

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

УДК

ТУХТАЕВ УЛУГБЕК
УКТАМОВИЧ

РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЯДЕРНЫХ
РЕАКЦИЙ НА ОСНОВЕ ФИНСЛЕРЕВОЙ
ГЕОМЕТРИИ

Специальность: 5А440106 – “Физика атомного ядра и элементарных
частиц”

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание степени магистра физики атомного ядра и элементарных частиц

Работа рассмотрена и допущена к защите.

Заведующий кафедры “Физика атомного
ядра и элементарных частиц”
_____ проф. ИБАДОВ Р.М.

Научный руководитель:
Доктор физ.-мат. наук, профессор
_____ ИБАДОВ Р.М.

«__» _____ 2013 год

«__» _____ 2013 год

М.П.

САМАРКАНД 2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

СПИСОК АББРЕВИАТУР И ОБОЗНАЧЕНИЙ	
ИСПОЛЬЗУЕМАЯ СИСТЕМА ЕДИНИЦ.....	
ВВЕДЕНИЕ.....	
ГЛАВА I. СВЕДЕНИЯ О ГЕОМЕТРИЯХ.....	
1.1. Евклидова геометрия.....	
1.2. Лобачевского геометрия	
1.3. N-мерное пространство	
1.4. Риманова геометрия	
1.5. Финслерова геометрия.....	
ГЛАВА II. ТЕОРИЯ ПОЛЯ В ФИНСЛЕРОВОМ ГЕОМЕТРИИ...	
2.1. Скалярное поля	
2.2. Ковариантное векторное поля	
2.3. Кубическая метрическая функция	
2.4. Метрическая функция определяемая форми четвертого порядка	
2.5. Векторные понятия финслеровой геометрии	
2.6. Обобщение римановой геометрии Финслером	
ГЛАВА III СВЯЗ ФИНСЛЕРОВОЙ ГЕОМЕТРИИ С ФИЗИКОЙ	
3.1. Финслерова геометрия и теория относительности	
3.2. Финслерова геометрия и Релятивистическая космология	
3.3. Исследования геометрических свойств пространства- времени	
ЗАКЛЮЧЕНИЯ.....	
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	

СПИСОК АББРЕВИАТУР И ОБОЗНАЧЕНИЙ. ИСПОЛЬЗУЕМАЯ СИСТЕМА ЕДИНИЦ

ОТО - *Общая теория относительности* .

СТО - *Общая теория относительности.*

ИСО - *Инерциальная система отсчёта*

Е.г.-*Евклидова геометрия*

Р.г. - *Римана геометрия*

Л.г.-*Лобачевского геометрия*

Ф.г.-*Финслерова геометрия*

Ф-*функция Финслера*

S -*инерциальные системы*

(t, x, y, z)-*4х координатное пространство*

C- *классы*

N- *размерность основного координатного пространства, если не оговорено другое.*

t-*время, если не оговорено или не подразумевается иное.*

c-*скорость света если не оговорено иное.*

ds, dl-*элементы длины*

s, l-*длины кривых, длина экстремалей, длина геодезических.*

S-*длина кривой, длина экстремали, длина геодезической; длина экстремали, длина геодезической как функция координат.*

ВВЕДЕНИЕ

Существует целый ряд астрофизических наблюдений свидетельствующих, что наша Вселенная анизотропна не только до интервалов в 100-200 Мпарсек, но и много дальше, возможно, вплоть до своих видимых границ. Подобные факты делают актуальными поиски удовлетворительного обобщения метрики Минковского на одну из финслеровых метрик. Что бы оказаться работоспособным, такое обобщение, с одной стороны, должно не противоречить современным псевдоримановым представлениям о пространстве-времени, а с другой - давать именно такие следствия, которые согласуются с наблюдениями анизотропии. Среди наблюдений свидетельствующих о глобальной анизотропии нашей Вселенной следует упомянуть: -анизотропию реликтового фона, на сегодня наиболее полно исследованную в рамках программы WMAP; - анизотропию собственных движений квазаров, выявленную в работах MacMillan - анизотропию распределений по небосводу параметра Хаббла, выявленную в работе McClure и Duerg вплоть до расстояний в 300 МПарсек

Одним из наиболее перспективных кандидатов на замену пространства Минковского является *четырёхмерное финслерово пространство* с метрикой Бервальда-Моора. Среди свойств, делающих эти пространства весьма схожими можно назвать: -пространственную однородность, из которой следуют законы сохранения энергии-импульса; -равноправие времениподобных направлений, из которого следуют законы сохранения положения центра масс и релятивистская инвариантность; -наличие группы симметрий $SO(3)$, правда, ее инвариантом являются не четырехмерные интервалы, а более сложные метрические величины; -постоянство скорости света, которая, как и в пространстве Минковского не зависит ни от скорости наблюдателя, ни от направления; -наличие светового конуса, делящего все четырехмерное пространство на конус прошлого, конус будущего и область

абсолютно удаленных событий; -упорядоченность событий по временной координате, что позволяет говорить о совместимости с принципом причинности. Однако есть и существенные отличия: -группа движений (изометрических преобразований) рассматриваемого финслерова пространства 7-параметрическая вместо 10 параметрической группы Пуанкаре; -группа конформных преобразований - бесконечномерная, вместо 15-параметрической конформной группы пространства Минковского; - имеются дополнительные бесконечномерные группы непрерывных симметрий, аналогов которым нет в пространстве Минковского; -в аффинном представлении световой конус рассматриваемого пространства имеет вид двух четырехгранных пирамид, а не форму круглого конуса, как в пространстве Минковского; -трехмерное пространство относительно одновременных событий представляет собой нелинейную гиперповерхность, вместо гиперплоскости пространства Минковского. Пространство Бервальда-Моора в противовес пространство Минковского. Сходство двух пространств особенно сильно проявляется при малых скоростях по отношению к скорости света, когда оба они предельным образом сводятся к геометрии Галилея. При больших скоростях проблема соответствия пока не решена, однако и тут вполне может найтись параметр для предельного перехода. Независимо от этого уместно поставить вопрос: существуют ли какие-то экспериментальные или наблюдательные свидетельства, которые говорили бы о большем сходстве реального Мира именно с финслеровой геометрией, а не с псевдоримановой? Существует версия, что если подобные поверочные явления есть, то искать их следует на космологических интервалах. Из различных вариантов соответствующей проверки, особый интерес представляет ситуация с анизотропией реликтового излучения. Это явление связано с событиями, имевшими место миллиарды лет назад и удаленными от нас на миллиарды световых лет. То есть, как раз там, где по нашим предположениям наиболее рельефно должны проявляться специфические анизотропные финслеровские эффекты. Кроме того, известны две явные

аномалии связанные именно с реликтовым излучением. Важный характер первой из них отметил Роджер Пенроуз - это слишком низкая амплитуда квадруполья, которая в семь раз меньше предсказываемого стандартной моделью значения. Вторая аномалия связана с подозрительной параллельностью осей трех высших сферических гармоник: диполья, квадруполья и октуполья. Данное явление иногда называют "осью зла". Если с позиций финслеровой геометрии предложить правдоподобные объяснения этим двум аномалиям, а также суметь предсказать и провести проверку некоторых дополнительных явлений - новая геометрия получила бы веские аргументы в свою пользу.

Финслерова геометрия является геометрией метрических пространств, обладающих внутренней локальной анизотропией, т.е. пространств, метрика которых не сводится к квадратичной форме дифференциалов координат. На существование таких пространств обратил внимание еще Риман в его знаменитой лекции "О гипотезах, лежащих в основании геометрии". Однако, только 50 лет спустя, в диссертации Финслера были сделаны первые шаги по их систематическому изучению. Впоследствии, благодаря исследованиям Синга, Вагнера, Бервальда, Картана, Буземана, Рунда, Матсумото, Павлова, Гарасько, Богословского и других, финслерова геометрия приобрела статус самостоятельной ветви дифференциальной геометрии.

Актуальность проблемы. До недавнего времени попытки использовать формализм финслеровой дифференциальной геометрии в теоретической физике носили лишь эпизодический характер, но в последние годы ситуация в этом отношении заметно изменилась. Помимо таких традиционных областей как теория анизотропных сред и лагранжева механика, классическая финслерова геометрия и ее обобщения нашли широкое применение при решении проблем оптимизации, при описании хаотических систем, в статистической физике и термодинамике, в экологии и в теории эволюции биологических систем, в описании внутренней симметрии адронов, в теории пространства-времени и гравитации.

Цель работы. Подробно изучить и сопоставить различные геометрии (Евклида, Римана, Лобачевского и Финслера), далее применить теории Финслеровых геометрии для изучения структура вселенной, космологические объекты и анизотропность пространство.

Научная новизна. В данной работе указано основные теории Финслеровом геометрии и связь финслеровом геометрии с физическим и космологическим объектом.

Практическая ценность. Данная диссертационная работа является руководством для тех направление, которого занимается в отрасли финслеровой геометрии с метрикой Бервальда-Моора, для астрономическим наблюдениям, в теория поля и в теории космология.

Структура и объём. Магистерская диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка публикаций и списка цитируемой литературы из 30 наименований и включает в себя 105 стр.

Во введении рассмотрены актуальность проблемы о проведения эксперимента ядерной реакции в финслеревой геометрии, цели и задачи исследования, их теоретическая и практическая значимость и выносимые на защиту результаты. **В первой главе** приведены сведения о геометриях, в том числе геометрии Евклида, Римана, Лобачевского и Финслера. **Во второй главе** более подробно рассмотрены теория поля в финслеровом геометрии. Изучены проблемы геометризации физических свойств материи, теория относительности и метрическая функция. **В заключениях** приведены основные результаты диссертации.

Личный вклад автора. Автор участвовал в выполнении всех этапов работы, и рассматривал применение финслеровой геометрии в теории поля в астрономический наблюдения и в теории космология.

ГЛАВА I. СВЕДЕНИЯ О ГЕОМЕТРИЯХ

Возникновение геометрических представлений относится к весьма отдаленным временам. Начальные сведения о геометрии связывают с древнейшими культурами Вавилона и Египта. С VII века (до нашей эры) начинается период развития геометрии трудами греческих ученых. В VII и V (до нашей эры) веках было получено много основных геометрических фактов. К этому же времени, видимо, сложились понятие о доказательстве теорем. В III (до нашей эры) столетии греки обладали уже глубокими геометрическими знаниями, причем они имели не только накопленный запас фактов, но и методы геометрических доказательств. Естественно поэтому, что в этот период возникло попытки собрать весь этот материал и расположить его в логически связном порядке.

Изложения начал геометрии предпринималось многими греческими авторами сочинения которых до нашего времени не дошли. По – видимому, они были забыты после появления знаменитых «Начал» Евклида.



Евклид, один из великих геометров древности, жил в период приблизительно от 330 до 275 года до нашей эры. Составленные им «начала» разделены на 13 книг, которых пятая, седьмая, восьмая, девятая и десятая посвящены теории пропорций и арифметике, остальные являются собственно геометрическими.

Книга первая содержит условия равенства треугольников, соотношения между сторонами и углами треугольников, теорию параллельных линий и условия равновеликости треугольников и многоугольников. В четвертой книге рассматриваются вписанные и описанные многоугольники. Книга шестая трактует подобие многоугольников. В последних трех книгах изложены основы стереометрии.

Таким образом, «Начала» содержит материал собственно элементарной геометрии. Многие из того, что было уже известно во время Евклида например теория конических сечений, в «Началах» не изложено.

Каждую книгу Евклид начинает с определения тех понятий, которыми ему приходится в этих книгах оперировать. Первой книге предпосланы 23 определения.

Вслед за определениями Евклид приводит постулаты и аксиомы, т.е. утверждения, принимаемые без доказательства. Вслед за аксиомами Евклид излагает теоремы геометрии, располагая их в порядке логической зависимости так, чтобы каждое предложение можно было доказать на основании приводящей предложений, постулатов и аксиом.

Перечисленные определений и аксиом, достаточных для строго логического доказательства всех последующих теорем, называют обоснованием геометрии.

Задача обоснования геометрии ясно поставлена Евклидом в его «Началах» и решена им с той степенью точности, какая была доступна античной древности. Более того, в дальнейшей, на протяжении многих веков, строгость евклидовых доказательств неизменно признавалось образцом для подражания. На протяжении многих веков к обоснованию геометрии никто не прибавил чего-либо принципиально нового сверх того, что уже было сделано Евклидом. Строгость Евклидовых доказательств до XIX столетия в общем казалась достаточной. Только в конце XIX столетия была окончательно осознана идея точного логического построения геометрии и указана полная система аксиом, из которых все теоремы выводятся без всяких апелляций к наглядности наших пространственных представлений.

Большинство сочинений, относящихся к основаниям геометрии, сводилось к попытке исключить из числа основных допущений V постулат Евклида, который казался слишком сложным, чтобы его можно было причислить к постулатам.

Исследования, посвященные V постулату, столь же древни, как и «Начала» Евклида.

До начала XIX столетия ни одна из попыток доказать V постулат не привела к желаемому результату. Не смотря на усилия геометров,

потраченные на протяжении более чем двадцати веков, задача обоснования теории параллельных, по существу, оставалась все в той же стадии, как и во время Евклида. Но первые же десятилетия XIX века принесли, наконец, решение проблемы V постулата; только решение это оказалось таким, какого не ждал и к какому не был подготовлен математический мир той эпохи. Слава решения этой знаменитой проблемы принадлежит профессору Казанского университета Никола Ивановичу Лобачевскому (1793-1856). В его докладе физико-математическому факультету Казанского университета, публиковавшихся, начиная с 1829 г., впервые отчетливо выражена и подтверждена мысль о том, что V постулат не может быть выведен из остальных постулатов геометрии. Чтобы доказать это, Лобачевский, сохраняя основные посылки Евклида, кроме постулата о параллельных, допускает, что постулат о параллельных не осуществляется, и строит логическую систему, предложения которой являются следствиями принятых посылок.



Лобачевский, развивая систему своих теорем, устанавливает, что эта система представляет собой новую геометрию он назвал ее «Воображаемая», которая, как и евклидова, свободна от логических противоречий. Воображаемую геометрию Лобачевский развил до таких же пределов, до каких была развита геометрия Евклида. Ученый мир оценил значение исследований Лобачевского лишь после его смерти. До Лобачевского евклидова геометрия представлялась мыслимым учением о пространстве. Открытие воображаемой или, как ее обычно называют, не евклидовой геометрии уничтожило эту точку зрения. Тем самым было положено начало далеко идущим обобщениям взглядов на геометрию и ее предмет, которые привели к современному понятию абстрактного пространства с его многочисленными применениями внутри математики и в смежных с нею областях. Лобачевский, установив независимость V постулата, дал вместе с тем первый фундаментальный результат в этой

области. Он расширил понимание самого смысла геометрии и, следовательно, задач ее обоснования.

Важный в этом отношении результат был получен затем Б. Риманом, который в своей работе «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» (1854 г.), развития аналитические системы принципы геометрии, пришел, в частности, к геометрической системы Лобачевского. В геометрии Римана прямая определяется двумя точками, плоскость – тремя, две плоскости пересекается по прямой и т.д., но через данную точку нельзя провести к прямой ни одной параллельной. В частности, в этой геометрии имеется теорема: *сумма углов треугольника больше двух прямых.*

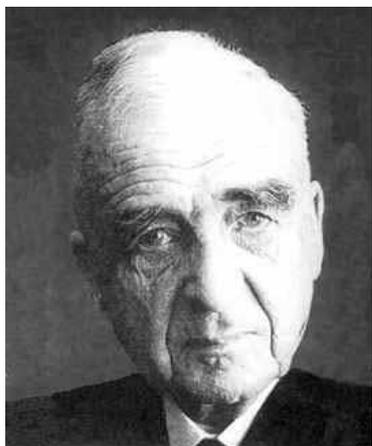


После опубликования работ Римана его идеи привлекли внимание ряда математиков, которые развивали дальше аналитический аппарат римановой геометрии и устанавливали в ней новые теоремы геометрического характера. Важным шагом было создание Г.Риччи-Курбастро и Т.Леви-Чивита на рубеже XX в. *тензорного исчисления*, которое оказалось наиболее подходящим аналитическим аппаратом для разработки римановой геометрии. Решающее же значение имело применение такой геометрии в *создании общей теории относительности*, которое было триумфом не только абстрактной геометрии и её аналитического аппарата, но и идей о связи геометрии и физики, выдвинутых Н.И.Лобачевским и Б.Риманом.

В лекции «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии» Риман обсуждает различные возможности метризации n -мерного многообразия и уделяет особое внимание метрике, задаваемой положительным квадратным корнем из положительно определенной *квадратичной дифференциальной формы*. Эта метрика лежит в основе римановой геометрии. В то же время предполагается, что метрической функцией может служить также и

положительный корень четвертой степени из *дифференциальной формы четвертого порядка*.

Вызывает удивление, что систематическое изучение многообразий с такой метрикой началось с запозданием более чем на 60 лет. Первым исследованием в этой области стала диссертация *Пауля Финслера*, увидевшая



мир в 1918 г., и поэтому название таких метрических пространств теперь связывают с его именем.

Фактором начало исследовательской деятельности в этом направлении, следует, по-видимому, считать введение Каратеодори новых геометрических методов в вариационное исчисление для изучения задач в параметрической

форме. Ядром этих методов является понятие индикатрисы, причем свойство выпуклости индикатрисы играет в этих методах важную роль, поскольку оно обеспечивает выполнение необходимых условий минимума в вариационной задаче для стационарных кривых. Именно поэтому диссертация Финслера должна рассматриваться как первый шаг в этом направлении.

Несколькими годами позже в общем развитии финслеровой геометрии происходит интересный поворот от первоначальной точки зрения Финслера к новым теоретическим методам. Финслер, руководствуясь в основном понятиями вариационного исчисления, не использовал методов тензорного анализа. Новый поворот в развитии теории произошел в 1934 г., когда Э.Картан опубликовал свой трактат о финслеровых пространствах. Метод Картана вел к развитию финслеровой геометрии путем прямого развития методов римановой геометрии. Критику методов Картана независимо друг от друга высказали несколько исследователей, в частности Вагнер, Буземан и Рунд. Буземан даже сказал по этому поводу, что «Финслерова геометрия со стороны представляет собой лес, в котором вся растительность состоит из тензоров».

В настоящее время значительный вклад в развитие финслеровой геометрии вносит американский математик Шен, российский ученый Дмитрий Павлов. Благодаря которым, вопреки Буземану, изучение финслеровой геометрии становится доступным широкому кругу математиков и физиков.

1.1 Евклидова геометрия

Элементарную геометрию часто называют **евклидовой геометрией**, так как первоначальное и систематическое её изложение, хотя и не достаточно строгое было в «Началах» Евклида. Первая строгая аксиоматика элементарной геометрии была дана Гильбертом. Элементарная геометрия изучается в средней общеобразовательной школе.

Евклидова Геометрия- геометрия пространства, описываемого системой аксиом, первое систематическое (но не достаточно строгое) изложение которой было дано в *"Началах" Евклида*. Обычно пространство $E. г.$ описывается как совокупность объектов трех родов, называемых "точками", "прямыми", "плоскостями"; отношениями между ними: принадлежности, порядка конгруэнтности ; непрерывностью. Особое место в аксиоматике $E. г.$ занимает, аксиома о параллельных. Первая достаточно строгая аксиоматика $\ddot{E}. г.$ была предложена Д. Гильбертом. Существуют модификации системы аксиом Гильберта и другие варианты аксиоматики $E. г.$ Например., в *векторно-точечной аксиоматике* за одно из основных понятий принято понятие вектора; в основу аксиоматики $E. г.$ может быть положено отношение симметрии .

Геометрия, систематическое построение которой было впервые дано в 3 в. до н. э. Евклидом. Система аксиом $E. г.$ опирается на следующие основные понятия: точка, прямая, плоскость, движение и следующие отношения: «точка лежит на прямой на плоскости», «точка лежит между двумя другими». В современном изложении систему аксиом $E. г.$ разбивают на следующие пять групп.

I. Аксиомы сочетания. 1) Через каждые две точки можно провести прямую и притом только одну. 2) На каждой прямой лежат по крайней мере две точки. Существуют хотя бы три точки, не лежащие на одной прямой. 3) Через каждые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость и притом только одну. 4) На каждой плоскости есть по крайней мере три точки и существуют хотя бы четыре точки, не лежащие в одной плоскости. 5) Если две точки данной прямой лежат на данной плоскости, то и сама прямая лежит на этой плоскости. 6) Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют ещё одну общую точку (и, следовательно, общую прямую).

II. Аксиомы порядка. 1) Если точка B лежит между A и C , то все три лежат на одной прямой. 2) Для каждой точки A , B существует такая точка C , что B лежит между A и C . 3) Из трёх точек прямой только одна лежит между двумя другими. 4) Если прямая пересекает одну сторону треугольника, то она пересекает ещё другую его сторону или проходит через вершину (отрезок AB определяется как множество точек, лежащих между A и B ; соответственно определяются стороны треугольника).

III. Аксиомы движения. 1) Движение ставит в соответствие точкам точки, прямым прямые, плоскостям плоскости, сохраняя принадлежность точек прямым и плоскостям. 2) Два последовательных движения дают опять движение, и для всякого движения есть обратное. 3) Если даны точки A, A' и полуплоскости A, A' , ограниченные продолженными полупрямыми a, a' , которые исходят из точек A, A' , то существует движение, и притом единственное, переводящее A, a в A', a' , A' (полупрямая и полуплоскость легко определяются на основе понятий сочетания и порядка).

IV. Аксиомы непрерывности. 1) Аксиома Архимеда: всякий отрезок можно перекрыть любым отрезком, откладывая его на первом достаточное число раз (откладывание отрезка осуществляется движением). 2) Аксиома Кантора: если дана последовательность отрезков, вложенных один в другой, то все они имеют хотя бы одну общую точку.

V. Аксиома параллельности Евклида. Через точку A вне прямой a в плоскости, проходящей через A и a , можно провести лишь одну прямую, не пересекающую a .

Возникновение Е. г. тесно связано с наглядными представлениями об окружающем нас мире (прямые линии — натянутые нити, лучи света и т. п.). Длительный процесс углубления наших представлений привёл к более абстрактному пониманию геометрии. Открытие Н. И. Лобачевским геометрии, отличной от Е. г., показало, что наши представления о пространстве не являются априорными. Иными словами, Е. г. не может претендовать на роль единственной геометрии, описывающей свойства окружающего нас пространства. Развитие естествознания (главным образом физики и астрономии) показало, что Е. г. описывает структуру окружающего нас пространства лишь с определённой степенью точности и не пригодна для описания свойств пространства, связанных с перемещениями тел со скоростями, близкими к световой. Т. о., Е. г. может рассматриваться как первое приближение для описания структуры реального физического пространства.

