VII XALQARO ILMIY KONFERENSIYASI BO'YICHA
MAQOLALAR TO'PLAMI
«XXI ASR FAN VA TEXNOLOGIYA SOHASIDAGI USTUVOR YO'NALISHLAR»

COLLECTION OF SCIENTIFIC ARTICLES OF VII INTERNATIONAL CONFERENCE
«THE PRIORITY DIRECTIONS IN THE FIELD OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
IN XXI CENTURY»

2014

進步

진보

СБОРНИК СТАТЕЙ VII МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ «ПРИОРИТЕТНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ В ОБЛАСТИ НАУКИ И ТЕХНОЛОГИИ В XXI ВЕКЕ»

ТОМ 2

УДК 517.977.8

ЛИНЕЙНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ПРИ ФАЗОВОМ ОГРАНИЧЕНИИ НА СОСТОЯНИЕ УБЕГАЮЩЕГО

А.Т. Рахманов

Ташкентский университет информационных технологий
Ташкент, Узбекистан

Исследована задача преследования для линейных дифференциальных игр с интегральными ограничениями на управление, при этом убегающий игрок не может покинуть некоторое выпуклое ограниченное множество. Получены достаточные условия завершения преследования из заданной начальной точки.

In work the problem of pursuit for linear differential games with integral constraints on the controls is investigated, thus evader cannot leave some convex limited set. Sufficient conditions of the completion of pursuit from the given initial point are received. One example is considered.

Задачи преследования и убегания в дифференциальных играх с различными ограничениями на управление исследованы во многих работах [1–12]. В [1–2] изложены основные подходы для решения дифференциальных игр преследования–убегания и получены основополагающие результаты. В работах [3, 6–12] изучены дифференциальные игры преследования–убегания различной структуры с фазовыми ограничениями на состояние игроков.

Настоящая работа посвящена решению задачи преследования для линейных дифференциальных игр с интегральными ограничениями на управление игроков при наличии фазового ограничения на состояние убегающего. Получены достаточные условия завершения преследования за конечное время, результаты проиллюстрированы на модельном примере. Дифференциальная игра рассматривается по формализации Л.С. Понтрягина [1]. Работа примыкает к исследованиям, проведенным в [11].

Пусть в n-мерном эвклидовом пространстве R^n движения преследователя и убегающего описываются следующими уравнениями соответственно:

$$\dot{x} = Ax + u, \quad (1)$$

$$\dot{y} = By + v, \quad (2)$$

где $x, y \in R^n$ – фазовое состояние игроков, $n \geq 1$, $u, v \in R^n$ – управляющие параметры преследователя и убегающего соответственно, которые подчинены интегральным ограничениям:

$$\int_0^\infty |u(t)|^2 dt \leq \rho^2, \ \rho > 0, \quad (3)$$

$$\int_0^\infty |v(t)|^2 dt \leq \sigma^2, \ \sigma > 0, \quad (4)$$

В R^n задано терминальное множество M с непустой внутренностью относительно R^n. Предполагается, что преследователь может двигаться во всём пространстве, убегающий может двигаться только на выпуклом ограниченном множестве D.

Определение 1. Измеримые функции $u = u(t)$, ($v = v(t)$), $0 \leq t < \infty$, удовлетворяющие ограничениям (3)–(4), будем называть допустимыми управлениями преследователя (убегающего).

Определение 2. Будем говорить, что в дифференциальной игре (1), (2), начинающейся в момент $t = 0$ из начальных точек $x_0, y_0 \in R^n, y_0 \in D, y_0 - x_0 \notin M$, возможно завершение преследования за время t_1, если по любому допустимому управлению убегающего $v = v(t)$, $0 \leq t \leq t_1$ можно построить такое допустимое управление преследователя $u = u(t)$, $0 \leq t \leq t_1$, что для решений $x(t), y(t)$, соответствующих задачам Коши:

$$\dot{x} = Ax + u(t), \qquad x(0) = x_0 \quad (5)$$

$$\dot{y} = By + v(t), \qquad y(0) = y_0 \tag{6}$$

выполняется включение $y(t_1) - x(t_1) \in M$, при этом должно выполняться включение $y(t) \in D, 0 \le t \le t_1$, и для построения управления преследования $u(t)$ в каждый момент $t \ge 0$ разрешается использовать значения $v(t), x(t), y(t)$.

Если $u = u(t)$, $v = v(t)$, $0 \le t < \infty$ – произвольные допустимые управления игроков, то для решений задач Коши (5), (6) соответственно имеем:

$$x(t) = \Psi(t)x_0 + \int_0^t \Psi(t-\tau)u(\tau)d\tau \tag{7}$$

$$y(t) = \Phi(t)y_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)v(\tau)d\tau \tag{8}$$

где $\Psi(t) = \exp(At), \Phi(t) = \exp(Bt), t \ge 0$.

