7.2)$$

Formula bo'yicha kiritiladi. (7.1) va (7.2) formulalar shu tartibda davom ettirilsa, 3-,4-,... tartibli bo'lingan ayirmalar ham topiladi. Umumiy formula sifatida agar k -tartibli bo'lingan ayirmalar ma'lum bo'lsa k -tartibli bo'lingan ayirmalar

$$\frac{f(x_i; x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) - f(x_{i-1}; x_i, \dots, x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_{i-1}} = f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+k+1}) \quad (7.3)$$

Formula bo'yicha topiladi. Bo'lingan ayirmalar quyidagi jadval ko'rinishda to'ldiriladi.

x_i	$f(x_i)$	1-tartibli bo'lgan ayirma	2- tartibli bo'lgan ayirma	3- tartibli bo'lgan ayirma		n -tartibli bo'lgan ayirma
x_0	$f(x_0)$					
		$f(x_0; x_1)$				
x_1	$f(x_1)$		$f(x_0; x_1, x_2)$			
		$f(x_1; x_2)$		$f(x_0; x_1, x_2, x_3)$		
x_2	$f(x_2)$		$f(x_1; x_2, x_3)$			
		$f(x_2; x_3)$		$f(x_1; x_2, x_3, x_4)$		
x_3	$f(x_3)$		$f(x_2; x_3, x_4)$			
		$f(x_3; x_4)$				

x_4	$f(x_4)$					$f(x_0; x_1, x_2, \dots, x_n)$
...						
...						
x_{n-1}	$f(x_{n-1})$		$f(x_{n-2}; x_{n-1}; x_n)$			
		$f(x_{n-1}; x_4);$				
x_n	$f(x_n)$					

Jadvaldan ko'rinadiki, 1-tartibli bo'lingan ayirmalar soni n ta, ya'ni qiymatlar sonidan bitta kam, 2-tartibli ayirmalar soni $n - 1$ bo'lar ekan. Tartibi ortgan sari bo'lingan ayirmalar soni bittadan kamayib boradi. Shu tariqa n tartibli bo'lingan ayirma bitta bo'lar ekan. Jadval esa uchburchak ko'rinishda bo'ladi. Bu jadvalni yuqori qismida, jadvalda tagiga chizilgan, Nyuton interpolatsion ko'phadikoeffitsentlari hosil bo'lar ekan. Ular asosida Nyuton interpolatsion ko'phadi quyidagicha ifodalanar ekan.

$$H_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f(x_0; x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0; x_1, x_2) + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \cdot f(x_0; x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (7.4)$$

Keltirilgan qoidani quyidagi misolda ko'ramiz.

x_i	$f(x_i)$	1-tartibli bo'lgan ayirma	2- tartibli bo'lgan ayirma	3- tartibli bo'lgan ayirma	4- tartibli bo'lgan ayirma
-1	<u>5</u>				
		$\frac{3-5}{1} = -2$			
0	3		$\frac{0 - (-2)}{1 - (-1)} = 1$		
		$\frac{3 - 3}{1 - 0} = 0$		$\frac{10 - 1}{2 - (-1)} = 3$	
1	3		$\frac{20 - 0}{2 - 0} = 10$		$\frac{7 - 3}{3 - (-1)} = 1$
		$\frac{23 - 3}{2 - 1} = 20$		$\frac{31 - 10}{3 - 0} = 7$	

2	23		$\frac{82 - 20}{3 - 1} = 31$		
		$\frac{105 - 23}{3 - 2} = 82$			
3	105				

Bu jadval asosida (7.4) formulaga ko'ra Nyuton interpolatsion ko'phadini tuzamiz.

$$\begin{aligned}
 H_4(x) &= 5 + (x+1) \cdot (-2) + (x+1) \cdot x \cdot 1 + (x+1) \cdot x(x-1) \cdot 3 + (x+1) \cdot x(x-1) \cdot (x-2) \cdot 1 \\
 &= 5 - 2(x+1) + (x^2+x) + 3(x^3-x) + 1(x^4-2x^3-x^2+2x) \\
 &= x^4 + x^3 - 2x + 3
 \end{aligned}$$

Hosil bo'lgan ko'phad funktsiya qiymatlar jadvaliga to'la mos keladi.

Bu ko'phad asosida funktsiyaning istalgan nuqtadagi qiymatini topish mumkin. Masalan $x = 0,1$ nuqtadagi qiymati so'ralgan bo'lsa

$$f(0,1) \approx H_4(0,1) = 0,0001 + 0,001 - 0,20 + 3 = 3,1989$$

qiymatini topamiz.

Nyuton va Lagranj interpolatsion ko'phadlarini aslida bitta masala echimi bo'lganligi uchun ular faqat tuzilish usulidagina farq qilinadi, aslida esa ular aynan bir xil chiqadi. Shuning uchun topilgan qiymat xatoligini baxolashda xam Lagranj ko'pxadi qoldiq hadi formulasidan foydalanish mumkin. Bizdagi misolda soddalik uchun $h = 1$ olingan, xatolik tartibi $O(h^5)$ qoida unchalik yaxshi natija emas. Asida xatolik

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1} \geq |R_n(x)|$$

Tengsizlik bo'yicha baxolansa xamda $f^{(n+1)}(\xi)$ chegaralangan desak xatolik tartibi uchun

$$\frac{M \cdot h^{n+1}}{(n+1)!} \approx |R_n(x)| \quad \text{munosabatdan foydalansa xam bo'ladi.}$$

Nyuton interpolatsion ko'phadining Lagranj interpolatsion ko'phadini avzal tarafi jadvalga biror yangi ma'lumot qo'shilsa ko'phadga yangi bitta had

qo'shilar ekan xolos. Soddalik yuqoridagi misolda bu xolatni taxlil qilamiz. Agar jadvalda faqat $x = -1; 0; 1; 2$ qiymatlargina bo'lsa

$$H_3(x) = 5 + (x+1) \cdot (-2) + (x+1) \cdot x \cdot 1 + (x+1) \cdot x \cdot (x-1) \cdot 3$$

kelib chiqqan bo'lar edi. Agar $x = 3$ dagi ma'lumot xam qo'shilsa

$$H_4(x) = H_3(x) + (x+1) \cdot x(x-1)(x-2) \cdot 1$$

ko'phad xosil bo'ladi. Keltirilgan muloxazalar o'rinli ekanligini ko'ramiz.

Eslatma: Interpolyatsion ko'phadlar funktsiyaning $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ nuqtalardagi qiymatlari asosida tuziladi. Bu ko'phad xatoligi $O(h^{n+1})$ tartibda bo'ladi deyiladi. Faqat bu xulosa $x \in (x_0; x_n)$ oraliqdagina o'rinli. Bu oraliqdan tashqaridagi qiymatlar uchun hech qanday xulosa qilib bo'lmaydi. Bu xolat ekstrapolyatsiya masalasi bo'lib uning echimini topishning ishonarli usullari yo'q.

Interpolyatsiya masalasida yana bir usulni ko'ramiz. Teng oraliqlar uchun Nyuton interpolyatsion ko'pxadi. Agar interpolyatsiyalash tugunlari bir xil masofada joylashgan bo'lsa, ya'ni $x_i = x_0 + ih, i = 0, 1, 2, \dots, n$ munosabat o'rinli bo'lsa, $x - x_0 = th$ almashtirish kiritiladi, xamda funktsiya qiymatlar jadvali asosida chekli ayirmalar jadvali tuziladi. Birinchi tartibli chekli ayirmalar

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = f_{i+1/2}^1 \quad (7.5)$$

Birinchi tartibli chekli ayirmalar asosida 2-tartibli chekli ayirmalar hisoblanadi.

$$f_{i+1/2}^1 - f_{i-1/2}^1 = f_i^2; \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (7.6)$$

Xuddi shunday tartibda 3-, 4-, tartibli chekli ayirmalar aniqlanadi. Hisoblash tartibi va jadval ko'rinishi quyida aks ettirilgan.

x_i	$f_{(x_i)}$	1-tartibli	2-tartibli		n -tartibli
x_0	f_0				
		$f_1 - f_0 = \underline{f_{1/2}^1}$			
x_1	f_1		$f_{3/2}^1 - f_{1/2}^1 = \underline{f_1^2}$	...	
		$f_2 - f_1 = \underline{f_{3/2}^1}$			
x_2	f_2		$f_{5/2}^1 - f_{3/2}^1 = \underline{f_2^2}$		
		$f_3 - f_2 = \underline{f_{5/2}^1}$			

x_3	f_3		$f_{7/2} - f_{5/2} = f_3^2$		
		$f_4 - f_3 = f_{7/2}$			
x_4	f_4				
...					$\underline{f_{n/2}^n}$
...					
x_{n-2}	f_{n-2}				
		$f_{n-2} - f_{n-1} = f_{n-3/2}^1$			
x_{n-1}	f_{n-1}		$f_{n-1/2}^1 - f_{n-3/2}^1 = f_{n-1}^2$		
		$f_n - f_{n-1} = f_{n-1/2}^1$			
x_n	f_n				

Jadvalning yuqori dioganali bo'ylab hosil bo'lgan (tagiga chizilgan) koeffitsientlar asosida interpolatsion ko'pxad quyidagicha ifodalanadi.

$$H_n(t) = f_0 + t \cdot f_{1/2}^1 + \frac{t(t-1)}{2!} f_1^2 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} f_{3/2}^3 + \dots + \frac{t(t-1)(t-2)\dots(t-n+1)}{n!} f_{n/2}^n \quad (7.7)$$

(7.7) formula teng oraliqlar uchun Nyuton interpolatsion ko'pxadi deyiladi. (7.7)

ko'phad asosida biror $f(x)$ qiymatni aniqlash uchun avval $\frac{x-x_0}{h} = t$ formulaga ko'ra t topiladi va (7.7) formulaga qo'yib $f(x) \approx H_n(t)$ topiladi.

Quyidagi misolni ko'ramiz. Funktsiyaning

x_i	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$f(x_0)$	2	2,3	2,5	2,3	2,2

qiymatlar jadvaliga ko'ra Nyuton interpolatsion ko'phadini tuzing va $f(0,25)$ qiymatini aniqlang. Avvalo chekli ayirmalar jadvalini tuzamiz.

x_i	$f(x_0)$	1- tartibli	2- tartibli	3- tartibli	4- tartibli
0,2	<u>2</u>				
		<u>0,3</u>			
0,3	2,3		<u>-0,1</u> + δ		
		0,2Q δ		<u>-0,3</u> - 3 δ	

0,4	2,5Q δ		-0,4-2 δ		<u>0,8</u> + 6 δ
		-0,2- δ		0,5Q3 δ	
0,5	2,3		0,1Q δ		
		-0,1			
0,6	2,2				

Bu jadval asosida Nyuton interpolatsion ko'phadi

$$H_n(t) = 2 + t \cdot 0,3 + \frac{t(t-1)}{2!}(-0,1) + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \cdot (-0,3) + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!} 0,8$$

tuziladi. xq0,25 qiymatga ko'ra $t = (x - x_0)/h = 0,5$ topiladi. Bu qiymat bo'yicha $f(0,25) \approx H_4(0,5) = 2,1125$ funktsiya taqribiy qiymati topiladi. Jadvalda shuningdek funktsiya qiymatlarida bartaraf qilib bo'lmas xatolik mavjud bo'lsa uning chekli ayirmalar jadvali bo'yicha yoyilishi va natijaga ta'siri sxematik tarzda ifodalangan. Bu erda $f(0,4) = 2,5$ qiymatda δ tartibdagi xatolik bo'lgan xol namoyish qilingan.

Amaliyotda approksimatsiya masalasini echishda quyidagi usuldan foydalanishni tavsiya qilish mumkin. Funktsiyaning qiymatlar jadvalidagi bartaraf qilib bo'lmas xatolik tartibiga ko'ra, hamda jadval qadami h ga ko'ra interpolatsion ko'phadning samarali darajasi tanlanadi. So'ngra kerakli qiymatga qarab jadval qismi tanlanadi va interpolatsion ko'phadni jadvalning aynan tanlangan qismi bo'yicha tuziladi. Tuzilgan ko'phad yordamida funktsiyaning izlanayotgan qiymati hisoblanadi.

Bu qoidani quyidagi misolda tadbqiq qilish namunasini ko'ramiz. Funktsiya qiymatlar jadvali

x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$f(x_0)$	2,71	2,65	2,53	2,45	2,37	2,5	2,61	2,75	2,9	3,21

ko'rinishda berilgan bo'lib, bu qiymatlar tarkibida o'lchov vositalari shkala ko'rsatkichlarini yaxlitlash hisobiga 0,005 tartibida yaxlitlash xatoligi mavjud

bo'lsin. Shu ma'lumotlar asosida $f(0,45)$ qiymatini topish talab qilinayotgan bo'lsin.

Vaziyatdan ko'rinib turibdiki $\Delta f = 0,005$ bartaraf qilib bo'lmas xatolik bo'lgan jadval qiymatlar asosida funktsiya qiymatini undan aniqroq topishning iloji yo'q. Berilgan jadvalda $n = 9$ bo'lib, to'liq jadval asosida tuzilgan interpolatsion ko'pxad darajasi 9 bo'lib, $h = 0,1$ bo'lganligi uchun xatolik tartibi $O(h^{n+1}) = O(0,1^{10})$ bo'ladi. Mantiqan bunday aniqlikka erishish mumkin emas. Chunki jadval qiymatlarida xatolik bor. Shuning uchun interpolatsion ko'pxad samarali darajasini aniqlash kerak bo'ladi. Buning uchun

$$O(h^{k+1}) < \Delta f \Rightarrow 0,1^{k+1} < 0,005$$

Tenglikni tavsiya qilish mumkin. Bundan $k = 2$ etarli ekanligi ko'rinadi. Demak 2-darajali interpolatsion ko'pxad tuzsak xam etarli bo'lar ekan. Buning uchun esa 3 ta jadval qiymat etarli bo'ladi. Jadvaldan $x = 0,45$ o'z ichiga oladigan $x = 0,4; 0,5; 0,6$ qiymatlarga mos qismini olish mumkin. Quyida amaliy xisoblar tartibi ko'rsatilgan. $k = 2$ bo'lganligi uchun chekli ayirmalar jadvalini 2-tartibgacha olib borish etarli.

x_i	$f(x_0)$	$\Delta^1 f$	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
0	2,71			
		-0,06		
0,1	2,65		-0,06	
		-0,12		0,1
0,2	2,53		0,04	
		-0,08		-0,04
0,3	2,45		0	
		-0,08		0,21
0,4	2,37		0,21	
		0,13		-0,23
0,5	2,5		-0,02	

		0,11		0,05
0,6	2,61		0,03	
		0,14		-0,02
0,7	2,75		0,01	
		0,15		0,15
0,8	2,9		0,16	
		0,31		
0,9	3,21			

Jadvalni ajratilgan qismi va belgilangan koeffitsientlar asosida Nyuton interpolatsion ko'pxadini tuzamiz.

$$H_2(t) = 2,37 + t \cdot 0,13 + \frac{t(t-1)}{2} \cdot (-0,02)$$

Bu erda $t = \frac{x-x_0}{h}$; $x_0 = 0,4$; $x = 0,45$; $h = 0,1$ bo'lgani uchun $t = 0,5$ bo'ladi va

$$f(0,45) \approx H_2(0,5) = 2,37 + 0,5 \cdot 0,13 + \frac{0,5 \cdot (-0,5)}{2} \cdot (-0,002) = 2,43525 = 2,435$$

Odatda natijalar ishonchli raqamlar bilan ifodalanganligi ma'qul. Bizda interpolatsion ko'pxad xatoligi $O(h^3) - O(10^{-3})$ tartibda bo'lganligi uchun natija yaxlitlangan.

Agar jadvaldagi yaxlitlash yoki aniqlash xatoliklari $\Delta f = 0.0005$ tartibda bo'lsa $k = 3$ ya'ni 3-darajali ko'phad tuzilgan bo'lar edi. Umumiy qoida sifatida to'liq jadval uchta qismga ajratilsa $\{0; 0.1; 0.2; 0.3\}, \{0.3; 0.4; 0.5; 0.6\}, \{0.6; 0.7; 0.8; 0.9\}$ va har biri uchun alohida interpolatsion ko'phadlar tuzilsa, butun jadval qamrab olinadi. Tuzilgan ko'phadlarni $H_3^{(1)}(x); H_3^{(2)}(x); H_3^{(3)}(x)$ deb belgilasak istalgan $x \in (0; 0.9)$ qiymat uchun jadval qismiga qarab kerakli ko'phad $H_3^{(s)}(x)$ tanlanib funktsiya qiymatini aniqlash mumkin.

8-MA'RUZA

Mavzu: Approksimatsiya masalasini echishda eng kichik kvadratlar usuli. Empirik bog'lanish qonunlarini qurish usullari.

Reja:

1. Jadval ko'rinishida berilgan funktsiyalarni ko'phadlar bilan approksimatsiya qilishda eng kichik kvadratlar usuli(EKKU)
2. EKKU bo'yicha chiziqli bog'lanish modelini tuzish.
3. EKKU bo'yicha kvadratik bog'lanish modelini tuzish
4. Bog'lanish qonuniyatini tanlash bo'yicha tavsiya, ko'rsatmalar.

Asosiy ibora va atamalar: funktsional normalar, global ekstremum, empirik model, eng kichik kvadratlar usuli(EKKU).

Avval ko'rganimizdek jadval ko'rinishida berilgan funktsiyalar qiymatlarida o'lchov vositalari imkoniyati, yaxlitlash va boshqa ob'ektiv sabablarga ko'ra vujudga keladigan xatoliklar bo'lishi mumkin. Approksimatsiya masalasini echishda bu xatoliklarni yo'qotib bo'lmaydi. Ular natijaga o'z ta'sirini o'tkazadi. Shuning uchun berilgan $n + 1$ nuqtadagi qiymatlar bo'yicha n –darajali interpolatsion ko'phad tuzaman va $O(h^{n+1})$ tartibdagi aniqlikka erishaman degan orzu xom xayolga aylanib qolar ekan. Natija xatoligi jadvaldagi bartaraf qilib bo'lmas xatolik Δf tartibida bo'lar ekan. Buning uchun esa k darajali ko'phad ham etarli bo'lar ekan k qiymati Δf ga ko'ra

$$h^{k+1} < \Delta f$$

tengsizlikdan topiladi va aksariyat xollarda $k \ll n$ bo'ladi. Lekin k –darajali ko'pxad tuzish uchun esa $k + 1$ ta nuqta etarli bo'ladi. Bunda funktsiya jadval qiymatlarining faqat bir qismigina jalb qilinadi. Butun jadvalni $k + 1$ ta qiymatli bo'laklarga bo'lib aloxida-aloxida ko'phadlar tuzishga to'g'ri keladi. Bunda, tabiiy, mehnat ko'payadi, hamda Δf bartaraf qilib bo'lmas xatoliklar ham funktsiya qiymatining aniq qismi deb xisoblangan bo'ladi. Keltirilgan muloxazalar interpolatsiya usuli kamchiliklarini namoyon qilayapti. Bu kamchiliklardan xoli usul yaratish zarurati paydo bo'ladi. Yana bir muloxaza tabiiy yoki texnik jarayonlarda uchraydigan bog'lanishlar aksariyat xolda sodda ko'rinishga ega bo'lib biz ham ana shu tabiiy soddalikka intilishimiz kerak. $n = 20$ bo'lsa $P_{20}(x) - 20$ –darajali interpolatsion ko'phad tuzish mumkin ekan deb

berilib ketish keragi yo'q ekan. Sababi, $y = P_{20}(x)$ ko'rinishdagi bog'lanish qanday jarayonda bo'lishi mumkinq Tabiatda ham, texnikada ham uchraydigan bog'lanish modellari, Nyuton qonunlari, Om qonuni, Guk qonuni barchasi sodda, chiziqli ko'rinishga ega. Biz topmoqchi bo'lgan bog'lanish modeli ham sodda bo'lsa kerak degan umid va ishonch hamshunga mos usul tanlashni talab qiladi.