1.2 Лобачевского геометрия

Геометрическая теория, основанная на тех же основных посылах, что и обычная Евклидова геометрия, за исключением аксиомы о параллельных, которая заменяется на аксиому о параллельных Лобачевского. Евклидова аксиома о параллельных гласит: через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, лежащая с данной прямой в одной плоскости и не пересекающая её. В Л. г. вместо неё принимается следующая аксиома: через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, лежащие с данной прямой в одной плоскости и не пересекающие её. Казалось бы, эта аксиома противоречит чрезвычайно привычным представлениям. Тем не менее как эта аксиома, так и вся Л. г. имеет вполне реальный смысл. Л. г. была создана и развита Н. И. Лобачевским, который

впервые сообщил о ней в 1826. Л. г. называется неевклидовой геометрией, хотя обычно термину «неевклидова геометрия» придают более широкий смысл, включая сюда и др. теории, возникшие вслед за Л. г. и также основанные на изменении основных посылок евклидовой геометрии. Л. г. называется специально гиперболической неевклидовой геометрией в противоположность эллиптической геометрии Римана. Л. г. представляет теорию, богатую содержанием и имеющую применение как в математике, так и в физике. Историческое её значение состоит в том, что её построением Лобачевский показал возможность геометрии, отличной от евклидовой, что знаменовало новую эпоху в развитии геометрии и математики вообще. С современной точки зрения можно дать, например, следующее определение Л. г. на плоскости: она есть не что иное, как геометрия внутри круга на обычной плоскости, лишь выраженная особым образом. Именно, будем рассматривать круг на обычной плоскости и внутренность его, т. е. круг, за исключением ограничивающей его окружности, назовем «плоскостью». Точкой «плоскости» будет точка внутри круга. «Прямой» будем называть любую хорду. «Движением» назовем любое преобразование круга самого в себя, которое переводит хорды в хорды. Соответственно, равными называются фигуры внутри круга, переводящиеся одна в другую такими преобразованиями. Тогда оказывается, что любой геометрический факт, описанный на таком языке, представляет теорему или аксиому Л. г. Иными словами, всякое утверждение Л. г. на плоскости есть не что иное, как утверждение евклидовой геометрии, относящееся к фигурам внутри круга, лишь пересказанное в указанных терминах. Евклидова аксиома о параллельных здесь явно не выполняется, т. к. через точку O , не лежащую на данной хорде a (т. е. «прямой»), проходит сколько угодно не пересекающих её хорд. Аналогично, Л. г. в пространстве может быть определена как геометрия внутри шара, выраженная в соответствующих терминах («прямые» — хорды, «плоскости» — плоские сечения внутренности шара, «равные» фигуры — те, которые переводятся одна в другую

преобразованиями, переводящими шар сам в себя и хорды в хорды). Таким образом, Л. г. имеет совершенно реальный смысл и столь же непротиворечива, как геометрия Евклида. Описание одних и тех же фактов в разных терминах или, напротив, описание разных фактов в одних и тех же терминах представляет характерную черту математики. Она ясно выступает, например, когда одна и та же линия задаётся в разных координатах разными уравнениями или, напротив, одно и то же уравнение в разных координатах представляет различные линии.

Геометрия Лобачевского (гиперболическая геометрия) — одна из неевклидовых геометрий, геометрическая теория, основанная на тех же основных посылаках, что и обычная евклидова геометрия, за исключением аксиомы о параллельных, которая заменяется на аксиому о параллельных Лобачевского.

Евклидова аксиома о параллельных гласит:

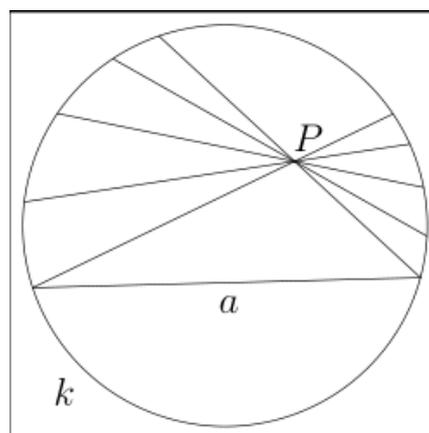
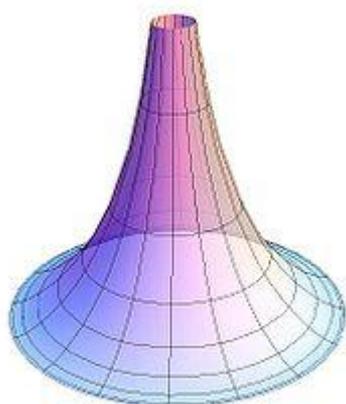
через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, лежащая с данной прямой в одной плоскости и не пересекающая её.

В геометрии Лобачевского, вместо неё принимается следующая аксиома:

через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, лежащие с данной прямой в одной плоскости и не пересекающие её.

Геометрия Лобачевского имеет обширные применения как в математике, так и в физике. Историческое её значение состоит в том, что её построением Лобачевский показал возможность геометрии, отличной от евклидовой, что знаменовало новую эпоху в развитии геометрии и математики вообще.

Модели. Модели геометрии Лобачевского дали доказательство её



непротиворечивости, точнее показали что геометрия Лобачевского столь же непротиворечива, как геометрия Евклида. Сам Лобачевский дал основы своей аналитической геометрии, и тем самым он уже фактически наметил такую модель. Он также заметил что орисфера в пространстве Лобачевского изометрична евклидовой плоскости, тем самым фактически предложил обратную модель. Тем не менее, само понятие о модели прояснилось в работах Клейна и других.

Псевдосфера. Итальянский математик Э. Бельтрами в 1868 году заметил, что геометрия на куске плоскости Лобачевского совпадает с геометрией на поверхностях постоянной отрицательной кривизны, простейший пример которых представляет псевдосфера. Если точкам и прямым на конечном куске плоскости Лобачевского сопоставлять точки и кратчайшие линии на псевдосфере и движению в плоскости Лобачевского сопоставлять перемещение фигуры по псевдосфере с изгибанием, то есть деформацией, сохраняющей длины, то всякой теореме геометрии Лобачевского будет отвечать факт, имеющий место на псевдосфере. При этом длины, углы, площади понимаются в смысле естественного измерения их на псевдосфере.

Однако здесь даётся только локальная интерпретация геометрии, то есть на ограниченном участке, а не на всей плоскости Лобачевского.

Модель Клейна. Через точку P проходит бесконечно много «прямых», не пересекающих «прямой» a . В 1871 году Клейн предложил первую полноценную модель плоскости Лобачевского. Плоскостью служит внутренность круга, прямой — хорда круга без концов, а точкой — точка внутри круга. «Движением» назовём любое преобразование круга в самого себя, которое переводит хорды в хорды. Соответственно, равными называются фигуры внутри круга, переводящиеся одна в другую такими преобразованиями. Тогда оказывается, что любой геометрический факт, описанный на таком языке, представляет теорему или аксиому геометрии Лобачевского. Иными словами, всякое утверждение геометрии Лобачевского на плоскости есть не что иное, как утверждение евклидовой геометрии,

относящиеся к фигурам внутри круга, лишь пересказанное в указанных терминах. Евклидова аксиома о параллельных здесь явно не выполняется, так как через точку O , не лежащую на данной хорде a (то есть «прямой»), проходит сколько угодно не пересекающих её хорд («прямых») (например, b , b').

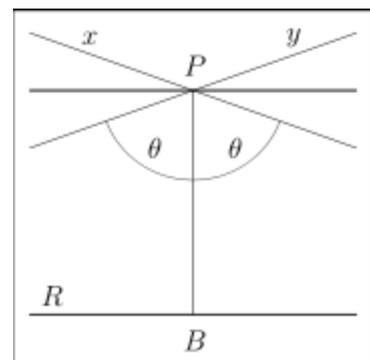
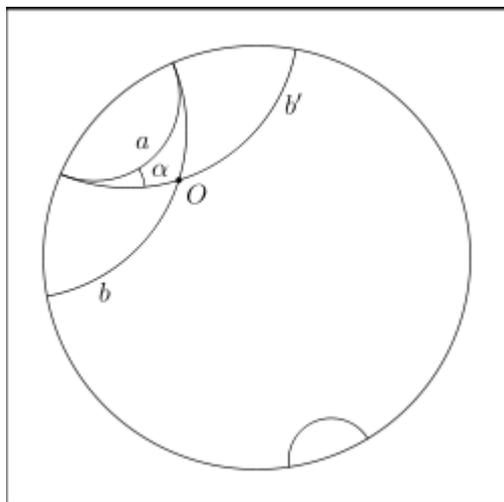
В этой модели расстояние между точками A и B на хорде NM определяется через двойное отношение

$$\ln \frac{AN \cdot BM}{AM \cdot BN}$$

Модель Пуанкаре. Позже Пуанкаре, в связи с задачами теории функций комплексного переменного дал другую модель. За плоскость Лобачевского принимается внутренность круга, прямыми считаются дуги окружностей, перпендикулярных окружности данного круга, и его диаметры, движениями — преобразования, получаемые комбинациями инверсий относительно окружностей, дуги которых служат прямыми.

Модель Пуанкаре замечательна тем, что в ней углы изображаются обычными углами.

Другое аналитическое определение геометрии Лобачевского состоит в том, что геометрия Лобачевского определяется как геометрия риманова пространства постоянной отрицательной кривизны. Это определение было фактически дано ещё в 1854 году Риманом и включало модель геометрии Лобачевского как геометрии на поверхностях постоянной кривизны.



Содержание геометрии Лобачевского. Пучок параллельных прямых в геометрии Лобачевского. Лобачевский строил свою геометрию, отправляясь от основных геометрических понятий и своей аксиомы, и доказывал теоремы геометрическим методом, подобно тому, как это делается в геометрии Евклида. Основой служила теория параллельных линий, так как именно здесь начинается отличие геометрии Лобачевского от геометрии Евклида. Все теоремы, не зависящие от аксиомы о параллельных, общи обоим геометриям и образуют так называемую абсолютную геометрию, к которой относятся, например, теоремы о равенстве треугольников. Вслед за теорией параллельных строились другие разделы, включая тригонометрию и начала аналитической и дифференциальной геометрии.

Приведём несколько фактов геометрии Лобачевского, отличающих её от геометрии Евклида и установленных самим Лобачевским.

Через точку P , не лежащую на данной прямой R , проходит бесконечно много прямых, не пересекающих R и находящихся с ней в одной плоскости; среди них есть две крайние x , y , которые и называются параллельными прямой R в смысле Лобачевского. В моделях Клейна (Пуанкаре) они изображаются хордами (дугами окружностей), имеющими с хордой (дугой) R общий конец (который по определению модели исключается, так что эти прямые не имеют общих точек).

Угол θ между перпендикуляром PB из P на R и каждой из параллельных (называемый *углом параллельности*) по мере удаления точки P от прямой убывает от 90° до 0° (в модели Пуанкаре углы в обычном смысле совпадают с углами в смысле Лобачевского, и потому на ней этот факт можно видеть непосредственно). Параллель x с одной стороны (а y с противоположной) асимптотически приближается ka , а с другой — бесконечно от неё удаляется.

Для точки, находящейся от заданной прямой на расстоянии $PB = a$, Лобачевский дал формулу для угла параллельности $\Pi(a)$:

$$\theta = \Pi a = 2 \operatorname{arctg} e^{-\frac{a}{q}}$$

Здесь q — некоторая постоянная, связанная с кривизной пространства Лобачевского. Она может служить абсолютной единицей длины аналогично тому, как в сферической геометрии особое положение занимает радиус сферы.

Если прямые имеют общий перпендикуляр, то они бесконечно расходятся в обе стороны от него. К любой из них можно восстановить перпендикуляры, которые не достигают другой прямой.

В геометрии Лобачевского не существует подобных, но неравных треугольников; треугольники равны, если их углы равны.

Сумма углов всякого треугольника меньше π и может быть сколь угодно близкой к нулю. Это непосредственно видно на модели Пуанкаре. Разность $\delta = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$, где α, β, γ — углы треугольника, пропорциональна его площади:

$$S = q^2 \cdot \delta$$

Из формулы видно, что существует максимальная площадь треугольника, и это конечное число: πq^2 .

Линия равных расстояний от прямой не есть прямая, а особая кривая, называемая эквидистантой, или *гиперциклом*.

Предел окружностей бесконечно увеличивающегося радиуса не есть прямая, а особая кривая, называемая *предельной окружностью*.

Предел сфер бесконечно увеличивающегося радиуса не есть плоскость, а особая поверхность — предельная сфера, или орисфера; замечательно, что на ней имеет место евклидова геометрия. Это служило Лобачевскому основой для вывода формул тригонометрии.

Длина окружности не пропорциональна радиусу, а растёт быстрее. В частности, в геометрии Лобачевского число π не может быть определено как отношение длины окружности к её диаметру.

Чем меньше область в пространстве или на плоскости Лобачевского, тем меньше геометрические соотношения в этой области отличаются от соотношений евклидовой геометрии. Можно сказать, что в бесконечно малой

области имеет место евклидова геометрия. Например, чем меньше треугольник, тем меньше сумма его углов отличается от π ; чем меньше окружность, тем меньше отношение её длины к радиусу отличается от 2π , и т. п. Уменьшение области формально равносильно увеличению единицы длины, поэтому при безграничном увеличении единицы длины формулы геометрии Лобачевского переходят в формулы евклидовой геометрии. Евклидова геометрия есть в этом смысле «предельный» случай геометрии Лобачевского.

1.3 N-мерное пространства

Впервые слова «*n* –мерное пространство » прозвучали в 1854 году в речи Бернгарда Римана при выступлении его на должность преподавателя Геттингенского университета. Она называлась «О гипотезах, образующих основания геометрии» и в самом деле провозглашала совсем новую, неожиданную и уж во всяком случае, неевклидовую геометрию, названную впоследствии «римановой». Впрочем, и Евклид, создавая свою геометрию, возможно, размышлял о «мере мира». «Точка-это то, что не имеет частей », - говорил он. Современный математик подсчитал бы эти слова пусть примитивны, но довольно точным определением «объекта нулевого измерения». Точка, оставленная карандашом на бумаге, острие булавки или башенного шпиля- вот эти «объекты» в реальной жизни. Сфера нулевого измерения-это и есть точка. Нить, проволока и любая иная линия-это уже одномерные предметы: у них есть длина. Сфера в пространстве одного измерения - это две точки на прямой: центр этой одномерной сферы лежит по середине между ними. Представители двумерного мира имеют и длину и ширину-это ленты, куски ткани, листы бумаги. Окружность, граница двумерного круга- вот что такое сфера в пространстве двух измерений. И наконец, кубы, пирамиды, дома, корабли и самолеты так же, как и мы с вами, входят в неисчислимую армию «трехмерцев», обладающих вдобавок к длине и ширине еще и высотой. У них есть объем. Сфера в трехмерном

пространстве - это шар, «обычная» сфера. Но вот что любопытно. Проволоку можно сломать, лист бумаги разрезать, а куб распилить. И при этом получается, что одномерная поверхность, линия, разделяется поверхностью нулевого измерения-точкой. Двумерная плоскость делится надвое одномерной линией, а трехмерный куб-двумерной плоскостью. Иными словами, границей «разлома» тела служит какое-то другое тело, измерение которого на единицу ниже. Что же тогда служит границей четырехмерной сферы? Поистине прав Эйнштейн: оторопь берет, когда пытаешься все это вообразить! Но не будем отчаиваться и зайдем с другого конца. Если точку «протащить» по бумаге, то получится линия. Линия, в свою очередь, «заметает» плоскость – получается квадрат. Вытянем квадрат из плоскости-сделаем куб. Это уже третье измерение. Но что же такое надо сделать с кубом, чтобы обратить его в четырехмерное тело? И как его себе представит? А что мы делаем, чтобы изобразить на плоском листе бумаги трехмерный куб? Мы проецируем его на плоскость. Получаются два квадрата один в другом соединенные вершинами. Так спроецируем же и четырехмерный куб! Мы получим по аналогии два куба, один в другом, и снова вершины попарно соединены. Вот он, посланец четвертого измерения, вернее, не сам он, а его проекция на плоскость. И точно так же, рассуждая по аналогии, мы можем отдаленно представить себе четырехмерную сферу. Если спроецировать глобус на плоскость, то проекции двух его половин наложатся одна на другую, и Нью-Йорк окажется где-то в центре нашей Сибири. Проецирую глобус, мы пропускаем одну его полусферу сквозь другую и соединяем их проекции, круги, только по границе - окружности (как квадраты по вершина). Проекция гиперсферы – два шара, прошедшие один через другой и соединенные только по внешним поверхностям. Конечно, вообразить все это нелегко, но ничего мистического тут нет. Существует один простой тест, основанный на формуле, введенной еще Леонардом Эйлером. Это удивительная формула. Она- истинно топологическая, потому что имеет дело не с размерами, углами или

площадями, а лишь с числом вершин, ребер и сторон, или граней, любой геометрической фигуры. Вот она:

$$\Gamma + B = P + 2$$

То есть число граней (Γ) плюс число вершин (B) равно числу ребер (P) плюс 2. Проверьте правильность этой формулы на какой угодно фигуре-кубе, пирамиде, тетраэдре, икосаэдре, произвольном многограннике, теле самой замысловатой формы. Но возьмите гиперкуб (6) : 24-стороны, 16-вершин, 32-ребро и сверх того 8-трехмерных граней-вот то геометрическое богатство, которым он обладает, для него несправедлива формула Эйлера.

Геометрия- это интуиция,-наша интуиция имеет вообразительную функцию, связанную с нашим прошлым чувственным опытом,-например, треугольник, нарисованный на стене, дорожный знак или часть орнамента в виде треугольника. Но вместе с тем у нее есть и нормативная функция, которая не позволяет нам взглянуть на одну и ту же идею с разных сторон. Вот простейший пример. Дана замкнутая кривая- круг или квадрат. Требуется чисто умозрительно, без карандаша и бумаги, решить: можно ли соединить две точки- одну внутри кривой, другую вне, но так, чтобы не пересечь замкнутой кривой. Представив себе этот элементарный чертежик и немного поразмыслив, мы уверенно утверждаем, что задача невыполнима. Это сработала нормативная функция воображения. Дело в том, что наш «внутренний взор» несет в себе евклидову плоскость- лист бумаги. Конечно же, на листе не соединишь две точки, не перечеркнув кривую, охватывающую одну из них. Но кто говорил нам о типе поверхности, на которой предстоит решать задачу? А если это не плоскость, а, скажем, бублик или автомобильная шина- все получается легко и просто. Но это не самое удивительное в парадоксах многомерности. Вот еще один и последний. Куб вместит в себя по диагонали квадрат, площадь которого больше площади одной его грани. В четырехмерный куб впишется обычный куб, объем которого больше объема одной гиперповерхности гиперкуба. А в n -мерный

куб с ребром в один миллиметр войдет океанский корабль и весь наш трехмерный мир, если только n достигнет нужной величины. И заодно подумайте еще вот о чем. В каком же мире мы все-таки с вами живем? Сколько в нем измерений? Конечен ли он? Имеет ли границы? Разумеется, вы вправе создать свою собственную теорию. Но постарайтесь, чтобы факты, известные сегодняшней науке, уложились в нее. А факты эти, например, такие. Все тела притягиваются друг к другу. С силой пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстоянию между ними. Это закон, открытый Ньютоном. Оставим пока в покое массы. Итак, гравитационное взаимодействие убывает с расстоянием, и зависимость эта квадратичная. Но то же самое происходит и с магнитными, и с электростатическими силами. И свет, и радиация распространяются по этому же закону: интенсивность падает как квадрат расстояния от источника. Так может быть только в трехмерном пространстве. Ведь воздействие передается во все стороны равномерно, по все расширяющимся сферам, площадь которых, как известно, равна $4\pi R^2$. Но если бы пространство было, например, четырехмерным, то вместо квадрата в формулах физики фигурировал бы куб. Мало того, планеты не вращались бы вокруг Солнца по замкнутым траекториям, но двигались бы по спирали, либо приближаясь, либо удаляясь от него. Ясно что и в том и в другом случае жизнь во Вселенной была бы невозможна. Теперь, наоборот, оставим в покое расстояние между телами и подумаем об их массе. Если наша Вселенная бесконечно и материя распределена в ней равномерно, то в любой ее точке сила тяготения должна быть бесконечно большой. Но это означает, что ни одна планета не могла бы существовать – этот материальный остров в море пространства был бы растянут силами гравитации. Значит ...значит, Вселенная не бесконечна? Но что же тогда за ее краем? Альберт Эйнштейн нашел выход из этого логического тупика. Вселенная хотя и конечна, но безгранична! С ней как раз все в порядке. Беда в нас самих-в нашей слепой приверженности к геометрии Евклида. Мы

уверены, что параллельные линии не пересекаются, что кратчайшее расстояние между двумя точками-прямая. Но ведь этого никто и никогда не доказал. Мало того, все мы знаем, что это вовсе не так. Чтобы сократить дорогу от Москвы до Владивостока, летчик поведет самолет вовсе не по прямой линии, а по дуге большого круга Земли-так называемой геодезической линии. Если нарисовать на земной поверхности огромный круг, то отношение его диаметра к длине окружности будет меньше π . Все это из-за кривизны нашей планеты, из-за того, что она не плоская.

Параллельные линии-дуги большого круга-пересекаются. И узнали мы об этом задолго до космических полетов, людям не пришлось глядеть на свою планету из вне, чтобы понять, какой она формы. Так и Эйнштейн, размышляя над известными астрономическими фактами, пришел к мысли, что наша Вселенная искривляется и в математическом смысле эквивалентна четырехмерной сфере. «Вселенная, изображаемая теорией относительности Эйнштейна, подобна раздувающемуся мыльному пузырю. Она-не его внутренность, а пленка, поверхность пузыря двумерна, а пузырь Вселенной имеет четыре измерения: три пространственных и одно-временное»-так писал некогда видный английский физик Джеймс Джинс. Эйнштейн, однако, тоже был математиком. Его формулы позволяют вычислить радиус этой Вселенной. Поскольку кривизна ее зависит от массы тел, которые ее составляют, то надо знать среднюю плотность материи. Астрономы в течение многих лет изучали одни и те же маленькие участки неба и скрупулезно подсчитывали количество материи в них. Оказалось, что плотность равна приблизительно 10^{-30} г/см³. Если подставить эту цифру в формулы Эйнштейна, то, во-первых, получится положительная величина кривизны-то есть наша Вселенная замкнута!-а во-вторых, радиус ее равен 35 миллиардам световых лет. Это значить, что хотя Вселенная и конечна, но она огромна-луч света, мчась по Большому Космическому кругу, вернется в ту же точку через 200 миллиардов земных лет! В нашей гигантской гиперсфере хватает места для миллиардов галактик, а в каждой из них-для миллиардов звезд. Это не

единственный парадокс вселенной Эйнштейна. Она не только конечна, но безгранична, она еще и непостоянна. Свою теорию Альберт Эйнштейн сформулировал в виде десяти очень сложных, так называемых нелинейных дифференциальных уравнений. Однако далеко не все ученые отнеслись к ним как к десяти заповедям, допускающим лишь одно-единственное толкование. Да это и не удивительно-ведь точно решить такие уравнения современная математика не имеет, а приближенных решений может быть много. И вот наш соотечественник Александр Александрович Фридман в 1922 году предложил такое решение уравнений Эйнштейна, при котором получалось, что галактики не могут находиться на зафиксированных расстояниях одна от другой, они должны с течением времени разлетаться-и чем дальше, тем быстрее. Джемс Джинс не напрасно уподобил вселенную Эйнштейна раздувающемуся мыльному пузырю. Она и в самом деле расширяется на наших глазах. Но если плотность материи в ней окажется достаточно большой, то силы всемирного тяготения рано или поздно остановят «беглые» галактики и Вселенная начнет сжиматься.