Переходим к формулировке результата. Так как $\operatorname{int} M \ne \emptyset$, множество D выпукло и ограничено, то существуют числа $\ell > 0, R > 0$, вектор $m \in M$ такие, что $D \subset RS \subset R^n$, $\ell S \subset -m + M$, где S – единичный замкнутый шар пространства R^n с центром в нуле. Ясно, что в случае $R \le l$ задача преследования решается очень просто. Поэтому в дальнейшем будем считать $R >> \ell$.

Предположение 1. Существуют числа $d > o$, $\ell_1, \ell_2 \ge 0, \ell_1 + \ell_2 = \ell$ α, $1 < \alpha \le \frac{R}{R - l_2}$, линейное, измеримое по τ, $0 \le \tau \le t$, отображение $F(t,\tau): R^n \to R^n$ такие, что :

1) $\|F(t,\tau)\| \le d$, $0 \le \tau \le t$, $\rho > \dfrac{d\sigma}{\alpha}$;

2) $G(t) \subset \ell_1 S$, $G(t) = \left\{ \int_0^t [\Phi(t-\tau) - \Psi(t-\tau)F(t,\tau)](\frac{1}{\alpha}v(\tau))d\tau / |v(\cdot)|_{L_2} \le \sigma \right\}$;

3) $-m + \dfrac{1}{\alpha}\Phi(t)y_0 - \Psi(t)x_0 \in \int_0^t \Psi(t-\tau)\left(\dfrac{\alpha\rho - d\sigma}{\alpha\sqrt{t}}\right)Sd\tau$.

Теорема 1. Пусть для точек $(x_0, y_0), y_0 - x_0 \notin M, y_0 \in D$ существует $T = T(x_0, y_0) > 0$ такое, что при $t = T$ выполнено предположение 1. Тогда из точек (x_0, y_0) возможно завершение преследования за время T.

Доказательство. Пусть $v = v(t)$, $0 \le t \le T$, допустимое управление убегающего. В каждый момент времени t управление преследования выбираем в виде

$$u(t) = 1/\alpha \times F(T,t)v(t) + \omega(t), \ 0 \le t \le T, \tag{9}$$

где $\omega(t) \in \left(\dfrac{\alpha\rho - d\sigma}{\alpha\sqrt{T}}\right)S$ – пока произвольная измеримая функция. Тогда из равенств (7), (8) имеем^

$$\frac{1}{\alpha}y(t) - x(t) = \frac{1}{\alpha}\Phi(t)y_0 - \Psi(t)x_0 + \int_0^t [\Phi(t-\tau) - \Psi(t-\tau)F(T,\tau)](\frac{1}{\alpha}v(\tau))d\tau -$$

$$- \int_0^t \Psi(t-\tau)\omega(\tau)d\tau = \int_0^t [\Phi(t-\tau) - \Psi(t-\tau)F(T,\tau)](\frac{1}{\alpha}v(\tau))d\tau + + \frac{1}{\alpha}\Phi(t)y_0 - \Psi(t)x_0 - \int_0^t \Psi(t-\tau)\omega(\tau)d\tau \tag{10}$$

Рассмотрим уравнение $-m + \dfrac{1}{\alpha}\Phi(T)y_0 - \Psi(T)x_0 = \int_0^T \Psi(T-t)\omega(t)dt$ (11)

относительно неизвестной вектор-функции $\omega(t) \in \left(\dfrac{\rho - d\sigma}{\sqrt{T}}\right)S$, $0 \le t \le T$. Из условия 3) предположения 1, используя лемму Филиппова [12] получаем, что существует измеримое решение уравнения (11). Обозначим его через $\omega^*(t)$, $0 \le t \le T$. Далее, в (10) положим $t = T$, $\omega(t) = \omega^*(t)$, $0 \le t \le T$, и, используя условие 2) предположения 1, имеем:

$$-m + \frac{1}{\alpha} y(T) - x(T) = -m + \frac{1}{\alpha}\Phi(T)y_0 - \Psi(T)x_0 + \int_0^T [\Phi(T-t) - \Psi(T-t)F_1(T,t)](\frac{1}{\alpha}v(t))dt -$$

$$-\int_0^T \Psi(T-t)\omega^*(t)dt = \int_0^T [\Phi(T-t) - \Psi(T-t)F(T,t)](\frac{1}{\alpha}v(t))dt \in G(T) \subset \ell_1 S \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left|-m + \frac{1}{\alpha} y(T) - x(T)\right| \le l_1 . \qquad (12)$$