Eng kichik kvadratlar usuli

x_i	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$f(x_i)$	f_0	f_1	f_2	...	f_n

Jadval ko'rinishida berilgan x va u o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanishni k -darajali ko'phad ko'rinishida izlaymiz.

$$Q_k(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_{k-1}x + a_k \quad (8.1)$$

Bu erda $k \ll n$ bo'lib avvalgidek jadval qiymatlarga teng bo'lishligini talab qilishga imkoniyat bo'lmas ekan. Shuning uchun (8.1) ko'pxadning x_i nuqtalardagi qiymatlari $Q_k(x_i)$ lar $f(x_i)$ qiymatlariga iloji boricha yaqin bo'lishini talab qilamiz. Bu talab esabizga $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k$ koefitsentlarni aniqlash uchun shartlarni beradi. Buning uchun yig'ma xatolikni hisoblaymiz.

$$R_k(x) = \sum_{i=0}^n (Q_k(x_i) - f(x_i))^2 \Rightarrow \quad (8.2)$$

$$R_k(a_0, a_1, a_2, \dots, a_k) = \sum_{i=0}^n (a_0x_i^k + a_1x_i^{k-1} + \dots + a_{k-1}x_i + a_k - f_i)^2$$

Biz $\inf R_k(a_0, a_1, a_2, \dots, a_k)$ shartga mos keladigan $a_0, a_1, \dots, a_k$ larni topishimiz kerak. Ekstremum shartlariga ko'ra, biror $\tilde{x}$ nuqtada ekstremumga erishsa bu nuqtada barcha birinchi tartibli xususiy xosilalar nolga teng bo'lishi kerak. (8.2) tenglikdan hosila olib

$$\frac{\partial R_k}{\partial a_j} = \sum_{i=0}^n 2(a_0x_i^k + a_1x_i^{k-1} + \dots + a_{k-1}x_i + a_k - f_i)x_i^{k-j} = 0$$

2 ga bo'lib yuborsak va ma'lumlarni o'ng tarafga o'tkazsak, quyidagi ko'rinishdagi sistema hosil bo'ladi.

$$\begin{cases} a_0 \sum_{i=0}^n x_i^{2k} + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^{2k-1} + \dots + a_{k-1} \sum_{i=0}^n x_i^{k+1} + a_k \sum_{i=0}^n x_i^k = \sum_{i=0}^n f_i x_i^k \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i^{2k-1} + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^{2k-2} + \dots + a_{k-1} \sum_{i=0}^n x_i^k + a_k \sum_{i=0}^n x_i^{k-1} = \sum_{i=0}^n f_i x_i^{k-1} \\ \vdots \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i^k + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^{k-1} + \dots + a_{k-1} \sum_{i=0}^n x_i + a_k \cdot (n+1) = \sum_{i=0}^n f_i \end{cases} \quad (8.3)$$

(8.3) sistema $(kQ1)$ ta noma'lumli $(kQ1)$ ta chiziqli algebraik tenlamalar sistemasi bo'lib, uning koeffitsentlarini

$$S_{mj} = \sum_{i=0}^n x_i^m \cdot x_i^j; \quad b_m = \sum_{i=0}^n f_i x_i^m$$

deb belgilasak (8.3) sistema quyidagi qo'rinishda yozilishi mumkin.

$$\begin{cases} S_{kk}a_0 + S_{k,k-1}a_1 + \cdots S_{k,0}a_k = b_k \\ S_{k-1,k}a_0 + S_{k-1,k-1}a_1 + \cdots S_{k-1,0}a_k = b_{k-1} \\ \vdots \\ S_{0,k}a_0 + S_{0,k-1}a_1 + \cdots S_{0,0}a_k = b_0 \end{cases} \quad (8.4)$$

(8.4) sistemaning determinanti Gramm determinanti deyiladiva noldan farqli ekanligi isbotlangan. Demak (8.4) sistema doimo echimga ega. Ayrim xususiy xollarn ko'ramiz.

Chiziqli bog'lanish modelini tuzish.

$k = 1$ bo'lgan xolda approksimatsiyalovchi ko'pxad

$$P_1(x) = a_0x + a_1$$

ko'rinishini oladi. Uning uchun (8.4) sistema

$$\begin{cases} S_{11}a_0 + S_{10}a_1 = b_1 \\ S_{01}a_0 + S_{00}a_1 = b_0 \end{cases} \text{yoki} \begin{cases} a_0 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^n x_i = \sum_{i=0}^n x_i f_i \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i + a_1 \cdot (n+1) = \sum_{i=0}^n f_i \end{cases}$$

ko'rinishini oladi. Bu sistemadan a_0, a_1 larni topib chiziqli bog'lanish modeli, ya'ni

$$P_1(x) = a_0x + a_1$$

chiziqli funktsiyani topamiz. Bu funktsiyaning jadval funktsiya bilan farqlari

$$g_i = |f_i - P_1(x_i)| \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

larni hisoblaymiz. Bu farqlar qanchalik kichik bo'lsa, tanlangan model shunchalik o'rinli bo'lishga haqli, ya'ni to'g'ri deyishimiz mumkin ekan. Bu farqlar katta bo'lib ketsa, chiziqli model mos emas ekan degan xulosaga kelamiz va 2- yoki 3-darajali modellarga o'tamiz.

EKKU bo'yicha xatolikni baxolashda yig'ma xarakteristika, ya'ni

$$R_k^2 = \sum_{i=0}^n (P_k(x_i) - f_i)^2$$

$$f(x) \approx Q_2(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$$
$$\begin{cases} a_0 \sum_{i=0}^n x_i^4 + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^2 = \sum_{i=0}^n f_i x_i^2 \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i^3 + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_{k-1} \sum_{i=0}^n x_i = \sum_{i=0}^n f_i x_i \\ \dots\dots\dots \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^n x_i + a_2 \cdot (n+1) = \sum_{i=0}^n f_i \end{cases}$$

Amaliy misol sifatida chiziqli bog'lanish modelini topish, jadvalda bo'lishi mumkin bo'lgan tasodifiy xatoni aniqlash hamda bu qiymatni jadvaldan chiqarib tashlab tuzatilgan modelni aniqlash jarayonini quyidagi misolda namoyish qilamiz.

52

jadvalda aniqlangan chiziqli model qiymatlari $f_{mod} = a_0x + a_1$, uning xatoligi $R = f_{mod} - f_{jadv}$ qiymatlar xam xisoblangan.

x_i	$f(x_i)$	$x_i f_i$	x_i^2	f_{mod}	R	f_{tuzat}	R
0	0,7	0	0	0,7057	0,0057	0,7032	0,0032
0,1	0,752	0,0752	0,01	0,7453	0,0067	0,7428	0,0092
0,2	0,778	0,1556	0,04	0,7849	0,0069	0,7824	0,0044
0,3	0,82	0,246	0,09	0,8245	0,0045	0,822	0,002
0,4	0,861	0,3444	0,16	0,8641	0,0031	0,8616	0,0006
0,5	0,93	0,405	0,25	0,9037	0,0263		
0,6	0,939	0,5634	0,36	0,9433	0,0043	0,9407	0,0017
0,7	0,982	0,6874	0,49	0,9829	0,0009	0,9803	0,0017
0,8	1,02	0,816	0,64	1,0225	0,0025	1,0199	-0,0001
0,9	1,061	0,9549	0,81	1,0621	0,0011	1,0595	-0,0015
1,0	1,098	1,098	1	1,1017	0,0037	1,0991	0,0011
5,5	9,941	5,4059	3,85				Σ
0,5	0,9037	0,4914	0,35				$\Sigma G'(n-1)$

Bu jadval asosida chiziqli model koeffitsentlari a_0, a_1 larni topish uchun

$$\begin{cases} 0,35a_0 + 0,5a_1 = 0,4914 \\ 0,5a_0 + a_1 = 0,9037 \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Bu sistemadan $a_0 = 0,3959$ va $a_1 = 0,7032$ xamda $y = 0,3959x + 0,7032$ ko'rinishda chiziqli bog'lanish modelini topamiz. Chiziqli bog'lanish modeliga ko'ra xisoblangan qiymatlar jadvalda f_{mod} ustunida xisoblab yozilgan. Model va jadval qiymatlar farqi $R = f_{mod} - f_{jadv}$ formula bo'yicha xisoblanib u xam jadvalga kiritilgan.

Xatoliklar tahlili shuni ko'rsatadiki, jadvalning $x = 0,5$ ga mos satrida xatolik qolganlaridan 5-10 barobar kattaroq. Demak shu qiymatda tasodifiy xatolik bo'lish

ehtimoli bor. Bu qiymatni jadvaldan chiqarib tashlasak 10 ta qiymat qoladi va bu qolgan qiymatlar bo'yicha chiziqli modelni xisoblash uchun

$$\begin{cases} 0,36a_0 + 0,5a_1 = 0,4914 \\ 0,5a_0 + a_1 = 0,9011 \end{cases}$$

sistema hosil bo'ladi. Bu sistemadan

$$a_0 = 0,3959 \quad \text{va} \quad a_1 = 0,7032 \quad \text{hamda}$$

$$y = 0,3959x + 0,7032$$

chiziqli model tuzatilgan varianti topiladi. Bu model bo'yicha hisoblangan f_{tuzat} qiymatlari va uning xatoligi xam jadvalga kiritilgan.

Tuzatilgan model qiymatlari jadval qiymatlariga nisbatan yaqinroq ekanligi va bu xolda tasodifiy xatoliklar yo'q ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Albatta bu xolda ham $x = 0,1$ dagi qiymat shubxali deb uni xam jadvaldan chiqarib tashlab yanada tuzatilgan modelni tuzishimiz mumkin. Avvalgidek muloxaza va hisoblashlar yordamida bu xolda chiziqli model

$$y = 0,4002x + 0,69978$$

ko'rinishini oladi. Bu formula bo'yicha xisoblangan qiymatlar jadval qiymatlarga yanada yaqin bo'lishini ko'rishimiz mumkin. Shuningdek tasodifiy xatoligi bo'lgan qiymatlari haqida ham tasavvur hosil qilishimiz mumkin. Bizning misolda

$f_1 = 0,7398$; $f_5 = 0,89988$ qiymatlar tuzatilgan qiymatlar tasodifiy xatolar tartibi haqida ham ma'lumot beradi.

O'rganilayotgan jarayon xususiyatiga ko'ra ba'zi xollarda $y = Q_m(x)$ ko'rinishidagi ko'phadlar bog'lanish modelini ifodalash uchun to'g'ri kelmasligi mumkin. Ko'phad darajasi m ni orttirganimiz bilan xatolik kamaymaydi. Bunda bog'lanish modelini o'zgartirishga to'g'ri keladi. Lekin asosiy mezon sifatida EKKU talablari qolaveradi. Biz bu erda amaliyotda uchraydigan ana shunday xollarning ba'zilari haqida ma'lumot berib ketamiz. Shuningdek bu xollarda model parametrlarini topish algoritmlari ham keltiriladi.

Jarayon parametrlari o'zgarishiga qarab ular orasida teskari proportsional bog'lanish bo'lsa kerak degan fikr kelsa, bog'lanish modelini

$$y = \frac{a}{x} + b$$

ko'rinishida izlashimiz mumkin. Bu erda ham noma'lum parametrlar a, b larni topish uchun EKKU dan foydalanamiz. Xatolik funktsiyasi

$$\phi(a, b) = \sum_{i=0}^n \left(\frac{a}{x_i} + b - f_i \right)^2 \rightarrow \min$$

shartdan ekstremum nuqta uchun birinchi tartibli xususiy hosilalar nolga teng bo'lish sharti kelib chiqadi. Unga ko'ra a, b larni topish uchun

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial A} = 2 \sum_{i=0}^n \left(\frac{a}{x_i} + b - f_i \right) \cdot \frac{1}{x_i} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial B} = 2 \sum_{i=0}^n \left(\frac{a}{x_i} + b - f_i \right) \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Uni shakl almashtirib

$$\begin{cases} a \cdot \sum_{i=0}^n \frac{1}{x_i^2} + b \sum_{i=0}^n \frac{1}{x_i} = \sum_{i=0}^n \frac{f_i}{x_i} \\ a \cdot \sum_{i=0}^n \frac{1}{x_i} + b \cdot n = \sum_{i=0}^n f_i \end{cases}$$

ikkita noma'lumli ikkita chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bog'lanish ko'rsatkichli qonuniyatga bo'ysunadi degan taxmin mavjud bo'lsa bog'lanishni $y = b \cdot a^x$ ko'rinishda izlash mumkin.

Noma'lum parametrlar a, b larni topish uchun bu formulani

$$\ln y = \ln b + x \ln a$$

ko'rinishda ifodalaymiz. Xatolik funktsiyasini ham shu ko'rinishga qarab tuzamiz.

$$\Phi(a, b) = \sum_{i=0}^n (\ln b + x_i \ln a - \ln f_i)^2 \rightarrow \min$$

$A = \ln a$ va $B = \ln b$ belgilashlar kiritsak

$$\begin{cases} 2 \sum_{i=0}^n (B + A \cdot x_i - \ln f_i) \cdot x_i = 0 \\ 2 \sum_{i=0}^n (B + A \cdot x_i - \ln f_i) \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \cdot \sum_{i=0}^n x_i^2 + B \sum_{i=0}^n x_i \cdot \ln x_i \\ A \cdot \sum_{i=0}^n x_i + B \cdot n = \sum_{i=0}^n \ln x_i \end{cases}$$

Bu sistemadan A, B topiladi va ularga ko'ra $a = e^A; b = e^B$ parametrlar va tko'rsatkichli bog'lanish modeli $y = b \cdot a^x$ topiladi.

9-MA'RUZA.

Mavzu: Jadval ko'rinishda berilgan funktsiyalarni approksimatsiya qilishda splayn-funktsiyalar usuli. Bir o'lchovli xol uchun splayn-funktsiyalarni tanlash va qurish usullari.

Reja:

1. Splayn-funktsiyalar zarurati.
2. To'r tugunlari splayn-funktsiyasi
3. Birinchi darajali funktsiyalar va ular tadbiqu.
4. Ikkinchi darajali splayn-funktsiyalar va ular tadbiqu.

Asosiy ibora va atamalar: splayn-funktsiya, grafiklarni ulash, tugun funktsiyasi.

Amaliyotda funktsiya analitik ko'rinishi noma'lum bo'lib, faqat uning qiymatlar jadvali berilgan bo'lsin. Bu xolda interpolyatsiya yoki EKKU usullariga ko'ra approksimatsiyalovchi funktsiyalarni topish mumkinligini ko'rdik. Funktsiyaning analitik ko'rinishi va jadval ko'rinishi o'zaro ma'lum qonuniyatlarga ko'ra bog'langan. Funktsiyaning grafigi ham uning berilish usullaridan bo'lib, funktsiya xususiyatlarini bevosita namoyon qiladi va grafikka qarab ko'plab amaliy xulosalarni qilishimiz mumkin. Shuning uchun funktsiya grafigini chizish bilan bog'liq bo'lgan muammolar va ularning echish usullari haqida to'xtalamiz. Funktsiya grafigini bevosita qog'ozda chizmoqchi bo'lsak avvalo ma'lum qadam bilan funktsiyaning qiymatlar jadvalini tuzamiz. Hosil bo'lgan nuqtalarni koordinat tekislikda belgilaymiz. Belgilangan nuqtalarni tutashtirish esa taqriban, yoki kesmalar bilan, yoki lekala yordamida, yoki ko'z

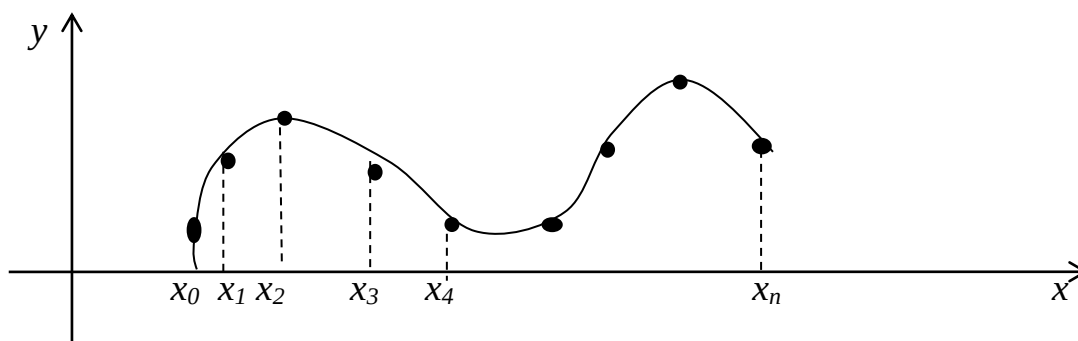
bilan chamalab amalga oshiriladi. Bu usullarning barchasi $(x_i; x_{i+1})$ oraliqda funktsiya qiymatlari yo'qligidan. Grafikni kompyuterda chizadigan bo'lsak nuqtalar sonini etarlicha katta olish imkoniyati bor. Shuning uchun $(x_i; x_{i+1})$ oraliqlarda funktsiya qiymatini aniqlash zarurati paydo bo'ladi.

Yana bir karra qayd etib o'tamiz, $f(x)$ qiymatlari kuzatuvlardan, yoki biror taqribiy formula yoki usuldan topilgan bo'lsa, bu qiymatlar sanoqli bo'ladi. Shuning uchun biz funktsiya qiymatlar jadvali bilan berilgan xolni ko'ramiz.

x_i	x_0	x_1	x_2	x_3		x_{n-1}	x_n
$f(x_i)$	y_0	y_1	y_2	y_3		y_{n-1}	y_n

Zarurat yoki masala talabiga qarab chiziqli, kvadratik yoki kubik splayn-funktsiyalarni farqlashadi. Bu xollarning barchasida nuqtaning splayn-funktsiyasi tushunchasi kiritiladi.

Chiziqli splayn-funktsiyalar va splayn-approksimatsiya. Tasavvur qiling funktsiya jadval qiymatlari koordinat tekisligida belgilangan. Agar ularni kesmalar bilan tutashtirsak grafikning taqribiy ko'rinishi xosil bo'ladi. Bu jarayon 7-rasmda



aks ettirilgan. Chizmadan ko'riladiki xar bir oraliqda funktsiya grafigi to'g'ri chiziq kesmasi bilan ifodalanyapti. Bu jarayon analitik ifodasini topish uchun xar bir $(x_i; x_{i+1})$ oraliqda to'r tuguni x_i nuqtaning chiziqli splayn-funktsiyasini tuzamiz. Xususan $(x_i; x_{i+1})$ 2ta tugun bo'lib ularning xar biri uchun o'z splayn-funktsiyasi tuziladi. Ular

$$P_1^{(1)}(x) = \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} \text{ va } P_1^{(2)}(x) = \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \quad (9.1)$$

bo'lib tuzilishiga ko'ra

$P_1^{(1)}(x) = \begin{cases} 1 & x = x_i \\ 0 & x = x_{i+1} \end{cases}$ shartlarga ko'ra tuzilgan. Ular yordamida $(x_i; x_{i+1})$

jadval funktsiya $f(x)$ uchun

$$f(x) \approx y_i \cdot \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + y_{i+1} \cdot \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$x \in [x_i; x_{i+1}] \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (9.2)$$

Taqribiy formula hosil bo'ladi.

(9.1) va (9.2) formulalarda $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$

Barcha oraliqlarda foydalanilsa aynan 7-rasmda ifodalangan funktsiyaning analitik ko'rinishi berilgan bo'ladi. Funktsiyani (9.2) ko'rinishda ifodalab, shu formulaga ko'ra kompyuterda grafigini chizadigan bo'lsak 7-rasmdagi grafik xosil bo'ladi. Agar 7-rasmdagi siniq chiziqlarga qaraganda silliqroq, aniqroq grafik kerak bo'lsa, 2-, 3-tartibli splayn-funktsiyalarga murojaat qilish mumkin. Biz bu erda 2-tartibli, ya'ni kvadratik splayn-funktsiyalarni tuzish hamda funktsiyani shu splayn-funktsiyalar orqali ifodalash qoidalarini namoyish qilamiz. Kubik splayn-funktsiyalar shu printsiptda tuziladi. Uni o'quvchining o'ziga mustaqil mashq sifatida qoldiramiz.