Правильный многогранник тем и правилен, что каждая грань его правильный p -угольник и в каждой вершине сходится одно и то же число q -таких граней. Математики обозначают это обстоятельство символом Шлефли- p, q .

Геометрия древних греков стала краеугольным камнем новой астрономии-это известное изречение больше всего относится к астрогеометрическим экспериментам Иоганна Кеплера. Открыв основные законы движения планет нашей Солнечной системы, он задался следующим вопросом: а почему они находятся на том или ином расстоянии от Солнца? И вдруг Кеплера осенило. Планет всего шесть и, следовательно, промежутков между ними-пять. Но и Платоновых тел тоже пять-не больше и не меньше. Не может быть, чтобы это совпадение оказалось случайным! И Кеплер стал лихорадочно вставлять один правильный многогранник в другой, по-разному комбинируя их и

вписывая в каждый сферу, - математический прообраз планетный орбит. К его радости, эти построения, легшие в основу его книги «Тайна Вселенной». В книге Иоганна Кеплера есть чертеж, из которого видно, каким он представлял себе механизм, ведающий размещением планет. Вокруг Солнца описан самый большой шар, по нему движется Сатурн. Теперь в него надо вписать куб, а в куб этот- снова шар, который определит собой орбиту Юпитера. Если в этот меньший шар вписать тетраэдр, а в него опять шар, то получится орбита Марса. Так, следуя Кеплеру, и надо продолжать вписывать в шары правильные многогранники, а в них- снова шары. Между Марсом и Землей окажется додекаэдр, между Землей и Венерой- икосаэдр, а Венеру и Меркурий разделить октаэдр. Точные значения орбит у Кеплера не получались, но он считал, что есть разница между «мыслимой идеей круга и действительным путем планеты», поскольку «небесные движения- произведения не разума, а природы». Поэтому ему пришлось подправлять свою модель- шары на его чертеже имеют различную толщину. Но все это было бы ничего, если бы не открыли новые планеты, а запас Платоновых тел, разумеется, не пополнился: их как было, так и осталось пять. Платон считал, будто атомы четырех элементов, из которых строится мир (огня, земли, воздуха и воды), имеют форму правильных выпуклых многогранников- тетраэдра, куба, октаэдра и икосаэдра, а весь мир в целом построен в форме додекаэдра. Платоновыми телами могут быть лишь многогранники, символы Шлефли которых- $3,3 : 4,3 : 3,4 : 5,3$ и $3,5$. Итого- пять. В первой книге «Начал» он учит, как строить правильный треугольник, а в четвертой- квадрат, пяти-, шести- и пятнадцати угольник с равными сторонами и углами при вершине. Но вот правильный семиугольник ни Евклиду, ни его последователям построить не удалось, а пытались многие, потому что семиугольная звезда играла определенную роль в астрологии. Однако только в 1796 году Карл Фридрих Гаусс сумел выяснить, какие именно правильные многоугольники могут быть построенный с помощью циркуля и линейки, а какие- никогда. Закон этот гласит: циркулем и линейкой можно построить

правильный n -угольник в том и только в том случае, если число его сторон n разлагается на простые множители, каждый из которых является так называемым «простым числом Ферма», и в добавок множители эти не повторяются. Единственное исключение-числа, кратные 2. Они могут, конечно, входить в состав множителей n -ведь нетрудно сколь угодно раз удвоить число сторон уже построенного многоугольника. «Простые числа Ферма» выражаются простой формулой, придуманной Ферма: $2^{2^k} + 1$. Вот первые пять таких чисел: 3, 5, 17, 257 и 65 537. Семерка не входит в их числа, и потому астрологам придется самим строить свой символ.

Известный советский геолог профессор Б. Л. Личков, друг и сотрудник академика В. И. Вернадского, написал научный труд «к основам современной теории Земли». Он развил в нем ту точку зрения, весьма популярную среди космологов, что планета наша сформировалась из скопления астероидов. Вначале она отнюдь не напоминала шар-это было некое угловатое образование, несущееся в космосе. Но время и законы физики постепенно превращали Землю в правильные геометрические тела, поскольку именно они обладают особыми геометрическими свойствами, удобными для подобной эволюции. Переходной формой к нынешнему геоиду мог быть, по мнению профессора Личкова, додекаэдр, и части его граней и до сих пор должны сохраниться в теле планеты. По другим соображениям, приведенным в его книге, Земля должна было напоминать октаэдр, и тогда геологом следует, по Личкову, искать именно эти огромные грани. Другой известный советский ученый, кристаллограф по специальности, профессор И. И. Шафрановский предложил в 1962 году модель Земли в виде двух тетраэдров, соединенных основаниями, а в конце прошлого века Л. Грин и А. Лаппарент уподобляли земной шар тетраэдру в чистом виде. И наконец, снова Платон, и его диалог «Земля, если взглянуть на нее сверху, похожа на мяч, сшитый из двенадцати кусков кожи». Один лишь икосаэдр остался не вовлеченным в эти геометрические рассуждения,

но лишь до недавнего времени. В 1973 году сразу трое ученых-искусствовед Н. В. Гончаров, инженер-электронщик В. А. Макаров и инженер-строитель В. С. Морозов-выдвинули совместную гипотезу, которую они назвали додекаэдра-икосаэдровой. Они обратили внимание на любопытное совпадение: Мохенджо-Даро, очаг древнейшей индийской культуры, и остров Пасхи, где тоже в отдаленные времена существовала самобытная цивилизация, расположены на концах оси, проходящей через центр Земли. Но несмотря на такую диаметрально географическую противоположность, между ними наблюдается удивительное лингвистическое единство: венгерский ученый Хевеши считает, что среди иероглифов острова Пасхи и Мохенджо-Даро около сотни одинаковых знаков. Вдобавок в знаменитых табличках ронго-ронго упоминается о большом архипелаге, который опустился под воду в районе острова Пасхи, а в Мохенджо-Даро в древности были сильные колебания почвы. Эти не лишние интереса хотя и недостаточно проверенные факты явились толчком к дальнейшему «обжариванию» планеты в поисках новых знаменательных совпадений. В поле зрения трех молодых исследователей попали египетские пирамиды. Название древней столицы Египта-Мемфиса, где они расположены, переводится как «Середина мира». От Гизы, района пирамид, до Мохенджо-Даро шестнадцать географических градусов, а от Мохенджо-Даро до Северного полюса- равно вдвое больше. Получается, что пирамиды и в самом деле находятся если не в середине мира, то в центре гигантского равностороннего треугольника. Следующий шаг на пути авторов додекаэдро-икосаэдровой гипотезы строения Земли был естествен и прост: продолжить стороны гигантского треугольника вдоль Земного шара. Мозаика, покрывшая глобус в результате этой работы, состояла ровно из двадцати правильных треугольников. Иными словами, она представляла собой икосаэдр. Соединив середины его граней между собой, Гончаров, Морозов и Макаров получили, естественно, додекаэдр. И тут выяснилось, что вдоль ребер двух замечательных фигур происходят на Земле удивительные

явления. Океанические подводные хребты и разломы земной коры расположились строго параллельно ребрам, а часто и просто вдоль их. Впрочем, это обстоятельство мало удивило авторов гипотезы: они были уже знакомы с новым научным направлением, так называемой тектоникой плит. Ее сторонники утверждают, что земная кора состоит из огромных плит, стыки между которыми они называют «швами на бейсбольном мяче планеты», «Земля, если взглянуть на нее сверху...» Откуда мог знать Платон, к каким выводам придет геология через две с половиной тысячи лет после его смерти?

Как ни соблазнительно представлять себе земную сферу в виде правильного многогранника, Платонова тела, и какими бы дружескими чувствами к Платону мы ни пылали, истина все-таки дороже. Да, многие залежи полезных ископаемых тянутся вдоль ребер икосаэдро-додекедровой сетки. Да, еще более удивительные вещи происходят в местах пересечения этих ребер- тут располагаются и очаги древнейших культур и цивилизации- Перу, Северная Монголия, Таити, Обская культура, Камбоджа-Вьетнам, Ирландия, где есть памятники постарше Египетских пирамид: районы максимума солнечной активности: максимумы и минимумы атмосферного давления: гигантские завихрения течений Мирового океана: Шотландское озеро Лох-Несс с знаменитой Несси, скорее всего отсутствующей в нем: остров Сахалин, где обычные растения вытягиваются до невероятной длины, -да, все это странным образом попадает в вершины додекаэдра и икосаэдра. Но и эти и многие другие совпадения (среди них особенно поразительно, что «Бермудский дьявольский треугольник» и «море Дьявола» южнее Японии, где загадочным образом пропадают корабли и самолеты, не успев подать сигнал «SOS», - оба эти проклинаемые мореходами и авиаторами района океана лежат точно в центрах пятиугольных граней додекаэдра) еще не дают оснований для того, чтобы считать гипотезу Гончарова-Макарова-Морозова научной теорией. Строгих ее доказательств пока нет, и будут ли они-не известно.[3]

1.4 Риманова геометрия.

Риманова геометрия — это раздел дифференциальной геометрии, главным объектом изучения которого являются *римановы многообразия*, т. е. гладкие многообразия с дополнительной структурой, римановой метрикой, иначе говоря — с выбором евклидовой метрики на каждом касательном пространстве, причём эта метрика гладко меняется от точки к точке. Иногда, особенно часто в математической физике, под римановой геометрией подразумевают также и псевдориманову геометрию многообразий с псевдоримановой метрикой, например, пространства-времени специальной и общей теории относительности.

Основным подразделом римановой геометрии в математике является геометрия в целом — раздел, который выявляет связь глобальных свойств риманова многообразия, как то: топология, диаметр, объём — и его локальных свойств, к примеру, ограничений на кривизну.

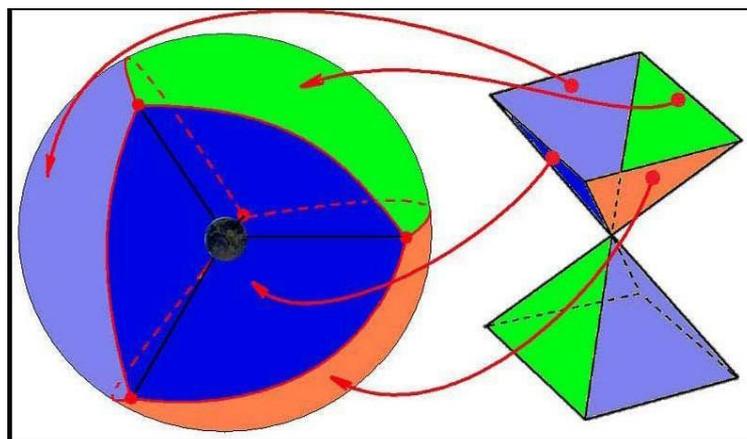
Риманова геометрия многомерное обобщение геометрии на поверхности, представляющее собой теорию римановых пространств, т. е. таких пространств, где в малых областях приближённо имеет место евклидова геометрия (с точностью до малых высшего порядка сравнительно с размерами области). Р. г. получила своё название по имени Б. Римана, который заложил её основы в 1854.

Понятие о римановой геометрии. Гладкая поверхность в евклидовом пространстве, рассматриваемая с точки зрения измерений, производимых на ней, оказывается двумерным пространством, геометрия которого, будучи приближённо евклидовой в малом точно не является евклидовой; к тому же, как правило, поверхность неоднородна по своим геометрическим свойствам. Поэтому внутренняя геометрия поверхности и есть не что иное, как Р. г. двух измерений, а сама поверхность есть двумерное риманово пространство.

Так, при измерениях на участках земной поверхности, малых в сравнении с размерами земного шара, можно с успехом применять обычную планиметрию, однако результаты измерений на больших участках

обнаруживают существенное отклонение от законов планиметрии. Перенесение этих понятий на многомерные пространства приводит к общей Р. г. В основе Р. г. лежат три идеи. Первая идея — признание того, что вообще возможна геометрия, отличная от евклидовой, — была впервые развита Н. И. Лобачевским, вторая — это идущее от К. Ф. Гаусс, а понятие внутренней геометрии поверхностей и её аналитический аппарат в виде квадратичной формы, определяющей линейный элемент поверхности; третья идея — понятие об n -мерном пространстве, выдвинутое и разработанное в 1-й половине 19 в. рядом геометров. Риман, соединив и обобщив эти идеи, ввёл общее понятие о пространстве как непрерывной совокупности любого рода однотипных объектов, которые служат точками этого пространства, и перенёс на эти пространства представления об измерении длин малыми шагами. После опубликования работ Римана его идеи привлекли внимание ряда математиков, которые развивали дальше аналитический аппарат Р. г. и устанавливали в ней новые теоремы геометрического содержания. Важным шагом было создание итальянскими геометрами Г. Риччи-Курбастро и Т. Леви-Чивита на рубеже 20 в. так называемого тензорного исчисления, которое оказалось наиболее подходящим аналитическим аппаратом для разработки Р. г. Решающее значение имело применение Р. г. в создании А. Эйнштейном общей теории относительности, которое было триумфом не только абстрактной геометрии, но и идей о связи геометрии и физики, выдвинутых Лобачевским и Риманом. Это привело к бурному развитию Р. г. и её разнообразных обобщений. В настоящее время Р. г. вместе с её обобщениями представляет собой обширную область геометрии, которая продолжает успешно развиваться, причём особое внимание уделяется вопросам глобального характера.

1.5 Финслерова геометрия

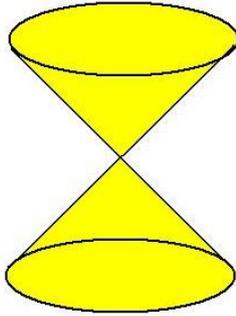


Финслерова геометрия метрическое обобщение *римановой геометрии*, возникающее вслед за введением общего определения длины вектора, не ограниченного частным римановым определением в виде корня квадратного из квадратичной формы. Развитие такого обобщения начинается с работы П. Финслера.

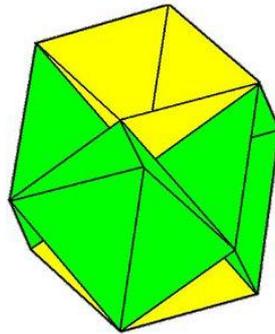
Предметом изучения в Ф. г. является действительное N -мерное дифференцируемое многообразие M (по меньшей мере класса C^3) с системой локальных координат x_i , на котором задана действительная неотрицательная скалярная функция $F(x, y)$ от $2N$ независимых переменных x_i, y_i , где y^i - компоненты контравариантных векторов, касательных к M и опирающихся на точку x^i . Пусть $F(x, y)$ принадлежит классу C^3 по x^i и пусть в каждом касательном к M пространстве M_x существует такая область M_x^* , что, во-первых, она является конической, в том смысле, что если какой-либо вектор y^i , опирающийся на некую точку x^i , принадлежит M_x^* , то M_x^* принадлежит и любой другой касательный вектор, коллинеарный y^i и опирающийся на ту же точку x^i , и, во-вторых, $F(x, y)$ принадлежит классу C^5 по $y^i \in M_x^*$. Ненулевые векторы наз. допустимыми. Пусть, далее, для любого допустимого y^i и любой точки x^i справедливо называется допустимыми. Пусть, далее, для любого допустимого y^i и любой точки x^i справедливо

$$F(x, y) > 0, \det(\partial^2 F^2(x, y) / \partial y^i \partial y^j) \neq 0$$

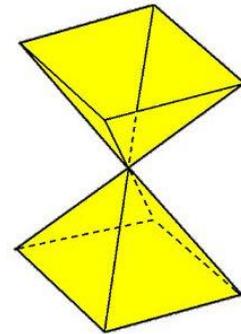
а также пусть функция $F(x, y)$ положительно однородна первой степени по y^i , т. е. $F(x, ky) = kF(x, y)$ при любом $k > 0$ для всех x^i и допустимых y^i . При этих условиях тройка $(M, M_x^*, F(x, y))$ наз. N -мерным финслеровым пространством, а F -финслеровой метрической функцией. Значение функции $F(x, y)$ понимается как длина вектора y^i , опирающегося на точку x^i .



Minkowski space-time



Berwald-Moor space-time



Если финслерово пространство допускает такую координатную систему x^i , что F не зависит от этих x , то оно называется пространством Минковского. Последнее находится в таком же отношении к финслерову пространству, в каком евклидово пространство к риманову пространству. Финслерово пространство называется положительно определенным, если на F наложены условия, обеспечивающие положительную определенность квадратичной формы

$$z^i z^j \frac{\partial^2 F^2(x, y)}{\partial y^i \partial y^j}$$

при любых x^i и ненулевых y^i . [4]

Наложение условия однородности на y^i имеет ясный геометрический смысл с точки зрения инвариантных понятий, имеющих в центроаффинных пространствах, каковыми являются касательные пространства M_x . Именно, отношение длин любых двух коллинеарных векторов $y_1^i / y_2^i = k y_1^i$ из M_x^* может быть инвариантно определено следующим образом: $y_1^1 / y_2^1 = y_1^2 / y_2^2 = \dots = k$ что не включает никакой метрической функции. Таким образом, наложенное на F условие однородности является условием

согласованности финслерова определения длины с частным центроаффинным определением; финслерова метрических функция требуется для сравнения длин неколлинеарных векторов.

Тензор
$$g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(x, y)}{\partial y^i \partial y^j}$$

называется финслеровым метрическим тензором. В силу теорем Эйлера об однородных функциях

$$F^2(x, y) = g_{ij}(x, y) y^i y^j, \quad y_i = \frac{\partial F^2(x, y)}{\partial y^i},$$

где, по определению, $y_i = g_{ij}(x, y) y^j$. Эти формулы представляют собой непосредственное обобщение своих римановых аналогов, вытекающее из



одного лишь условия однородности. Ф. г. сводится к римановой в случае, когда метрический тензор $g_{ij}(x, y)$ предполагается не зависящим от y^n . Последнее условие можно записать в виде $C_{ijk} = 0$, где

$$C_{ijk}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}(x, y)}{\partial y^k} \equiv \frac{1}{4} \frac{\partial^3 F^2(x, y)}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k}$$

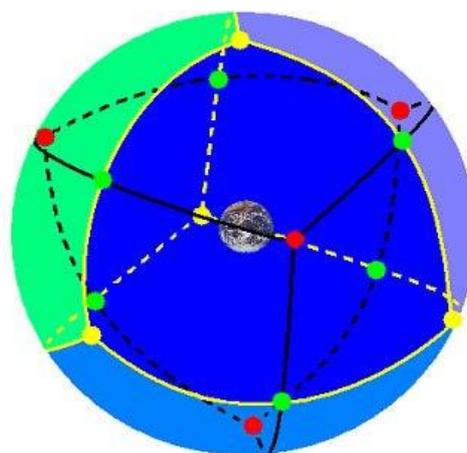
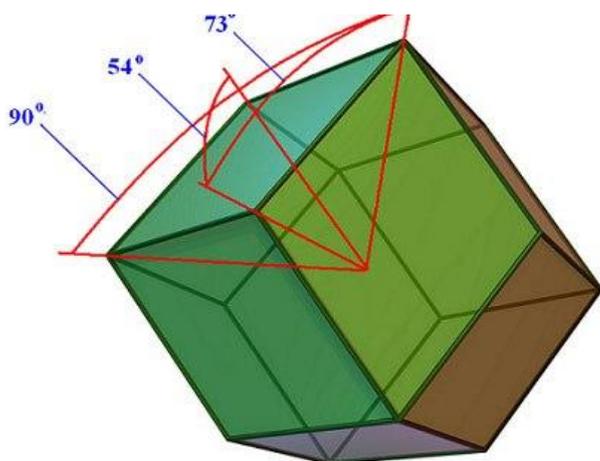
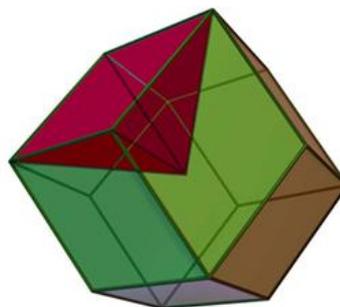
наз. картановским тензором кручения. Он удовлетворяет тождеству $y^i C_{ijk} = 0$. Все финслеровы соотношения переходят в свои римановы аналоги при обращении в нуль тензора C_{ijk} . Символы Кристоффеля $\gamma_{ij}^k(x, y)$, построенные по финслерову метрическому тензору по той же формуле, что и в римановой геометрии, не подчиняются закону преобразования коэффициентов связности. Тем не менее из первых производных от финслерова метрического тензора можно построить коэффициенты связности такие, что (как и в римановой геометрии) ковариантная производная от метрического тензора будет обращаться в нуль. Они наз. картановскими коэффициентами связности и имеют вид

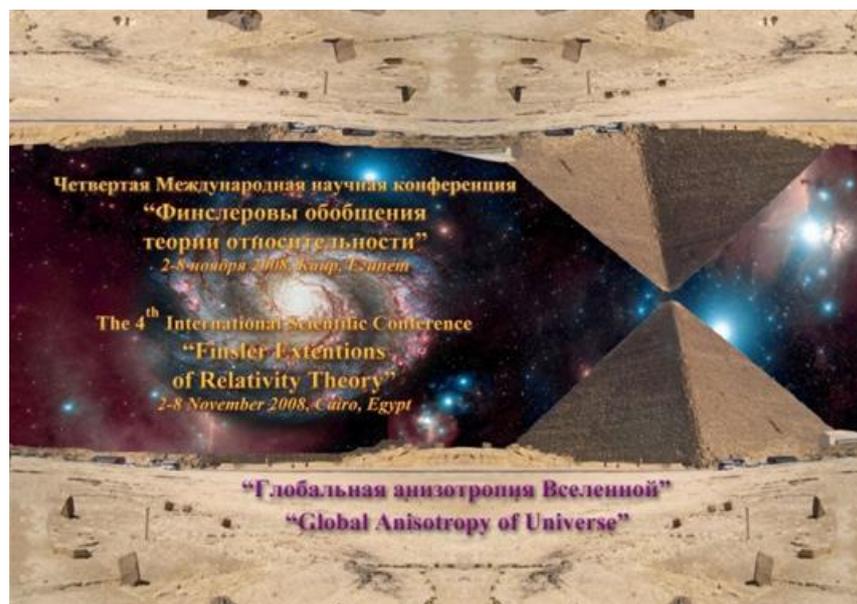
$$\Gamma_{ij}^k(x, y) = \gamma_{ij}^k - C_{in}^k G_j^n - C_{jn}^k G_i^n + C_{ijn} G^{kn}$$

где

$$G_j^n = -2C_{jm}^n G^m + y^m \gamma_{mj}^n, 2G^m = y^n y^k \gamma_{nk}^m.$$

Из коммутаторов различных ковариантных производных находятся выражения финслеровых тензоров кривизны.