Учитывая, что $y(T) \in D \subset RS$, используя неравенство (12) и определение чисел α, ℓ_1, ℓ_2, имеем:

$$\left|-m + y(T) - x(T)\right| = \left|y(T) - \frac{1}{\alpha} y(T) - m + \frac{1}{\alpha} y(T) - x(T)\right| \le \frac{\alpha - 1}{\alpha}\left|y(T)\right| +$$

$$+\left|-m + \frac{1}{\alpha} y(T) - x(T)\right| \le \frac{\alpha - 1}{\alpha} R + l_1 \le l_2 + l_1 = l, \Rightarrow y(T) - x(T) \in m + \ell S \subset M.$$

Таким образом доказано, что игра (1), (2) завершается в момент T. Теперь докажем допустимость управления (9). Действительно, используя условие 1) предположения 1, неравенство Коши-Щварца и учитывая, что $\omega(t) \in \left(\frac{\alpha\rho - d\sigma}{\alpha\sqrt{T}}\right)S$, из (9) получим

$$\int_0^T \left|\frac{1}{\alpha}F(T,t)v(t) + \omega_*(t)\right|^2 dt \le \left(\int_0^T \left|\frac{1}{\alpha}F(T,t)v(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^T \left|\omega_*(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{d\sigma}{\alpha} + \left(\frac{\alpha\rho - d\sigma}{\alpha T}\right)T = \rho,$$

что и доказывает теорему 1.

Предположение 2. Существуют числа $d_1 > 0, \alpha_1, 1 < \alpha_1 \le \frac{R}{R-l}$, линейное, измеримое по τ, $0 \le \tau \le t$, отображение $F_1(t,\tau): R^n \to R^n$, такие, что:

1) при $\alpha = \alpha_1, d = d_1$ выполнены условия 1), 3) предположения 1;

2) $\Psi(t-\tau)F_1(t,\tau) = \Phi(t-\tau), 0 \le \tau \le t.$

Теорема 2. Пусть для точек $(x_0, y_0), y_0 - x_0 \notin M, y_0 \in D$ существует $T_1 = T_1(x_0, y_0) > 0$ такое, что при $t = T_1$ выполнено предположение 2. Тогда из точек (x_0, y_0) возможно завершение преследования за время T_1.

Доказательство. Пусть $v = v(t),\ 0 \le t \le T$ – допустимое управление убегающего. Положим

$$u(t) = \frac{1}{\alpha_1} F_1(T_1, t)v(t) + \omega_1(t),\ 0 \le t \le T_1, \qquad (13)$$

где $\omega_1(t) \in \left(\frac{\alpha_1\rho - d_1\sigma}{\alpha_1\sqrt{T_1}}\right)S$ – пока произвольная измеримая функция. Тогда, учитывая условие 2) предположения 2 для решений задач Коши (5), (6) из (7), (8) при $t=T_1$ имеем

$$-m + y(T_1) - x(T_1) = -m + \Phi(T_1)y_0 - \Psi(T_1)x_0 + \int_0^{T_1}(\Phi(T_1-t) - \frac{1}{\alpha_1}\Psi(T_1-t)F_1(T_1,t))v(t)dt - \int_0^{T_1}\Psi(T_1-t)\omega_1(t)dt =$$

$$-m + \frac{1}{\alpha_1}\Phi(T_1)y_0 - \Psi(T_1)x_0 + (1 - \frac{1}{\alpha_1})[\Phi(T_1)y_0 + \int_0^{T_1}\Phi(T_1-t)dt] + \int_0^{T_1}\Psi(T_1-t)\omega_1(t)dt = -m + \frac{1}{\alpha_1}\Phi(T_1)y_0 - \Psi(T_1)x_0 +$$

$$(1 - \frac{1}{\alpha_1})y(T_1) - \int_0^{T_1}\Psi(T_1-t)\omega_1(t)dt \qquad . \quad (14)$$

Рассмотрим уравнение

$$-m+\frac{1}{\alpha_1}\Phi(T_1)y_0-\Psi(T_1)x_0=\int_0^{T_1}\Psi(T_1-t)\omega_1(t)dt \qquad (15)$$