Kvadratik splayn-funktsiyalar.

Funktsiyaning qiymatlar jadvalida qiymatlar soni toq, oraliqlar soni juft bo'lsin.

x_i	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4		x_{2m-2}	x_{2m-1}	x_{2m}
$f(x_i)$	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4		y_{2m-2}	y_{2m-1}	y_{2m}

Bu erda $n = 2m$ n –juft ekanligini unutmaslik uchun kiritilgan belgilash. Jadval qiymatlarni o'zaro ulangan uchliklarga bo'lib chiqamiz. $(x_0; x_1; x_2), (x_2; x_3; x_4), \dots, (x_{2m-2}, x_{2m-1}, x_{2m})$ har bir (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) uchlik, ya'ni (x_{i-1}, x_{i+1}) oraliq uchun uning tarkibidagi tugun nuqtalar (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) larning splayn-funktsiyalarni tuzamiz.

$$\frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})}, \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})}, \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)}$$

Ular orqali va funktsiyaning jadval qiymatlari yordamida, $f(x)$

funktsiyaning (x_{i-1}, x_{i+1}) oraliqdagi taqribiy ko'rinishini topamiz.

$$f(x) \approx P_2^{(i)}(x) = y_{i-1} \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})} + y_i \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})} + y_{i+1} \cdot \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)}; \quad (9.3)$$

$$x \in [x_{i-1}; x_{i+1}] \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

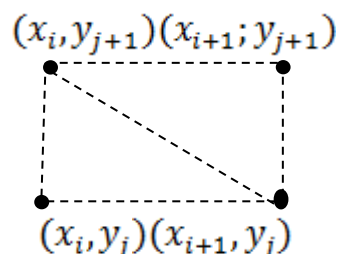
(9.3) formula yordamida jadval funktsiya ko'rilgan xar bir oraliqda kvadratik funktsiyaga almashtirilar ekan. Grafigi esa o'zaro ulangan parobalalar orqali ifodalanadi. (9.3) formulaga e'tibor beradigan bo'lsak u Lagranj interpolatsion ko'phadini eslatadi. Chunki bu erda xam aynan Lagranj printsipiga amal qilingan. Shu qoida asosida hech qiyinchiliksiz kubik splayn-funktsiyalar orqali approksimatsiyalash formulalarini xam ifodalash mumkin. Eslatma: (9.2), (9.3) formulalar $f(x)$ funktsiyaning ixtiyoriy $x \in [x_0; x_n]$ nuqtadagi qiymatni xisoblash uchun ham xizmat qilishi mumkin. Bu jarayonni ham avtomatlashtirish va kompyuterda bajarish mumkin.

Ikki o'zgaruvchili funktsiyalar uchun ham splayn-funktsiyalar ko'pgina muammolarni hal qilish mumkin. Biz bu erda ba'zi, eng sodda xollardagina to'xtalamiz. Chunki ikki o'lchovli xol geometriyasi ham, tarkibi bo'yicha ko'plab muammolarni yuzaga chiqarar ekan. Biz bu erda funktsiyaning qiymatlar jadvali to'g'ri to'rtburchakli ko'rinishda bo'lgan xolniginako'ramiz. Funktsiya qiymatlari quyidagi jadval ko'rinishida berilgan bo'lsin.

$x_j \backslash y_i$	x_0	x_1	x_2		x_n
y_0	z_{00}	z_{01}	z_{02}		z_{0n}
y_1	z_{10}	z_{11}	z_{12}		z_{1n}
y_2	z_{20}	z_{21}	z_{22}		z_{2n}

y_m	z_{m0}	z_{m1}	z_{m2}		z_{mn}

Bu erda $f(x_j, y_i) = z_{ij}$ belgilash kiritilgan.



8-rasm

Jadval tugunlarining xar 8-rasmda ko'rsatilgandek bo'lagi uchun ikki xil uchburchakli yoki to'rtburchakli splayn-approximatsiya printsiptidan foydalanish mumkin. Dastlab uchburchakli approximatsiya xolatida to'xtalamiz. Bunda $(x_i, y_{j+1}, z_{j+1,i}), (x_i, y_j, z_{ji}), (x_{i+1}, y_j, z_{ji+1})$ nuqtalar bo'yicha tekislik o'tkaziladi. Bunda uchburchakning xar bir nuqtasi o'z splayn-funktsiyasi o'tkaziladi. Yozuvlar va taxlilni soddalashtirish uchun berilgan uchta nuqtani $A_1(x_1, y_1, Z_1)A_2(x_2, y_2, Z_2)A_3(x_3, y_3, Z_3)$ deb belgilasak, A_1, A_2, A_3 nuqtalarning splayn-funktsiyalari quyidagi ko'rinishda bo'lar ekan.

$$\begin{aligned}
P_1(x, y) &= 1 + \frac{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}} A_1(x_1, y_1, Z_1) \text{ нуктаучун} \\
P_2(x, y) &= 1 + \frac{\begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & x_3 - x_2 \\ y_1 - y_2 & y_3 - y_2 \end{vmatrix}} A_2(x_2, y_2, Z_2) \text{ нуктаучун} \\
P_3(x, y) &= 1 + \frac{\begin{vmatrix} x - x_3 & y - y_3 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}} A_3(x_3, y_3, Z_3) \text{ нуктаучун}
\end{aligned} \tag{9.3}$$

(9.3) formulalar universallik xususiyatiga ega bo'lib ular yordamida tuzilgan splayn-funktsiyalar asosida jadval funktsiya qiymatlari A_1, A_2, A_3 uchburchak tekisligida bo'ladi va

$$f(x, y) \approx P(x, y) = Z_1 P_1(x, y) + P_2(x, y) + P_3(x, y) \quad (9.4)$$

formula bo'yicha xisoblanadi deyish mumkin. (9.3) va (9.4) formulalar bo'yicha xisoblash jarayonini dasturlab qo'yilsa, unga ixtiyoriy uchburchak koordinatalari uchun murojaat qilish mumkin. Bu erda $P_i(x, y)$ funktsiyalar splayn-funktsiya asosiy shartini qanoatlantiradi, ya'ni

$$P_2(x_j; y_j) = \begin{cases} 1 & i = j, i = 1, 2, 3 \\ 0 & i \neq j, j = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (9.5)$$

Agar 8-rasmda berilgan to'rtburchakli shablon bo'yicha splayn-funktsiyalar tuzmoqchi bo'lsak, to'rtburchak uchlarini splayn-funktsiyalari quyidagicha ifodalanadi.

$$\begin{aligned} P_1(x, y) &= 1 + \frac{(x - x_{i+1})(y - y_{j+1})}{(x_i - x_{i+1})(y_i - y_{j+1})}; (x_i, y_j) \text{ нуктаучун} \\ P_2(x, y) &= 1 + \frac{(x - x_i)(y - y_{j+1})}{(x_{i+1} - x_i)(y_j - y_{j+1})}; (x_{i+1}, y_j) \text{ нуктаучун} \\ P_3(x, y) &= 1 + \frac{(x - x_{i+1})(y - y_j)}{(x_i - x_{i+1})(y_{j+1} - y_j)}; (x_i, y_{j+1}) \text{ нуктаучун} \\ P_4(x, y) &= 1 + \frac{(x - x_i)(y - y_j)}{(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)}; (x_{i+1}, y_{j+1}) \text{ нуктаучун} \end{aligned} \quad (9.6)$$

Bu splayn funktsiyalar to'rtburchakning ko'rsatilgan uchida 1 qolgan uchlarida 0 ekani ko'rinib turibdi.

(9.6) formulalar asosida shablon to'rtburchaknuqtalarida splayn-approksimatsiya

$$f(x, y) \approx P(x, y) = Z_{ij} \cdot P_1(x, y) + Z_{i+1} \cdot P_2(x, y) + Z_{ij+1} \cdot P_3(x, y) + Z_{i+1j+1} \cdot P_4(x, y) \quad (9.7)$$

formula bo'yicha amalga oshiriladi. Bu erda xam (9.6), (9.7) formulalar bo'yicha xisoblashlar dasturlab qo'yilsa, butun jadval qiymatlar berilgan soxaga tadbqiq qilish mumkin.

10-Mar'ruza.

Mavzu: Aniq integrallarni taqribiy xisoblash usullari. To'g'ri to'rtburchaklar, trapetsiyalar, Cimpson kvadratur formulflari. Kvadratur formulalar xatoligi.

Reja:

1. Taqribiy integrallash formulflari zarurati va g'oyasi.
2. To'g'ri to'rtburchaklar formulasi.
3. Trapetsiyalar formulasi.
4. Simpson formulasi.
5. Kvadratur formulflarining xatoligi.

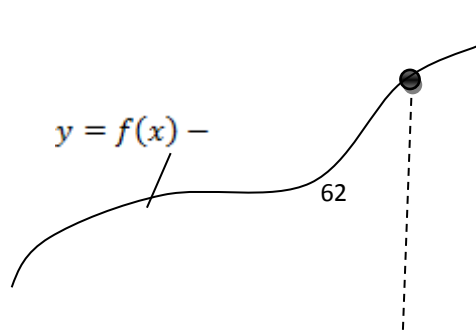
Asosiy ibora va atamalar: Darbu yuqori va quyi yig'indilari, kvadratur formullar, xatolik.

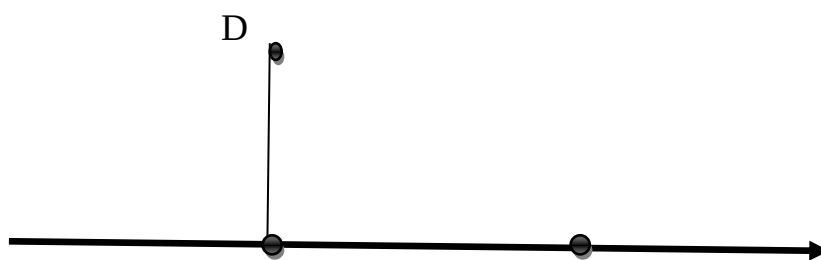
Amaliyotda aniq integralga bog'liq masalalar juda ko'p uchraydi. Yuza hajmlarini hisoblash, murakkab jarayonlarda bajarilgan ishni, sarflangan energiyani, o'tilgan masofani hisoblash xam aniq integral yordamida amalga oshirililar ekan. Aniq integralni hisoblashda Nyuton-Leybnits formulasiga ko'ra boshlang'ich funktsiya $F'(x) = f(x)$ shartni qanoatlantiruvchi ma'lum bo'lsa

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

formuladan foydalaniladi. Lekin aksariyat xollarda $F(x)$ – boshlang'ich funktsiyani topish qiyin, ayrim xollarda mumkin bo'lmasligi xam mumkin. Bunday xollarda (10.1) integralning taqribiy qiymatini bo'lsada topish zarurati paydo bo'ladi.

Aniq integral ta'rifiga ko'ra $y = f(x)$ funktsiya grafigi $x = a$; $x = b$ to'g'ri chiziqlar va Ox o'qi bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya ABCD yuzasi sifatida aniqlangan.





9-rasm

Aniq integralning aksariyat xossalari, mavjudlik shartlari ham aynan shu ta'rifga asoslangan. Aniq integral yuzani ifodalashi, yuza esa kvadrat metr, kvadrat santimetr o'lchov birlikka ega bo'lgani uchun ham, aniq integralni taqribiy hisoblash formulalari umumiy kvadratur-formulalar atamasi bilan birlashtirilgan. Taqribiy usullarning barchasi xam aynan shu ABCD egri chiziqli trapetsiya yuzasini hisoblash sifatida quriladi. Bu erda boshlang'ich funktsiya umuman kerak bo'lmaydi. Aniq integral ta'rifini kiritayotganda xam masala moxiyatidan kelib chiqqan xolda (a, b) oraliqni $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ nuqtalar bilan n ta bo'lakka bo'lingan va ABCD trapetsiya $x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_{n-1}$ chiziqlar bilan n ta trapetsiyaga bo'lingan. Har bir $(x_{i-1}; x_i)$ oraliqda hosil bo'ladigan egri chiziqli trapetsiya uchun $m_i \leq f(x) \leq M_i$ shartni qanoatlantiruvchi m_i va M_i lar aniqlanib Darbuning quyi va yuqori yig'indilari kiritiladi va ular orqali

$$\sum_{i=0}^n m_i (x_i - x_{i-1}) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \sum_{i=0}^n M_i (x_i - x_{i-1})$$

Tengsizlik o'rinli bo'lishi kuzatiladi. Agar $\max(x_i - x_{i-1}) \rightarrow 0$ da Darbu yuqori va quyi yig'indilari limiti mavjud va o'zaro teng bo'lsa uni aniq integral qiymati deb atalgan. Ta'rifga ko'ra bu ABCD egri chiziqli trapetsiya yuzasini beradi. 9-rasmda ko'riladiki, $M = \max_{a < x \leq b} f(x); m = \min_{a < x \leq b} f(x)$

bo'lsa,

$$m(b - a) \leq S_{ABCD} = \int_a^b f(x) dx < M(b - a)$$

ekanligini ko'ramiz. $y = f(x)$ funktsiya uzluksiz, yoki bo'lakli uzluksiz bo'lsa xam aniq integral mavjud bo'lar ekan. Shuningdek Lagranjning chekli orttirmalar xaqidagi teoremasiga ko'ra $f'(c)$ mavjud bo'lsa

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a); \quad c \in (a; b)$$

Bu formuladan aniq integral uchun xam

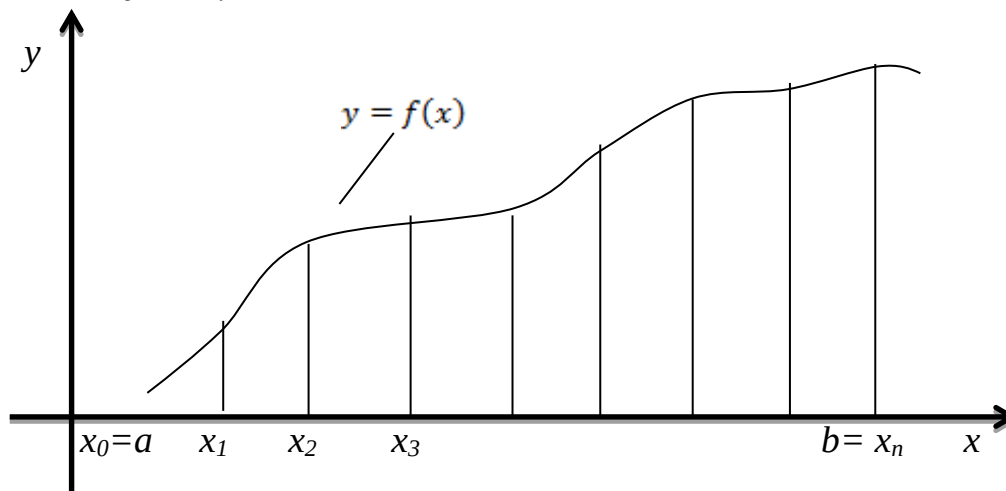
$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F'(c)(b - a) = f(c)(b - a)$$

(10.2)

Formula yoki o'rta qiymat xaqidagi

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$$

natijani ko'ramiz. Bu erda shunday $c \in (a; b)$ nuqta mavjudligi ta'kidlanadi. Aniq integral xaqidagi ma'lum ma'lumotlarni eslagach bevosita kvadratur formulalarga o'tishimiz mumkin.



10-rasm

To'g'ri to'rtburchaklar formulasi.

Integrallash oralig'i $(a; b)$ ni $h = (b - a)/n$ qadam bilan n ta bo'lakka bo'lamiz. Xar bir oraliqdagi egri chiziqli trapetsiya yuzasini to'g'ri to'rtburchak yuzasi bilan almashtiramiz. Bu to'rtburchaklar asosi bir xil chunki $x_i = a + i \cdot h$ bo'lgani uchun $x_i - x_{i-1} = h$ balandligini esa $f(x_{i-1})$ ga teng deb olsak yuzasi $h \cdot f(x_{i-1})$ ga teng bo'ladi. Natijada

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n h \cdot f(x_{i-1}) \quad (10.3)$$

formula hosil bo'ladi. Bu formulani geometrik tuzilishidan to'g'ri to'rtburchaklar formulasi deyiladi. Chizmadan (10-rasm) ko'rinadiki, h qadam kichiklashgan sari (10.3) formuladagi xatolik kichiklashib boradi. Xatolik umumiy miqdorini baxolash uchun ixtiyoriy i bo'lakdagi xatolikni baxolashdan boshlaymiz.

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx f(x_{i-1}) \cdot h$$

(10.2) formulaga ko'ra

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = f(c) \cdot h; \quad c \in (x_{i-1}; x_i)$$

Demak formulaning xar qadamdan xatoligi

$$f(x_{i-1}) \cdot h - f(c) \cdot h = (f(x_{i-1}) - f(c))h \approx f'(x) \cdot (c - x_{i-1}) \cdot h$$

$c - x_{i-1} < h$ bo'lgani uchun xatolik $O(h^2)$ Tartibida bo'lar ekan.

Demak, aniq integralni xisoblash uchun oddiy (10.3) formulani tavsiya qilish mumkin ekan. h kichiklashgan sari aniqlik ortib borar ekan. (10.3) formula bo'yicha xisoblashlarni oddiygina dastur asosida kompyuterda bajarish mumkin. h ni kichiklashtirish xisobiga istalgancha aniqlikka erishish mumkin. Kvadratur formulalar yaratilgan paytda xisoblash vositalari kalkulyator, kompyuterlar bo'lmagan. Shuning uchun xisoblashlar sonini orttirilmagan xolda, ya'ni h ni maydalamay, aniqlikni orttiruvchi formulalar yaratish ustida izlanishlar bo'lgan. Natijada shunday formulalar kashf qilingan.

Trapetsiyalar formulasi.

To'g'ri chiziqli trapetsiya.

Bu formula g'oyasi shundan iboratki, har bir oraliqdagi (10-rasm) egri chiziqli trapetsiya bilan almashtiriladi va izlanayotgan yuzasi trapetsiya yuzasi bilan almashtiriladi.

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx h \cdot \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$

Natijada quyidagi taqribiy formula hosil bo'ladi.

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n h \cdot \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$

Bu yig'indini yoyib yozilsa uni quyidagi ishchi formula sifatida ifodalash mumkin.

$$\int_a^b f(x) dx \approx h/2 (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-1} + f_n) \quad (10.4)$$

(10.4) formula trapetsiyalar formulasi deyiladi. Bu erda ham $f(x)$ qiymati (10.3) formulasidek $(n+1)$ marta hisoblanadi, lekin aniqlik har qadamda $O(h^3)$ tartibida, umumiy xatolik esa $O(h^2)$ tartibida bo'lar ekan. 10-rasmdan xam trapetsiya formulasi aniqroq ekanligi ko'rinib turibdi. Bu usullarda chizmani almashtirish, ya'ni integral ostidagi funktsiyani o'zgartirish yo'li bilan ketilayapti. Mantiqan o'ylaganda funktsiya grafigi egri chiziq, uni to'g'ri chiziq emas egri chiziq masalan parabola bilan almashtirilsa yaxshi bo'lsa kerak degan fikr keladi. Shu g'oya asosida formula yaratilgan.