В каждом касательном пространстве M_x финслерова метрич. функция определяет $(N-1)$ -мерную гиперповерхность $F(x, y) = 1$ (где x^i рассматриваются фиксированными, y^i - произвольными), наз. индикатрисой. Индикатриса образуется концами единичных касательных векторов $l^i = y^i / F(x, y)$, опирающихся на точку x^i . Фундаментальное значение понятия индикатрисы видно уже из того, что вследствие однородности финслеровой метрической функции индикатриса в точке x^i однозначно определяет вид финслеровой метрической функции $F(x, y)$ в этой точке x^i . В римановом случае индикатрисой является сфера. Вообще говоря, индикатрисой финслерова пространства может быть поверхность довольно общего вида. Финслеров метрический тензор индуцирует на индикатрисе риманову метрику, превращая ее в риманово пространство. При каждом фиксированном x финслеровой метрический тензор является римановым по переменным y . Пара $M_x^* g_{ij}(x, y)$ где x^n фиксированы, а y^n переменны, наз. касательным римановым пространством в точке x (евклидово пространство в случае римановой геометрии); риманов тензор кривизны этого пространства сводится к выражению $C_{mh}^j C_{ik}^m - C_{mk}^j C_{ih}^m$. Индикатриса является гиперповерхностью, вложенной в касательное риманово пространство. Ближайшим примером финслеровой метрической функции является корень f -й степени из формы f -го порядка.

Пусть $f(x)$ и $r^A(x)$ -действительные скалярные функции класса C^3 , в каждой точке x удовлетворяющие условиям $f \neq 0, 1, 2$ и $r^A \neq 0, aS_i^A(x)$ суть N линейно независимых действительных ковариантных векторных полей класса C^3 , $A = 1, 2, \dots, N$. Тогда для

$$F_1(x, y) = \left[\sum_{A=1}^N r^A(x) (S_m^A(x) y^m) f(x) \right]^{1/2} f(x)$$

кривизна индикатрисы постоянна и равна $f^2/4(f-1)$, а для

$$F_2(x, y) = \prod_{A=1}^N (S^A(x) y^m) r^A(x), \sum_{A=1}^N r^A(x) = 1$$

тензор кривизны индикатрисы равен нулю. Определитель финслерова метрического тензора не зависит от y^i тогда и только тогда, когда $C_i = 0$, где $C_i = C_{in}^n$. Если финслерово пространство положительно определено и индикатриса- выпуклая поверхность, то.

Функция F_2 -единственный известный (1984) пример финслеровой метрической функции, для которой $C_i = 0$ (не считая собственно риманова случая).

Можно выделять специальные типы финслеровых пространств, постулируя какой-либо специальный вид характерных финслеровых тензоров. Если основное многообразие M допускает поле реперов глобально, а $F^*(y^A)$ – метрическая функция какого-либо пространства Минковского, то на M можно ввести финслерову метрическую функцию:

$$F(x^n, y^i) = F^*(S_i^A(x^n) y^i)$$

В этом случае финслерово пространство и метрическая функция называется 1-формовыми. Функции F_1 и F_2 являются 1-формовыми, когда f и f^A константы. Пространства 1-формовые можно считать наиболее простыми с точки зрения способа вхождения переменных x^n в метрическую функцию. Финслерово пространство наз. C - сводимым, если оно не является римановым, $N > 2$ и картановский тензор кручения представляется в виде

$$C_{ijm} = \frac{1}{N+1} (h_{ij} C_m + h_{jm} C_i + h_{mi} C_j),$$

где $h_{ij} = g_{ij} - l_i l_j$. Пространства S - сводимые могут иметь метрической функции только двух типов: либо метрическую функцию Кробиной либо метрическую функцию Рандерса $F_4 = \alpha + \beta$, где $\beta = b_i(x)y^i$, $\alpha^2 = a_{ij}y^i y^j$, $b_i(x)$ -ковариантное векторное поле, $a_{ij}(x)$ - риманов метрический. тензор. Напр., функция Лагранжа пробного электрического заряда в гравитационном и электромагнитном полях является функцией Рандерса. Финслеров метрический. тензор, отвечающий функции F_2 , имеет сигнатуру $(+ - - \dots)$, что делает ее интересной для развития финслерова обобщения общей теории относительности; такая сигнатура встречается и в случае выбора метрической функций вида F_1 . Такое обобщение можно основывать на концепции соприкосновения риманова пространства финслеровым, согласно к-рой каждому векторному полю $y^i(x)$ финслеров метрический тензор ставит в соответствие т. н. соприкасающийся Риманом метрический тензор $g_{mn}(x, y(x))$. Выделяя зависящие только от x^i тензорные поля $z^A(x)$, из которых строится финслерова метрическая функция согласно $F(x, y) = v(z^A(x), y^i)$. где v - скалярная функция, можно трактовать z^A как собственно гравитационные полевые переменные. Финслерова геометризация пространства-времени дает также возможность развивать теорию физических полей с различными внутренними симметриями, опираясь на понятие группы преобразований касательных векторов y^i , оставляющих инвариантной финслеру метрическую функцию.

Финслерова геометрия является геометрией метрических пространств, обладающих внутренней локальной анизотропией, т.е. пространств, метрика которых не сводится к квадратичной форме дифференциалов координат. Одним из наиболее перспективных кандидатов на замену пространства Минковского является *четырёхмерное финслерово пространство* с метрикой Бервальда-Моора. Тесное родство двух пространств можно видеть уже здесь, особенно ярко оно проявляется в так называемом изотропном базисе, все четыре вектора которого лежат на световом конусе.

Ортогональный базис. Пространство - времени Минковского:

$$S^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Пространство - времени Бервальда-Моора:

$$S^4 = c^4 t^4 + x^4 + y^4 + z^4 - 2c^2 t^2 (x^2 + y^2 + z^2) - 2(x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2) + 8ctxyz.$$

Изотропик базис. Пространство - времени Минковского:

$$S^2 = h_1 h_2 + h_1 h_3 + h_1 h_4 + h_2 h_3 + h_2 h_4 + h_3 h_4$$

Пространство - времени Бервальда-Моора:

$$S^4 = h_1 h_2 h_3 h_4$$

Произвольный базис. Пространство - времени Минковского:

$$dS^2 = g_{ij}(x) dx^i dx^j$$

Пространство - времени Бервальда-Моора:

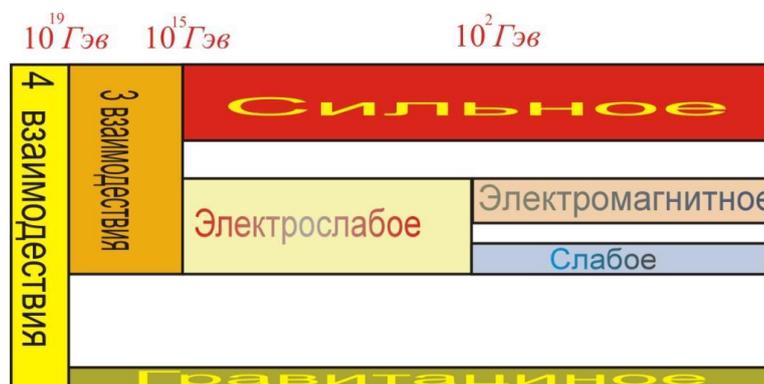
$$dS^4 = g_{ijkl}(x) dx^i dx^j dx^k dx^l$$

ГЛАВА II. ТЕОРИЯ ПОЛЯ В ФИНСЛЕРОВОМ ГЕОМЕТРИИ

О геометрзация физических свойств материи

В материальном мире реализуются многомерные пространства. С каждой физической системой и с каждым процессом ассоциируются соответствующей структуры пространства. **Введение многомерных пространств возможно во всех разделах физики.** Даже в классической механике вводятся многомерные пространства с искривлением и закручиванием. С позиций геометрии изучение физических систем и процессов сводится к изучению пространства, ассоциируемого с данными системами и процессами. В этом случае геометрии выступает в качестве геометрического метода.

Между геометрическими связностями и физическими законами существует соответствие. Если для какой-то физической системы между физическими законами и геометрическими связностями (метрическим тензором) установлено соответствие, то для данной физической системы ставится в соответствие модель геометрического пространства»



В земных условиях, на Солнце и звездах, в межзвездных области имеются системы и процессы, пространственные отношения которых совпадают с пространственными отношениями геометрии *Евклида*, *Римана*, *Картана*, *Кавагучи*, *Финслера*, линейных элементов высшего порядка и более общих пространств - пространств тензорных опорных элементов, спиновых пространств и спиновых пространств с тензорным опорным объектом.

Геометрическое моделирование связывается с введением геометрических образов, идей, операций, пространственных форм и отношений, а при рассмотрении отдельных вопросов сохраняется и сама геометрическая форма изложения.

На количественном уровне физика и геометрия решают одну задачу: по известному значению физической величины (дифференциально-геометрического объекта) в одной точке требуется определить значение этой же физической величины (дифференциально-геометрического объекта) в бесконечно близкой к ней точке или вдоль некоторой траектории.

Тогда какое же отличие на этом количественном уровне физики от геометрии?

Из всего многообразия изменений дифференциально-геометрического объекта (величин) физика выделяет только те изменения, которые отвечают эксперименту, опыту.

Геометрическую основу всех физических теорий составляют переносы тензорных и спинорных полей в соответствующих пространствах.

На переносах тензорных и спинорных полей основываются дифференциальные уравнения скалярного, спинорного, векторного и более высокого ранга тензорных полей, которые в физике описывают те или иные процессы.

Геометрия позволяет учесть все члены, отражающие взаимодействие в рамках данной геометрической модели, и исключить члены, которые выходят за рамки данной модели.

Одной ковариантной записью не обойтись. Имеется еще и антисимметричная часть связностей (кручение). Эту часть также необходимо учитывать. Например, в теории единого поля *В.Гейзенберга* нелинейные члены *Гейзенберга* получили интерпретацию с привлечением антисимметричной части связностей пространства внутренних степеней свободы (*В. И. Родичев*).[5]

Физические законы, которые связываются с кручением, постулируются. Так как метрическая часть также связывается с законами физики, то данные законы могут быть введены, поскольку метрическая часть связностей меняется не по тензорному закону, и в теорию может быть введена, например, теоретико-групповым методом дифференциальной геометрии. Здесь постулируются более фундаментальные принципы.

Соблюдение первичных геометрических положений делает дальнейшие математические действия строго запрограммированными и ограниченными рамками соответствующей геометрии, а именно, последовательно продолжение уравнения для метрической функции (под этим понимается внешнее дифференцирование и разворачивание полученных уравнений по лемме *Картана*) охватывает вектор (первое дифференциальное продолжение), связности (третье дифференциальное продолжение) и т.д.

Без преувеличения можно утверждать, что в основании современной фундаментальной теоретической физики лежит теория пространства-времени. Главные достижения физики XX века: специальная и общая теории относительности и квантовая механика самым тесным образом были связаны с изменениями представлений о свойствах пространства и времени. В настоящее время все более крепнет убеждение, что, с одной стороны, геометрия реального пространства-времени определяется физикой, а, с другой стороны, основания физики должны описываться в терминах обобщенной геометрии. Так, Дж. Уилер утверждает: «Физика есть геометрия», а Ю. И. Манин считает, что «Геометрия есть консервант скоропортящихся физических идей». Дальнейший прогресс в физике следует ожидать на пути очередного пересмотра представлений о природе физического пространства-времени.

В большинстве исследований физические теории строятся на фоне так или иначе заданного пространства-времени (плоского, искривленного, закрученного и т.д.). В связи с этим следует отдавать себе отчет в том, какой с самого начала постулируется комплекс понятий и закономерностей. Это

лучше всего можно представить из работ по аксиоматике геометрии и теории относительности. Можно указать работы по этому вопросу Д. Гильберта, А. Робба, А. Д. Александрова, Р. И. Пименова, Р. Моулда и многих других, в том числе и автора этой работы. Из этих исследований видно, что современные представления о пространстве и времени описываются сложным комплексом понятий (примитивов) и аксиом. Последних насчитывается более двух десятков. Их можно разбить на группы: аксиомы порядка, метрические аксиомы, топологические аксиомы, из которых выделим аксиому размерности. Имеются также аксиомы допустимых координатных систем, аксиомы связи геометрии и физических свойств материи. Ко всему еще нужно добавить неявное задание аксиоматики арифметики.

Предпринимались многочисленные исследования геометрий с видоизмененными аксиомами или с отказом от некоторых из них. Были и целенаправленные исследования, - обсуждался вопрос, от каких нужно отказаться аксиом (или какие нужно обобщить), чтобы в рамках новой геометрии решить некоторые физические проблемы (теснее связать квантовую теорию с геометрией, геометризовать те или иные физические свойства материи, преодолеть трудности с расходимостями и т.д.).

Опыт таких исследований показал, что, во-первых, можно построить бесконечное число аксиоматик одной и той же теории. Например, аксиомы одной аксиоматики можно считать теоремами другой и наоборот. Выбор аксиоматики должен фиксироваться преследуемой при ее построении целью. Во-вторых, как правило, аксиоматика лишь упорядочивает уже сложившуюся систему представлений. По образному выражению А.Л. Зельманова: ``Аксиоматика не шевелюра, а лишь только прическа". На этом пути можно осознать уже достигнутое, но маловероятно выйти на качественно иные представления. Последние обычно связаны с озарением, с логически трудно описываемыми скачками в сознании.

2.1 Скалярное поле

Для единственного скалярного поля $\varphi(\mathbf{x})$ наиболее простое представление тензора $\mathbf{h}_{ij}(\mathbf{x})$ имеет вид

$$\mathbf{h}_{ij} \equiv \mathbf{h}_{ij}^{\varphi} = \pm \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \quad (2.1.1)$$

Поэтому

$$L_{\varphi} = \overline{-\det(\mathbf{g}_{ij})} = \overline{1 \pm L_1} \cong 1 + \frac{1}{2} L_1 - \frac{1}{8} L_1^2, \quad (2.1.2)$$

Где

$$L_1 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^0}\right)^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}{}^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}{}^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial x^3}{}^2. \quad (2.1.3)$$

В первом приближении используя лагранжиан L_1 получим следующее полевое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^0 \partial x^0} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^3 \partial x^3} = 0 \quad (2.1.4)$$

Которые являются волновыми уравнением. Стационарное поле, зависящее только от радиуса

$$r = \overline{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} \quad (2.1.5)$$

Будет соответственно удовлетворять уравнению

$$\frac{d}{dr} r^2 \frac{d\varphi}{dr} = 0, \quad (2.1.6)$$

Интегрируя которое, получим

$$\frac{d\varphi}{dr} = -C_1 \frac{1}{r^2} \Rightarrow \varphi r = C_0 + C_1 \frac{1}{r}. \quad (2.1.7)$$

Во втором приближении надо использовать лагранжиан $(L_1 - \frac{1}{4}L_1^2)$, при этом получаем уравнение поля во втором приближение:

$$g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\pm 1 - \frac{1}{2}L_1 \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} = 0, \quad (2.1.8)$$

Это уравнение уже являются нелинейным.

Точное уравнения поля для тензора h_{ij} в (2.1.1) запишется следующим образом:

$$g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x^j}}{1 \pm L_1} = 0 \quad (2.1.9)$$

В этом случае стационарное поле, зависящее только от радиуса, должно соответственно удовлетворять уравнению

$$\frac{d}{dr} r^2 \frac{\frac{d\varphi}{dr}}{1 \mp \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2} = 0 \quad (2.1.10)$$

Интегрируя которое, получим

$$\frac{d\varphi}{dr} = - \frac{C_1}{r^4 \pm C_1^2} \Rightarrow \varphi(r) = C_0 + \int_r^\infty \frac{C_1}{r^4 \pm C_1^2} \quad (2.1.11)$$

Поле с верхним знаком и поле с нижним знаком качественно различаются: верхний знак («+» в формуле (2.1.1)) дает поле конечное без особенностей во всем пространстве, нижний знак («-» в формуле (2.1.1)) дает поле определенное везде, кроме сферической области

$$0 \leq r \leq \sqrt{C_1}, \quad (2.1.12)$$

В которой поле отсутствует, причем при

$$r > \overline{C_1}, \quad r \rightarrow \overline{C_1} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dr} \rightarrow -C_1 \cdot \infty \quad (2.1.13)$$

В тоже время на бесконечности ($r \rightarrow \infty$) оба решения φ_{\pm} ведут себя как решение (2.1.7) волнового уравнения.

Зная лагранжиан можно записать тензор энергии импульса T_j^i для полученных решений и попытаться вычислить энергию системы, деленую на c (скорость света):

$$(3) \quad P_0 = \text{const} \quad T_0^0 dV. \quad (2.1.14)$$

Для полученных стационарных сферически симметричных решений имеем

$$T_0^0 = - \frac{r^2}{r^4 \pm C_1^2}, \quad (2.1.15)$$

Поэтому и для верхнего, и для нижнего знака $P_0 = \infty$.

Метрический тензор (2.1.1), простейший способ «включения» гравитационного поля в пространстве Минковского - исходным плоском пространстве, не содержащем полей. Аддитивно добавляя еще несколько таких слагаемых как (2.1.1) в метрический тензор, мы сможем описывать все более сложные гравитационные поля с тензором $h_{ij} = h_{ij}^{(grav)}$. [6].

2.2 Векторное поле

В каждом классе векторов (например, перемещений, скоростей, сил, напряженностей магнитного поля) можно определить операции, известные как сложение векторов и умножение их на (действительные) скаляры, а также как скалярное умножение векторов. Классы векторов, встречающиеся

в геометрии и физике, чаще всего связаны с двух или трех- мерным евклидовым пространством.

Векторы любого класса допускают однозначное представление в виде перемещений (т. е. направленных отрезков) в геометрическом пространстве. Это представление сохраняет соответствие между суммами векторов, произведениями векторов.

В большинстве приложений векторы появляются как функции точки в геометрическом пространстве (вектор функции точки). Такие векторы как скорости и силы, обычно впервые определяются на геометрическом языке как «величины, обладающие длиной и направлением», или, несколько точнее, как величины, которые могут быть представлены в виде направленных отрезков, складывающихся по правилу «параллелограмма». Такой геометрический подход, общий для большинства элементарных курсов, использован при введении основных операций над векторами.

Векторное поле есть векторная функция точки $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x, y, z)$ вместе с областью его определения. Векторные линии (линии тока) в каждой точке (\mathbf{r}) имеют направление вектора поля $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ и определяются дифференциальными уравнениями

$$d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dx}{F_x(x, y, z)} = \frac{dy}{F_y(x, y, z)} = \frac{dz}{F_z(x, y, z)}$$

Векторное поле $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ может быть представлено геометрически своими векторными линиями, относительная плотность которых в каждой точке (\mathbf{r}) пропорциональна модулю $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. [7].

Рассмотрим ковариантное векторное поле

Для того чтобы один раз ковариантного поля $A_i(x)$ построить симметрический дважды ковариантный тензор $h_{ij}(x)$, не прибегая к

использованию объектов связности, вспомним, что альтернированная частная производная от тензора есть тензор,

$$F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial A_i} - \frac{\partial A_i}{\partial A_j}, \quad (2.2.1)$$

Но антисимметрический. Построим на основе тензора F_{ij} симметрический тензор. Для этого в начале запишем скаляр

$$L_A = g^{ij} g^{km} F_{ik} F_{jm} = 2g^{ij} g^{km} \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \frac{\partial A_m}{\partial x^j} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \frac{\partial A_j}{\partial x^m}, \quad (2.2.2)$$

Откуда следует выражения для двух симметрических тензоров

$$h_{ij}^{(1)} = g^{km} \left(2 \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \frac{\partial A_m}{\partial x^j} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \frac{\partial A_j}{\partial x^m} - \frac{\partial A_k}{\partial x^j} \frac{\partial A_i}{\partial x^m} \right), \quad (2.2.3)$$

$$h_{ij}^{(2)} = g^{km} \left(2 \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \frac{\partial A_j}{\partial x^m} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \frac{\partial A_m}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^k} \frac{\partial A_m}{\partial x^i} \right), \quad (2.2.4)$$

Заметим, что не только F_{ij} и L_A , но и тензоры $h_{ij}^{(1)}$, $h_{ij}^{(2)}$ являются градиентно инвариантными, то есть не изменяются при преобразовании

$$A_i \rightarrow A_i + \frac{\partial f}{\partial x^i} x \quad (2.2.5)$$

Где $f(x)$ - произвольная скалярная функция.

2.3 Кубическая метрическая функция

С точки зрения степени алгебраической формы логически простейшей возможностью обобщения риманова пространства является финслерово пространство с кубической метрической функцией.

$$F = f^{\frac{1}{3}}, \quad (2.3.1)$$

Где

$$f = a_{ijk} x y^i y^j y^k \quad (2.3.2)$$

Кубическая форма и $a_{ijk} x$ — вообще говоря, произвольный (достаточно гладкий) симметричный ковариантный тензор 3-го ранга.

Очевидно, что метрическая функция F финслерова пространства является кубической тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial^4 F^3}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k \partial y^h} = 0 \quad (2.3.3)$$

Используя определение T —тензора, и условие (2.3.3) можно представить в виде

$$2FT_{ijkh} + 2F^2 C_{ijr} C_{kh}^r + C_{ikr} C_{jh}^r + C_{ihr} C_{jk}^r + \\ + h_{ij} h_{hk} + h_{ik} h_{jh} + h_{jk} h_{ih} = 0. \quad (2.3.4)$$

В двумерном случае, который только и является предметом рассмотрения в настоящей главе, T -, h — и C —тензоры имеют вид

$$FT_{ijkh} = J m_i m_j m_k m_h,$$

$$g_{ij} - l_i l_j = h_{ij} = q m_i m_j,$$

$$FC_{ijk} = J m_i m_j m_k,$$

Соответственно, так что условие (2.3.4) эквивалентно условию

$$2J_\varphi + 6qJ^2 + 3 = 0^* \quad (2.3.5)$$

Характеристическое уравнение (2.3.5) впервые приведено в работе Вагнера.

Характеристическое уравнение (2.3.5) нетрудно также получить, не привлекая понятие T –тензора. Так, выполняя первое дифференцирование в (3), получаем

$$\frac{\partial^4 F^3}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k \partial y^h} = \frac{\partial^3 3F^2 l_h}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k}. \quad (2.3.6)$$

Затем с помощью правил

$$\begin{aligned} \frac{\partial l^i}{\partial \varphi} &= qm^i; & \frac{\partial l_i}{\partial \varphi} &= qm_i; & \frac{\partial F}{\partial \varphi} &= 0 \\ \frac{\partial m^i}{\partial \varphi} &= -l^i - qJm^i; & \frac{\partial m_i}{\partial \varphi} &= -l_i + qJm_i. \end{aligned}$$

И представления

$$FC_{ijk} = Jm_i m_j m_k,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 3F^2 l_h}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k} &= \frac{3\partial^2 F l_k l_h + g_{kh}}{\partial y^i \partial y^j} \equiv \\ &\equiv \frac{3\partial l_j l_k l_h + g_{kh} + qm_k m_j l_h + ql_k m_j m_h + 2Jm_k m_j m_h}{\partial y^i}. \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

И, наконец, еще раз используя при выполнении последнего дифференцирования вышеупомянутые формулы, приходим к

$$\dots = 3F^{-1}m_i m_j m_k m_h 2J_\varphi + 6qJ^2 + 3, \quad (2.3.8)$$

Откуда следует уравнение (2.3.5)

Итак, двумерное финслерово пространство является пространством с кубической метрической функцией тогда и только тогда, когда главный скаляр J удовлетворяет условию (2.3.5). $J=0$, очевидно, не удовлетворяет уравнению (2.3.5), так что пространство с кубической метрической функцией не может быть римановым.[6]

Уравнение (2.3.5) имеет вид

$$J_\varphi = f J, \quad (2.3.9)$$

2.4 Метрическая функция, определяемая формой четвертого порядка.