относительно неизвестной вектор-функции $\omega_1(t)\in\left(\frac{\alpha_1\rho-d_1\sigma}{\alpha_1\sqrt{T_1}}\right)S$, $0\le t\le T_1$. Решение уравнения такого вида использовано при доказательстве теоремы 1. Поэтому, рассуждая так же, как и выше, утверждаем, что существует измеримое решение уравнения (15). Обозначим его через $\omega_1{}^*(t)$, $0\le t\le T_1$. Далее, в (14) положим $\omega_1(t)=\omega_1{}^*(t)$, $0\le t\le T_1$ и, учитывая, что $1<\alpha_1\le\frac{R}{R-l}$ и $y(T_1)\in D\subset RS$, из (14) имеем

$$-m+y(T_1)-x(T_1)=-m+\Phi(T_1)y_0-\Psi(T_1)x_0+\int_0^{T_1}\Psi(T_1-t)\omega_1^*(t)dt+(1-\frac{1}{\alpha_1})y(T_1)=$$

$$=(1-\frac{1}{\alpha_1})y(T_1)\in(1-\frac{1}{\alpha_1})RS=\ell S\cdot\Rightarrow\ y(T_1)-x(T_1)\in M.$$

Таким образом, доказано, что управление (13) обеспечивает завершение игры (1), (2) в момент T_1, что и требовалась доказать.

Допустимость управления преследования (13) получается так же, как в теореме 1. Отметим, что теорема 1 является более общей, чем теорема 2. Но для некоторых классов игр теорема 2 имеет лёгкое применение.

Предположение 3. Множество $D_1(t)=D\cap MD(y_0,t)$ выпукло и ограничено для всех $t\ge 0$, где $MD(y_0,t)$ – множество достижимости управляемой системы (2) в момент t:

$$MD(y_0,t)=\left\{\Phi(t)y_0+\int_0^t\Phi(t-\tau)v(\tau)d\tau\,/\,\|v(\cdot)\|_{L_2}\le\sigma\right\}$$

В силу ограниченности множества $D_1(t)$ существует $R_1>0$ такое, что $D_1(t)\subset R_1S,\forall t\ge 0.$

Теорема 3. Пусть для точек $(x_0,y_0), y_0-x_0\notin M, y_0\in D$ существует $T_2=T_2(x_0,y_0)>0$ такое, что при $t=T_2$ выполнены предположение 3 и одно из предположений 1, 2 при $R=R_1$. Тогда из точек (x_0,y_0) возможно завершение преследования за время T_2.

Доказательство теоремы 3 проводится по схеме доказательств теорем 1, 2 несложными изменениями.

Пример 1. Рассмотрим игру с простым движением

$$\begin{aligned}\dot{x}&=u,\\ \dot{y}&=v,\end{aligned} \qquad (16)$$

где $x,y,u,v\in R^n, n\ge 1$, –управляющие параметры преследователя и убегающего u,v из класса измеримых функций, удовлетворяющих соответственно интегральным ограничениям (3), (4). Дифференциальная игра (16) считается завершённой, если $y-x\in\ell S,\ell>0$, т.е. $M=\ell S\subset R^n$, фазовое ограничение наложено на состояние убегающего $y: y\in RS\subset R^n$.

Теоремы 1, 2 применительно к игре (16) дают следующий одинаковый результат: если

$$\rho>\frac{R-l}{R}\sigma \qquad (17),$$

то в игре (16) из всех точек $y_0-x_0\notin M, y_0\in RS$ можно завершить преследование за конечное время. В случае $\rho=\sigma=1$ получаем решение аналога известной задачи "лев и человек" в случае интегральных ограничений на управления, которые в случае геометрических ограничений на управления рассмотрены в работах [3, 11]. Из неравенства (17) видно, что результаты теорем 1, 2 применимы к игре (16) и в случае, когда ρ<σ, если только выполнено условие (17).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.С. Понтрягин, *Избранные труды*, М., Наука, 1988.
2. Н.Н. Красовский, *Управление динамической системой*, М., Наука, 1985.
3. Б.Н. Пшеничный, А.А. Чикрий, И.С. Раппопорт, *Докл. АН СССР*, **259**, № 4, 785 (1981).
4. М.С. Никольский, *Матем. заметки*, **33**, № 6, 885 (1981).
5. Н. Сатимов, *Матем. заметки*, **29**, № 3, 455 (1981).
6. А. Азамов, *ПММ*, **46**, № 4, 694 (1982).
7. Л.П. Югай, *Докл. АН УзССР*, № 4, 5 (1977).
8. А.Ш. Кучкаров, Б.Б. Рихсиев, *Автоматика и телемеханика*, № 8, 41 (2001).
9. Г.И. Ибрагимов, *Математ. тр.*, **4**, № 2, 96 (2001).
10. А.Ш. Кучкаров, *Автоматика и телемеханика*, №1, 17 (2013).
11. А.Х. Нишанов, А.Т. Рахманов, *European Applied Sciences*, № 6, 48 (2013).
12. А.Ф. Филиппов, *Вестник МГУ, Сер. матем. мех.*, № 2, 25 (1959).