Sipson (parabola) formulasi

Integrallash oralig'i $(a; b)$ ni juft sonli bo'laklarga bo'lamiz, ya'ni $x_i = x_0 + ih; i = 0, 1, \dots, n; n = (b-a)/h; n = 2m$ bo'lsin. Butun oraliqni uchta-uchta nuqtadan iborat $\{x_0; x_1; x_2\}, \{x_2; x_3; x_4\}, \dots, \{x_{2m-2}; x_{2m-1}; x_{2m}\}$ mta bo'lakka bo'lamiz. Shu bo'laklarning har birida funktsiya grafigini berilgan uchta $\{x_{2k-2}; x_{2k-1}; x_{2k}\}$ ga mos funktsiya grafigi nuqtalaridan o'tuvchi parabola bilan almashtiramiz. Lagranj interpolyatsion ko'phadi formulasidan foydalansak bu parabola tenglamasi

$$f(x) \approx \mathcal{L}_2(x) = f_{2k-2} \cdot \frac{(x-x_{2k-1})(x-x_{2k})}{(x_{2k-2}-x_{2k-1})(x_{2k-2}-x_{2k})} +$$

$$+ f_{2k-1} \cdot \frac{(x-x_{2k-2})(x-x_{2k})}{(x_{2k-1}-x_{2k-2})(x_{2k-1}-x_{2k})} + f_{2k} \cdot \frac{(x-x_{2k-2})(x-x_{2k-1})}{(x_{2k}-x_{2k-2})(x_{2k}-x_{2k-1})}$$

ko'rinishda bo'ladi. Integralning shu oraliqqa taaluqli qismi

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x) dx \approx \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} \mathcal{L}_2(x) dx$$

formula bo'yicha almashtiriladi. O'nga tarafdagi integrallar hammasi bir xil strukturaga ega bo'lganligi uchun umumiy formula chiqarib olamiz.

$$\mathcal{L}_2(x) = \frac{1}{2h^2} f_{2k-2} \cdot (x - x_{2k-1})(x - x_{2k}) - \frac{1}{h^2} f_{2k-1} \cdot (x - x_{2k-1})(x - x_{2k}) + \frac{1}{2h^2} f_{2k} (x - x_{2k-2})(x - x_{2k-1}) \quad (10.5)$$

$$\int_c^d (x - \alpha)(x - \beta) dx = \left| \begin{array}{l} u = x - \alpha \\ dv = (x - \beta) dx \\ du = dx \\ v = \frac{(x - \beta)^2}{2} \end{array} \right| = \frac{(x - \alpha)(x - \beta)^2}{2} \Big|_c^d - \frac{(x - \beta)^3}{6} \Big|_c^d = \frac{(x - \beta)^2}{2} \cdot \left((x - \alpha) - \frac{x - \beta}{3} \right) \Big|_c^d \quad (10.6)$$

(10.6) formulani(10.5)hadlari integralini xisoblashga tadbiq qilamiz.

$$\begin{aligned} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} (x - x_{2k-1})(x - x_{2k}) dx &= \frac{(x - x_{2k})^2}{2} \left(x - x_{2k-1} - \frac{x - x_{2k}}{3} \right) \Big|_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} \\ &= -\frac{(2h)^2}{2} \left(-h + \frac{2h}{3} \right) = \frac{4h^3}{6} = \frac{2h^3}{3} \\ \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} (x - x_{2k-2})(x - x_{2k}) dx &= \frac{(x - x_{2k})^2}{2} \left(x - x_{2k-2} - \frac{x - x_{2k}}{3} \right) \Big|_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} = -\frac{(2h)^2}{2} \left(\frac{2h}{3} \right) \\ &= -\frac{4h^3}{3} \\ \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} (x - x_{2k-2})(x - x_{2k-1}) dx &= \frac{(x - x_{2k-1})^2}{2} \left(x - x_{2k-2} - \frac{x - x_{2k-1}}{3} \right) \Big|_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} \\ &= \frac{h^2}{2} \left(2h - \frac{h}{3} \right) - \frac{h^2}{2} \cdot \left(\frac{h}{3} \right) = \frac{5h^3}{6} - \frac{h^3}{6} = \frac{2h^3}{3} \end{aligned}$$

Bu natijalarni va (10.5) formulani hisobga olgan xolda

$$\begin{aligned} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} L_2(x) dx &= \frac{1}{2h^2} \cdot \frac{2h^3}{3} \cdot f_{2k-2} - \frac{1}{h^2} \cdot \left(-\frac{4h^3}{3} \right) \cdot f_{2k-1} + \frac{1}{2h^2} \cdot \frac{2h^3}{3} \cdot f_{2k} \\ &= \frac{h}{3} (f_{2k-2} + 4f_{2k-1} + f_{2k}) \end{aligned}$$

Bu formulani butun oraliqda tadbiq qilsak va soddalashtirsak

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{k=1}^m \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^m \frac{h}{3} (f_{2k-2} + 4f_{2k-1} + f_{2k}) = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2 + f_2 + \\ &4f_3 + f_4 + \dots + f_{2m-2} + 4f_{2m-1} + f_{2m}) = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + \dots + \\ &2f_{2m-2} + 4f_{2m-1} + f_{2m}) \end{aligned} \quad (10.7)$$

ko'rinishni oladi. (10.7) formula Simpson formulasi deyiladi. Bu formula xatoligi $O(h^4)$ tartibida bo'lar ekan. Ko'rilgan uchtaformula hisoblash hajmi bo'yicha

deyarlik bir xil, funktsiyaning $n + 1$ ta qiymatini hisoblashni talab qiladi. Lekin xatolik tartibi $O(h)$; $O(h^2)$; $O(h^4)$ sezilarli farq qiladi. Amaliy hisoblarda Simpson formulasidan foydalanish aksariyat xollarda etarli aniqlikni ta'minlar ekan.

Keltirilgan formulalarning tadbiqi va aniqligini namoyish qilish uchun quyidagi misolga tadbiq qilamiz.

$$\int_1^{1,6} f(x)dx = \int_1^{1,6} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_1^{1,6} = \frac{1,6}{1} + 1 = 0,375$$

Shu integralni $h = 0,1$ qadam bilan uchchala usulda xisoblab ko'ramiz. Qiymatlar jadvali

x_i	$f_i(x_i)$
1	1
1,1	0,826446
1,2	0,694444
1,3	0,591716
1,4	0,510204
1,5	0,444444
1,6	0,390625

yordamida to'g'ri to'rtburchaklar formulasini tadbiq qilsak $S_1 \approx 0,445788$

Trapetsiyalar formulasini tadbiq qilsak

$S_2 = 0,376257$ qiymat chiqadi.

Sipson formulasiga ko'ra xisoblasak

$S_3 = 0,3750115$

qiymatni xosil qilamiz. Bu qiymatlarni $S = 0,375$ aniq qiymat bilan taqqoslagan xatolik mos ravishda

$R_1 = 0,071$; $R_2 = 0,0013$; $R_3 = 0,000011$

ekanligini ko'ramiz. Bu esa keltirilgan aprior baxolar to'g'ri ekanligini, shuningdek Sipson formulasi xatoligi ancha kichik bo'lib uni ishchi formula

sifatida tavsiya qilsa ham bo'lar ekan. (10.7) formula oddiy dastur asosida kompyuterda xisoblanishi mumkin. Adabiyotlarda keltirilgan usullardan farqli Nyuton-Kotes, Gauss formulalari ham bor. Bu formulalar nazariy tadqiqotlar uchun kerak bo'lishi mumkin. Amaliyotda esa Simpson formulasi etarli. Kvadratur formulalarining qulayligi, ularning universalligi, ya'ni integral ostidagi funktsiya $f(x)$ ko'rinishiga bog'liq emas. Karrali integrallarni hisoblashga mo'ljallangan kubatur formulalari ham mavjud.

11-MA'RUZA

Mavzu: Differentsial tenglamalarni taqribiy echish usulari. Koshi masalasini echishda Eyler, Runge –Kutta usullari. Usullarning xatolari.

Reja:

1. Birinchi tartibli oddiy differentsial tenglamalar uchun Koshi masalasi.
2. Eyler usuli va uning xatoligi.
3. Runge –Kutta usuli va uning xatoligi
4. Amaliy tavsiyalar.

Asosiy ibora va atamalar: differentsial tenglama, tenglama tartibi, Eyler usuli, Runge-Kutta usuli, Koshi masalasi

Amaliyotda noma'lum funktsiya va uning xosilalarini o'z ichiga oluvchi

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (11.1)$$

ko'rinishidagi tenglamalar ham uchraydi. (11.1) ko'rinishidagi tenglamalar differentsial tenglamalar deyiladi. Tenglamada qatnashgan hosilalarning eng yuqori tartibi differentsial tenglamalarning tartibi deyiladi. Differentsial tenglama funksional tenglama bo'lib, uning echimi deganda shunday $y = \varphi(x)$ funktsiyani tushuniladiki $\varphi(x)$ va uning xosilalarini (11.1) tenglikka qo'yiladigan bo'lsa uni ayniyatga aylantiradi. Masalan

$$y'' = y$$

ikkinchi tartibli differentsial tenglama bo'lib $y = e^x$ yoki $y = e^{-x}$ funktsiyalar bu tenglamaning echimi bo'lishini tekshirib ko'rishimiz mumkin. Differentsial

tenglamalar oliy matematikaning bir bo'limi bo'lib, uning o'z nazariya va amaliyoti mavjud.

Biz bu erda faqat bir muammo, birinchi tartibli oddiy differentsial tenglamalar uchun Koshi masalasi va uning echish usullari, haqida to'xtalamiz. Amaliyot bilan bog'liq masalalarda aynan shu turdagilarniko'p uchrab, ularni echish usullari ham amaliy ahamiyatga ega.

Masalaning amaliy tarafidan xoli bo'lgan xolda faqat matematik qo'yilishi, hamda echish usullari haqida ma'lumot beramiz. O'rni kelganda amaliy ahamiyati ham yoritiladi. Shunday qilib birinchi tartibli differentsiall tenglama deb

$$F(x, y, y') = 0 \text{ yoki} \quad (11.2)$$

$$y' = f(x, y) \quad (11.3)$$

ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi. (11.3) xosilaga nisbatan echilgan differentsial tenglama deyiladi. Aslida tenglama ko'rinishlarida (11.2) dan (11.3) ga yoki (11.3) dan (11.2) ga ekvivalent almashtirilishlar yordamida o'tish mumkin. Shuning uchun umumiyatni cheklamagan xolda (11.3) ko'rinishdagi tenglamalar bilan shug'ullanamiz. Ayrim ta'riflarni keltiramiz.

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (11.4)$$

$$(11.5)$$

(11.4) differentsial tenglamaning (11.5) boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi echimini topish masalasi Koshi masalasi deyiladi. Ma'lum shartlar bajarilganda bu masala echimi mavjud va yagona ekanligi isbotlangan. Biz faqat shunday xollar bilan shug'ullanamiz, ya'ni (11.4)-(11.5) masala yagona echimi mavjud deb, faqat uni topish bilan shug'ullanamiz. Differentsial tenglamalar algebraik tenglamalardan tubdan farq qilganligi uchun u bilan bog'liq ayrimtushunchalarni eslatib o'tish ham foydadan xoli emas. (11.4) differentsial tenglamalarning umumiy echimi deb ixtiyoriy o'zgarmas miqdor S ga bog'liq shunday $y = \varphi(x, c)$ funktsiyaga aytiladiki, bu funktsiya birinchidan S ning har qanday qiymatlarida xam (11.4) tenglamaga echim bo'lsa, ikkinchidan ixtiyoriy (11.5) boshlang'ich shart uchun shunday C_0 qiymat topilcaki, $y = \varphi(x, C_0)$ funktsiya (11.5) shartni qanoatlantirsa, ya'ni $\varphi(x_0, C_0) = y_0$ bo'lsa (11.4) differentsial

tenglamaning (11.5) shartni qanoatlantiruvchi $y = \varphi(x, C_0)$ echimi xususiy echim deyiladi. Keltirilgan ta'riflarni quyidagi oddiy differentsial tenglamada taxlil qilamiz.

$$\begin{aligned} y' &= x \\ y(2) &= 5 \end{aligned}$$

ko'rinishdagi Koshi masalasi berilgan bo'lsin. Avvalo $y = \frac{x^2}{2} + C$ ko'rinishdagi umumiy echim formulasi keltirishimiz mumkin.

$y(2) = 5$ boshlang'ich shartga ko'ra esa $5 = \frac{2^2}{2} + C \Rightarrow C = 3$ ni topamiz. Demak

Koshi masalasi echimi $5 = \frac{x^2}{2} + 3$ funksiya bo'lar ekan. Umumiy echim

formulasidan ixtiyoriy $y = (x_0) = y_0$ boshlang'ich shart uchun xam

$C_0 = y_0 - \frac{x_0^2}{2}$ formula bo'yicha C_0 ni va xususiy echimni topish mumkin bo'lar ekan.

Umumiy xolda (11.4)-(11.5) Koshi masalasining analitik echimini topish mumkin emas. $f(x, y)$ –funksiyaning ma'lum ko'rinishlaridagina (11.4) umumiy echimini topish usullari topilgan. Bu haqida tavsiya qilingan adabiyotlardan ma'lumot olish mumkin. Biz bu erda (11.4)-(11.5) Koshi masalasini taqribiy echish usullari haqida ma'lumot beramiz.

Eyler usuli

(11.4)-(11.5) Koshi masalasining $x_0 \leq x \leq b$ oralig'qidagi echimini topish talab qilinayotgan bo'lsin $(x_0; b)$ Oralig'ni $h = (b - x_0)/n$ qadam bilan n ta bo'lakka bo'lamiz. Masala echimini jadval ko'rinishda

$x_i = x_0 + i \cdot h; i = 0, 1, 2, \dots, n$ nuqtalardagi qiymatlarini topishni maqsad qilib ko'ramiz. Eyler usulining g'oyasi Lagranjning chekli orttirmalar haqidagi teoremasiga asoslangan. Unga ko'ra $[a, b]$ oralig'ida uzluksiz hosilasimavjud bo'lgan $y = f(x)$ funksiya uchun

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a); \quad c \in (a; b) \quad (11.6)$$

tenglik o'rinli. (11.6) formulani (11.4)-(11.5) Koshi masalasini echimi $y(x)$ funksiya $(x_0; x_1)$ oralig'ida tadbiq qilsak

$$y(x_1) - y(x_0) = y'(c) \cdot (x_1 - x_0) \quad c \in (x_0; x_1)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikda $c \approx x_0$ deb olsak

$$y_1 - y_0 = f(x_0, y_0) \cdot h \text{ yoki } y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) \quad (11.7)$$

formulani hosil qilamiz. Bu erda $(x_0; x_1)$ oraliq kichik bo'lganligi uchun $c \approx x_0$ deb olishdan hosil bo'ladigan xatolik ham kichik, ya'ni $O(h^2)$ tartibida bo'lar ekan. $x = x_1$ nuqtadagi qiymat y_1 topilgach bu g'oyani $(x_1; x_2)$ oraliqda tadbiq qilib (11.7) formulaga o'xshash $y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1)$ formulani hosil qilamiz. (11.7) ni rekurrent formula sifatida

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (11.8)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin. (11.4)-(11.5) Koshi masalasining echimini (11.8) formula bo'yicha hisoblash usul muallifi Eyler nomi bilan ataladi. Eyler usulining har qadamdagixatoligi $O(h^2)$ tartibida bo'lar ekan. Bu xatolik qadamba-qadam ortib borib to n nuqttagacha etib borguncha $O(h)$ tartibgacha ortishi mumkin ekan. Eyler usuli universal usul, ya'ni $f(x, y)$ funktsiya ko'rinishiga bog'liq emas, lekin xatolik nisbatan katta bo'lgani uchun unga nisbatan aniqroq usullar yaratish borasida izlanishlar bo'lgan. Bu izlanishlar natijasi sifatida ikkita olim Runge va Kutta tomonidan yaratilgan. Runge-Kutta usulini keltirishimiz mumkin..

Runge –Kuta usuli.

Usul g'oyasi funktsiyaning $x = x_0$ nuqta atrofida Teylor qatori

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^n(x_0) + \dots \quad (11.9)$$

formulasidan kelib chiqadi. E'tibor bersak, Eyler usuli bu qatorning dastlabki 2ta xadiga ekvivalent ekanligini ko'ramiz. (11.4) tenglama va (11.5) boshlang'ich shart yordamida $y'(x_0); y''(x_0); \dots$ larni xam topish mumkin. Faqat bunda $f(x, y)$ murakkab funktsiya sifatida qaralishi kerak.

$y' = f(x, y)$ dan $y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot f$ kelib chiqadi. Bu yo'l bilan ketsak, y''', y^{iv} lar juda murakkablashib, universallikni ta'minlashni iloji bo'lmay qolar ekan. Shuning uchun (11.9) Teylor qatorining dastlabki 5 ta hadiga ekvivalent lekin xosila olishni talab qilmaydigan usul yaratish yo'lidan ketilgan. Runge-Kutta usuli ana shunday usullar namunasidir.

Biz bu erda faqat usulning hisoblash formulalarini keltiramiz. Shunday qilib (11.4)-(11.5) masala echimini $(x_0; b)$ oraliqning $x_i = x_0 + ih$ $h = (b - x_0)/n$ nuqtalarida topish talab qilinayotgan bo'lsin. Runge-Kutta usuli ko'p bosqichli usul bo'lib, xar qadamda funktsiya qiymatini topish quyidagi formulalar asosida amalga oshiriladi.

$$\begin{cases} K_1 = h \cdot f(x_i, y_i) \\ K_2 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{K_1}{2}\right) \\ K_3 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{K_2}{2}\right) \\ K_4 = h \cdot f(x_i + h; y_i + K_3) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} \cdot (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{cases} \quad (11.10)$$

nazariy tahlillarga ko'ra (11.10) formulalar Runge Kutta usuli bo'yicha xisoblangan taqribiy echimlarning har qadamdagi xatoligi $O(h^5)$ tartibida bo'lar ekan. (11.10) formulalarga e'tibor bersak har qadamda $f(x, y)$ funktsiya qiymati 4 marta hisoblanayapti, Eyler usuliga nisbatan 4 marta ko'p hisoblash aniqlik esa $(1/h^3)$ marta ortayapti. Bu juda katta yutuq deb hisoblashimiz mumkin. Koshi masalasini echishda Runge-Kutta usulini etarli darajadagi aniqlikka ega bo'lgan universal usul sifatida tavsiya qilish mumkin. Hisoblash jarayoni (algoritmi) (11.10) formulalarda ifodalangan. Ular bo'yicha dastur tuzib barcha hisoblarni kompyuterda bajarish mumkin.

Ba'zi xollarda, juda katta aniqlik talab qilinmasa modifikatsiyalashgan Eyler usulini xam tavsiya qilish mumkin. Usulning ma'nosi $C \in (x_i; x_{i+1})$ nuqtani tanlashda $c = x_i$ deb emas $C = (x_i; x_{i+1})/2$ ma'qul bo'lsa kerak degan fikrga asoslangan va quyidagi formulalar bilan ifodalanadi.

$$\begin{cases} \widetilde{y}_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + h \cdot (f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \widetilde{y}_{i+1}))/2 \\ i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{cases} \quad (11.11)$$

Bu usul ikki qadamli bo'lib, bu erda $\widetilde{y}_{i+1}$ oraliq qadam sifatida xizmat qiladi. (11.11) formulalar bo'yicha hisoblashlarni xam avtomatlashtirish mumkin. (11.11) formulalar asosida dastur tuzish va hisoblashlarni kompyuterda bajarish mumkin.

12-MA'RUZA

Mavzu: Ikkinchi tartibli differentsion tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni echishda chekli ayirmalar usuli. Usul xatoligini baholash.

Reja:

1. Chegaraviy masala
2. Chekli ayirmalar
3. Chekli ayirmali tenglamalar
4. Progonka usuli
5. Xatolik uchun aprior baxolar

Asosiy ibora va atamalar: chegaraviy masala, to'r tugunlari, to'r qadami, chekli ayirmali hosilalar, progonka usuli, aprior baxolar.

Differentsial tenglamalar juda keng qamrovli bo'lim bo'lganligi uchun biz bu erda amaliy masalalarda ko'p uchraydigan xol-statsionar xoldagi issiqlik o'tkazish tenglamasini ko'ramiz va uning uchun chegaraviy masalani ifodalaymiz.

$$\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x) \cdot u = -f(x); \quad a < x < b \quad (12.1)$$

$$u(a) = U_0; \quad u(b) = u_n \quad (12.2)$$

(12.1)-(12.2) chegaraviy masala deyiladi. (12.1) tenglamaning $[a; b]$ oraliqda aniqlangan va (12.2) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi echimini topish kerak. Agar $k(x) \geq c_1 > 0$; $q(x) \geq 0$ bo'lgan bo'lakli uzluksiz funktsiyalar bo'lsa (12.1)-(12.2) chegaraviy masalaning echimi mavjudligi ma'lum. Umumiy xolda (12.1)-(12.2) echimini analitik ko'rinishda aniqlash usullari mavjud emas. Shuning uchun taqribiy usullardan foydalaniladi. Biz bu erda noma'lum funktsiyani diskret-jadval funktsiya sifatida, differentsial tenglamani esa chekli ayirmali tenglamalar sifatida ifodalash usulini ko'ramiz.