Изучение финслеровых пространств с метрической функцией

$$F = f^{\frac{1}{4}} \quad (2.4.1)$$

Определяемой формой четвертого порядка

$$f = a_{ijkl} x^i y^j y^k y^l, \quad (2.4.2)$$

Где a_{ijkl} — достаточно гладкий симметричный ковариантный тензор 4-го ранга, естественно является формально более трудной проблемой, чем изучение пространств с кубической метрической функцией.

Поэтому, следуя в основном работе Моора [115], ограничимся выводом ряда общих соотношений и рассмотрением простейших случаев форм (2.4.2). Затем дадим критерий сводимости пространства с метрической функцией (2.4.1)-(2.4.2) к пространству Минковского, фактически содержащийся в работе Либера [114] и обобщающий предложение.

Начнем с вывода аналога характеристического уравнения.

Для этого запишем условие

$$\frac{\partial^5 F^4}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k \partial y^l \partial y^m} = 0, \quad (2.4.3)$$

Очевидно, равносильное определению (2.4.1)-(2.4.2). Поскольку левая часть условия (2.4.3) является однородной функцией степени -1 по y^m , то при раскрытии условия (2.4.3) можно отбрасывать все члены, пропорциональные касательным векторам l^n . Учитывая это замечание и используя представление, легко переписать (2.4.3) в виде

$$F^{-1}18qJm_im_jm_km_hm_m + \frac{\partial^2 F^2 C_{mkh}}{\partial y^i \partial y^j} = 0 \quad (2.4.4)$$

Или, после применения соотношений

$$g_{iklj} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{G_j^n \partial g_{ik}}{\partial y^n} - \Gamma_{ikj} - \Gamma_{kij}$$

$$l_{ij}^k = y_{ij}^k = F_{ij} = 0.$$

$$J_{\varphi\varphi} + 10qJ_{\varphi J} + 12J^3 + 16Jq = 0. \quad (2.4.5)$$

Итак, двумерное финслерово пространство является пространством с метрической функцией, определяемой формой четвертого порядка тогда и только тогда, когда главный скаляр J удовлетворяет уравнению (2.4.5).

Полная система алгебраических комитатов бинарной формы четвертого порядка состоит из самой формы, двух ковариантов [6]

$$H_4 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{144} \det \frac{\partial f}{\partial y^i \partial y^j} \equiv \frac{1}{2} A_{ijkh} a_{ij}^e{}^ps a_{pskh} y^i y^j y^k y^h \stackrel{\text{def}}{=} \\ \stackrel{\text{def}}{=} H_4{}_{ijkh} y^i y^j y^k y^h, \quad (2.4.6)$$

$$T_4 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{6} \frac{\partial f}{\partial y^1} \frac{\partial H_4}{\partial y^2} - \frac{\partial f}{\partial y^2} \frac{\partial H_4}{\partial y^1} \equiv -2A_{ijkhmn} a_{ijk}^e{}^p H_4{}_{phmn} * \\ * y^i y^j y^k y^h y^m y^n \stackrel{\text{def}}{=} T_4{}_{ijkhmn} y^i y^j y^k y^h y^m y^n, \quad (2.4.7)$$

И двух так называемых инвариантов i и j :

$$i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} a^e{}^{ijkh} a_{ijkh} \equiv a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3 a_2^2, \quad (2.4.8)$$

$$j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{6} a_{mn}^e{}^{ij} a_{ij}^e{}^{kh} a_{kh}^e{}^{mn} \equiv \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}. \quad (2.4.9)$$

Здесь использовано правило матрицы и поднимая индексов с помощью кососимметричного объекта $a_i(x)$ обозначены функции компонент тензора $a_{ijkh} x$, соответствующие представлению бинарной формы (2) в виде

$$f = a_0 x y^1 4 + 4a_1(x)(y^1)^3 y^2 + 6a_2(x)(y^1 y^2)^2 + 4a_3 x y^1 (y^2)^3 + a_4 x (y^2)^4 \quad (2.4.10)$$

$A i_1 \dots i_n$ – оператор симметризации, т.е. сумма по всем перестановкам индексов i_1, \dots, i_n , деления на $n!$ Функция

$$D_4 = i^3 - 27j^2 \quad (2.4.11)$$

Есть дискриминант формы четвертого порядка, так что равенство $D_4 = 0$ является необходимым и достаточным условием того, что среди линейных множителей, на которые разлагается форма (2.4.10), есть совпадающие.

Как и в случае кубической метрической функции, детерминант g метрического тензора и главный скаляр J пространства с метрической функцией (2.4.2) выражаются через соответствующие комитаты. Действительно, подстановка (2.4.1) в (2.4.10) дает представление

$$g = \frac{1}{16} (y^2)^{-2} f^{-1} \frac{4f \partial^2 f}{\partial y^1 \partial y^1} - 3 \frac{\partial f}{\partial y^1}^2 \quad (2.4.12)$$

Или, если учесть свойства однородности

$$4f = \frac{y^1 \partial f}{\partial y^1} + \frac{y^2 \partial f}{\partial y^2}; \quad (2.4.13)$$

$$\frac{3\partial f}{\partial y^1} = \frac{y^1 \partial^2 f}{\partial y^1 \partial y^1} + \frac{y^2 \partial^2 f}{\partial y^1 \partial y^2}; \quad (2.4.14)$$

$$\frac{3\partial f}{\partial y^2} = \frac{y^1 \partial^2 f}{\partial y^1 \partial y^2} + \frac{y^2 \partial^2 f}{\partial y^2 \partial y^2}, \quad (2.4.15)$$

Представление

$$g = 3f^{-1}H_4 \quad (2.4.16)$$

Подстановка которого в (2.4.16) в свою очередь дает

$$J = \frac{3T_4}{3 H_4^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.4.17)$$

В отличие от характеристического уравнения (2.4.5) для кубической метрической функции, уравнение (2.4.5) допускает решение $J = 0$, т.е. пространство с метрической функцией (2.4.1) может быть римановым. Поскольку в римановом случае детерминант g зависит только от координат x^i основного многообразия, то из (2.4.16) следует, что в римановом случае гессиан H_4 представим в виде

$$H_4 = B x f, \quad (2.4.18)$$

Где $B x$ — функция только координат x^i . Обратно, если выполняется условие (2.4.18), то из (2.4.7) следует $I_4 = 0$, так что равенство (2.4.17) сразу приводит к $J = 0$. Таким образом, двумерное пространство с метрической функцией (2.4.1) является римановым тогда и только тогда, когда гессиан H_4 удовлетворяет условию (2.4.18) [6]

2.5 Векторные понятия финслеровой геометрии

Пусть на N -мерном действительном многообразии M задана неотрицательная скалярная функция $F(x,y)$, зависящая от точек $x^i \in M$ и от контравариантных векторов $y^i \in M_x$, где M_x обозначает пространство, касательное к M в точке x ; $i, j, k, \dots = 1, 2, \dots, N$. Подчиним функцию $F(x, y)$ следующим условиям:

- 1) Функция $F(x, y)$ принадлежит по меньшей мере классу гладкости C^3 по x , что, в свою очередь, подразумевает, что основное многообразие M само принадлежит классу C^3 .
- 2) В каждом M_x существует такая область M_x^* , что, во-первых, M_x^* являются конической в том смысле, что если M_x^* содержит некоторый вектор y_1^i , то M_x^* содержит и любой другой вектор, коллинеарный y_1^i , и, во вторых, функция $F(x, y)$ принадлежит по меньшей мере классу C^5 по всем ненулевым векторам $y^i \in M_x^*$. Ненулевые векторы y^i из M_x^* будут называться допустимыми. Кроме того, предполагается, что для любого допустимого y^i справедливы неравенства $F(x, y) > 0$ и

$$\det \frac{\partial^2 F^2(x, y)}{\partial y^i \partial y^j} \neq 0 \quad (2.5.1)$$

наконец, функция $F(x, y)$ должна быть положительно однородной степени I по y^i , т.е.

$$F(x, ky) = kF(x, y) \quad (2.5.2)$$

При любом фиксированном $k > 0$ и для всех $y^i \in M_x^*$. При этих условиях тройка $(M, M_x^*, F(x, y))$ называется N -мерным финслеровым пространством, а $F(x, y)$ — финслеровой метрической функцией.

Если финслерово пространство допускает такую координатную систему x^i , что F не зависит от x^i , то финслерово пространство называется пространством Минковского.

Для общности мы воздерживаемся от наложения условия положительной однородности на квадратичную форму

$$\frac{Z^i Z^j \partial^2 F^2(x, y)}{\partial y^i \partial y^j},$$

Тем самым допуская возможность того, что рассматриваемые финслеровы пространства будут индефинитными. Многие финслеровы соотношения основываются на тождествах, вытекающих из условия однородности (2.5.2). Для вывода таких тождеств рассмотрим любую функцию $Z(x, y)$, являющуюся дифференцируемой и положительно однородной степени r по y^r , т.е. $Z(x, ky) = k^r Z(x, y)$, где степень r может быть любым целым числом. Дифференцируя последнее равенство по k и затем полагая $k = 1$, находим, что

$$Z(x, ky) = k^r Z(x, y) \text{ влечет за собой } \frac{y^i \partial Z(x, y)}{\partial y^i} = r Z(x, y) \quad (2.5.3)$$

Утверждение (2.5.3) известно по литературе под названием теорема Эйлера об однородных функциях.

Применение (2.5.3) к F^2 дает

$$F^2(x, y) = g_{ij}(x, y) y^i y^j, \quad (2.5.4)$$

где

$$g_{ij}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(x, y)}{\partial y^i \partial y^j} \quad (2.5.5)$$

Называется финслеровым метрическим тензором. Вводя ковариантный касательный вектор

$$y_i = g_{ij} x, y y^j \quad 2.5.6$$

Из определения (2.5.5) и теорема (2.5.3) при $r = I$, получаем

$$y_i = \frac{F x, y \partial F x, y}{\partial y^i} \quad (2.5.7)$$

Тогда единичный касательный вектор

$$l_i = \frac{y_i}{F x, y} \quad 2.5.8$$

Будет равно просто

$$l_i = \frac{\partial F x, y}{\partial y^i} \quad 2.5.9$$

Ввиду (2.5.7) из определений (2.5.5) и (2.5.6) вытекает тождество

$$g_{ij} x, y = \frac{\partial y_i}{\partial y^j} \quad 2.5.10$$

Которое полезно помнить, тогда как

$$\frac{\partial l_i}{\partial y^j} = \frac{h_{ij} x, y}{F x, y}, \quad (2.5.11)$$

Где

$$h_{ij} x, y = g_{ij} x, y - l_i x, y l_j x, y \quad 2.5.12$$

Так называемый угловой метрический тензор. Он обладает свойством

$$y^i h_{ij} = 0; \quad g^{ij} h_{ij} = N - 1 \quad 2.5.13$$

Как следствие (2.5.6) и $l^i l_i = 1$. Формулы (2.5.4) - (2.5.13) представляют собой непосредственное обобщение хорошо известных римановых аналогов, причем это обобщение фактически являются следствием условия однородности (2.5.2).

Финслерова геометрия, очевидно, сводится к римановой в том случае, когда метрический тензор (2.5.5) не зависит от y^i , что записывается в виде условия $C_{ijk} = 0$ с помощью тензора [8]

$$C_{ijk} x, y = \frac{1}{2\partial g_{ij} x, y} \partial y^k \quad 2.5.14$$

Который называется Картановским тензором кручения. Он – тензор, ибо дифференцирование тензора по векторному аргументу, безусловно, снова дает тензор (в отличие от дифференцирования по координатам x^i). Из (2.5.5) и (2.5.14) вытекает равенство

$$C_{ijk} x, y = \frac{1}{4} \frac{\partial^3 F^2}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k}, \quad (2.5.15)$$

Показывающее, что этот тензор симметричен по всеми своим индексам. Применяя теорему Эйлера при $r = 0$ к тензору (2.5.5), получаем

$$y^i C_{ijk} x, y = 0. \quad 2.5.16$$

Аналогично тензор

$$C_{ijkm} x, y = \frac{\partial C_{ijk} x, y}{\partial y^m} \quad (2.5.17)$$

Тоже симметричен по всем индексам и удовлетворяет тождеству

$$y^m C_{ijkm} x, y = -C_{ijk} \quad (2.5.18)$$

Как следствие теоремы (2.5.3) при $r = -1$. Финслеровы соотношения обобщают свои римановы прототипы присутствием в них тензора C_{ijk} и его производных. Требование (2.5.1) позволяет ввести контравариантный метрический тензор $g^{ij} x, y$, взаимный (2.5.5), обычным образом

$$g^{ij} x, y g_{jk} x, y = \delta_k^i \quad (2.5.19)$$

Обозначение δ_k^i используется для символа Кронекера.

Дифференцирование (19) по y^n дает

$$\frac{1}{2} \frac{\partial g^{ij}}{\partial y^n} = -C_n^{ij} \quad (2.5.20)$$

Индексы поднимаются и опускаются с помощью финслерова метрического тензора, например, $C_m^{ni} = C_{mkj} g^{nk} g^{ij}$, $C_{jkm}^i = C_{njkm} g^{in}$.

Геодезические финслерова пространства определяются совершенно аналогично тому,

как определяются римановы геодезические. Рассмотрим функционал

$$I_C = \int_{CP_1}^{P_2} F(x, dx), \quad (2.5.21)$$

Где интегрирование проводится вдоль кривой C соединяющей две фиксированные точки P_1 и P_2 многообразия M . Стационарные кривые вариационной задачи $\delta I_C = 0$ называются финслеровыми геодезическими.

Метрическая функция F дает естественную параметризацию кривых с помощью параметра S финслеровой длины дуги, так что

$$ds = F(x, dx). \quad (2.5.22)$$

Из однородности функции $F(x, y)$ вытекает, что функционал (2.5.21) параметрический инвариантен $F(x, \frac{dx}{ds}) ds = F(x, \frac{dx}{dt}) dt$ для любого параметра $t = t(s)$ при условии $\frac{dt}{ds} \neq 0$. Следовательно, для любого такого параметра t наша вариационная задача есть

$$\delta \int_{CP_1}^{P_2} F(x, \dot{x}) dx = 0 \quad (2.5.23)$$

где $x = \frac{dx}{dt}$. Из вариационного исчисления хорошо известно, что условие того, что кривая $x^i(t)$ является стационарной для вариационной задачи (2.5.23), имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F(x, x)}{\partial x^i} - \frac{\partial F(x, x)}{\partial x^i} = 0 \quad (2.5.24)$$

Другим словами, финслеровы геодезические удовлетворяют уравнениям (2.5.24), ассоциируемым с лагранжианом $F(x, x)$.

Уравнение (2.5.24) называется уравнением финслеровых геодезических. Его легко переписать следующим образом:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \gamma_{mn}^i(x, x) x^m x^n - \frac{x^i d \ln F(x, x)}{dt} = 0 \quad (2.5.25)$$

Где объект

$$\gamma_{mn}^i(x, y) = \frac{1}{2} g^{ik}(x, y) \left(\frac{\partial g_{mk}(x, y)}{\partial x^n} + \frac{\partial g_{nk}(x, y)}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{mn}(x, y)}{\partial x^k} \right) \quad (2.5.26)$$

Называется финслеровыми символами Кристоффеля. Для проверка представления (2.5.25) можно воспользоваться соотношением

$$g_{ij}(x, x) \frac{d^2 x^j}{dt^2} - \frac{x^j d \ln F(x, x)}{dt} + \frac{x^i x^n \partial g_{ij}(x, x)}{\partial x^n} - \frac{1}{2} \frac{x^m x^n \partial g_{mn}(x, x)}{\partial x^k} = 0 \quad (2.5.27)$$

Которое получается подстановкой равенства (2.5.4) с $y^i = x^i$ в (2.5.24). В случае, когда в качестве параметра t выбирается финслерова длина дуги (2.5.22) пользуясь обозначением

$$x'^i = \frac{dx^i}{ds} \quad 2.5.28$$

Найдем, что вектор x'^i имеет единичную длину

$$F(x, x') = 1 \quad (2.5.29)$$

Так что уравнение (2.5.25) примет более простой вид

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \gamma_{mn}^i(x, x') x'^m x'^n = 0 \quad (2.5.30)$$

Несмотря на тот факт, что финслеровы символы Кристоффеля строятся по тому же закону (2.5.26), что и собственно римановы, закон их преобразования при заменах $x^j = x^j(x)$ отличается от закона преобразования римановых символов Кристоффеля. Это отличие является следствием того факта, что финслеровы символы $\gamma_{mn}^i(x, y)$ зависят не только от точек x^i , но и от векторов y^i . Тем не менее ковариантная производная любого зависящего только от x^i тензора, например вида $X_i^k(x)$, легко может быть построена путем сравнения законов преобразования $\frac{\partial X_i^k}{\partial x^j}$ и $\gamma_{mn}^i(x, y)$. Это процедура ведет к следующему определению ковариантной производной:

$$X_i^k(x)_{;j} = \frac{\partial X_i^k}{\partial x^j} + \Gamma_{nj}^k(x, y) X_i^n(x) - \Gamma_{ij}^n(x, y) X_n^k(x); \quad (2.5.31)$$

$$\Gamma_{ij}^k(x, y) = \gamma_{ij}^k - C_{in}^k G_j^n - C_{ijn} G_m^n g^{mk}; \quad (2.5.32)$$

$$G_j^n(x, y) = -C_{jm}^n 2G^m + y^m \gamma_{mj}^n = y^m \Gamma_{jm}^n \equiv \frac{\partial G^n}{\partial y^j}; \quad (2.5.33)$$

$$2G^m(x, y) = y^n y^i \gamma_{ni}^m = y^n G_n^m = y^n y^i \Gamma_{ni}^m. \quad (2.5.34)$$

Коэффициенты (2.5.32) называется Картановскими коэффициентами связности, а (2.5.31)- δ -производной. Очевидно, что

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \quad (2.5.35)$$

Применение δ –производной к тензору, зависящему только от x^i , дает тензор, зависящий от обоих аргументов x^i и y^i . δ –процесс может быть расширен на дифференцирование тензоров, зависящих не только от точек x^i , но также и от контравариантного векторного поля $q^i x$. Частная производная δ – типа от такого тензора, скажем, вида $X_i^k(x, q)$, по x^j в направлении y^i определяется формулой

$$X_{ij}^k = \frac{\partial X_i^k(x, q)}{\partial x^j} + \frac{q_j^n \partial X_i^k(x, q)}{\partial q^n} + \Gamma_{nj}^k(x, y) X_i^n(x, q) - \Gamma_{ij}^n(x, y) X_n^k(x, q), \quad (2.5.36)$$

Где $q_j^n = \frac{\partial q^n}{\partial x^j}$. В частности, если тензор $X_i^k(x, q(x))$ дифференцируется в направлении поля $q^i x$, получаем

$$X_{ij}^k(x, q) = \frac{\partial X_i^k(x, q)}{\partial x^j} + \frac{q_j^n \partial X_i^k(x, q)}{\partial q^n} + \Gamma_{nj}^k(x, q) X_i^n(x, q) - \Gamma_{ij}^n(x, q) X_n^k(x, q). \quad (2.5.37)$$

Особенностью финслерова ковариантного дифференцирования является то обстоятельство, что δ –производная финслерова метрического тензора не равна нулю, как это показывает равенство

$$g_{ijk}(x, q) x^k = 2C_{ijm}(x, q) x^m q_{ik}^m, \quad (2.5.38)$$

Получаемое прямо применением определения (2.5.37) к $g_{ij}(x, q)$. Тем не менее вследствие тождества (2.5.16) из (2.5.38) вытекает соотношение

$$g_{ijk}(x, q) q^i = 0 \quad 2.5.39$$

Которое показывает, что (2.5.38) не препятствует вынесению финслерова метрического тензора из-под знака δ –производной поля $q^i x$, т.е.

$$q_{ni}(x, q) = q_i^m(x, q) g_{mn}(x, q). \quad (2.5.40)$$

При рассмотрении тензоров, являющихся функциями независимых аргументов x^i и y^i , в финслеровой геометрии важную роль играет так называемая картановская ковариантная производная, определяемая согласно [8]

$$X_i^k x, y \text{ }_{Ij} = \frac{\partial X_i^k x, y}{\partial x^j} - \frac{G_j^n x, y \partial X_i^k x, y}{\partial y^n} + \\ + \Gamma_{nk}^k x, y X_i^n x, y + \Gamma_{ij}^n x, y X_n^k x, y \quad (2.5.41)$$

Для любого зависящего от (x, y) тензора $X_i^k x, y$. В частности,

$$X_{Ij}^k = \frac{\partial X^k}{\partial x^j} - \frac{G_j^n \partial X^k}{\partial y^n} + \Gamma_{nj}^n X^n; \quad (2.5.42)$$

$$X_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x^j} - \frac{G_j^n \partial X_i}{\partial y^n} - \Gamma_{ij}^n X_n \quad (2.5.43)$$

Соответственно для контравариантного и ковариантного векторного полей и

$$Q_{Ij} = \frac{\partial Q}{\partial x^j} - \frac{G_j^n \partial Q}{\partial y^n} \quad (2.5.44)$$

Для скалярного поля. Сравнение (2.5.41) с (2.5.31) показывает, что картановское ковариантное дифференцирование и δ -дифференцирование дают одинаковый результат в частном случае, когда дифференцируемый тензор зависит только от x .

Поскольку ковариантные производные (2.5.36) и (2.5.41)-(2.5.44)-линейные операции, справедливы обычные законы ковариантного дифференцирования. Например, производная от суммы является суммой производных и справедливо обычное правило дифференцирования произведения. Более того, как и риманова ковариантная производная, картановская ковариантная производная является метрической, т.е.

$$g_{iklj} = 0 \quad (2.5.45)$$

Что получается подстановкой (2.5.14) и (2.5.32) в определение

$$g_{iklj} = \frac{\det \partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{G_j^n \partial g_{ik}}{\partial y^n} - \Gamma_{ikj} - \Gamma_{kij}. \quad (2.5.46)$$

Дополнительно

$$l_{lj}^k = y_{lj}^k = F_{lj} = 0. \quad (2.5.47)$$

Действительно, поскольку $\frac{\partial y^k}{\partial x^i} = 0$ и $\frac{\partial y^k}{\partial y^n} = \delta_n^k$, то определение (2.5.42)

дает

$y_{lj}^k = -G_j^k + \Gamma_{nj}^k y^n$, что равно нулю в силу (2.5.33). Последнее тождество в (47) вытекает из определения (2.5.44) и соотношений (2.5.9) и

$y_n G_j^n = y^m y^n \gamma_{mnj}$. Тождества (2.5.45) и (2.5.47) показывают, что метрической тензор g_{ij} , метрическую функцию F и касательные векторы y^i и l^i можно выносить из-под знака картановской ковариантной производной. Картановская ковариантная производная от тензора C_{ijk} , вообще говоря, не равна нулю. Представление (2.5.32) ведет также к соотношению

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^h}{\partial y^r} = C_{jrli}^h + C_{irlj}^h - g^{hk} C_{ijrIk} - C_{jl}^h C_{irIk} + C_{il}^h C_{jrIk} - C_{ij}^l C_{lrIk}^h y^k \quad (2.5.48)$$

Которое ясно отражает тот факт, что частная производная от коэффициентов связности по касательным векторам является тензором.

Бервальдовские коэффициенты связности определяется следующим образом

$$C_{kj}^i = \frac{\partial G_k^i}{\partial y^j} \quad (2.5.49)$$

Где G_k^i задаются формулой (2.5.33). Они симметричны по нижним индексам, ибо $G_k^i = \frac{\partial G^i}{\partial y^k}$ (2.5.33). Используя (2.5.32) и (2.5.33) вместе с определением (2.5.49), легко вывести соотношение

$$G_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + C_{ijlr}^k y^r, \quad (2.5.50)$$

Которое явно указывает на то, что G_{ij}^k , являясь разностью между коэффициентами связности и тензором, представляют собой коэффициенты связности. Бервальдовская ковариантная производная определяется аналогично картановской ковариантной производной (2.5.41) и обычно обозначается круглыми скобками, а именно,

$$X_{i(j)}^k = \frac{\partial X_i^k}{\partial x^j} - \frac{G_j^n \partial X_i^k}{\partial y^n} + G_{nj}^k X_i^n - G_{ij}^n X_n^k \quad (2.5.51)$$

Из (2.5.45), (2.5.46) и (2.5.50) следует, что

$$F_k = l_{(k)}^i = l_{i(k)} = 0; \quad g_{ij(k)} = -2C_{ijklr} y^r. \quad (2.5.52)$$

Соотношение (2.5.50) показывает, что картановские и бервальдовские коэффициенты связности равны тогда и только тогда, когда

$C_{ijklr} y^r = 0$; в таком случае финслерово пространство часто называют пространством Ландсберга.

Может случиться, что финслерово пространство обладает свойством $C_{ijkln} = 0$. Тогда говорят, что финслерово пространство аффинно связанное или является пространством Бервальда. [8]. Из (2.5.48) непосредственно вытекает, что

$$G_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k x, \quad \text{если} \quad C_{ijkln} = 0. \quad (2.5.53)$$

Справедливо и обратное утверждение, т.е. что $\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial y^n} = 0$ влечет за собой $C_{ijklh} = 0$.

Знание частной ковариантной производной можно использовать для построения ковариантной от зависящего от x тензора, скажем, $X^k(x)$, вдоль любого векторного поля $\vartheta^i(x)$ согласно правилу обычного вида

$$X^k_{;j}(x) \vartheta^j(x) \equiv \frac{\partial X^k}{\partial x^j} \vartheta^j + \Gamma_{nj}^k(x) X^n(x) \vartheta^j. \quad (2.5.54)$$

Более того, ковариантная производная $\frac{\delta X^k}{\delta t}$ от поля $X^k(x)$ вдоль кривой C с некоторым параметром t может быть определена так:

$$\frac{\delta X^k}{\delta t} = \frac{dX^k}{dt} + \Gamma_{nj}^k(x, x') X^n x^j \equiv \frac{dX^k}{dt} + G_n^k(x, x') X^n. \quad (2.5.55)$$

Здесь на втором шаге было использовано тождество (2.5.33); $x^j = \frac{dx^j}{dt}$. Определение (2.5.55) получается из (2.5.54) формальной заменой $\vartheta^j(x)$ на $x^j t$.

Если кривая C параметризуется финслеровой длиной дуги s , а касательный C единичный вектор (28) переносится вдоль C , то ковариантная δ -производная (2.5.55) принимает вид $\frac{\delta x^{lk}}{\delta s} = \frac{dx^{lk}}{ds} + x'^{ln} G_n^k(x, x')$ или ввиду (2.5.34)

$$\frac{\delta x'^k}{\delta s} = \frac{dx'^k}{ds} + x'^{lm} x'^n \gamma_{mn}^k(x, x'). \quad (2.5.56)$$

Кривая C называется автопараллельной, если $\frac{\delta x'^k}{\delta s} = 0$. Одного взгляда на уравнение финслеровых геодезических (2.5.30) достаточно, чтобы сделать вывод, что геодезические финслерова пространства являются автопараллельными кривыми.

Характерной чертой римановой геометрии является тот факт, что риманов метрический тензор наделяет касательные к основному многообразию пространств M_x структурой евклидова пространства. Это понятие обобщается на финслерову геометрию следующим определением. Пара $M_x^*, F(x, y)$, где x^i фиксированы, а y^i переменны, называется касательным пространством Минковского в этой точке x^i и будет обозначаться ниже посредством $M(x)$. В соответствии с этим определением зависимость финслеова метрического тензора $g_{ij}(x, y)$ от y в фиксированной точке x^i может трактоваться как зависимость от координат y^i , принятых в $M(x)$. Следовательно, финслеров метрический тензор $g_{ij}(x, y)$ в точке x^i будет играть роль метрического тензора касательного пространства Минковского $M(x)$, а квадрат длины бесконечно малого смещения dy^i в $M(x)$ будет задаваться формулой

$$ds_{Mink}^2 = g_{ij}(x, y) dy^i dy^j, \quad (2.5.57)$$

Т.е. обычным римановым правилом, примененным к $M(x)$. [8].

2.6 Обобщение римановой геометрии Финслером

Обобщение римановой геометрии Вейлем. Первая попытка обобщения римановой геометрии принадлежит Вейлю. Он обратил внимание на следующее обстоятельство: нельзя ли построить геометрию, в которой понятие параллельного перенесения определялось бы не с помощью метрического тензора g_{ij} . Очевидно, для этого достаточно задать Γ_{ij}^k как непрерывные и непрерывно дифференцируемые функции точки:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(u^1, u^2, \dots, u^n),$$

Причем так, чтобы

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

Тем самым мы сможем определить параллельное перенесение векторов условием

$$\frac{\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} + x^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^i du^\alpha}{ds} = 0$$

$$\frac{dx^i}{ds} + \frac{\Gamma_{\alpha\beta}^i x^\alpha du^\beta}{ds} = 0$$

Оно будет обладать всеми перенесением. Она будет беднее римановой, так как в ней не будет понятия длины, угла, объема, т. е. всего того, что связано с g_{ij} .

Эта геометрия называется геометрией аффинной связности. [9].

Обобщение римановой геометрии Картаном. Под геометрией аффинной связности Картан предложил понимать нечто более общее. Он отказался от симметричности коэффициентов связности:

$$\Gamma_{ij}^k \neq \Gamma_{ji}^k.$$

Геометрически получается следующая разница: в этой геометрии бесконечно малый замкнутый контур отобразится на разомкнутый контур отобразится на разомкнутый контур евклидова пространства.

Величину $\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$ Картан назвал кручением пространства. Таким образом, получается геометрия аффинной связности с кручением.

Обобщение римановой геометрии Финслером. В римановой геометрии линейный элемент представляет собой квадратичную форму относительно дифференциалов координат:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta.$$

Финслер предложил построить геометрию, в которой расстояние ds между двумя бесконечно близкими точками u^i и $u^i + du^i$ есть однородная функция первого измерения от du^i , квадрат которой не обязательно есть квадратичная форма. Так, можно, в частности, задать линейный элемент, как однородную функцию третьего измерения относительно дифференциалов du^i :

$$ds^3 = g_{\alpha\beta\gamma} du^\alpha du^\beta du^\gamma.$$

В настоящее время геометрия пространства Финслера развита в значительной мере. Риманова геометрия обобщалась еще нескольких других направлениях Вейлем, Картаном, Скоутеном. [9].

ГЛАВА III СВЯЗ ФИНСЛЕРОВОЙ ГЕОМЕТРИИ С ФИЗИКОЙ

3.1 Финслерова геометрия и теория относительности

Финслерова геометрия является геометрией метрических пространств, обладающих внутренней локальной анизотропией, т.е. пространств, метрика которых не сводится к квадратичной форме дифференциалов координат. На существование таких пространств обратил внимание еще Риман в его знаменитой лекции "О гипотезах, лежащих в основании геометрии". Однако, только 50 лет спустя, в диссертации Финслера были сделаны первые шаги по их систематическому изучению. Впоследствии, благодаря исследованиям Синга, Вагнера, Бервальда, Картана, Буземана, Рунда, Матсумото и других, финслерова геометрия приобрела статус самостоятельной ветви дифференциальной геометрии. С современной точки зрения классическая финслерова геометрия есть геометрия векторных расслоений над многообразиями.

До недавнего времени попытки использовать формализм финслеровой дифференциальной геометрии в теоретической физике носили лишь эпизодический характер, но в последние годы ситуация в этом отношении заметно изменилась. Помимо таких традиционных областей как теория анизотропных сред и лагранжева механика, классическая финслерова геометрия и ее обобщения нашли широкое применение при решении проблем оптимизации, при описании хаотических систем, в статистической физике и термодинамике, в экологии и в теории эволюции биологических систем, в описании внутренней симметрии адронов, в теории пространства-времени и гравитации, а также - в единых калибровочных теориях поля.

Отметим, что исторически сложились два альтернативных подхода к финслеровой геометрии подходы Картана и Буземана. При этом в большинстве прикладных исследований (особенно тех, которые касались структуры пространства-времени) использовался картановский подход. Хотя

в рамках картановского подхода сохраняется лемма Риччи, что открывает возможность для использования аппарата финслеровой дифференциальной геометрии в теориях типа Калуцы-Клейна, сам этот подход отличается большим разнообразием возможных структур и возникающей вследствие этого проблемой идентификации новых (по сравнению с римановой геометрией) элементов структуры с физическими наблюдаемыми. Существование такой проблемы видно уже из того, что в простейшем случае финслеров метрический тензор зависит не только от точек основного многообразия, но и от значения локальных скоростей. Соответственно, физические поля в картановском финслеровом пространстве, помимо пространственно-временных координат, оказываются, вообще говоря, зависящими от этих скоростей. Данное обстоятельство сильно осложняет физическую интерпретацию картановских финслеровых метрик. Поэтому заранее не ясно, является ли использование подобных метрик чисто формальным приемом, или же реальное пространство-время действительно обладает финслеровой геометрией.

Впервые физические аспекты указанной проблемы привлекли к себе внимание, когда пришло осознание того, что в рамках модели локально изотропного (риманова) пространства-времени невозможно реализовать принцип Маха для пробного тела. Согласно этому принципу, способность тела сопротивляться ускорению, т.е. его инертность, должна зависеть от распределения и движения внешней (по отношению к телу) материи. Другими словами, инертная масса тела, входящая, например, во второй закон Ньютона, должна являться не скаляром, а тензором [G.Cocconi and E.Salpeter, *Nuovo Cimento*, 10(1958)646]. Таким образом, открытие анизотропии инертности стало бы прямым указанием на локальную анизотропию пространства. Эксперименты, поставленные с этой целью [V.Beltran-Lopez, H.G.Robinson and V.W.Hughes, *Bull. Am. Phys. Soc.*, 6(1961)424; R.W.P.Drever, *Phil. Mag.*, 6(1961)683], привели к верхней границе искомой

анизотропии на уровне 10^{-23} . Столь сильное ограничение существенно снизило интерес к проблеме локальной анизотропии и вплоть до настоящего времени рассматривается многими исследователями как факт, свидетельствующий в пользу локальной изотропии 3D пространства. Вместе с тем, уже давно было отмечено [S.T.Epstein, *Nuovo Cimento*, 16(1960)587; G.Yu.Bogoslovsky, *Nuovo Cimento* B77(1983)181], что общепринятая экспериментальная оценка анизотропии на уровне 10^{-10} является некорректной, а в качестве надежной верхней границы анизотропии следует рассматривать значение 10^{-10} , полученное путем измерения поперечного эффекта Доплера с помощью эффекта Мессбауэра [D.C.Champeneu, G.R.Isaak and A.M.Khan, *Phys. Lett.*, 7(1963)241; G.R.Isaak, *Phys. Bull.*, 21(1970)255].

В последние годы интерес к проблеме локальной анизотропии пространства-времени стал заметно расти. С одной стороны этому способствовало создание струнно-мотивированной феноменологической теории, известной как Расширенная Стандартная Модель сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий, или SME [D.Colladay, A.Kostelecky, *Phys. Rev.*, D58(1998) 116002], а с другой -- требующие единого объяснения данные астрофизических наблюдений и, в частности, анизотропия реликтового излучения, ускоренное расширение Вселенной, аномальное поведение кривых вращения спиральных галактик.

В рамках SME локальная анизотропия пространства возникает за счет реликтового векторного конденсата, заполняющего пространство и взаимодействующего с фундаментальными полями лоренц-ковариантным образом. В результате, наличие такого конденсата ведет к нарушению активной лоренцевой инвариантности. При этом локальная лоренцева симметрия (и, соответственно, изотропия) приобретают смысл не строгой, а лишь приближенной пространственно-временной симметрии. Вместе с тем, принцип относительности Эйнштейна требует, чтобы пространство событий

обладало бы строгой релятивистской симметрией. Нарушение лоренцевой симметрии при сохранении релятивистской симметрии означает, что группа релятивистской симметрии должна отличаться от группы Лоренца и включать в себя так называемые обобщенные лоренцевы преобразования. Как оказалось, такие преобразования действительно существуют, а соответствующее плоское пространство событий, чью группу изометрий они представляют, обобщает пространство Минковского специальной теории относительности и является финслеровым пространством с частично нарушенной 3D изотропией. Отметим еще, что физическим источником локальной анизотропии пространства теперь уже служит не реликтовый векторный конденсат SME, а релятивистски инвариантный аксиально симметричный фермион-антифермионный конденсат, возникающий в процессе перестройки вакуума при спонтанном нарушении исходной калибровочной симметрии и играющий роль, аналогичную роли конденсата Хиггса в Стандартной Модели.

В итоге можно сказать, что именно сочетание принципа относительности Эйнштейна и геометрических идей Буземана, согласно которым в качестве естественной локально анизотропной метрики рассматривается метрика плоского финслерова пространства, привело к жизнеспособному финслерову обобщению релятивистской теории [Г.Ю.Богословский, (1973)-(2008)]. Недавно основные результаты, полученные в рамках такого обобщения и связанные с частичным нарушением 3D изотропии, были воспроизведены с помощью методов непрерывных деформаций алгебр Ли и нелинейных реализаций [G.W.Gibbons, J.Gomis and C.N.Pope, Phys. Rev., D76(2007)081701(R)]. При этом соответствующая неоднородная группа финслеровых изометрий получила название DISIMb(2), где параметр b имеет смысл величины локальной анизотропии пространства-времени. Сама же специальная финслерова теория стала теперь называться очень специальной

теорией относительности [A.G.Cohen, S.L.Glashow, Phys. Rev.Lett., 97(2006)021601].

Отметим наконец, что по ходу финслерова обобщения релятивистской теории, помимо частично анизотропной, была найдена финслерова метрика, описывающая плоское релятивистски инвариантное пространство событий с полностью нарушенной 3D изотропией [G.Yu.Bogoslovsky, H.F.Goenner, Phys. Lett., A244(1998)222; Gen. Rel. Grav., 31(1999)1565]. Физическим источником такой анизотропии является трехбозонный (трехглюонный) конденсат, возможность образования которого была недавно исследована Б.А.Арбузовым. То, что обе плоские финслеровы метрики зависят от параметров, определяющих их анизотропию, позволяет превратить эти метрики в метрики, описывающие соответствующие искривленные финслеровы пространства. Для этого параметры, от которых зависят плоские финслеровы метрики, нужно сделать функциями пространственно-временной точки. В результате динамика любого из двух типов искривленных финслеровых пространств будет полностью определяться динамикой соответствующей системы, состоящей из обычных взаимодействующих полей, а именно, гравитационного поля, полей материи и полей, которые берут свое начало от исходных параметров и поэтому несут всю информацию об анизотропии в любой пространственно-временной точке. Указанный подход к финслеру расширению общей теории относительности позволяет ограничиться методами обычной лагранжевой теории поля и тем самым обойти известные трудности, связанные с картановским подходом. Важно также, что все три метрики, обладающие локальной релятивистской симметрией, т.е. риманова и две финслеровы (с частичной и полной локальной анизотропией) удовлетворяют принципу соответствия. Это, в свою очередь, приводит к гибридной геометрической модели, в рамках которой пространство-время может находиться не только в состоянии, описываемом римановой геометрией, но еще и в состояниях

описываемых финслеровой геометрией. Переходы между различными метрическими состояниями пространства-времени имеют смысл фазовых переходов в его геометрической структуре. Такие переходы вместе с эволюцией каждого из возможных метрических состояний составляют общую картину динамики пространственно-временного многообразия.

Другой подход к финслерову расширению ОТО и построению анизотропной геометродинамики основан на идеях Картана, реализованных в рамках формализма так называемой h - v метрической модели [R.Miron, M.Anastasiiei, Kluwer Acad. Publ., FTRH no.59 (1994)]. При этом финслеров метрический тензор, заданный на всем касательном расслоении, представляется в виде суммы финслерова тензора Минковского, который, вообще говоря, зависит только от компонент скорости, и тензора, описывающего его локальную деформацию, которая зависит от пространственно-временных координат и компонент скорости как независимых переменных. В результате, так метризованное касательное расслоение становится (при определенных дополнительных ограничениях) римановым многообразием эквивалентным фазовому пространству.

В работах, посвященных развитию анизотропной геометродинамики и ее физическому обоснованию [С.В.Сипаров, (1997)-(2008)], были получены соответствующие уравнения Эйнштейна, уравнения эйконала и геодезических; рассмотрены два варианта теории -- когда финслеров тензор Минковского совпадает с метрическим тензором обычного изотропного пространства Минковского, а локально анизотропное возмущение последнего является слабым и, когда финслеров тензор Минковского совпадает с финслеровым метрическим тензором анизотропного пространства Бервальда-Моора, слабая локальная деформация которого обусловлена гравитационной волной; в линеаризованной модели с обычной метрикой Минковского и малым локально анизотропным возмущением получены уравнения движения частицы; показано, что локальная

анизотропия возмущенной метрики, возникающая благодаря ее зависимости от скорости, приводит к выражению для гравитационной силы, которое, помимо ньютоновской компоненты, содержит еще компоненты, зависящие от скорости частицы и от собственного движения источника; с помощью построенной модели объяснен закон Талли-Фишера и, без привлечения гипотезы темной материи, объяснено аномальное поведение кривых вращения спиральных галактик; дан расчет Пионер-эффекта, который привел к удовлетворительному согласию с измеренным значением дополнительного ускорения. К тому же, было выяснено, что рассмотренная модель позволяет качественно объяснить ускоренное расширение Вселенной без привлечения гипотезы темной энергии. Не менее важным является и то, что был рассчитан эффект оптико-метрического параметрического резонанса для случая слабо анизотропной метрики. Экспериментальные работы по поиску такого эффекта уже ведутся на базе РАО РАН в Пущино и, если он будет обнаружен, то это станет прямым свидетельством существования локальной анизотропии у пространства-времени. Таким образом, хотя исследования по финслерову расширению ОТО еще далеки от завершения, они представляют собой серьезную альтернативу тем исследованиям, в которых используется гипотеза темной материи и энергии.

Выше, руководствуясь методическими соображениями, мы лишь упомянули финслерово пространство Бервальда-Моора, не отметив тот важный факт, что это пространство принадлежит трехпараметрическому семейству финслеровых пространств с полностью нарушенной 3D изотропией и с абелевой трехпараметрической группой релятивистской симметрии. Абелева структура группы релятивистской симметрии послужила отправной точкой для более глубокого изучения финслеровых пространств Бервальда-Моора. В соответствующих работах [Д.Г.Павлов, Г.И.Гарасько, С.В.Лебедев, В.М.Чернов, (2004)-(2008)] было показано, что, подобно евклидовой плоскости, линейные финслеровы пространства с метрической функцией

Бервальда-Моора обладают бесконечномерной группой конформных преобразований. При этом, аналогично тому как конформным преобразованиям евклидовой плоскости сопоставляется алгебра и аналитические функции комплексной переменной, конформным преобразованиям пространства-времени с метрикой Бервальда-Моора можно сопоставить коммутативно-ассоциативную алгебру и аналитические функции гиперкомплексной переменной. Данное обстоятельство позволяет использовать метод гиперкомплексного потенциала при решении широкого круга задач анизотропной геометродинамики.

3.2 Релятивистская космология

Изотропное пространства. Общая теория относительности открывает новые пути подхода к решению вопросов, связанных со свойствами мира, рассматриваемого в космических масштабах. Возникающие здесь новые замечательные возможности (впервые указанные Эйнштейном в 1917 г.) связаны с негалилеевой пространства времени.

Прежде чем приступить к систематическому построению релятивистских космологических моделей, сделаем следующее замечание по поводу основных исходных уравнений поля.

Требования, поставленные в качестве условий для определения действия гравитационного поля, будут по-прежнему удовлетворены, если к скаляру G добавить постоянный член, т. е. если положить

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi k} \int (G + 2\Lambda) \sqrt{-g} d\Omega$$

где Λ — новая постоянная (с размерностью см⁻²). Такое изменение приведет к появлению в уравнениях Эйнштейна дополнительного члена Λg_{ik} :

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = \frac{8\pi k}{c^4} T_{ik} + \Lambda g_{ik}$$

Если приписать «космологической постоянной» Λ очень малое значение, то наличие этого члена не будет сказываться существенным образом на гравитационных полях в не слишком больших областях пространства-времени, но приведет к появлению новых типов «космологических решений», которые могли бы описывать мир в целом. В настоящее время, однако, нет никаких настоятельных и убедительных оснований — как наблюдательных, так и теоретических — для такого видоизменения основных уравнений теории. Подчеркнем, что речь шла бы об изменении, имеющем глубокий физический смысл: введение в плотность лагранжевой функции поэтому явного члена, вообще не зависящего от состояния поля, означало бы приписывание пространству-времени принципиально неустранимой кривизны, не связанной ни с материей, ни с гравитационными волнами. Все дальнейшее изложение в этой главе основано поэтому на уравнениях Эйнштейна в их «классическом» виде, без космологической постоянной.

Как известно, звезды распределены по пространству весьма неравномерным образом — они сконцентрированы в отдельных звездных системах (галактиках). Но при исследовании Вселенной «в больших масштабах» следует отвлекаться от «местных» неоднородностей, вызванных скоплением вещества в звезды и звездные системы. Так, под плотностью масс должна подразумеваться плотность, усредненная по областям пространства, размеры которых велики по сравнению с расстояниями между галактиками.