$[a; b]$ oraliqni $h = (b - a)/n$ qadam bilan n ta bo'lakka bo'lamiz. Bo'linish nuqtalari $x_i = a + i \cdot h$; $i = 0, 1, 2, \dots, n$ larni to'r tugunlari, $\{x_0; x_1; \dots x_n\}$ nuqtalar to'plamini $[a; b]$ oraliqdagi to'r deb ataymiz. Shu to'r tugunlari x_i nuqtalarda qiymatlari f_i $f(0) | f_i = f(x_i) |$ berilgan $\{f_0; f_1; \dots f_n\}$ funktsiyalarni to'r funktsiyalari

$y_x = (y_{i+1} - y_i)/h$; $y_{\bar{x}} = (y_i - y_{i-1})/h$ Bu belgilashlar birinchi tartibli bo'lingan ayirmalar deb ataladi. Bu belgilashlar asosida (12.1)-(12.2) masalaning taqribiy echimi –to'r funktsiyasi uchun

$$y_0 = U_0; y_n = U_n; \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (12.4)$$

$$\left(K_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - K_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right)/h - q_i y_i = -f_i \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (12.5)$$

$$A_i = K_{i+1}/h^2; \quad B_i = K_{i+1}/h^2 + K_i/h^2 + q_i; \quad C_i = K_i/h^2 \quad (12.6)$$

$$A_i y_{i+1} - B_i y_i + C_i y_{i-1} = -f_i; \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (12.7)$$

(12.7) ning xar bir tenglamasida uchtdan noma'lum qatnashadi. Bunday sistemalarni echishda “progonka” usuli deb ataladiganusuldan foydalaniladi. Usul g'oyasini va xisoblash formulalarini ifodalash uchun (12.7) sistemani nuqtalar bo'yicha yozib chiqamiz.

[illegible]

“Progonka” usuli g’oyasi noma’lum funktsiya qiymatlari orasida

$$y_i = \alpha_i y_{i+1} + \beta_i \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (12.9)$$

ko'rinishdagi munosabatlarni o'rnatishdan iborat. (12.8) ning 1-tenglamasidan

$$y_1 = \alpha_1 y_2 + \beta_1; \quad \alpha_1 = A_1/B_1; \quad \beta_1 = (+f_1 + c_1 y_0)/B_1 \quad (12.10)$$

ekanligini ko'ramiz. α_i, β_i lar uchun rekurrent formula xosil qilishda (12.8) ning i – tenglamasini oladigan bo'lsak

$A_i y_{i+1} - B_i y_i + c_i y_{i-1} = -f_i$ va $y_{i-1} = \alpha_{i-1} y_i + \beta_{i-1}$ munosabat ma'lum desak va o'rniga qo'ysak

$A_i y_{i+1} - B_i y_i + c_i (\alpha_{i-1} y_i + \beta_{i-1}) = -f_i$ va bu tenglikdan esa

$y_i = \alpha_i y_{i+1} + \beta_i$ ifodaga mos keladigan

$$\alpha_i = A_i / (B_i - c_i \cdot \alpha_{i-1}); \quad \beta_i = (f_i + c_i \beta_{i-1}) / (B_i - c_i \alpha_{i-1}) \quad (12.11)$$

$i = 2, 3, \dots, n-1$ larni topsak rekurrent formulalarni xosil qilamiz. Usul algoritmgiga ko'ra (12.10) formula bo'yicha boshlang'ich “progonka” koeffitsientlari α_1, β_1 topiladi. So'ngra (12.11) formulalari bo'yicha qolgan progonka koeffitsientlari $\alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_{n-1}$ lar topiladi. Bu jarayon chapdan o'ngga bajarilayotgani uchun “to'g'ri progonka” deyiladi. $y_n = U_n$ ma'lum bo'lganligi uchun

$$y_i = \alpha_i y_{i+1} + \beta_i; \quad i = n-1, n-2, \dots, 1 \quad (12.12)$$

formulalar bo'yicha noma'lum funktsiya qiymatlari $y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_2, y_1$ lar topiladi. Bu jarayon “teskari progonka” deyiladi. Keltirilgan xisoblash jarayonini aytilgan tartibda dasturlab kompyuterda bajarish mumkin. Usul nomidagi “progonka” so'zining lug'aviy ma'nosi usul moxiyatida aks etgani uchun usul nomini o'zgartirmaslik ma'qul ko'rildi. Bu usul ham universal bo'lib, masala echimi mavjudlik shartiga moskeluvchi ixtiyoriy $k(x); q(x); f(x)$ funktsiyalar va U_0, U_n chegaraviy shartlarda tadbiiq qilinishi mumkin.

Usul aniqligi haqidagap ketganida yana bir karra o'quvchini tavsiya qilingan adabiyotlarga qarashini maslaxat bergan xolda qisqacha ma'lumot berib ketamiz.

Biz bu erda (12.1)-(12.2) masala o'rniga (12.3)-(12.4) masala echimini tavsiya qilayapmiz. Bu erda approksimatsiya so'zi(usuli) tenglamalarga tadbiiq qilinadi. (12.1)-(12.2) masala aniq echimi $u(x)$ funktsiya ma'lum bo'lsayu shu

funktsiya qiymatlarini (12.3)-(12.4) masalaga qo'yilsa chiqadigan farq approksimatsiya xatoligi deyiladi va Ψ deb belgilanadi. $Z = y - u$ xatolik bo'lsa $y = z + u$ qiymatlarini (12.3) tenglamaga qo'ysak (bu erda y, u ular masalaning echimi)

$$\begin{cases} (kZ_{\bar{x}})_x + (kZ_{\bar{x}})_x - q \cdot Z - qu = -f \\ (kZ_{\bar{x}})_x - qZ = (-kZ_{\bar{x}})_x + qu - f = \Psi \\ Z_0 = 0; Z_n = 0 \end{cases} \quad (12.13)$$

xatolik Z uchun (12.13) chekli ayirmali tenglama hosil bo'ladi. Bu erda approksimatsiya xatoligi $\Psi = O(h^2)$ tartibda bo'lib taqribiy echim y va aniq echim u orasidagi farq Z xam $O(h^2)$ tartibida bo'lar ekan. Xatolik Z uchun aprior, tajribadan oldin nazariy jixatdan olinadigan, baxo hosil qilish mumkin ekan.

$$\|Z\| \leq M \cdot \|\Psi\| \quad (12.14)$$

(12.7) sistema, yaxshi shartlangan bo'lib, uning uchun (12.14) aprior baho o'rinli va $\Psi \approx O(h^2)$ bo'lgani uchun xatolik uchun xam $\|Z\| \approx O(h^2)$ tartib kelib chiqadi. Differentsial tenglamalarni chekli ayirmali tenglamalar bilan almashtirilganda approksimatsiya xatoligi tartibiga qarab ikkinchi, uchinchi yoki to'rtinchi tartibli aniqlikdagi sxemalar farqlanadi. Xatolik tartibi $O(h^K)$ tartibda baxolanadi. K -chekli ayirmali sxema xatolik tartibi deyiladi. Aytilgan fikrlarga izox sifatida ayrim namunalar keltiramiz. $x_i = x_0 + ih$ to'rt tugunlaridagi funktsiya qiymatlarini $u(x_i) = u_i$ deb belgilasak, xamda $y(x)$ funktsiyaning $x = x_i$ nuqta atrofida yoyilgan Teylor qatoridan foydalansak

$$U(x) = u_i + (x - x_i) \cdot U_i' + \frac{(x - x_i)^2}{2!} U_i'' + \frac{(x - x_i)^3}{3!} U_i''' + \frac{(x - x_i)^4}{4!} U_i^{iv} + \dots$$

Bu formuladan

$$U(x_{i+1}) = U_i + h \cdot U_i' + \frac{h^2}{2!} U_i'' + \frac{h^3}{3!} U_i''' + \frac{h^4}{4!} U_i^{iv} + \frac{h^5}{5!} U_i^{v} + \dots \quad (12.15)$$

$$U(x_{i-1}) = U_{i-1} = U_i - h U_i' + \frac{h^2}{2!} U_i'' - \frac{h^3}{3!} U_i''' + \frac{h^4}{4!} U_i^{iv} - \frac{h^5}{5!} U_i^{v} + \dots$$

(12.15) formulalarga ko'ra birinchi, ikkinchi tartibli hosilalar uchun chekli ayirmalar approksimatsiya formulalari va ular xatoligini ko'rish mumkin.

$$\frac{U_{i+1} - U_i}{h} = U'_i + \frac{h}{2} U''_i + \dots$$

demak $\frac{U_{i+1} - U_i}{h} = U'_i$ formula approksimatsiya xatoligi tartibi $O(h)$ bo'lar ekan

$$\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} = U''_i + \frac{h^2}{6} U''''_i,$$

ya'ni $U''_i = (U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1})/h^2$ formula approksimatsiya xatoligi $O(h^2)$ tartibda bo'lar ekan.

13-MA'RUZA

Mavzu: Matematik fizika tenglamalari uchun chekli ayirmalar usuli. Nostatsionar xol uchun chekli ayirmali tenglamalar approksimatsiya xatoligi va echish usullari.

Reja:

1. Nostatsionar issiqlik o'tkazish tenglamasi.
2. Nosattsionar xol uchun to'r va chekli ayirmali tenglmalar.
3. Approksimatsiya xatoligi tartibi.
4. Ayirmali tenglamalarni echish usuli.

Asosiy ibora va atamalar: nosattsionar tenglma, ikki o'lchovli to'r, to'r funktsiyasi, oshkor va oshkormas sxemalar.

Biz bu erda amaliyotda keng uchraydigan xolat va uning matematik modelini keltiramiz.

Uzunligi l ga teng bo'lgan metall sterjen ikkita uchi ma'lum temperatura saqlangan issiqlik manba'lari bilan bevosita bog'lanib turgan bo'lsa undagi temperaturaning o'zgarish jarayonini ifodalanga deyilsa quyidagi ko'rinishdagi matematik masalani hosil qilar ekanmiz.

$$\begin{cases} C \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x) \cdot u + f(x) \end{cases} \quad (13.1)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases} \quad (13.2)$$

$$\begin{cases} u(a, t) = U_0 = const \end{cases} \quad (13.3)$$

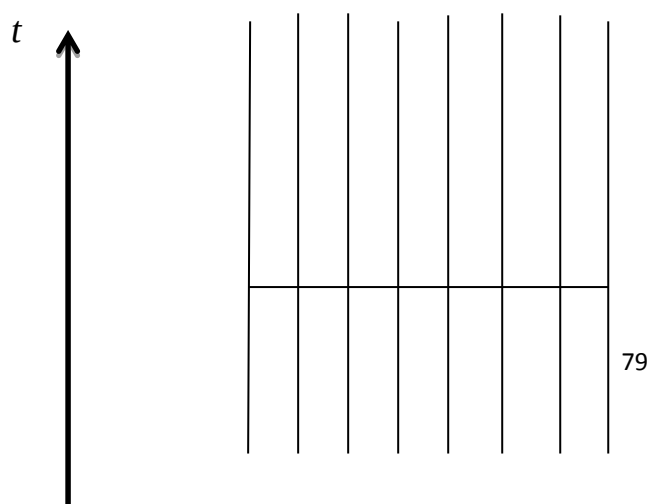
$$\begin{cases} u(b, t) = U_n = const \end{cases} \quad (13.4)$$

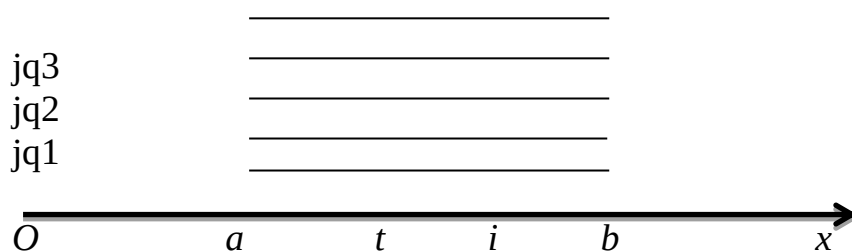
Bu erda Ox o'qi sterjen yo'nalishi bo'ylab olingan, sterjen esa shu Ox o'qining $[a; b]$ oralig'ida joylashtirilgan bo'lib $l = b - a$ ga teng. Sterjen boshlang'ich vaqt

$t = 0$ dagi temperaturasi $\varphi(x)$ funktsiya bilan ifodalangan. Sterjen uchlarida esa ma'lum temperatura ushlab turilgan bo'lsin. Bu erda S - sterjen materiali solishtirma issiqlik sig'imi, K -solishtirma issiqlik o'tkazish koeffitsenti, q – tashqi muxitga issiqlik tarqashi (tashqi temperatura past bo'lsa) koeffitsenti, $f(x, t)$.issiqlik manba'lari quvvati (13.1) turdagi tenglamalar “xususiy xosilali differentsial tenglamalar” , yoki ular asosan fizik jarayonlarning matematik modeli sifatida kelib chiqqanligi uchun “matematik fizika tenglamalar” deb ham ataladi. Agar jarayon vaqtga bog'liq bo'lsa tenglama tarkibida vaqt t ham qatnashadi. Bunday tenglamalar nostatsionar tenglamalar deyiladi. Jarayonning vaqt davomida o'zgarishi dinamikasini aks ettirish va aniqlash uchun nostatsionar tenglamalardan foydalaniladi.

Matematik fizika tenglamalari matematikaning eng murakkab bo'limlaridan bo'lib, bu bo'limga taaluqli masalalar echimini asosan taqribiy usullar bilan topish mumkin ekan.

Maqsad bu yo'nalishdagi masalalarni echish usullari haqida umumiy tasavvur uyg'otishdan iborat bo'lganligi uchun (13.1)-(13.4) masala echimini topish jarayonini ifodalash bilan cheklanamiz. Statsionar xolat, ya'ni $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ bo'lgan xol haqida avvalgi ma'ruzalarda batafsil to'xtaldik. Shuning uchun bevosita vaqt parametri bilan bog'liq taraflariga e'tiborni qaratamiz. (13.1) tenglamani chekli ayirmali tenglamalar bilan approksimatsiya qilish uchun OXT koordinat tekisligida $D = \{a \leq x \leq b; t > 0\}$ soxani olamiz. Bu soxada Ox o'qi bo'ylab $h = (b - a)/n$ va OT o'qi bo'ylab τ qadam bilan to'r chizamiz. (11-rasm).

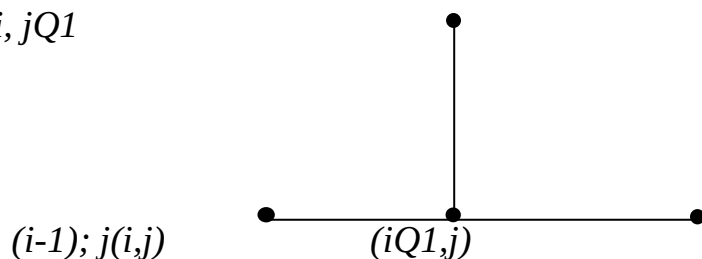




11-rasm.

Bu to'rt tugunlari (x_i, t_j) $x_i = a + ih$; $i = 0, 1, 2, \dots, n$; $u_j t_j = j \cdot \tau$ nuqtalardagi funktsiya qiymatlarini $U(x_i, t_j) = U_{ij}$ ko'rinishda belgilaymiz. (13.1) tenglama tarkibidagi xosilalarni approksimatsiya qilishda ikki usuldan foydalaniladi. Oshkor sxema bunda (x_i, t_j) nuqtadagi shablon 4 nuqtali bo'lib x bo'yicha hosila j -vaqt qatlamida approksimatsiya qilinadi. (12-rasm).

$i, jQ1$



12-rasm.

Umumiyatni cheklamagan xolda soddalik uchun $c = 1; k = 1; q = 1$ hisoblasak (13.1) tenglmaga mos chekli ayirmali tenglama

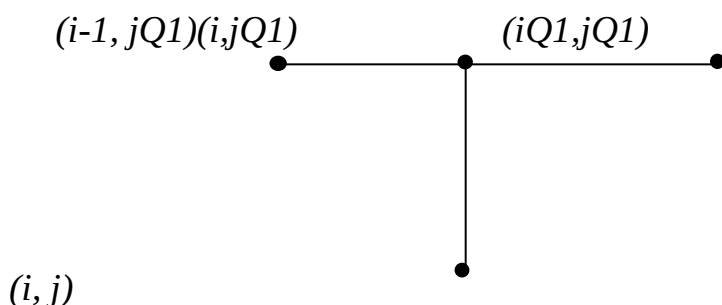
$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{\tau} = \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} - U_{i,j} + f_i \quad (13.5)$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1; \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

$$U_{i0} = \varphi_i; \quad U_{0j} = U_0; \quad U_{nj} = U_n \quad (13.6)$$

ko'rinishni oladi. Oshkor sxemadan noma'lum sxema bevosita aniqlanadi. Chunki $j = 0$ da (13.5) o'ng tarafi barchasi ma'lum bo'lganligi uchun U_{i1} lar barchasi hisoblanadi. $t = \tau$ ga mos 1-qatlam topiladi. Undan keyin esa huddi shunday usulda 2-qatlam va xokazo qiymatlari xam topilaveradi. Hisoblashlar kerakli $t = j\tau$ gacha olib boriladi. Approksimatsiya xatoligi $O(h^2 + \tau)$ tartibda bo'lar ekan. Shuning uchun vaqt bo'yicha τ qadamni muvofiqlashtirib $\tau \approx h^2$ tartibda olgan ma'qul ekan. Oshkor sxema bo'yicha tuzilgan tenglamalar sistemasi yaxshi shartlanmaganligi

uchun amaliyotda , nisbatan qiyinroq bo'lsada, oshkormas sxemadan foydalaniladi. Oshkormas sxema shabloni 13-rasmda keltirilgan.



13-rasm

Bunda (x_i, t_{j+1}) to'r tugunlaridagi chekli ayirmali tenglama ko'rinishi

$$\frac{U_{ij+1} - U_{ij}}{\tau} = \frac{U_{i-1j+1} - 2U_{ij+1} + U_{i+1j+1}}{h^2} - U_{ij+1} + f_i \quad (13.7)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots; \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$$

$$U_{i0} = \varphi_i; \quad U_{0j+1} = U_0; \quad U_{nj+1} = U_n \quad (13.8)$$

xosil bo'ladi. (13.7)tenglamani echishda xar bir vaqt qatlamida avvalgi ma'ruzada ko'rilgan progonka usuldan foydalaniladi. Bu erda statsionar xol uchun ko'rilgan algoritm faqat kerakli marta $j = 0, 1, 2, \dots, m$ lar uchun takrorlanadi xolos.

Matematik fizika tenglamalari uch turga bo'linadi: parabolik, elliptik, giperbolik tenglamalar. Ular ko'rinishi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^m k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + f(x, t) \quad (13.9)$$

$$\sum_{k=1}^m k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + f(x, t) \quad (13.10)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^m k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + f(x, t) \quad (13.11)$$

Bu tenglamalar har biri uchun ma'lum qo'shimcha boshlang'ich va chegaraviy shartlar berilsa yagona echimini mavjudligi haqida gapirish mumkin. Yagona echim mavjud bo'lgan xol uchun esa xosilalarni chekli ayirmalarga almashtirilib algebraik tenglamalar sistemasi xosil qilish va masala echimini topish mumkin bo'lar ekan. Tabiat va texnikada keladigan ko'plab jarayonlar issiqlik tarqalishi, massa ko'chishi, diffuziya, to'lqinlar tarqalishi kabilar aynan matematik fizika tenglamalari bilan ifodalanadi. Shunday turdagi ko'plab amaliy

masalalarga keltirilgan yo'nalishdagi taqribiy usullar samarali tadbiriq qilinib kelmoqda.

14-MA'RUZA

Mavzu: Optimizatsiyamasalalari. Amaliy masalalar uchun maqsad funktsiyasini tuzishga misollar. Bir o'lchovli optimizatsiya masalalari uchun oraliqni teng ikkiga bo'lish, oltin qirqimlar usuli.

Reja:

1. Amaliy masalalarda maqsad funktsiyasi, uni tuzish usullari.
2. Optimizatsiya masalalari.
3. Oraliqni teng ikkiga bo'lish usuli
4. Oltin qirqimlar usuli.

Asosiy ibora va atamalar: lokal va global ekstremumlar, maqsad funktsiyasi, optimizatsiya, optimal plan, oltin qirqimlar usuli.

Inson psixologiyasiga xos bo'lgan bir hislat: o'z faoliyati davomida qiladigan har bir ishida mumkin bo'lgan variantlardan eng maqbulini tanlashga intiladi. Kuzatuvlarga ko'ra ma'lum ekanki, xattoki it yoki mol ma'lum masofada joylashgan emishga ko'zi tushsa shu emish tomon eng qisqa ya'ni to'g'ri chiziqli yo'l bo'ylab harakatlanar ekan. U ham mumkin bo'lgan traektoriyalar orasidan eng yaxshisini eng optimalini tanlashga xarakat qilar ekan. Xayvonlarda buni jonivor instinkti deb ataladi. Inson esafikrlab, chamalab, lozim bo'lsa hisob-kitobini qilib eng maqbul variantni tanlashga harakat qiladi. Muloxazalarni murakkablashtirmasdan har bir masalada manfaatdorlik printsipini asos qilib olamiz. Qilinayotgan har bir ishni bajarish uchun ketadigan harajatlar bilan bog'liq bo'lsa bu harajatlarni kamaytirish; olinadigan daromadlar bilan bog'liq bo'lsa ish daromadlarni ko'paytirishni maqsad qilib qo'yadi. Masala shartlaridan kelib chiqqan holda harajat, daromadni ifodalovchi maqsad funktsiyasi tuziladi. Keyin esa ana shu maqsad funktsiyasining ekstremumlarini topish bilan shug'ullanamiz.

Ketirilgan muloxazalarni oydinlashtirish uchun amaliy masalalardan namunalar keltiramiz.

1- masala Sizga $100m$ sim-to'r devor bilan to'g'ri to'rtburchakli maydonni o'rab olgin maydon seniki bo'ladi degan imkoniyat berildi. Nima qilgan bo'lar edingizq

Bu erda, tabiiy, qanday qilsam egalik qiladigan maydonim ko'proq bo'lar ekan degan fikr o'ylashga majbur qiladi. To'g'ri to'rtburchak tomonlarini a, b desak, perimetri $100m$ bo'lgani uchun $2a + 2b = 100$ shart kelib chiqadi. O'rab olingan yuza esa $S = a \cdot b$ ga teng bo'ladi. Natijada $a + b = 50$ bo'lgan a, b lar orasidan $S = a \cdot b$ ga eng katta qiymat beradiganini topish masalasi paydo bo'ladi. Masala shartidan $b = 50 - a$ ni aniqlab S ga qo'yilsa, $S = a \cdot (50 - a) = 50a - a^2 \rightarrow \sup$ bu erda *si*r eng katta qiymat ma'nosida ishlatiladi. $S(a) = 50a - a^2$ maqsad funktsiyasiga namuna deb qaralishim mumkin. Bu erda ekstremumni topish uchun an'naviy usullardan foydalanish mumkin. $S'(a) = 50 - 2a = 0$ shartdan nuqtada $a = 25$ topiladi. $S''(a) = -2 < 0$ bo'lgani va yagona bo'lgani uchun $S(a)$ ning yagona ekstremumi bo'lib shu $a = 25$ nuqtada $S(a)$ funktsiya o'zining global ekstremumi, ya'ni $\sup S(a)$ ga erishadi. Demak $\sup S(a) = S(25) = 25^2 = 625m^2$ muntazam to'rtburchak, ya'ni kvadrat optimal variant bo'lar ekan. O'rni kelganda shuni aytish mumkinki, maydonni muntazam beshburchaksifatida o'rasak, devor uzunligi $100m$ saqlanadi, yuza ko'proq, oltiburchak shaklida olsak yanada ko'proq bo'lar ekan. Ko'pburchak tomonlar sonini orttirgan sari (perimetri $P = 100$ saqlangan xolda) yuza ortib borar ekan. Bunda ko'pburchak borgan sari doiraviy ko'rinishni olib boradi. Xulosa qilib aytganda, perimetri bir xil bo'lgan yassi shakllar orasida yuzasi eng kattasi doira bo'lar ekan. Bizning misolga tadbiq qilsak $P = 2\pi r = 100$ bo'lsa $r = \frac{50}{\pi}$ chiqadi.

$$S = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{50}{\pi}\right)^2 = \frac{2500}{\pi} \approx 796m^2$$

Kvadratga qaraganda $171m^2$, ya'ni anchagina ko'proq bo'lar ekan. Atrof tabiatga e'tibor bersak, doiraviy shakl ko'p uchrashiga guvoh bo'lamiz. Tabiat ham moxir muxandis sifatida optimal shakllardan foydalanishga xarakat qilganini ko'ramiz.

Yana bir misol ko'ramiz. Faraz qilaylik siz tadbirkorsiz va kichik korxonangiz bor. Sizning korxonangiz metal konserva bankalari ishlab chiqarishga ixtisoslashgan. Korxonangizga xajmi $1000\pi m^3$ bo'lgan juda katta partiya konserva bankalari tayyorlashga buyurtma tushdi. Yana savol: nima qilgan bo'lar edingizq Bu erda ham, manfaatdorlik nuqtai nazaridan, bankalar tayyorlashga ketadigan metall sarfini kamaytirish yo'lini qidirish kerak bo'ladi. Metall sarfi esa tsilindr to'la sirti, ya'ni qoplama material bilan ifodalanadi. Masalani bitta konserva bankasi miqyosida ishlaymiz. Keyinchalik umumiy partiya soni N ga ko'paytirib to'liq tejamkorlikni aniqlash mumkin bo'ladi. Masalaning matematik modelini ifodalaymiz. Yuqoridagi muloxazalarga ko'ra ortiqcha izoxga xojat yo'q.

$$\begin{cases} S_{to'la} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot H \rightarrow \min \\ V = \pi r^2 \cdot H = 1000\pi r^3 \end{cases}$$

Xosil bo'lgan optimizatsiya masalasini ishlash uchun 2-tenglikdan $H = 1000/r^2$ ni aniqlab 1-tenglikka qo'yilsa maqsad funktsiyasi

$$S_{to'la} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1000}{r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000\pi}{r} \rightarrow \min$$

$$S' = 4\pi r - \frac{2000\pi}{r^2} = 0 \text{ deb } r = \sqrt[3]{500} \text{ topiladi.}$$

Bunda $H = \frac{1000}{r^2} = 1000/\sqrt[3]{500^2} = 2\sqrt[3]{500}$ qiymatlar chiqadi. Bundan umumiy turdagi, tsilindr o'q kesimi kvadrat bo'lsa eng kam metal sarflanar ekan degan xulosaga kelamiz. Keltirilgan misollar sodda bo'lganligi uchun ularga an'anaviy usullarni tatbiq qilib aniq echimini topish mumkin bo'ladi. Umumiy xolda doim ham bunday natijaga erishib bo'lmas ekan.

Shuning uchun bu o'rinda umumiy usullar haqida fikr yuritamiz. Masalaning amaliy tarafidan chetlashgan xolda faqat matematik muammo sifatida tahlil qilamiz va echish yo'llarini keltiramiz.

Masala quyidagicha ifodalanadi.

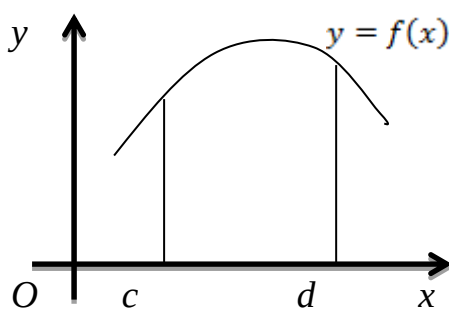
$$\inf f(x) = ? \tag{14.1}$$

$$a < x < b$$

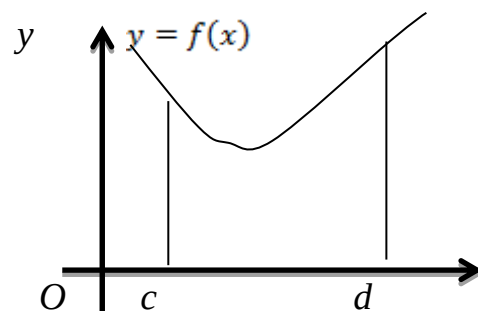
bu erda eng kichik qiymatni topish bilan cheklanamiz. Chunki $\sup_{a < x < b} f(x)$ masalani $\inf_{a < x < b} (-f(x))$ ko'rinishda ifodalash mumkin. Ya'ni uni ham eng kichik qiymat topish masalasigi almashtirilyapti.

(14.1) masalada $y = f(x)$ funktsiyaning (a, b) oralig'idagi eng kichik qiymatini topish talab qilinyapti. Bu oraliqda bir qancha lokal minimumlar bo'lishi mumkin. U xolda ular va chegara qiymatlar $f(a); f(b)$ lar orasidan eng kichigini tanlab olish kerak bo'ladi. Bunday xollarda eng avval (a, b) oraliqni uni modal, ya'ni faqat bitta ekstremumni o'z ichiga olgan oraliqlarga ajratiladi. Xar bir oraliqda o'z lokal ekstremumini topiladi. So'ngra ularni taqqoslash asosida eng kichik qiymat topiladi.

Buning uchun unimodallik shartlarini kiritamiz. Agar biror $[c; d]$ oraliqda $y = f(x)$ funktsiyaning o'zi, 1-,2-tartibli xosilalari xam uzluksiz bo'lib $f'(c) \cdot f'(d) < 0$ va $f''(x)$ ishorasi $[c; d]$ da o'zgarmasa $y = f(x)$ funktsiya $[c; d]$ oraliqda unimodel bo'ladi va yagona ekstremumga ega. Bu fikrlarni grafik usulda izohlab to'g'riligiga ishonch xosil qilamiz. 14-rasmda



a)



b)

14-rasm.

$f'(c) > 0, f'(d) < 0$ va $f''(x) < 0$ (qabariq) bo'lgan xol aks etgan. Bunda $[c; d]$ oraliqda yagona maksimumga ega. 14-rasmda esa $f'(c) < 0, f'(d) > 0; f''(x) > 0$ (botiq) bo'lgan xol aks etgan. Bunda $[c; d]$ oraliqda yagona minimumga ega bo'lishi ko'rinib turibdi.

Maqsad funktsiya minimumini topishdan iborat bo'lganligi uchun, qaralayotgan $[a, b]$ oraliqda funktsiya model, ya'ni 14b-rasmdagi vaziyat o'rinli, deb funktsiyaning shu oraliqdagi minimumini topish usullarini keltiramiz. Ulardan birinchisi

Oraliqni teng ikkiga bo'lish usuli.

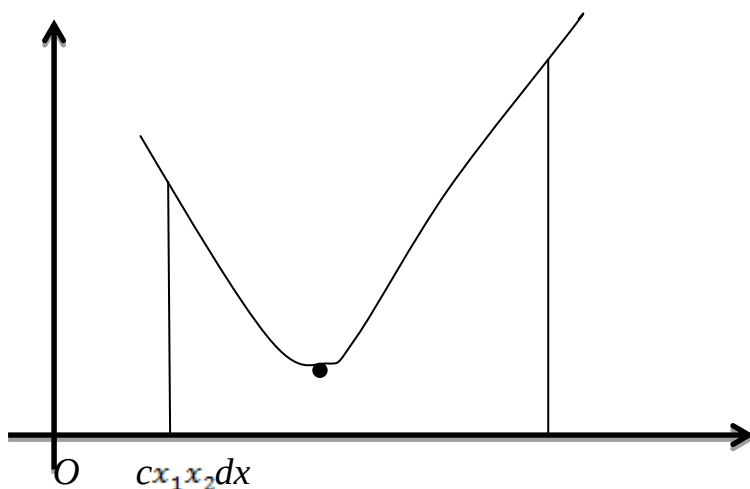
Usulni bayon qilishda amaliy jixatdan, algoritmik tarzda ifodalaymiz. Toki bu muloxazalar asosida dastur tuzish va echimni kompyuterda aniqlash imkoniyatlari ko'rilsin. Jarayonni geometrik tarzda ifodalash usulni tushuntirish va tushunishni osonlashtiradi. Shuning uchun barcha xisoblar geometrik izoxlab boriladi.

$$x = (c + d)/2$$

$$x_1 = x - \delta \tag{14.2}$$

$$x_2 = x + \delta \text{ xisoblanadi.}$$

$$y = f(x)$$



15-rasm

Bu erda $x[c; d]$ kesma o'rtasi $\delta > 0$ etarli darajada kichik bo'lgan son. Keyingi qadamga o'tish uchun $f(x_1) > f(x_2)$ shart bajarilsa $c = x_1, f(x_1) < f(x_2)$ bo'lsa $d = x_2$ deb olinadi. Agar $f(x_1) = f(x_2)$ bo'lsa, kamdan kam bo'ladigan xol, $c = x_1, d = x_2$ deb olinadi. Uchchala xolda xam yangi $[c; d]$ oraliq xosil bo'ladi. Faqat bu oraliq berilgan oraliqdan ikki baravar kichik bo'ladi.

Agar $d - c < \varepsilon$ bo'lsa $x = \frac{c+d}{2}$; $f(x)$ larni javob sifatida olib hisobni tugatamiz.

Aks xolda yana (14.2) formula bo'yicha xisoblashga o'tamiz. Bu usulda bajarilishi kerak bo'lgan qadamlar soni k desak uni

$$(b - a)/2^k < \varepsilon \quad (14.3)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi eng kichik k butun sondan ortmaydi deyish mumkin. $\delta < \varepsilon$ tengsizlikdan δ -ning qiymatini tanlash mumkin. Bu erda ε -talab qilinayotgan aniqlik. δ -ni istalgancha kichik olish mumkin. Faqat bunda kompyuterdagi sonlarni ifodalashda ishlatiladigan razryadlar soni imkoniyatni cheklashi mumkin.

Taqribiy usullar yaratilgan paytda xisoblash vositalari rivojlanmagan bo'lganligi uchun xisoblash xajmini kamaytiruvchi har qanday usul yoki qadam katta yutuq sifatida qabul qilingan. Yuqorida ko'rganimizdek oraliqni teng ikkiga bo'lish usuli masala echimini (14.3) tengsizlikni qanoatlantiruvchi k qadamda istalgan $\varepsilon > 0$ aniqlikda aniqlashim mumkin ekan. Bu usulning yagona kamchiligi har bir qadamda $f(x)$ funktsiya qiymatini ikkita (14.2) formula bo'yicha aniqlangan x_1, x_2 nuqtalarda xisoblashni talab qilar ekan. $f(x)$ funktsiya ko'rinishi murakkab bo'lsa bu ancha mexnatni talab qilishi mumkin. Shuning uchun har qadamda funktsiya qiymatini faqat bir marta hisoblashni talab qiladigan usul yaratish bo'yicha izlanishlar olib borilgan va bunday usul topilgan.

Oltin qirqimlar usuli.

Yana avvalgidek, $y = f(x)$ funktsiya $[a, b]$ oraliqda unimodal va shu oraliqda yagona minimal minimumga ega ekanligi ma'lum deb shu minimumni topish masalasi bilan shug'ullanamiz.



$[a, b]$ oraliqni x_1, x_2 nuqtalar bilan shunday uchta bo'lakka bo'lmizki, $x_1 - a = b - x_2$, ya'ni ikki chetidagi bo'laklar o'zaro teng, xamda chekka bo'lak uzunligini butun kesma uzunligiga nisbati $x_2 - x_1$ bo'lakning $b - x_1$ ga nisbatiga teng bo'lsin. Bu

erda maqsad ekstremum $(a; x_2)$ oraliqda bo'lib qolsa (x_1, x_2) keyingi qadamda xam ishchi oraliq x_1 esa bo'linish nuqtasi bo'lib qolsin. Shuningdek ekstremum $(x_1; b)$ oraliqda bo'lsa x_2 keyingi qadamda bo'linish nuqtasi bo'lib qolsin. Aytilgan shartlarga javob beradigan x_1, x_2 larni topishda $x_1 - a = b - x_2 = \lambda(b - a)$ shartga mos λ – parametr kiritamiz va uning qanday bo'lishini yuqorida qo'yilgan shartlar orqali ifodalaymiz. Asosiy shart

$$\frac{x_1 - a}{b - a} = \frac{x_2 - x_1}{b - x_1} \Rightarrow \frac{\lambda(b - a)}{b - a} = \frac{b - \lambda(b - a) - (a + \lambda(b - a))}{b - (a + \lambda(b - a))}$$

tenglik bilan ifodalanadi. Undan esa

$$\lambda = \frac{1 - 2\lambda}{1 - \lambda} \Rightarrow \lambda - \lambda^2 = 1 - 2\lambda$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

kvadrat tenglama kelib chiqadi. Undan λ – parametr qiymati $\lambda = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ekanligini ko'ramiz. Oltin qirqimlar usuli bo'yicha masala echimini aniqlash jarayonini algoritmik tarzda dasturlash uchun qulay ko'rinishda ifodalaymiz.

$$x_1 = a + \lambda(b - a); \quad x_2 = b - \lambda(b - a)$$

$$y_1 = f(x_1); y_2 = f(x_2)$$

qiymatlar xisoblanadi. Bundan keyin asosiy xisoblash jarayoni ketadi.

Agar $y_1 > y_2$ bo'lsa

$$a = x_1; \quad y_1 = y_2; \quad x_2 = b - \lambda(b - a); \quad y_2 = f(x_2)$$

aks xolda

$$b = x_2; \quad y_2 = y_1; \quad x_1 = a + \lambda(b - a); \quad y_1 = f(x_1) \text{ xisoblanadi.}$$

Agar $b - a < \varepsilon$ shart bajarilsa $(a; b)$ oraliq istalgan nuqtasini echim sifatida tavsiya qilish mumkin. Bunda xatolik ε dan ortmasligi aniq bo'lib, xisoblashlarni tugatamiz. Aks xolda keyingi qadamga o'tamiz. E'tibor berilsa bunda keyingi qadam uchun barcha narsa tayyorlab qo'yilganligini ko'ramiz. Keyingi qadam yana $y_1 > y_2$ shartni tekshirishdan davom ettiriladi. Ko'rinib turibdiki, vaziyatga qarab har qadamda $f(x)$ qiymati faqat bir marta yo $x = x_1$ nuqtada, yoki $x = x_2$ nuqtada xisoblanadi. Sababi bitta qiymat oldingi qadamdan meros sifatida qolgan

bo'ladi. Keltirilgan hisoblash jarayonini dasturlab barcha hisoblarni kompyuterda bajarishi mumkin.

15-MA'RUZA

Mavzu: Ko'p o'lchovli optimizatsiya masalasi va uni echishda gradient bo'yicha pasayish usuli.

Reja:

1. Ko'p argumentli funktsiyalar ekstremumi
2. Ekstremumning mavjudlik shartlari
3. Funktsiya gradienti
4. Gradient bo'yicha pasayish usuli.
5. Usul tadbiri bo'yicha tavsiyalar.