Рассматриваемые ниже решения уравнений Эйнштейна — так называемая изотропная космологическая модель (впервые открытая А. А. Фридманом в 1922 г.) — основаны на предположении об однородности и изотропии распределения вещества по пространству. Существующие астрономические данные не противоречат такому предположению, и в настоящее время есть все основания считать, что изотропная модель дает в общих чертах адекватное описание не только современного состояния

Вселенной, но и значительной доли ее эволюции в прошлом. Мы увидим ниже, что основным свойством этой модели является ее не стационарность. Нет сомнения в том, что это свойство («расширяющаяся Вселенная») дает правильное объяснение фундаментального для космологической проблемы явления красного смещения.

В то же время ясно, что предположение об однородности и изотропии Вселенной уже по самому своему существу неизбежно может иметь лишь приближенный характер, поскольку эти свойства заведомо нарушаются при переходе к меньшим масштабам.

Однородность и изотропия пространства означают, что можно выбрать такое мировое время, чтобы в каждый его момент метрика пространства была одинаковой во всех точках и по всем направлениям.

Займемся прежде всего изучением метрики изотропного пространства как таковой, не интересуясь пока его возможной зависимостью от времени. Как мы уже делали выше, обозначим трехмерный метрический тензор как $\gamma_{\alpha\beta}$. Тогда напишем элемент пространственного расстояния в виде

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (3.2.1)$$

Кривизна пространства полностью определяется его трехмерным тензором кривизны, который мы обозначаем как $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$. В отличие от четырехмерного тензора R_{iklm} в случае полной изотропии тензор $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ должен, очевидно, выражаться только через метрический тензор $\gamma_{\alpha\beta}$, а потому в силу своих свойств симметрии должен иметь вид

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda (\gamma_{\alpha\gamma} \gamma_{\beta\delta} - \gamma_{\alpha\delta} \gamma_{\beta\gamma}) \quad (3.2.2)$$

где λ — постоянная. Тензор Риччи $R_{\alpha\beta}$ — $R_{\alpha\beta}$ равен соответственно

$$R_{\alpha\beta} = 2\lambda \gamma_{\alpha\beta}, \quad (3.2.3)$$

а скалярная кривизна

$$R = 6\lambda. \quad (3.2.4)$$

Таким образом, свойства кривизны изотропного пространства определяются лишь одной постоянной. Соответственно этому возможны всего три существенных различных случая пространственной метрики: 1) так

называемое пространство постоянной положительной кривизны (соответствующее положительным значениям λ), 2) пространство постоянной отрицательной кривизны (соответствующее значениям $\lambda < 0$) и 3) пространство с кривизной, равной нулю ($\lambda = 0$). Из них последнее представляет собой плоское, т. е. евклидово, пространство.

При изучении метрики удобно исходить из геометрической аналогии, рассматривая геометрию изотропного трехмерного пространства как геометрию на заведомо изотропной гиперповерхности (в некотором фиктивном четырехмерном пространстве). Такой поверхностью является гиперсфера; соответствующее ей трехмерное пространство и является пространством положительной постоянной кривизны. Уравнение гиперсферы с

радиусом a в четырехмерном пространстве x_1 и x_2, x_3, x_4 , а имеет вид а элемент длины на ней выражается как

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2$$

Рассматривая координаты x_1, x_2, x_3 как три пространственные координаты и исключая из dl^2 фиктивную координату x_4 помощью первого уравнения, находим элемент пространственного расстояния в виде

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3}{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}^2 \quad (3.2.5)$$

Из этого выражения легко вычислить постоянную λ в (3.2.2). Поскольку нам заранее известно, что тензор $P_{\alpha\beta}$ имеет вид (3.2.3) во всем пространстве, то достаточно вычислить его только для точек, находящихся вблизи начала координат, где $\gamma_{\alpha\beta}$ равны

$$\gamma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{x_\alpha x_\beta}{a^2}$$

Так как первые производные от $\gamma_{\alpha\beta}$, а значит, и величины $\lambda_{\beta\gamma}^\alpha$ — трехмерные символы Кристоффеля, соответствующие метрике $\gamma_{\alpha\beta}$, — в начале координат обращаются в нуль, то вычисление по общей формуле

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l$$

оказывается очень простым и дает в результате

$$\lambda = \frac{1}{a^2} \quad (3.2.6)$$

Величину a можно назвать «радиусом кривизны» пространства. Введем вместо координат x_1, x_2, x_3 соответствующие им «сферические» координаты r, θ, φ . Тогда элемент длины примет вид

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2 \quad (3.2.7)$$

$$\int_0^r \frac{dr}{1 - \frac{r^2}{a^2}} = a \arcsin \frac{r}{a}$$

т. е. больше r . Таким образом, отношение длины окружности к радиусу в таком пространстве меньше чем 2π .

Другую удобную форму dl^2 имеет в «четырёхмерных сферических координатах», получающихся, если ввести вместо координаты r «угол» χ согласно $r = a \sin \chi$ (χ меняется в пределах от 0 до π). Тогда

$$dl^2 = a^2 d\chi^2 + \sin^2 \chi \sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2 \quad (3.2.8)$$

Координата χ измеряет расстояние от начала координат, равное $a\chi$. Поверхность сферы в этих координатах равна $4\pi a^2 \sin^2 \chi$. Мы видим, что по мере удаления от начала координат величина поверхности сферы увеличивается, пока не достигнет на расстоянии $\pi a/2$ максимального значения, равного $4\pi a^2/2$. Вслед за этим она начинает уменьшаться, пока не превратится в точку на «противоположном полюсе» пространства на расстоянии πa — наибольшем расстоянии, которое вообще может существовать в таком пространстве (все это видно, конечно, и из (3.2.7), если заметить, что координата r не может принимать значений, больших чем a).

Объем пространства с положительной кривизной равен

$$V = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} a^3 \sin^2 \chi \sin \theta d\chi d\theta d\varphi$$

откуда

$$V=2\pi^2 a^3 \quad (3.2.9)$$

Таким образом, пространство положительной кривизны оказывается «замкнутым само в себе» — конечным по объему, но, разумеется, не имеющим границ.

Интересно отметить, что в замкнутом пространстве полный электрический заряд должен быть равен нулю. Действительно, всякая замкнутая поверхность в конечном пространстве с обеих своих сторон охватывает конечные же области пространства. Поэтому поток электрического поля через эту поверхность равен, с одной стороны, полному заряду, находящемуся внутри поверхности, а с другой, — равен находящемуся вне ее заряду, взятому с обратным знаком. Сумма же зарядов с обеих сторон поверхности равна, следовательно, нулю.

Аналогичным образом, из выражения

$$P^i = \frac{1}{c} \int h^{i0a} df_a$$

4-импульса в виде интеграла по поверхности следует обращение в нуль полного 4-импульса P^i во всем пространстве.

Перейдем теперь к рассмотрению геометрии пространства, обладающего постоянной отрицательной кривизной. Из (3.2.6) мы видим, что постоянная λ становится отрицательной, если a мнимо. Поэтому все формулы для пространства отрицательной кривизны можно непосредственно получить из предыдущих, заменив в них a на ia . Другими словами; геометрия пространства отрицательной кривизны получается математически как геометрия на четырехмерной псевдосфере с мнимым радиусом.

Таким образом, постоянная Λ , равна теперь

$$\lambda = -\frac{1}{a^2} \quad (3.2.10)$$

а элемент длины в пространстве отрицательной кривизны в координатах r, θ, φ имеет вид

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1+\frac{r^2}{a^2}} + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2 \quad (3.2.11)$$

где координата r может пробегать все значения от 0 до ∞ . Отношение длины окружности к радиусу теперь больше чем 2π . Выражение для dl^2 , соответствующее (3.2.8), получится, если шести координату χ согласно $r = a \operatorname{sh} \chi$ (χ меняется здесь от 0 до ∞). Тогда

$$dl^2 = a^2 d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi \sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2 \quad (3.2.12)$$

Поверхность сферы равна теперь $4\pi a^2 \operatorname{sh}^2 \chi$ и при удалении от начала координат (увеличении χ) возрастает неограниченно. Объем пространства отрицательной кривизны, очевидно, бесконечен.[10]

Закрытая изотропная модель. Переходя к исследованию пространственно-временной метрики изотропной модели, мы должны прежде всего условиться о выборе системы отсчета. Наиболее удобна «сопутствующая» система отсчета, движущаяся в каждой точке пространства вместе с находящимся в ней веществом. Другими словами, системой отсчета является сама заполняющая пространство материя; скорость вещества в этой системе по определению равна везде нулю. Очевидно, что такой выбор системы отсчета для изотропной модели естествен: при другом выборе направленность скоростей материи создавала бы кажущуюся неэквивалентность различных направлений в пространстве. Временная координата должна быть выбрана указанным в начале предыдущего параграфа образом, т. е. так, чтобы в каждый данный момент времени метрика во всем пространстве была одинаковой.

Ввиду полной эквивалентности всех направлений, компоненты g_{oa} метрического тензора в выбранной нами системе отсчета равны нулю. Действительно, три компоненты g_{oa} можно рассматривать как компоненты трехмерного вектора, который, будучи отличен от нуля, создавал бы неравноценность различных направлений. Таким образом, ds^2 должно иметь вид $ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 - dl^2$. Компонента g_{00} является здесь функцией только от x^0 . Обозначая ее через ct , имеем:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2 \quad (3.2.13)$$

Переменная t является синхронным собственным временем в каждой точке пространства.

Начнем с рассмотрения пространства положительной кривизны; ниже мы будем для краткости говорить о соответствующем решении уравнений Эйнштейна как о *замкнутой модели*. Для dl воспользуемся выражением (3.2.8), в котором радиус кривизны a является, вообще говоря, функцией времени. Таким образом, ds^2 пишем в виде

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2 (d\chi^2 + \sin^2\chi d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (3.2.14)$$

Функция $a(t)$ определяется уравнениями Эйнштейна. Для решения этих уравнений удобно воспользоваться вместо времени величиной η , определяемой соотношением

$$cdt = a d\eta \quad (3.2.14)$$

Тогда ds^2 напишется в виде

$$ds^2 = a^2 (d\eta^2 - d\chi^2 - \sin^2\chi d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (3.2.15)$$

Для составления уравнений поля надо начать с вычисления компонент тензора R_{ik} (координатами x^0, x^1, x^2, x^3 являются $\eta, \chi, \theta, \varphi$). С помощью значений компонент метрического тензора

$$g_{00} = a^2, g_{11} = -a^2, g_{22} = -a^2 \sin^2\chi, g_{33} = -a^2 \sin^2\chi \sin^2\theta$$

вычисляем величины Γ^i_{kl} :

$$\Gamma^0_{00} = \frac{a'}{a}, \Gamma^0_{\alpha\beta} = -\frac{a'}{a^3} g_{\alpha\beta}, \Gamma^{\alpha}_{0\beta} = \frac{a'}{a} \delta^{\alpha}_{\beta}, \Gamma^{\alpha}_{\alpha 0} = \Gamma^{\alpha}_{00} = 0$$

где штрих означает дифференцирование по η (компоненты $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ нет необходимости вычислять в явном виде). [10]. С помощью этих значений по общей формуле

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{ik} \Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il} \Gamma^l_{km}$$

получим:

$$R^0_0 = \frac{3}{a^4} a'^2 - a a'' .$$

Из тех же соображений симметрии, которые были применены выше к $g_{0\alpha}$. Заранее очевидно, что компоненты $R_{0\alpha} = 0$. Для вычисления же компонент R^β_α замечаем, что если выделить в них члены, содержащие только $g_{\alpha\beta}$ (т. е. только $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$), то эти члены должны составить компоненты трехмерного тензора — P_α , значения которых заранее известны из (3.2.3) и (3.2.6):

$$R^\beta_\alpha = -P^\beta_\alpha + \dots = -\frac{2}{a^2} \delta^\beta_\alpha + \dots,$$

где многоточие подразумевает члены, содержащие наряду с также и g_{00} . В результате вычисления последних получим:

$$R^\beta_\alpha = -\frac{1}{a^4} (2a^2 + a'^2 + aa'') g^\beta_\alpha$$

и затем

$$R = R^0_0 + R^\alpha_\alpha = -\frac{6}{a^3} (a + a'')$$

Поскольку в выбранной нами системе отсчета материя неподвижна, то неподвижна, то $u^\alpha = 0$, $u^0 = 1/a$ и из $T_{ik} = (p + \varepsilon) u_i u_k - p g_{ik}$ имеем $T^0_0 = \varepsilon$, где ε — плотность энергии материи. Подставляя полученные выражения в уравнение

$$R^0_0 - \frac{1}{2} R \frac{8\pi k}{c^4} T^0_0$$

получим:

$$\frac{8\pi k}{c^4} \varepsilon = \frac{3}{a^4} (a^2 + a'^2) \quad (3.2.16)$$

Сюда входят две неизвестные функции ε и a ; поэтому необходимо получить еще одно уравнение. В качестве него удобно выбрать (вместо пространственных компонент уравнений Эйнштейна) уравнение $T^i_0; i = 0$ — одно из четырех уравнений $T^k_{i;k} = 0$, содержащихся, как мы знаем, в уравнениях поля. Это уравнение можно вывести и непосредственно с помощью термодинамических соотношений следующим образом.

Пользуясь в уравнениях поля выражением $T_{ik} = (p + \varepsilon) u_i u_k - p g_{ik}$ для тензора энергии-импульса, мы тем самым пренебрегаем всеми процессами диссипации энергии, приводящими к возрастанию энтропии. Такое пренебрежение, разумеется, здесь вполне законно, поскольку

дополнительные члены, которые надо было бы прибавить к T_k^i в связи с диссипацией энергии, ничтожно малы по сравнению с плотностью энергии ε , включающей в себя энергию покоя материальных тел.

Таким образом, при выводе уравнений поля мы можем считать полную энтропию постоянной. Воспользуемся теперь известным термодинамическим соотношением $d\xi = TdS - pdV$, где ξ , S , V — энергия, энтропия и объем системы, а p , T — давление и температура. При постоянной энтропии имеем просто $d\xi = -pdV$. Вводя плотность энергии $\varepsilon = \xi/V$, без труда находим:

$$d\varepsilon = -(\varepsilon + p) \frac{dV}{V}$$

Объем пространства V пропорционален, согласно (3.2.9), кубу радиуса кривизны a . Поэтому $dV/V = 3da/a = 3d\ln a$, и мы можем написать:

$$-\frac{d\varepsilon}{\varepsilon + p} = 3d\ln a,$$

или, интегрируя,

$$3\ln a = -\frac{d\varepsilon}{p + \varepsilon} + \text{const} \quad (3.2.17)$$

(нижний предел в интеграле постоянен).

Если связь между ε и p (уравнение состояния материи) известна, то уравнение (3.2.17) определяет ε как функцию от a . Тогда из (3.2.16) мы можем определить η в виде

Уравнения (3.2.17) решают в общем виде задачу об определении метрики в изотропной закрытой модели. [10].

Если материя распределена в пространстве в виде отдельных макроскопических тел, то при определении создаваемого ею гравитационного поля мы можем рассматривать эти тела как материальные частицы, обладающие определенными массами, не интересуясь вовсе их внутренним строением. Считая скорости тел сравнительно малыми (малыми по сравнению с c), можно положить просто $\varepsilon = \mu c^2$, где μ — сумма масс тел, отнесенная к единице объема. По той же причине давление «газа»,

состоящего из этих тел, крайне мало по сравнению с ϵ и им можно пренебречь (давления же внутри тел, согласно сказанному, не имеют отношения к рассматриваемому вопросу). Что касается имеющегося в пространстве излучения, то его количество относительно мало и его энергией и давлением тоже можно пренебречь.

Таким образом, для описания в терминах рассматриваемой модели современного состояния Вселенной следует пользоваться уравнением состояния «пылевидной» материи

$$\epsilon = \mu c^2, p = 0.$$

Интегрирование в (3.2.17) дает тогда $\mu a^3 = \text{const}$. Это равенство можно было бы написать и сразу, так как оно выражает собой просто постоянство суммы M масс тел во всем пространстве, как и должно было быть в рассматриваемом случае пылевидной материи. Поскольку объем пространства в замкнутой модели равен $V = 2\pi^2 a^3$ та $\text{const} = M/2\pi$ (Таким образом,

$$\mu a^3 = \text{const} = \frac{M}{2\pi^2} \quad (3.2.18)$$

Подставив (3.2.18) в уравнение (3.2.17) и произведя интегрирование, получим:

$$a = a_0(1 - \cos\eta) \quad (3.2.19)$$

где постоянная

$$a_0 = \frac{2kM}{3\pi c^2}$$

Наконец, для связи между t и η находим из (3.2.12):

$$t = \frac{a_0}{c}(\eta - \sin\eta) \quad (3.2.20)$$

Уравнения (3.2.19—3.2.20) определяют в параметрическом виде зависимость $a(t)$. Функция $a(t)$ возрастает от нуля при $t = 0$ ($\eta = 0$) до максимального значения $a = 2a_0$, достигаемого при $t = \pi a_0/c$ ($\eta = \pi$) и затем снова убывает до нуля при $t = 2\pi a_0/c$ ($\eta = 2\pi$).

При $\eta \ll 1$ имеем приближенно $a = a_0 \eta^2/2, t = a_0 \eta^3/6c$, так что

$$a \approx \frac{9a_0 c^2}{2} t^{2/3} \quad (3.2.21)$$

При этом плотность вещества

$$\mu = \frac{1}{6\pi k t^2} = \frac{8 \cdot 10^5}{t^2} \quad (3.2.22)$$

(численное значение коэффициента дано для плотности в гсм⁻³ при $t \gg$ секундах).

Обратим внимание на то, что в этом пределе зависимость $\mu(t)$ имеет универсальный характер в том смысле, что не зависит от параметра a_0 .

При $a \rightarrow 0$ плотность μ обращается в бесконечность. Но при $\mu \rightarrow \infty$ давление тоже становится большим, и потому для исследования метрики в этой области надо рассмотреть противоположный случай наибольшего возможного (при данной плотности энергии ε) давления, т. е. описывать материю уравнением состояния.

$$p = \frac{\varepsilon}{3}$$

Из формулы (6) получим тогда

$$\varepsilon a^4 = \text{const} \equiv \frac{3c^4 c_1^2}{8\pi k} \quad (3.2.23)$$

(a_1 — новая постоянная), после чего уравнения (3.2.8) и (3.2.4) приводят к зависимости

$$a = a_1 \sin \eta, \quad t = \frac{a_1}{c} (1 - \cos \eta).$$

Поскольку это решение имеет смысл рассматривать только при очень больших значениях ε (т. е. малых a), то положим $\eta \ll 1$. Тогда $a \approx a_1 \eta$, $t \approx a_1 \eta^2 / 2c$ так что

$$a = \sqrt{2a_1 c t} \quad (3.2.15)$$

При этом

$$\frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{3}{32\pi k t^2} = \frac{4.5 \cdot 10^5}{t^2} \quad (3.2.16)$$

(эта зависимость снова не содержит никаких параметров).

Таким образом, и здесь $a \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$, так что значение $t = 0$ действительно является особой точкой пространственно-временной метрики

изотропной модели (и то же самое относится к закрытой модели и ко второй точке, в которой $a = 0$). Мы видим также из (3.2.15), что при изменении знака t величина $a(t)$ сделалась бы мнимой, а ее квадрат — отрицательным. Все четыре компоненты g_{ik} в (3.2.3) стали бы при этом положительными, так же как и определитель g . Но такая метрика физически бессмысленна. Это значит, что не имеет физического смысла аналитически продолжать метрику за особую точку.

Открытая изотропная модель. Решение, соответствующее изотропному пространству отрицательной кривизны (открытая модель), получается вполне аналогично предыдущему. Вместо (3.2.14) имеем теперь

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) d\chi^2 + sh^2\chi d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 \quad (3.2.17)$$

Вводим снова вместо t переменную η согласно $cdt = ad\eta$;

тогда получаем:

$$ds^2 = a^2(\eta) d\eta^2 - d\chi^2 - sh^2\chi d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 \quad (3.2.18)$$

Это выражение может быть формально получено из (3.2.5) заменой η, χ, a соответственно на $i\eta, i\chi, ia$. Поэтому и уравнения поля можно получить просто путем этой же замены из (3.2.6—3.2.7). Уравнение (3.2.7) сохраняет при этом свой прежний вид:

$$3\ln a = - \frac{d\varepsilon}{\varepsilon + p} + \text{const}, \quad (3.2.19)$$

а вместо (3.2.6) имеем:

$$\frac{8\pi k}{c^4} \varepsilon = \frac{3}{a^4} a'^2 - a^2 \quad (3.2.20)$$

Соответственно этому находим вместо (7)

$$\eta = \pm \frac{da}{a \frac{8\pi k}{3c^4} \varepsilon a^2 + 1} \quad (3.2.21)$$

Для пылевидной материи получаем отсюда:

$$a = a_0 \operatorname{ch}\eta - 1, \quad t = \frac{a_0}{c} (\operatorname{sh}\eta - \eta) \quad (3.2.22)$$

$$\mu a^3 = \frac{3c^2}{4\pi k} a_0 \quad (3.2.23)$$

Формулы (3.2.22) определяют в параметрическом виде зависимость $a(t)$. В отличие от замкнутой модели, здесь радиус кривизны меняется монотонно,

возрастая от нуля при $t = 0$ ($\eta = 0$) до бесконечности при $t \rightarrow \infty$ ($\eta \rightarrow \infty$). Плотность же материи, соответственно, монотонно убывает от бесконечного значения при $t = 0$ (при $\eta \ll 1$ закон этого убывания дается той же приближенной формулой (3.2.13), что и в закрытой модели).

Для больших плотностей решение (3.2.22—3.2.23) неприменимо, и надо снова обратиться к случаю $p = \varepsilon/3$. При этом снова получается соотношение

$$\varepsilon a^4 = \text{const} \equiv \frac{3c^4 a_1^2}{8\pi k} \quad (3.2.24)$$

а для зависимости $a(t)$ находим:

$$a = a_1 \text{sh} \eta, t = \frac{a_1}{c} (\text{ch} \eta - 1)$$

или при $\eta \ll 1$:

$$a = \sqrt{2a_1 c t} \quad (3.2.25)$$

(и прежняя формула (3.2.15) для $\varepsilon(t)$). Таким образом, и в открытой модели метрика имеет особую точку (но в отличие от закрытой модели — лишь одну).

Наконец, предельным случаем рассмотренных решений, соответствующим бесконечному радиусу кривизны пространства, является модель с плоским (евклидовым) пространством. Интервал ds^2 в этой модели можно написать в виде

$$ds^2 = c^2 dt^2 - b^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (3.2.26)$$

(в качестве пространственных координат выбраны «декартовы» координаты (x, y, z)). Зависящий от времени множитель в элементе пространственного расстояния не меняет, очевидно, евклидовой пространственной метрики, так как при заданном t этот множитель постоянен и простым преобразованием координат может быть приведен к единице⁷

3.3 Исследования геометрических свойств пространства-времени.

Обсуждаются применимость теории относительности Эйнштейна на галактических масштабах, а также роль и место геометрии в решении

проблем наблюдательной астрофизики. Предложена экспериментального исследования геометрических свойств пространства-времени.[11].