Asosiy ibora va atmalar: xususiy hosila, maydon, gradient, shartli ekstremum, global ekstremum

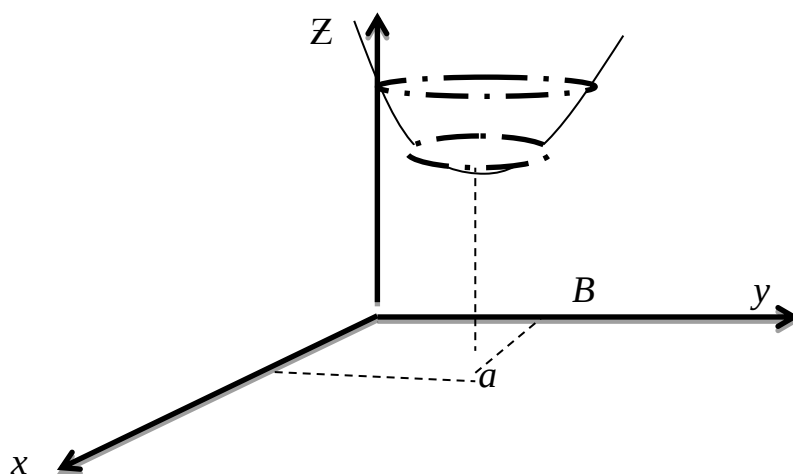
Tabiiy yoki texnik jarayonlarni matematik modellashtirishda jarayonning xal qiluvchi parametrlaridan birortasi (temperatura, bosim, kuchlanish,..) tanlanadi va barcha miqdoriy bog'lanishlar ana shu parametr orqali ifodalanadi. Jarayon tekislikda bo'lsa ikkita, fazoda bo'lsa uchta o'zgaruvchiga bog'liq funktsiya xosil bo'ladi. Umumiy xolda n – o'zgaruvchili funktsiya bo'lsa

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (15.1)$$

ko'rinishda ifodalanadi. n – o'lchovli D sohada (15.1) funktsiyaning minimum yoki maksimumini topish masalasi n – o'lchovli optimizatsiya masalasi deyiladi. Bu erda bir o'lchovli optimizatsiya masalasidan farqli ekstremumning mavjudligi sharti, uni aniqlash jarayoni anchagina murakkab bo'lar ekan. Shuning uchun umumiyatga daxl qilmagan xolda, ikki o'lchovli optimizatsiya masalalari bilan cheklanamiz. Faqat so'ngida ayrim tavsiyalarni berib o'tamiz.

$Z = f(x, y)$ funktsiyaning biror $(x, y) \in D$ sohada minimumini topish talab qilinayotgan bo'lsin. Qaralayotgan D -sohada funktsiya minimumi mavjudligi ma'lum bo'lsin. Shu minimumni topish jarayonini aniqlashimiz kerak. Geometrik izoxni

soddalashtirish uchun barcha muloxazalarni bitta misol asosida olib boramiz. Lekin bu umumiyatga zarar emasligi muloxazalardan ko'rinib turadi.



16-rasm.

$z = S + (x - a)^2 + (y - b)^2$ funktsiya minimumini topish talab qilinayotgan bo'lsin. Bu minimum mavjudligi va (a, b) nuqtada ekanligi chizmadan xam, funktsiya formulasidan xam ko'rinib turibdi. Xar qanday $z = f(x, y)$ funktsiya tekislikda biror fizik miqdor maydonini ifodalar ekan.

$$\text{grad}f = \frac{\partial f}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \bar{j}$$

vektor esa maydon gradienti deb ataladi. Gradient bo'yicha aniqlangan vektor maydonininghar bir nuqtasida $f(x, y)$ funktsiyaning eng tez o'sish yo'nalishini ko'rsatar ekan. Tabiiy, gradientga teskari - $\text{grad}f$ yo'nalish esa eng tez pasayish yo'nalishiga mos kelar ekan. Taqribiy usullar gradientning ana shu xususiyatiga asoslangan.

Gradient bo'yicha pasayish usuli.

Usul g'oyasini izohlashni 16-rasmida ifodalangan misol orqali olib boramiz. Funktsiya minimumi mavjud bo'lgan soxadan biror boshlang'ich $(x_0, y_0) \in D$ nuqta tanlaymiz. Keyingi nuqtani topishda gradientga qarshi yo'nalishga siljiymiz. Buning uchun

$$x_1 = x_0 - \delta \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_0, y=y_0}; y_1 = y_0 - \delta \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x=x_0, y=y_0} \quad (15.2)$$

formula bo'yicha yangi x_1, y_1 nuqtani topamiz. Bu erda δ qadamni ifodalovchi, biror oldindan berilgan son. Yangi x_1, y_1 nuqtadagi qiymat avvalgisidan kam, ya'ni

$$f(x_1, y_1) < f(x_0, y_0) \quad (15.3)$$

shart bajarilsa yaxshi, bo'lmasa δ qadamni (15.3) bajarilguncha kamaytiriladi. Ma'lumki ekstremum nuqtada barcha xususiy 1-tartibli hosilalar nol bo'lishi kerak. Shuning uchun taqribiy echimga ham shunga o'xshash talabni qo'yish kerak bo'ladi. Amaliyotda

$$\|f'(x_1, y_1)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} < \varepsilon \quad (15.4)$$

shart bajarilsa jarayon to'xtatiladi va $x = x_1; y = y_1; Z = f(x_1, y_1)$ javob deb xisoblanadi. Aks xolda $x_0 = x_1, y_0 = y_1$ deb yana (15.2) formulaga qaytamiz.

Keltirilgan usulni 16-rasmdagi xolga $a = 2; b = 3$ bo'lgan xolda tadbqiqilamiz.

$$Z = 5 + (x - 2)^2 + (y - 3)^2$$

$x_0 = 1, y_0 = 1$ boshlang'ich nuqtani tanlaymiz. $\delta = 0,2$ qadamni tanlaymiz. U xolda (15.2) formulalarga ko'ra

$$x_1 = x_0 - \delta \cdot (x_0 - 2); y_1 = y_0 - \delta \cdot (y_0 - 3) \text{ bundan}$$

$$x_1 = 1 - 0,2 \cdot 2 \cdot (-1) = 1,4; y_1 = 1 - 0,2 \cdot 2 \cdot (-2) = 1,8$$

$$x_2 = 1,4 - 0,2 \cdot 2 \cdot (-0,6) = 1,64; y_2 = 1,8 - 0,2 \cdot 2 \cdot 1,2 = 2,28$$

$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ketma-ketlik borgan sari ekstremum nuqtasi (2;3) tomon intilib borayotgani ko'rinib turibdi.

Bu g'oyani n -o'lchovli xol uchun, ya'ni

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \min$$

uchun xam tadbqiqilish mumkin. Bunda biror $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ boshlang'ich nuqta tanlanib keyingi qadam qiymatlari

$$x_i^{(1)} = x_i^{(0)} - \delta \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{x=x^{(0)}} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

formula bo'yicha xisoblanadi. Agar

$$f(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}) > f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$$

bo'lib ketsa δ ni kichiklashtiriladi. Algoritm ishlash tartib ikki o'lchovli xoldagidek bo'ladi.

16-MA'RUZA

Mavzu: Chiziqli programmalash masalalari, ChPM ga keltiriladigan optimal rejalashtirish masalalari. ChPM ning matematik modeli. Mumkin bo'lgan echimlar soxasi, MBES.

Reja:

1. Ishlab chiqarishda optimal rejalashtirish.
2. ChPMga keltiriladigan iqtisodiy masalalar.
3. ChPM ning matematik ifodasi.
4. ChPM uchun MBES ning qabariq soha ekanligi.
5. Optimal echim mavjudligi va o'rni haqida.

Asosiy ibora va atamalar: ChPM, qabariq soxa, MBES, optimal echim, maqsad funktsiyasi.

Ishlab chiqarishda rejalashtirish bilan bog'liq ichki muammo, bu ishlab chiqarish resurslari, xomashyo sarfi normativlari, narx-navo asosida yuqori daromadni ta'minlovchi rejani aniqlashdan iborat. Masalaning iqtisodiy taraflarini va matematik modelini bog'lash uchun bitta shartli modelni (abstrakt) ko'ramiz.

Korxonada m xil xomashyo bor. Ularning zaxira miqdorlari $b_1, b_2, \dots, b_m$ ma'lum. Korxona n xil maxsulot ishlab chiqaradi. ishlab chiqarish normativlariga ko'ra j maxsulotning har bir birligiga i xomashyodan a_{ij} birlik sarflanadi. Agar j maxsulotning har bir birligi narxi c_j pul birligi tursa korxona har bir maxsulot turidan qanchadan ishlab chiqarganda daromad eng yuqori bo'ladi Bu masalaning iqtisodiy ifodasi. Keltirilgan shartlar asosida masala matematik modelini ifodalaymiz

Ishlab chiqarilishi kerak bo'lgan j maxsulot miqdorini x_j deb belgilaymiz. U xolda xomashyo sarfi bo'yicha cheklashlar kelib chiqadi. Tuzilgan reja xomashyo zaxiralariga mos kelishi kerak. Matematik ifodasi

$$\sum_{j=0}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (16.1)$$

ko'rinishda bo'ladi. (16.1) shartlarga qo'shimcha tarzda $x_j \geq 0$ tabiiy shartni xam qo'shib qo'yiladi. Jami $n + m$ ta shart bo'ladi. Bu shartlar $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$ n – o'lchovli fazoda ma'lum bir D soxani ifodalaydi. Shu D sohaga tegishli xar bir qiymat (nuqta) mumkin bo'lgan reja sifatida tushuniladi. Masala shartiga ko'ra (16.1) shartni qanoatlantiruvchi echimlar orasidan eng yuqori daromad keltiradiganini tanlash kerak. Daromad esa maxsulotlarni sotish hisobiga keladi va narxi navolarga ko'ra

$$L = \sum_{j=0}^n C_j \cdot x_j \rightarrow \max \quad (16.2)$$

shartdan topiladi. (16.1)-(16.2) birgalikda ChPM deyiladi. Noma'lumlar soniga qarab bu erda n – o'lchovli ChPM ifodalangan.

(16.1)-(16.2) ChPM ni echishda dastavval (16.1) shartlarni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamini topish kerak. Bunday nuqtalar to'plami mumkin bo'lgan echimlar soxasi MBES deyiladi. (16.2) formula bilan ifodalangan. $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funktsiya maqsad funktsiyasi deyiladi. Ko'rilganidek ChPM tarkibiga kiruvchi barcha shartlar (16.1), hamda maqsad funktsiyasi (16.2) ham noma'lumlar $x_1, x_2, \dots, x_n$ larga nisbatan chiziqli funktsiyalar bo'lganligi uchun masala chiziqli sifati bilan atalgan. Bu erda programmalash so'zi dasturlash emas rejalashtirish ma'nosida tushunilishi kerak. Bu erda bir ma'lumotni alohida isboti bilan qayd etib o'tamiz. Chunki keyingi muloxaza va masalani echish usullari shunga asoslangan.

Avvalo n – o'lchovli fazoda qabariq soha tushunchasini ta'riflaymiz. Ma'lumki tekislikda uchburchak, to'rtburchak,... fazoda parallelipiped, piramida qabariq soxaga misol bo'ladi. Soxa qabariq bo'lishi uchun soxaning ixtiyoriy ikki nuqtasini tutushtiruvchi kesma shu soxaga tengishli bo'lishi kerak ekan. Bu

shartning matematik ifodasi bir o'lchovli Ox o'qida $x_1, x_2 \in (a, b)$ bo'lsa ixtiyoriy $0 < \alpha < 1$ uchun $x = \alpha \cdot x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in (a, b)$ bo'lsa soxa qabariq bo'ladi, degan shart orqali ifodalanadi. Haqiqatdan ham $x = x_2 - \alpha(x_2 - x_1)$ va $\alpha < 1$ bo'lgani uchun $x \in (x_1, x_2)$ bo'lishi ko'rinadi.

n – o'lchovli fazoda ham qabariqlik sharti huddi shunday, faqat har bir koordinant bo'yicha bajarilish kerak ekan.

$X(x_1, x_2, \dots, x_n), Y(y_1, y_2, \dots, y_n)$ nuqtalar MBES, ya'ni (16.1) shartlar bilan berilgan soxaga tegishli ixtiyoriy ikki nuqta bo'lsa ixtiyoriy

$0 < \alpha < 1$ bo'lgan α uchun

$$Z = \alpha \cdot X + (1 - \alpha)Y \in MBEC$$

ekanligini isbotlash kerak.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j < b_i; \text{ va } \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot y_j < b_i; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot Z_j &= \sum_{j=1}^n a_{ij} (\alpha \cdot x_j + (1 - \alpha)y_j) \\ &= \alpha \cdot \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + (1 - \alpha) \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq \alpha \cdot b_i + (1 - \alpha)b_i = b_i \end{aligned}$$

Demak $Z \in MBEC$ bo'lar ekan, ya'ni MBES-qabariq soxa.

ChPM ham optimizatsiya masalasi sifatida qaralishi mumkin. Lekin bu erda an'anaviy differentsial hisob usulidan foydalanib bo'lmaydi. Chunki ekstremumning zaruriy sharti $\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0$ bajarilmaydi.

Aytganimizdek MBESga taaluqli xar qanday nuqta koordinatalari ChPM ning mumkin bo'lgan echimi deb qaraladi. Ular cheksiz ko'p. Ular orasidan optimalini topish, yoki ajratish kerak. Avvalo MBES nuqtalari orasidan tayanch echimlarni ajratamiz. $n + m$ ta (16.1) shartlardan n tasini tenglik sifatida m tasini tengsizlik sifatida qanoatlantiruvchi nuqtalar ChPM ning tayanch echimlari deyiladi. Optimal echim ana shu tayanch echimlar orasida bo'lar ekan. Tayanch echimlar soni esa ko'pi bilan

$$C_{n+m}^n = \frac{(n+m)!}{n! \cdot m!} = N$$

ga teng bo'lishi mumkin ekan. Optimal echimni topish yo'llaridan biri barcha tayanch echimlarni topib maqsad funksiyasi L ning eng katta qiymatini beruvchi tayanch echimni optimal echim deyish mumkin ekan. Lekin bu juda katta ish bo'lib ketishi mumkin. Xattoki, nisbatan oddiy, $m = 10, n = 15$ bo'lgan xolda xam

$$N = \frac{25!}{10! \cdot 15!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 23 \cdot 22 \cdot 19 \cdot 17 \cdot 20 = 3268760$$

bo'lib shunga tayanch echimni topish kerak. Ularni xar birini topishda esa 15 noma'lumli 15 ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini echish kerak. So'ngra bu nuqtalarning xar birida $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ni hisoblash va ular orasidan eng kattasini topish kerak bo'ladi. Bu muloxazalarni keltirishdan maqsad ChPM ifodalanishiga ko'ra sodda, ravon ko'ringani bilan zamonaviy matematikada eng ko'p hisoblashlarni talab qiladigan masalalar sirasiga kiradi. Xattoki zamonaviy kompyuterlarda ham ChPM ning aniq echimini emas taqribiy echimini topish usullariga murojaat qilinadi. Chunki aniq echimini topish uchun haddan tashqari ko'p kompyuter vaqti kerak bo'lishi mumkin ekan.

17-MA'RUZA

Mavzu: Ikki o'lchovli ChPMlarning geometrik tahlili va echish usullari.

ChPMlarni echishning simpleks usuli haqida ma'lumot.

Reja:

1. Amaliy masala iqtisodiy qo'yilishi.
2. Masala matematik modeli
3. MBES geometrik tasviri
4. Tayanch echimlar va optimal echimni aniqlash
5. Iqtisodiy tahlil
6. Simpleks usul.

Asosiy ibora va atamalar: qabariq soxa uchlari, tayanch echimlar, optimal echim, kamyob xomashyo.

Quyidagi iqtisodiy masalani qaraymiz. Kichik korxona muzqaymoqlar ishlab chiqarishga ixtisoslashgan. Korxonada 4,4l qaymoq 5,2 kg shakar, 8,4litrlar sut bor. Korxona 2 turdagi muzqaymoq ishlab chiqarishi mumkin. Agar 1-tur muzqaymoq bir donasiga 0,01 l qaymoq, 0,03 kg shakar, 0,07 litrlar sut, 2-tur muzqaymoq bir donasiga 0,04l qaymoq, 0,04kg shakar, 0,04l sut solinsa va 1-tur muzqaymoq donasi 1000 so'm, 2-tur muzqaymoq donasi 2000 so'm bo'lsa 1-,2-tur muzqaymoqlardan qanchadan ishlab chiqarilganda daromad eng katta bo'ladi. Bu masalaning iqtisodiy ifodasi. Shunga ko'ra matematik modelini ifodalaymiz. 1-,2-tur muzqaymoqlar noma'lum sonini x_1, x_2 deb belgilasak xomashyo sarflari bo'yicha quyidagi tengsizliklar hosil bo'ladi.

$$\text{Qaymoq bo'yicha } 0,01x_1 + 0,04x_2 \leq 4,4$$

$$\text{Shakar bo'yicha } 0,03x_1 + 0,04x_2 \leq 5,2$$

$$\text{Sut bo'yicha } 0,07x_1 + 0,04x_2 \leq 8,4$$

Qulaylik uchun tengsizliklarni 100ga ko'paytirsak va maqsad funksiyasini ham keltirsak quyidagi ChPM ni hosil qilamiz.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 440 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 520 \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 840 \end{cases} \quad (17.1)$$

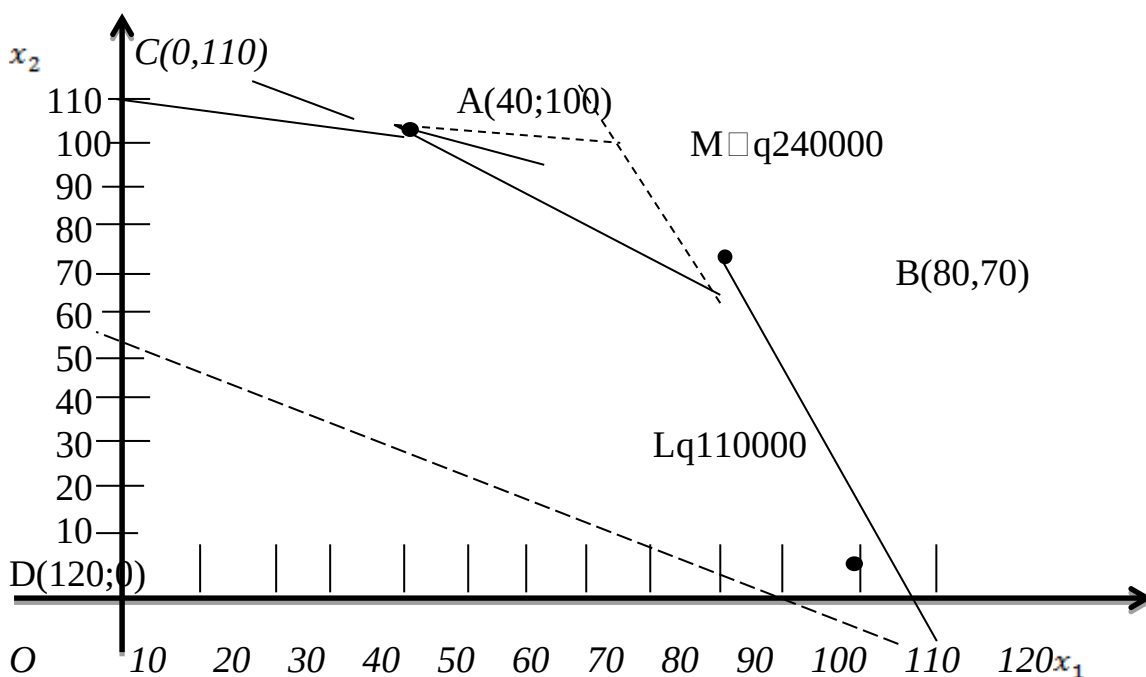
$$L(x_1, x_2) = 1000x_1 + 2000x_2 \rightarrow \max \quad (17.2)$$

(17.1) tengsizliklarni kanonik ko'rinishga, ya'ni o'ng tarafi 1 bo'lgan xolga keltiramiz. Bunda grafiklarni chizish qulaylashadi.

$$\begin{cases} \frac{x_1}{440} + \frac{x_2}{110} \leq 1 \\ \frac{x_1}{520/3} + \frac{x_2}{130} \leq 1 \\ \frac{x_1}{120} + \frac{x_2}{210} \leq 1 \end{cases}$$

MBES (17.1) xar bir tengsizlikni ifodalovchi to'g'ri chiziqdan pastki qismida bo'lgan birinchi chorak qismidan iborat. Chizmani chizishda qulaylik bo'lishi uchun (17.1) shartlaridan 1-,2-si xamda 2-,3- kesishgan nuqtalarni tenglashtirish sistema qilib ishlab topamiz. Bunda $A(40;100)$ va $B(80;70)$ nuqtalar topiladi.

Shularga ko'ra Ox_1, x_2 koordinant tekisligida masala shartlari va MBES ni ifodalaymiz.



17-rasm

17-rasmda ifodalangan chizmada MBES OCABDbeshburchak ekanligini ko'ramiz. Masalaning optimal echimi uning tayanch echimlari, ya'ni ko'pburchak uchlaridan birortasida bo'lganligi uchun, shu nuqtalarda maqsad funktsiyasi qiymatlarini hisoblaymiz. $L(x_1, x_2) = 1000x_1 + 2000x_2$

$$L_O = 0; L_C = 220000; L_A = 240000; L_B = 220000; L_D = 120000$$

Ularni taqqoslash asosida eng yuqori daromad $A(40,100)$ nuqtada ekanligini ko'ramiz. Demak optimal reja, ya'ni optimal echim A nuqta koordinantlarga mos rejada bo'lib $x_1 = 40; x_2 = 100$ bo'lar ekan. Korxona 1-tur muzqaymoqlardan 40 ta, 2-tur muzqaymoqlardan 100 ta ishlab chiqarsa daromad eng yuqori bo'lar ekan. Bu echim hamda usulni ham geometrik izoxlash mumkin ekan. Buni keltirilgan misol asosida namoyish qilamiz. MBES ga taaluqli ixtiyoriy nuqta koordinatalari ChPM ga echim (reja) sifatida qaralishi mumkin. Masalan $M(30;40)$ nuqta ham OSAVD ko'p burchak ichida, u xam mumkin bo'lgan echimni ifodalaydi. Korxona

$x_1 = 30$; $x_2 = 40$ ya'ni 1-,2-tur muzqaymoqlardan 30ta va 40tadan ishlab chiqarishga quvvati etadi. Bunda daromad

$$L_M = 1000 \cdot 30 + 2000 \cdot 40 = 110000$$

bo'ladi. Bu qiymat yuqorida ko'rganimiz optimal rejadagidan ancha kam. Bu reja bilan ishlaganda xomashyo zaxiralari xam to'liq ishlatilmay qoladi. Agar daromad $L_M = 110000$ ga teng bo'ladigan nuqtalar to'plamini oladigan bo'lsak ular

$$1000x_1 + 2000x_2 = 110000 \quad (17.3)$$

tenglama bilan ifodalanar ekan. Bu esa to'g'ri chiziq tenglmasi bo'lib, uni 110000 ga bo'lib normal ko'rinishga keltiramiz.

$$\frac{x_1}{110} + \frac{x_2}{55} = 1$$

Chizmada u punktir chiziq bilan ifodalangan. Bu to'g'ri chiziqning OSABD ga tegishli istalgan nuqtasi koordinatalari $L = 110000$ bo'ladigan rejani ifodalar ekan. Daromad L ni orttirsak unga mos keladigan to'g'ri chiziq parallel tepaga ko'tariladi. Bu orttirish maqsad funksiyasi grafigi MBES bilan, ya'ni OSABD bilan umumiy nuqtaga ega bo'lgan xollardagina amalga oshirilishi mumkin. Bu xol eng so'nggi bor maqsad funksiyasi $A(40; 100)$ nuqtadan o'tganda ro'y berar ekan. Bundan keyingi ko'tarilish MBES dan chiqib ketadi. Demak $A(40; 100)$ nuqta optimal echimga mos ekanligi ham ishonarli asosga ega bo'ladi. Shuningdek topilgan optimal echim asosida ayrim iqtisodiy tavsiyalarni ham keltirib chiqarish mumkin. Buning uchun xomashyo sarfini tahlil qilamiz. $x_1 = 40$; $x_2 = 100$ reja bilan ishlaganda

$$0,01 \cdot 40 + 0,04 \cdot 100 = 4,4 \text{ qaymoq to'liq ishlatiladi.}$$

$$0,03 \cdot 40 + 0,04 \cdot 100 = 5,2 \text{ shakar to'liq ishlatiladi.}$$

$$0,07 \cdot 40 + 0,04 \cdot 100 = 6,8 < 8,4 \text{ sut ortib qoldi.}$$

Bu erda ikki xil tavsiya qilish mumkin. Birinchisi ortib qolgan xomashyo, ya'ni 1,6 litr sutni xomashyo sifatida sotib yuborish. Bunda daromad o'zgarmaydi. Ikkinchisi kamyob xomashyo turini aniqlab, uning zaxirasini oshirish hisobiga

daromadni ko'paytirish. Buninig uchun 1-va 3-xomashyo chiziqlari kesishgan nuqtani topamiz.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 440 \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 840 \end{cases} \Rightarrow 6x_1 = 400 \Rightarrow x_1 = 66\frac{2}{3}; \quad x_2 = \left(440 - 66\frac{2}{3}\right)/4$$

$$x_1 = 66\frac{2}{3}; \quad x_2 = 93\frac{1}{3}. \quad N\left(66\frac{2}{3}; 93\frac{1}{3}\right)$$

rejani bu nuqtaga ko'tarishga esa shakar zaxiralari yo'l qo'ymaydi. Demak shakar berilgan masala uchun kamyob xomashyo sirasiga kirar ekan. Nuqta ham MBES ga kirishi uchun shakar zaxiralarini shu nuqtaga moslab oshirish kerak.

$$0,03 \cdot 66\frac{2}{3} + 0,04 \cdot 93\frac{1}{3} = 5,733 \dots$$

Demak shakar zaxirasini 5,733 kgga etkazsak optimal echim $N\left(66\frac{2}{3}; 93\frac{1}{3}\right)$ nuqtaga mos kelar ekan. Bu nuqtada daromad $L_N = 253\frac{1}{3}$ ming bo'lib L_A dan ortganini ko'ramiz.

Yuqorida keltirilgan geometrik usul ChPM larni echish va tahlil qilishda juda qulay bo'lgani bilan umumiylik da'vo qila olaydi. Chunki masala tartibi 3 o'lchovlidan ortganda geometrik tasvirni qilish imkoni yo'qoladi. ChPM larni echishda keng tadbiiq qilinadigan usullardan biri simpleks usul bo'lib uning g'oyasi shundan iboratki, birorta tayanch echim topiladiva uni ma'lum qoidaga ko'ra optimallikka tekshiriladi. Optimal bo'lsa echim topilgan deb xisob to'xtatiladi. Optimal bo'lmasa unga nisbatan yaxshiroq bo'lgan boshqa tayanch echimga o'tiladi. Bu jarayon topilgan echim optimal bo'lguncha davom ettiriladi. Shuning uchun ham simpleks usulni planni bosqichma bosqich yaxshilash usuli deb ham ataladi. Bu usul to'la avtomatlashtirilishi mumkin. Zamonaviy kompyuterlar dasturiy ta'minotida usul dasturi ham mavjud bo'lib, iste'molchi zarur bo'lganda unga murojaat qilish mumkin. Usul algoritmi va hisoblash formulalarini tavsiya qilingan adabiyotlardan topish mumkin.

18-MA'RUZA

Mavzu: Transport masalasining qo'yilishi. Transport masalasini echish usullari haqida ma'lumotlar. Tanlangan echimni optimallikka tekshirish.

Reja:

1. Masalaning iqtisodiy qo'yilishi.
2. Transport masalasining matematik ifodasi
3. Transport masalasining jadval ko'rinishidagi ifodasi
4. Transport masalasini echishda minimal xarajatlar asosida mantiqiy muloxazalar usuli.
5. Tanlangan echimni optimalikka tekshirish.

Asosiy ibora va atamalar: iste'molchi, ta'minotchi, transport xarajatlari, mumkin bo'lgan echim, optimallik belgisi.

Xalq xo'jaligi, ishlab chiqarish bilan bog'liq bo'lgan masalalardashartli ravishda ikki taraf: iste'molchi va ta'minotchi tushunchalariga murojaat qilamiz. Masalan dehqon-ta'minotchi, xalq – iste'molchi; konchilar-ta'minotchi, zavod-iste'molchi; beton, g'isht, tsement zavodlari-ta'minotchi, qurilish-iste'molchi kabi misollarni keltirish mumkin. Bularning barchasida bir bosqich-ta'minotchidan iste'molchiga maxsulot (xomashyo) etkazib berish masalasi mavjud. Tabiiy, bu bosqich ma'lum xarajatlar bilan bog'liq bo'ladi. Agar bu jarayon yagona tashkilot tomonidan boshqarilsa ta'minotchidan iste'molchiga yuboriladigan maxsulotlar miqdorini shunday rejalashtirish kerakki, transport xarajatlari minimal bo'lsin.

Masalaning iqtisodiy ifodasiga o'tamiz. Umumiyatni cheklamagan xolda, tushunarli bo'lsin uchun, aniq bir xayotiy vaziyatga murojaat qilamiz.

Shaxarda m ta g'isht zavodi bo'lib, ularning quvvati, ishlab chiqaradigan g'ishtlari soni $b_1, b_2, \dots, b_m$ bo'lsin. Shuningdek n ta qurilish ob'ektlari bo'lib ularga mos ravishda $d_1, d_2, \dots, d_n$ tadan g'isht kerak bo'lsin. Masala shartiga ko'ra ta'minotchilar imkoniyatlari yig'indisi $b_1 + b_2 + \dots + b_m$, iste'molchilar extiyojlari yig'indisiga $d_1 + d_2 + \dots + d_n$ ga teng bo'lishi kerak. Ta'minotchilar orasidagimasofa hamda transport imkoniyatlariga ko'ra i – ta'minotchidan j – iste'molchiga 1 dona g'isht etkazib berish transport xarajati c_{ij} ekanligi ma'lum bo'lsin.

Ta'minotchilardan iste'molchilarga maxsulot etkazibberishning shunday rejasi topilsinki, bunda barcha iste'molchilar o'ziga kerak miqdorda maxsulot olsin, ta'minotchilar esa o'zida bor maxsulotning barchasini jo'natsin. Shuning bilan birga bunda transport xarajatlari eng kam bo'ladigan variant tanlansin.

Keltirilgan iqtisodiy masala shartlarini matematik ifodalarini yozish mumkin. i – zavoddan j – qurilishga yuboriladigan noma'lum g'isht miqdorini x_{ij} deb belgilaymiz. U xolda xar bir iste'molchi o'ziga kerak miqdorda g'isht olishi kerak degani

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (18.1)$$

xar bir zavod ishlab chiqarilgan g'ishtlarini jo'natishi (sotishi) kerak degani

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (18.2)$$

ko'rinishda ifodalanadi. Bu xolda jami transport xarajatlari, xarajat normativlarga ko'ra

$$Q = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (18.3)$$

ko'rinishda ifodalanadi. Natijada transport masalasining umumiy matematik modelini (18.1)-(18.3) masalani hosil qildik. (18.1)-(18.2) cheklashlarga mos $\{x_{ij}\}$ lar orasidan shundayini topish kerakki, Q – maqsad funktsiyasining minimal qiymatini bersin. Transport masalalari ham matematikaning murakkab masalalaridan bo'lib, uni echishda turli iteratsion ketma-ket yaqinlashish usullari tadbqiq qilinib, aniq echim emas, nisbatan yaxshiroq echimlar bilan cheklanishga to'g'ri keladi. Transport masalasini barcha shartlarni o'z ichiga olgan jadval ko'rinishda ifodalash usulidan foydalaniladi. U quyidagi ko'rinishga ega.

iste'molchi ta'minot	1	2	3	...	...	n	Σ
-------------------------	---	---	---	-----	-----	-----	----------

1	C_{11} x_{11}	C_{12} x_{12}	C_{13} x_{13}			C_{1n} x_{1n}	b_1
2	C_{21} x_{21}	C_{22} x_{22}	C_{23} x_{23}			C_{2n} x_{2n}	b_2
3	C_{31} x_{31}	C_{32} x_{32}	C_{33} x_{33}			C_{3n} x_{3n}	b_3
...							...
m	C_{m1} x_{m1}	C_{m2} x_{m2}	C_{m3} x_{m3}			C_{mn} x_{mn}	b_m
Σ	d_1	d_2	d_3			d_n	

Odatda jadvaldagi x_{ij} lar o'zni bo'sh xolda bo'ladi. Chunki ular noma'lum. Qolgan qiymatlar esa barchasi jadvalga ko'chirilgan. x_{ij} qiymatlarini tanlashda esa (18.1) va 918.2) shartlar bajarilishini nazorat qilishimiz kerak. Jadvalda bular oddiy ustun va qator bo'yicha x_{ij} lar yig'indisi sifatida tekshiriladi. Bu erda noma'lumlar soni $n \cdot m$ ta bo'lib $m = 5$; $n = 10$ bo'lgan oddiy xolda xam 50ta noma'lumli masala xosil bo'ladi.

(18.1)-(18.3) masalani xam ChPM sifatida qaralishi mumkin. Chunki barcha shartlar noma'lum x_{ij} larga nisbatan chiziqli xolda. Lekin bu yo'nalish bu erda effektiv bo'lmas ekan. Chunki noma'lumlar soni juda ko'p. Tayanch echimlar o'zi soni

$$N = C_{nm}^{n+1}$$

soni bilan baxolanadi. Aytganimiz $m = 5, n = 10$ bo'lgan xolda $N = C_{50}^{15} = \frac{50!}{15! \cdot 35!}$ xaddan tashqari katta son ekanligini ko'ramiz.

Biz bu erda mantiqiy muloxazalar asosida optimal echimni topish namunasini keltiramiz. Ortiqcha izohsiz, masala qo'yilishini jadval ko'rinishda beramiz.

$i \backslash j$	1	2	3	Σ
1	15 0	17 0	13 200	200
2	15 0	17 0	13 200	200
Σ	150	100	250	500

18- rasm.

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 200$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 300$$

$$x_{11} + x_{21} = 150$$

$$x_{12} + x_{22} = 100$$

$$x_{13} + x_{23} = 250$$

$$\sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^3 C_{ij} X_{ij} \rightarrow \min$$

Bu masalada 6 ta noma'lum $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{23}$ lar bor. Mantiqiy muloxazalarga ko'ra jadvalni to'ldirish eng arzon katakdan boshlangani ma'qul. Shunga ko'ra $x_{22} = 100$ deb olamiz. U xolda 2-iste'molchi to'liq ta'minlandi. Demak $x_{12} = 0$ deb olinishi kerak. Qolgan to'rtta katakdan eng arzoni x_{13} katagi. Shuning uchun $x_{13} = 200$ deb olishimiz mumkin. U xolda avtomatik tarzda $x_{11} = 0, x_{23} = 50, x_{21} = 150$ ekanligi kelib chiqadi. Bu qiymatlar jadvalga kiritilgan. Maqsad funksiyasini xisoblaymiz.

$$Q = 15 \cdot 0 + 17 \cdot 0 + 13 \cdot 200 + 14 \cdot 150 + 12 \cdot 100 + 16 \cdot 50 = 6700 \quad \text{ekanligini ko'ramiz.}$$

Transport masalasini umumiy ko'rinishda ishlash ancha murakkab bo'lar ekan. Mavjud algoritmlar xam masalaning taqribiy echimini rejani ketma-ket yaxshilash usuliga ko'ra topishga mo'ljallangan.

Biz bu erda tanlangan echimni optimallikka tekshirish va optimal bo'lmasa yaxshilashning bir qadamida to'xtalamiz. Faraz qilaylik, mantiqiy muloxaza va masala shartlariga moslab biror $\{x_{ij}\}$ echim topilgan bo'lsin. Uni optimallikka tekshirish quyidagicha olib boriladi. Reja to'ldirilgan jadvalning birorta to'rtburchaklik bo'lagini olamiz va uning burchaklaridagi kataklarini o'z qiymatlari bilan shablon sifatida

p	q
C_{kp} x_{kp}	C_{kq} x_{kq}
C_{lp} x_{lp}	C_{lq} x_{lq}

ko'chirib yozamiz.

$k; l$ qatorlar va p, q – ustunlar kesishgan joylardagi kataklardan tuzilgan shablonni olamiz. Shu kataklar orqali umumiy planni, boshqa kataklar o'zgarmay, o'zgartirish natijasini taxlil qilib ko'ramiz. Kataklar umumiy shart orqali bog'langan. Mumkin bo'lgan o'zgarishlarnigina qaraladi, ya'ni $x_{ij} \geq 0$ bo'lishi shart. Reja o'zgarishi xarajatlarining xam o'zgarishiga olib keladi. Masalan bizlar tanlangan shablonda mumkin bo'lgan o'zgarishlardan biri bo'lishi mumkin. Chunki ustun va qator bo'yicha yig'indi o'zgarmasligi kerak.

$x_{kp} - 1$	$x_{kq} + 1$
$x_{lp} + 1$	$x_{lq} - 1$

Bunda xarajatlar o'zgarishi $\Delta Q = -C_{kp} + C_{kq} + C_{lp} - C_{lq}$ ifoda bo'yicha aniqlanadi. Agar $\Delta Q < 0$ chiqsa rejani yaxshilash mumkin, aks xolda yaxshilash mumkin emas degan xulosaga kelamiz. Bu erda o'zgarish bir birlik olinayotganiningsababi ahamiyatsiz. Natija rejaning yaxshi yoki yaxshimasligida $\Delta Q \geq 0$ bo'lsa yaxshi,

$\Delta Q < 0$ bo'lsa yomon. Agar jadvaldagi mumkin bo'lgan barcha shablonlar bo'yicha reja yaxshi degan xulosa kelib chiqsapan optimal bo'ladi. Bu erda hisoblashlar hajmini tasavvur qilish uchun shablonlar sonini keltiramiz. $N = C_n^2 \cdot C_m^2$ ta shablon bo'ladi. $n = 10$ $m = 5$ bo'lsa $N = C_{10}^2 \cdot C_5^2 = 45 \cdot 10 = 450$ ta shablon bo'lar ekan. Rejani yaxshilashning har bosqichida ana shu 450ta shablon bo'yicha nazorat bo'lishi kerak.

Keltirilgan qoidaning tadbiqini namoyish qilish uchun 18-rasmda keltirilgan misol javobini taxlil qilamiz. Bu erda $m = 2$, $n = 3$ $N = C_2^2 \cdot C_3^2 = 3$ ta shablon bor. Xar birini alohida olib taxlil qilamiz.

1)

15	17
0	0
14	12
150	100

2)

15	13
0	200
14	16
150	50

3)

17	13
0	200
12	16
100	50

1-shablonda rejani o'zgartirish iloji yo'q.

2-shablonda o'zgarish sxemasi

Q1	-1
-1	Q1

ko'rinishda ifodalanib xarajatlar o'zgarishi

$$\Delta Q = +15 - 13 - 14 + 16 = 4 > 0$$

3-shablonda o'zgarish sxemasi

Q1	-1
----	----

-1	Q1
----	----

$$\Delta Q = +17 - 13 - 12 + 16 = 8 > 0$$

Demak tanlangan reja optimal ekan, chunki barcha $\Delta Q > 0$ Agar ΔQ lar orasida manfiysi uchrasa plan optimal emas deyilar edi. Bunday xolda $\Delta Q < 0$ bo'lgan shablonda ko'rsatilgan yo'nalishda mumkin bo'lgan maksimal o'zgarish qilinadi.

SONLI USULLAR VA DASTURLASH fanidan ma'ruzalar matni

“Algoritmash va matematik modellashtirish” kafedrasining
majlisida (“20” yanvar 2015 y., № 17 bayonnoma)

muhokama qilindi.

TATU ilmiy-uslubiy kengashida bosmaxonada chop etish
uchun tavsiya qilindi.

(“__” ____ 2015 y., №__ bayonnoma)

Tuzuvchi:	dotsent	A.N.Mirzayev
	dotsent	Yu.M. Abduraxmanova

Masul muharrir:	dotsent	Yu.M.Abduraxmanova
Muharrir:		N.D.Yulanova

Bichimi 60x84 1G'16

Bosma tabog'I - Adadi-

Buyurtma №

Toshkent axborot texnologiyalari universiteti «ALOQACHI» nashriyot–matbaa
markazida chop etildi.

Toshkent sh., Amir Temur ko'chasi, 108 –uy.