В XVII веке отклонения формы орбит планет от идеальных окружностей, обнаруженные И. Кеплером в результате наблюдений, поставили перед наукой дилемму. Либо законы природы и математики не тождественны, и миром правит не математическая гармония. Либо наши знания не полны не только в отношении природы, но и в отношении математики.

В конце XVIII века К. Гаусс стал первым, кто конструктивно подошел к вопросу о применимости геометрии Евклида для описания мира и непосредственно измерил на местности сумму внутренних углов треугольника. Вершины треугольника располагались на вершинах близлежащих гор. Гаусс не обнаружил отклонения геометрии мира от Евклидовой в пределах точности своих измерений.

В начале XIX века Н. Лобачевский принял во внимание и оценил принципиальные возможности астрономических наблюдений, что с неизбежностью привело его к созданию первой неевклидовой геометрии.

В середине XIX века В. Клиффорд уже последовательно защищал свою мысль о том, что все проявления физического мира экспериментально неотличимы от соответствующих изменений геометрической кривизны мира.

Следуя этим А. Эйнштейн в начале XX века свел общее, но качественное утверждение Клиффорда к утверждению более узкому, но зато поддающемуся количественному анализу. Основываясь на требование общей ковариантности физических законов (и постулировав постоянство скорости света и принцип эквивалентности инертной и гравитационной масс), он разработал теорию, основанную на том, что неустранимая в нашем мире гравитация неотличима от проявлений геометрических свойств пространства-времени. Считая, что пространство- времени описывается геометрией Римана-Минковского, Эйнштейн в свое основополагающей

работе привел пример наблюдаемых эффектов, которые должны иметь место в этом случае и дал их расчет. Опыты показали хорошее соответствие с расчетом, и геометрия полноправно вошла в физической теорию. На макроуровне это позволило, например, уточнить результаты предшествовавшей теории гравитации Ньютона в применении к Солнечной системе. На микроуровне в квантовую механику вошла теория Дирака. На мегауровне в космологию вошла теория расширяющейся Вселенной и сопутствующих обстоятельств. [11].

Говоря о данных наблюдений, с которыми должна согласовываться теория, следует указывать масштаб рассмотрения. В астрофизике таких масштабов можно указать три: Солнечная система, галактика и метagalaktika (т. е. вся наблюдаемая Вселенная). И известные достижения общей теории относительности (ОТО), связанные с введением новой геометрии, позволили связать лабораторную физику и первый из упомянутых масштабов. К концу XX века были накоплены астрофизические данные, которые на уровне современных представлений не удастся объяснить без включения в теории новых понятий, например, темной материи или темной энергии или без пересмотра основ самой теории, включая и геометрию пространства-времени. При выборе новой геометрии было бы поспешно сразу перейти к обсуждению и поиску эффектов на границах наблюдаемой Вселенной, поскольку проблемы возникают уже на галактическом масштабе.

Предлагая физический эффект, в котором проявляются именно геометрические свойства пространства-времени, при выборе новой геометрии было бы поспешно сразу перейти к обсуждению и поиску эффектов на границах наблюдаемой Вселенной, поскольку проблемы возникают уже на галактическом масштабе.

Предлагая физический эффект, в котором проявляются именно геометрические свойства пространства-времени, следует обратить внимание на то обстоятельство, что статические сферически-симметричные решения

уравнений гравитационных полей как в случае геометрии Римана, так и в случае обобщающей ее геометрии Финслера не приводят к различиям в наблюдаемых результатах. Эффектом пригодным для таких исследований, могли бы быть гравитационные волны (ГВ) (в достаточно общем смысле), существование которых, допускаемое в ОТО, косвенно подтверждается наблюдаемым изменением орбитального периода некоторых двойных звездных систем. При различных геометриях пространство-времени ГВ обладали бы различными свойствами. Но, хотя известен целый ряд физических эффектов, которые можно было бы использовать для исследования этих свойств, проблема наблюдения ГВ не решена до сих пор. Это связано с чрезвычайной малостью величины возмущения, вносимого ГВ в любой из возможных физических эффектов уже в первом порядке. Однако то, что речь идет именно о волнах, позволяет использовать резонансные явления, которые могут проявляться не в первом порядке теории возмущений, как предлагалось в некоторых подходах до сих пор, но и в нулевом.

Результаты астрофизических наблюдений, о которых идет речь, представляют собой следующее. В галактическом масштабе измерены кривые вращения галактик, т. е. зависимости орбитальных скоростей вращения звезд от расстояния до центра галактики. В масштабе метagalактики известен также релятивистический эффект гравитационного линзирования на кластерах галактик, подтверждавший основную идею Эйнштейна о связи метрики и гравитации, но количественно превышавший предсказания ОТО в разы. Установлено также наличие ускорения процесса расширения Вселенной, влекущее представление о темной энергии.

Обзор ситуации, складывающейся в этой связи в теории, приведен в [8]. В связи со сказанным здесь краткой сводкой результатов и идей, касающихся явлений, имеющих галактический масштаб. Для иллюстрации приведем рисунки из работы [5] (см. Рис. 1). Экспериментальные точки, полученные

при измерении орбитальных скоростей v звезд спиральных галактик в зависимости от расстояния R до центра галактик, описываются эмпирической зависимостью следующего вида [9].

$$v^2 = \frac{\beta^* c^2 N^*}{R} + \frac{\gamma^* c^2 N^* R}{2} + \frac{\gamma_0 c^2 R}{2}, \quad (3.3.1)$$

Где c - скорости света, N^* - число звезд в галактике (обычно порядок 10^{11}), β^* - для Солнца имеет значение $\beta^* = \frac{M_S G}{c^2} = 1,48 * 10^5 \text{ см}$ (M_S - масса Солнца, G - гравитационная постоянная), γ^* и γ_0 - универсальные параметры со значениями $\gamma^* = 5,42 * 10^{-41} \text{ см}^{-1}$, $\gamma_0 = 3,06 * 10^{-30} \text{ см}^{-1}$.

Стремление обобщит ОТО на случай анизотропного пространства-времени, где, в частности, скорость света не является постоянной и зависит от направления, было реализовано, где теория строится на базе Финслеровой геометрии. Метрика в Финслеровой геометрии зависит не только от координаты точки (x^α) , так в Римановой, но и от некоторого касательного вектора в ней

$$x^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt} \quad t - \text{параметр, обычно представляются в виде:}$$

$$g_{\mu\nu}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^\mu \partial \dot{x}^\nu}, \quad (3.3.2)$$

Где $F(x, \dot{x})$ - достаточно гладкая, скалярная, однородная первого порядка положительная функция с определителем

$$\det \frac{\partial^2 F^2(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^\mu \partial \dot{x}^\nu} \neq 0.$$

Одним из важных результатов, являются то что, аналоги уравнения Эйнштейна в Финслеровом случае (для разнообразных метрик) имеют Шварцшильдовские решения. [11].

Несмотря на то, что за почти столетний период своего развития финслерова геометрия пока еще не продемонстрировала веских преимуществ над римановыми построениями в физике, она представляется сегодня достаточно перспективной. Эти ожидания во многом связаны с расширением наших представлений об одном из основных объектов многих геометрий – скалярном произведении с билинейной симметрической формы на полилинейную [4]. Естественным следствием такого обобщения оказывается необходимость перехода от принятого сегодня двухиндексного финслерова метрического тензора, зависящего как от точки, так и от направления, к его многоиндексному обобщению, зависящему лишь от точки.

Что интересно, эти же два мультиполя являются участниками еще одного практически невероятного, что бы быть просто случайным, явления. Речь идет об эффекте так называемой астрономической Оси Зла. Столь красочно названный феномен связан с совпадением направлений осей октуполя, квадруполя и диполя в разложенной по гармоникам анизотропии реликтового излучения с направлением движения Солнечной системы относительно окружающих галактик. Но если в отношении диполя его кинематическое происхождение не вызывает сомнений и связано именно с движением наблюдателя, то вот выстроившиеся под практически тоже самое направление оси квадруполя и октуполя – явились полной неожиданностью для астрофизиков. Подсчитано, что случайным такое совпадение может оказаться лишь с вероятностью менее $1/10000$. Результаты перечисленных выше наблюдений заставляют задуматься, а не являются ли они свидетельствами того, что геометрия нашего реального пространства-времени имеет более сложный характер, чем принятая сегодня псевдориманова?

И геометрия классической физики связанная с пространством Галилея, и геометрия релятивистской физики Минковского являются частными случаями более общих и более интересных финслеровых геометрий связанных с метрическими функциями Чернова и Бервальда-Моора.

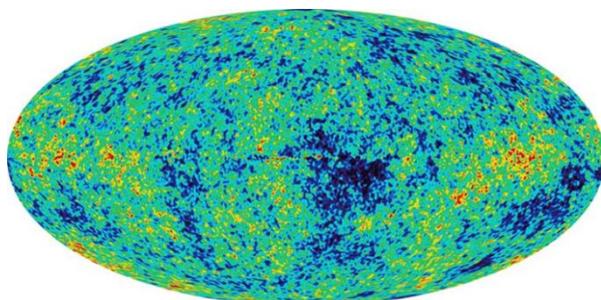
Особенно удивительными свойствами обладает последняя геометрия. Группы ее внутренних непрерывных симметрий включают в себя не только группы Лоренца и Пуанкаре, но и еще ряд непрерывных групп, отсутствующих в евклидовых и псевдоевклидовых пространствах. В результате, если пытаться строить физические интерпретации пространства с метрикой Бервальда-Моора, последнее оказывается подозрительно похожим на окружающий нас реальный мир, что в принципе и не удивительно, так как всегда находятся области параметров, в которых вытекающие из этой геометрии законы сохранения становятся бесконечно близкими либо классической, либо релятивистской физике. Возникает закономерный вопрос, а не может ли так случиться, что именно геометрия Бервальда-Моора наиболее адекватно описывает окружающую нас реальность, а геометрии Галилея, Минковского и Чернова – лишь достаточно хорошие ее приближения? С целью ответа на данный вопрос в предлагаемом докладе рассматриваются некоторые практические следствия, вытекающие из предположения о финслеровой природе пространства-времени применительно к ряду космологических явлений. В частности показано, что в пространстве-времени с метрикой Бервальда-Моора реликтовое излучение должно быть существенно анизотропным и иметь додекаэдрическую структуру. Кроме того, некоторые галактики, находящиеся на границе видимой наблюдателем части вселенной, существуют как бы в ускоренном темпе времени и похожи на квазары, излучая во много раз более интенсивно, чем более близкие галактики, а также ускоренными темпами меняющими свою яркость и подвижными до такой степени, что перемещаются как бы со скоростями больше скорости света. Кроме того, если рассматривать всю совокупную картину движений таких галактик-квазаров на небосводе – она оказывается не хаотической, а коррелирующей с упоминавшийся выше додекаэдрической структурой анизотропии реликтового излучения, образуя подобие гигантских межгалактических течений с четырнадцатью особыми точками небосвода из которых выделяются две пары по четыре. Если

подобные эффекты будут надежным образом зафиксированы в астрономических наблюдениях – гипотеза финслеровой природы реального пространства-времени получит серьезное подтверждение и наоборот, если наблюдения не соответствуют высказанным прогнозам, для использования геометрии Бервальда-Моора в качестве фундаментальной нет особых оснований.

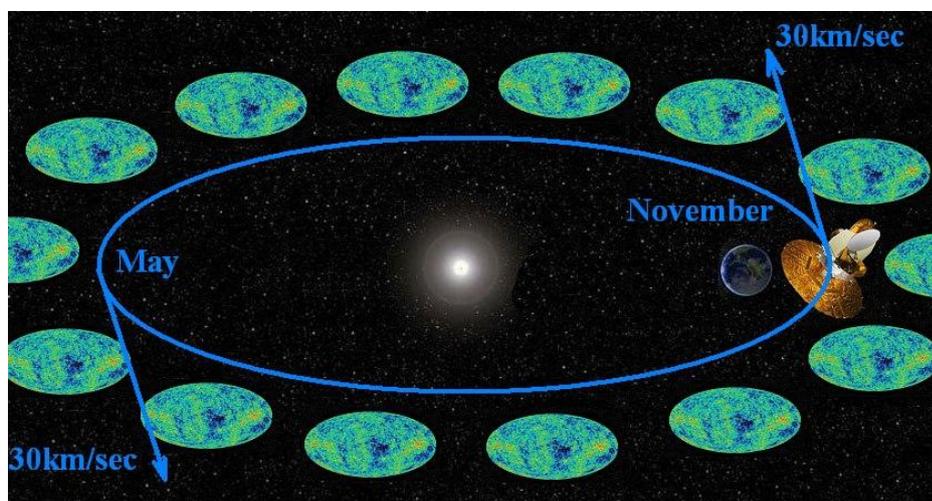
Следует отметить, что ряд астрофизических наблюдений, в частности обработанных в статьях группы Ж.П.Луминэ могут оказаться как раз из разряда подтверждающих высказанную выше гипотезу. Впрочем, для однозначных выводов имеющихся данных пока, все же, явно не достаточно.

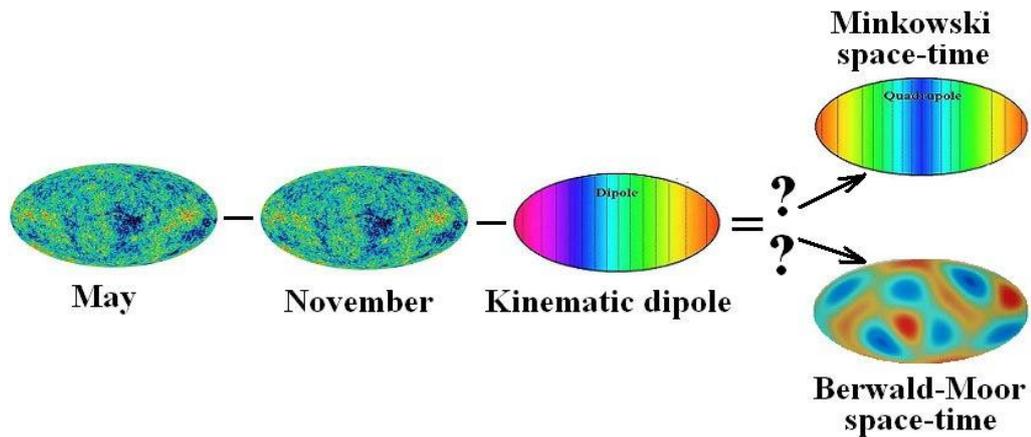
Одним из фундаментальных физических следствий геометрии Минковского, как известно, являются преобразования Лоренца и связанный с ними Доплер-эффект. При замене обычной квадратичной геометрии финслеровой с метрикой Бервальда-Моора четвертого порядка, имеющиеся в той непрерывные симметрии, приводят к иным преобразованиям, последствия которых, однако, достаточно близки к последствиям преобразований Лоренца. В частности, эффект Доплера в таком пространстве-времени при рассмотрении всех направлений приводит в первом приближении к дипольному распределению амплитуды и частоты сигнала, достаточно хорошо совпадающему с аналогичным эффектом в пространстве Минковского. Однако учет величин второго и третьего порядков малости выявляет наличие квадрупольной и октупольной составляющих анизотропии. Причем оси симметрии всех трех мультиполей коррелируют между собой, а их взаимные направления зависят от направления движения наблюдателя. Недавно полученные спутником WMAP данные о реально наблюдаемой картине распределения анизотропии реликтового излучения демонстрируют аналогичный эффект, получивший звучное название "оси зла", так как его объяснение в рамках общепринятой римановой геометрии сталкивается со значительными трудностями. Однако, если предположить, что реальный Мир описывается квадратичной

геометрией только в некотором приближении, а на более высоком уровне точности более адекватной оказывается уже метрика четвертого порядка - многое становится на свои места.



Озвученное предположение допускает экспериментальную проверку. В частности, поскольку спутник WMAP вместе с орбитальным движением Земли периодически меняет направление и величину своей скорости относительно системы отсчета связанной с реликтовым излучением, то если причиной появления низших мультиполей является геометрия и движение наблюдателя, тогда должны наблюдаться годовые вариации их мощностей и фаз. Увидеть, так ли это - может позволить либо существующая база данных WMAP, пересчитанная с учетом высказанной гипотезы, либо результаты новых специальных наблюдений, которые могли бы быть включены в программу готовящегося к запуску спутника PLANK. Примерно такую же картину демонстрирует осредненное значение температуры реликтового излучения, зафиксированная американским спутником WMAP!





Следовательно, если допустить, что геометрия реального пространства-времени ближе к финслеровой метрике Бервальда-Моора, чем к метрике Минковского, то наблюдаемые в анизотропии реликтового излучения мультиполи с $l=2$ (квадруполь) и $l=4$ (октуполь) являются следствиями не первоначальных флуктуаций в момент Большого Взрыва, а всего-лишь результат, сопутствующий относительной скорости системы отсчета наблюдателя, правда не в римановом, а в финслеровом пространстве-времени. Тогда и озадачивавшая астрофизиков соосность мультиполей в картине реликтового излучения - получает естественное объяснение. Да и сами мультиполи также.

При этом следует отметить, что количество экстремумов в итоговой картине распределения энергии по небесной сфере наблюдателя меняется в зависимости от того, куда направлена его собственная скорость по отношению к выделенной системе координат Вселенной, связанной с осями симметрии ромбододекаэдра

ЗАКЛЮЧЕНИЯ

- В магистерской диссертации подробно изучены и сопоставлены различные геометрии Евклида, Римана, Лобачевского и Финслера;

- Целью данной работы исследования геометрические свойства пространство-времени, и соответствующую теорию. Кроме того какая геометрия больше подходит для описания пространства-времени в масштабах галактики. Более того, эти результаты могли бы иметь значение и для выбора направления дальнейших фундаментальных исследований. Так, если окажется, что в масштабах галактики приемлема геометрия Римана стандартной теории относительности, то в астрофизике либо возникает проблема обоснования выбора вариационного принципа при построении аксиоматической теории, либо сохраняется проблема темной материи, которая потребует решения в рамках теории элементарных частиц. В последнем случае появляется возможность появления и развития гравитационно-волновой астрономии. Если же окажется, что геометрия нуждается в модификации, в частности, следует перейти к геометрии Финслера, то в место указанных проблем придется более внимательно рассмотреть основы электродинамики, что может иметь многочисленные и далеко идущие последствия на всех уровнях рассмотрения от квантовой теории до космологии.

- Подробно рассмотрены связь геометрии с физикой;

- Исследован Финслерово обобщение теория относительности;

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. P. Finsler: *Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen*, Göttingen, 1918 (Dissertation).
2. Б.Риман Сочинения. М.-Л.: государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948, С. 291.
3. К. Каратеодори: *GesammeltemathematischeSchriften. Bd 2, Münch., [1925]*.
4. Pavlov D., Pavlov V., Ibadov R., About Finsler Extensions of Relativity Theory, The Second International Conference Problems of Cybernetics and Informatics Dedicated to the 50th Anniversary of the ICT in Azerbaijan, Volume II, p.44-47, September 10-12, 2008, Baku, Azerbaijan.
5. R. Ibadov, B. Kleihaus, J. Kunz and Y. Shnir, "New Regular Solutions with Axial Symmetry in Einstein-Yang-Mills Theory", Phys.Lett. B 609, 150 (2005).
6. Г.И.Гарасько Начала финслеровой геометрии для физиков- М.: Tetru,
7. Г.К. Корн, Т.К. Корн. Справочник по математике, «для научных работников и инженеров». М., Наука. 1984.
8. Г.С. Асанов, С.Ф.Пономаренко. Финслерово расслоение над пространством-временем, ассоциируемые калибровочные поля и связности. Кишнев «ШТИНЦА». 1989г
9. А.Э-А. Хатипов. Основы тензорного исчисления и Римановой геометрии. Изд. Самарканд. 1956 г.
10. R. Ibadov, B. Kleihaus, J. Kunz and M. Leissner "Properties of charged rotating electroweak sphaleron-antisphaleron systems ", Phys.Rev. D 82, 125037 (2010).
11. роаопр
12. Cartan, Elie (1933), "Sur les espaces de Finsler", C. R. Acad. Sci., Paris **1961**: 582–586.
13. H. Busemann and W. Feller, *KrümmungseigenschaftenkonvexerFlächen*, Acta Math.66 (1935), 1–47.

14. Х. Рунд *Дифференциальная геометрия финслеровых пространств*, — М.: «Наука», 1981.
15. Minkowski, Hermann (1908/9), "Raum und Zeit", *hysikalischeZeitschrift***10**: 75–88 *Wikisource translation: Space and Time*.
16. Albert Einstein Die Feldgleichungen der Gravitation, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin: 844-847. (November 25, 1915).
17. Kaluza, Theodor (1921). "Zum Unitätsproblem in der Physik". *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. (Math. Phys.)* **1921**: 966–972.
18. Klein, Oskar (1926). "Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie". *Zeitschrift für Physik* **A37** (12): 895–906. *Bibcode 1926 ZPhy...37..895K*.
19. Z. Shen *Lectures on Finsler Geometry*, — World Scientific Publishers, 2001. *ISBN 981-02-4531-9*.
20. Гильберт Д., "Основания геометрии", пер. с нем., М.- Л., 1948;
21. Погорелов А. В., "Основания геометрии", 3 изд., М., 1968;
22. Бахман Ф., "Построение геометрии на основе понятия симметрии", пер. с нем., М., 1969.
23. Л. Д. Ландау и е. М. Лифшиц, "Теория поля" , том 2 Москва «наука» гл. ред. физико-математической литературы 1988
24. Богословский Г.Ю. *Финслерова геометрия и теория относительности*. www.hyper-complex.ru
25. D. G. Pavlov, Gh. Atanasiu, V. Balan (eds.) *Space-Time Structure. Algebra and Geometry* Moscow, Lilia-Print, 2007. -528 pp.
26. 2021. R. Ibadov, B. Kleihaus, J. Kunz, M. Wirschins, "New Black Hole Solutions with Axial Symmetry in Einstein-Yang-Mills Theory", *Phys.Lett. B* 627, 180 (2005).

27. R. Ibadov, J. Kunz, New Black Hole Solutions with Axial Symmetry in Einstein-Yang-Mills Theory, The International Scientific Conference Problems of Cybernetics and Informatics, October 24-26, 2006, 54 Baku, Azerbaijan, V.1, p.43
<http://science.az/cyber/pci2006/en/1.htm>.

28. R. Ibadov, B. Kleihaus, J. Kunz, and U. Neemann, Gravitating Dyons with Large Electric Charge, Phys. Lett. B 659, 421 (2008).

29. R. Ibadov, B. Kleihaus, J. Kunz and U. Neemann, New branches of electrically charged Einstein-Yang-Mills-Higgs solutions, Grav. Cosmol. 14, 28 (2008).

30. Internet: www.ziyonet.uz и

www.hyper-complex.ru

<http://hypercomplex.xpsweb.com/articles/452/ru/pdf/otchet.pdf>

<http://hypercomplex.xpsweb.com/articles/522/ru/pdf/otchet-3.pdf>

<http://www.polynumbers.ru/section.php?lang=ru&genre=75>

<http://hypercomplex.xpsweb.com/page.php?lang=ru&id=487>